Математические структуры и моделирование
2020. № 2(54). С. 4–23

УДК 530.145
DOI 10.24147/2222-8772.2020.2.4-23

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА: I. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Рассматривается алгебраическая формулировка квантовой теории с двоичной структурой.

Ключевые слова: спинорная структура, конформная группа, гильбертово пространство, спектр материи.

1. Введение

Алгебраическая формулировка квантовой теории была впервые предложена П. Йорданом, Дж. фон Нейманом и Е. Вигнером [1, 2], а также И. Сигалом [3] (в терминах C^*-алгебр). Впоследствии алгебраические методы проникли в квантовую теорию поля и статистическую механику [4–6]. Поворотным пунктом в развитии алгебраической квантовой теории явился доклад Р. Хаага 1957 г. [7], в котором было впервые введено понятие алгебры локальных наблюдаемых $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. В основе аксиоматики Р. Хаага лежит принцип локальности и понятие локальной наблюдаемой — произвольной физической величины, допускающей измерение на опыте путём экспериментов в ограниченной области $\mathcal{O}$ пространства-времени[1]. Основной задачей локального алгебраического подхода является физически приемлемое описание «релятивистских квантовых объектов», в связи с чем предпринимались неоднократные попытки постулировать аксиому корпускулярной интерпретации. В локальной квантовой теории поиск критерия корпускулярной интерпретации исходит из общей трактовки частицы как «асимптотически стабильного центра локализации». Однако, как отмечают Р. Хааг и Д. Бухгольц [8], до сих пор не найден адекватный способ

[1]Существуют два варианта локального алгебраического подхода: конкретный (или *теория Хаага–Араки*), в котором локальные алгебры являются алгебрами фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{O})$ в некотором гильбертовом пространстве H, и абстрактный (или *теория Хаага–Кастлера*), в котором локальные алгебры являются абстрактными C^*-алгебрами $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Различие между этими двумя вариантами имеет значение лишь с конструктивной точки зрения. А именно может случиться, что алгебра наблюдаемых построена раньше, чем выбрано её физическое представление π, тогда предпочтительнее абстрактно-алгебраическая точка зрения (теория Хаага–Кастлера). Когда же физическое представление π зафиксировано, то абстрактные C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ можно считать «конкретными» алгебрами фон Неймана $\overline{\pi(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))}$ (локальные наблюдаемые, определённые в слабой операторной топологии физического представления).

математического выражения подобной концепции частицы[2].

Согласно аксиоме локализации, локальный алгебраический подход предполагает построение релятивистской квантовой механики (квантовой теории поля) на фоне классического пространства-времени, справедливого, как известно, лишь для описания макроявлений. Как следствие, в такой трактовке пространственно-временной континуум приобретает статус фундаментального уровня[3]. С другой стороны, существует точка зрения (получающая всё большее распространение), согласно которой классическое пространство-время и все явления макромира в совокупности являются производной (эмерджентной) конструкцией от микромира. Согласно этому взгляду (микромир $\rightarrow$ макромир), все классические концепции и представления неприемлемы на микроуровне (в том числе и понятие «частица»). Построение квантовой теории должно обходиться исключительно средствами её математического аппарата, без привлечения каких-либо классических аналогий. Очевидно, что исходным пунктом такого построения должна являться наиболее простая и фундаментальная математическая структура, каковой, вне всякого сомнения, является *двоичная (спинорная) структура*[4].

[2]Аналогичная ситуация имеет место быть для другой попытки корпускулярного описания. А именно, согласно одной распространённой точке зрения (кварковой модели), протон «состоит из» трёх кварков: два u-кварка и один d-кварк, которые «внутри» протона находятся в состоянии «асимптотической свободы», т. е. так называемого конфайнмента (удержания цвета). При этом суммарная масса кварков протона равна примерно 19 Мэв, т. е. в 50 раз меньше массы протона — 938 Мэв, в связи с чем возникает проблема «массового гэпа». Проблема адекватного математического описания конфайнмента выставлена Математическим институтом Клэя как одна из семи «задач тысячелетия» (см. www.claymath.org/millennium-problems).

[3]В 1955 г. Эйнштейн писал: «Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории» [9, с. 873].

[4]Кварковая модель, базирующаяся на теории представлений группы SU(3), является примером *троичной структуры*, и уже в силу одного этого не может рассматриваться в качестве фундаментальной (в отличие от группы SU(2), имеющей неприводимые представления *любой* степени, группа SU(3) не обладает таким свойством). По всей видимости, первым, кто подчеркнул фундаментальную значимость спинорной структуры, был Карл Фридрих фон Вайцзеккер [10]. Ur-гипотеза фон Вайцзеккера [11] (от немецкого Ur-Alternative=исходная альтернатива) представляет собой квантовую теорию двоичных альтернатив. Любая n-кратная логическая альтернатива (n — натуральное число) может быть редуцирована к конечному числу двоичных альтернатив. С другой стороны, гильбертовы пространства любых объектов могут быть представлены подпространством пространства тензорного произведения двумерных гильбертовых пространств: $\mathsf{H}_m \subseteq \mathsf{T}_n = \oplus_n \mathsf{H}_2$, $m \leqslant 2^n$. Рассмотрение наряду с двоичной альтернативой «ur» сопряжённой к ней альтернативы «anti-ur» приводит к группе $\mathrm{SU}(2,2)$ [11]. В свою очередь двоичные альтернативы можно рассматривать как биты информации. Иными словами, отсюда следует, что все физические объекты некоторым образом «сделаны» из информации (в духе «it from bit» Уилера). Оставим в стороне этот аспект Ur-гипотезы фон Вайцзеккера, поскольку такой взгляд приводит к широкому кругу метафизических спекуляций о связи материи и информации. Примечательно, что сам Уилер нигде не использует термин «it from bit». По всей видимости, этот термин был извлечён в качестве резюме из статьи Уилера [12], посвящённой памяти Германа Вейля.

В настоящей статье рассмотрена алгебраическая формулировка квантовой теории с двоичной структурой. Поскольку на фундаментальном уровне (микромир) все понятия и представления, основанные на классическом пространстве-времени, не имеют силы, то, как следствие, отпадает необходимость в постулировании аксиом локализации и корпускулярной интерпретации. Квантовая теория *per se* нелокальна, и нет «частиц» на микроуровне. На фундаментальном уровне, как нам известно, существует некая субстанция, которую можно назвать энергией или материей и которая имеет дискретный спектр состояний (спектр материи), зафиксированный на многочисленных ускорителях и публикуемый в ежегодно обновляемых справочниках (Particle Data Group). «Частицы» это по сути состояния спектра материи. В этом смысле нет «частиц», есть только спектр состояний. «Частица» — («щелчок» детектора, «пятно» на фотографии) — это способ, которым реализуется (актуализируется) то или иное состояние спектра материи. В данной статье (см. также [13–15]) чистые сепарабельные состояния спектра материи задаются циклическими векторами $\mathbb{K}$-гильбертова пространства. При этом спектр состояний генерируется C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$, состоящей из оператора энергии H и присоединённых к нему генераторов группы $\mathrm{SU}(2,2)$, посредством конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала.

2. C^*-алгебры наблюдаемых и конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала

В этом параграфе кратко рассмотрим основные определения, касающиеся теории C^*-алгебр (см. [4–6, 16]). Как известно, любая *квантовая система* характеризуется набором наблюдаемых данных, которые могут быть получены в результате соответствующего процесса измерения. Физические величины, получаемые в результате измерения, являются *наблюдаемыми* квантовой системы. Совокупность наблюдаемых образует алгебру $\mathfrak{A}$, в которой определена операция умножения наблюдаемых и заданы их линейные суперпозиции. В общем случае алгебра $\mathfrak{A}$ является ассоциативной некоммутативной C^*-алгеброй с единицей над полем комплексных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Далее, алгебра $\mathfrak{A}$ наделена операцией сопряжения, т. е. имеет место антилинейная инволюция $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ такая, что $(\mathfrak{a}^*)^* = \mathfrak{a}$ для любого элемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$. Норма $\|\cdot\|$ на алгебре $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом: для любых $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ справедливо неравенство $\|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\| \leqslant \|\mathfrak{a}\|\|\mathfrak{b}\|$, а также $\|\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a}\|^2$, т. е. $\|\mathfrak{a}^*\| = \|\mathfrak{a}\|$.

В случае n-уровневой квантовой системы алгебра $\mathfrak{A}$ может быть отождествлена с C^*-алгеброй $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ матриц. В этом случае $*$-операция совпадает с эрмитовым сопряжением $M^* = M^\dagger$ для любого элемента $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, а норма $\|M\|$ задаётся наибольшим собственным значением произведения $M^\dagger M$. В случае бесконечного числа степеней свободы C^*-алгебра является алгеброй $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ всех ограниченных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовым пространством H_∞ (H_∞ является банаховым пространством со счётной базой, всюду плотной в H_∞).

Явная связь между алгеброй $\mathfrak{A}$ и данными измерений задаётся понятием состояния ω, посредством которого ожидаемое значение $\omega(\mathfrak{a})$ наблюдаемой $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ может быть определено. Состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ является линейным отображением $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, которое положительно, т. е. $\omega(\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}) \geqslant 0$, $\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, и нормировано, $\omega(1_{\mathfrak{A}}) = 1$, где $1_{\mathfrak{A}}$ — единица алгебры $\mathfrak{A}$. Отображение ω непрерывно: $|\omega(\mathfrak{a})| \leqslant \|\mathfrak{a}\|$, $\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$. Следовательно, состояние ω есть положительный нормированный функционал над алгеброй $\mathfrak{A}$. Множество всех состояний алгебры $\mathfrak{A}$ будем обозначать $\Omega(\mathfrak{A})$. Величина $\omega(\mathfrak{a})$ при $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ понимается как *среднее значение* наблюдаемой $\mathfrak{a}$ в состоянии ω.

Общее определение состояния квантовой системы может быть дано в терминах нормированных матриц плотности на гильбертовом пространстве H_∞. Действительно, любая *матрица плотности* ρ определяет состояние ω_ρ на алгебре $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ посредством соотношения

$$\omega_\rho(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tr}\,[\rho\mathfrak{a}]\,, \quad \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}),$$

которое для чистых состояний, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, редуцируется к стандартному ожиданию $\omega_\rho(\mathfrak{a}) = \langle\psi|\mathfrak{a}|\psi\rangle$.

Множество $\Omega(\mathfrak{A})$ является *выпуклым*, т. е. для любых двух состояний ω_1, ω_2 и λ_1, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in \Omega(\mathfrak{A})$. Состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется *чистым*, если оно не может быть разложено в выпуклую сумму двух состояний, т. е. если разложение $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$, где $0 < \lambda < 1$, выполняется только для $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Чистые состояния есть экстремальные точки множества $\Omega(\mathfrak{A})$. Состояние ω, не являющееся чистым, называется *смешанным*.

Одним из важнейших аспектов теории C^*-алгебр является двойственность между состояниями и представлениями алгебры наблюдаемых. Связь между состояниями ω и неприводимыми представлениями π алгебр $\mathfrak{A}$ была впервые явно сформулирована И. Сигалом [3]. Каноническое соответствие $\omega \leftrightarrow \pi_\omega$ между состояниями и циклическими представлениями C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ задаётся конструкцией ГНС (Гельфанда–Наймарка–Сигала).

Теорема 1. (Конструкция ГНС [3, 17]) *Для любого состояния ω (положительного функционала) на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ можно определить циклическое представление π_ω алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве* H *с циклическим вектором $|\Phi\rangle$ так, что*

$$\omega(\mathfrak{a}) = \langle\Phi \mid \pi_\omega(\mathfrak{a}) \mid \Phi\rangle, \quad \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}.$$

Представление π_ω определено этими условиями однозначно с точностью до унитарной эквивалентности (соотносящей циклические векторы разных представлений).

Из теоремы следует, что понятие гильбертова пространства, ассоциированного с квантовой системой, не является первичным понятием, а представляет собой эмерджентную конструкцию, т. е. следствие структуры C^*-алгебры системы наблюдаемых. Далее, каждое состояние ω определяет некоторое представление алгебры $\mathfrak{A}$, причём результирующее представление π_ω неприводимо в точности тогда, когда состояние ω является чистым. Из теоремы также следует, что для любого ненулевого вектора $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}$ выражение

$$\omega_\Phi(\mathfrak{a}) = \frac{\langle \Phi \mid \pi_\omega(\mathfrak{a}) \mid \Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle}, \quad \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}, \tag{1}$$

определяет состояние $\omega_\Phi(\mathfrak{a})$ алгебры $\mathfrak{A}$, называемое *векторным состоянием*, ассоциированным с представлением π_ω и соответствующим циклическому[5] вектору $|\Phi\rangle$. Следовательно, множество $\Omega_p(\mathfrak{A})$ всех чистых состояний алгебры $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством всех векторных состояний, ассоциированных со всеми неприводимыми представлениями алгебры $\mathfrak{A}$.

3. Классификация состояний

Сепарабельные и запутанные (несепарабельные) состояния на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ являются главными объектами изучения данного параграфа. Исходным пунктом для построения таких состояний является понятие алгебраического двуделения операторной алгебры $\mathfrak{A}$ (см. [16]).

Определение 1. ***Алгебраическим двуделением*** C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ является любая пара $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ подалгебр $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$, таких что $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 1_{\mathfrak{A}}$.

Отсюда непосредственно вытекает понятие операторной локальности.

Определение 2. Элемент алгебры $\mathfrak{A}$ называется локальным относительно данного двуделения $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ или $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$-***локальным***, если этот элемент является произведением $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ элемента $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{A}_1$ и элемента $\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{A}_2$.

Следующее определение устанавливает важнейшие понятия сепарабельности и запутанности состояний на алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 3. Состояние ω на алгебре $\mathfrak{A}$ называется ***сепарабельным*** относительно двуделения $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, если ожидание $\omega(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$ любого локального оператора $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ может быть разложено в линейную выпуклую комбинацию произведений ожиданий:

$$\omega(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = \sum_k \lambda_k \omega_k^{(1)}(\mathfrak{a}_1)\omega_k^{(2)}(\mathfrak{a}_2), \quad \lambda_k \geqslant 0, \ \sum_k \lambda_k = 1, \tag{2}$$

где $\omega_k^{(1)}$ и $\omega_k^{(2)}$ — состояния на алгебре $\mathfrak{A}$. В противном случае состояние ω называется ***запутанным*** относительно двуделения $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$.

[5] Вектор $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}$ называется циклическим для представления π, если все векторы вида $\pi(\mathfrak{a})|\Phi\rangle$ (где $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$) образуют тотальное множество в H, т. е. такое множество, замыкание линейной оболочки которого всюду плотно в H. Представление π с циклическим вектором называется циклическим.

Данное определение сепарабельности может быть легко расширено на случай более чем двух делений. Например, для случая n-деления имеет место

$$\omega(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_n)=\sum_k\lambda_k\omega_k^{(1)}(\mathfrak{a}_1)\omega_k^{(2)}(\mathfrak{a}_2)\cdots\omega_k^{(n)}(\mathfrak{a}_n),\quad \lambda_k\geqslant 0,\ \sum_k\lambda_k=1.$$

В случае, когда состояние ω является чистым, условие сепарабельности (2) упрощается.

Определение 4. Чистые состояния ω на операторной алгебре $\mathfrak{A}$ являются сепарабельными относительно данного двуделения $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$, только и если только

$$\omega(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)=\omega(\mathfrak{a}_1)\omega(\mathfrak{a}_2)$$

для всех локальных операторов $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$.

Следовательно, чистые сепарабельные состояния являются состояниями произведений. С учётом конструкции ГНС (теорема 1) общая форма любого чистого сепарабельного состояния задаётся следующей теоремой.

Теорема 2. ([16]) *Пусть состояние ω на алгебре $\mathfrak{A}$ является сепарабельным относительно данного двуделения $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$. Тогда нормированное чистое состояние $|\psi\rangle$ в ГНС-гильбертовом пространстве H_ω является $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$-сепарабельным, если и только если*

$$|\psi\rangle=\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(2)})\,|\omega\rangle\,,$$

где $\mathfrak{b}^{(i)}\in\mathfrak{A}$, $i=1,2$, $\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(i)})$ — циклическое представление алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H_ω.

Очевидно, что для случая алгебраического n-деления чистое сепарабельное состояние имеет вид

$$|\psi\rangle=\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(2)})\cdots\pi_\omega(\mathfrak{b}^{(n)})\,|\omega\rangle\,.$$

4. Реализация операторной алгебры

В этом параграфе рассмотрим конкретную реализацию операторной алгебры $\mathfrak{A}$. Переход

$$\mathfrak{A}\Rightarrow\pi(\mathfrak{A})$$

от $\mathfrak{A}$ к конкретной алгебре $\pi(\mathfrak{A})$, где π — выбранное физическое представление алгебры наблюдаемых — иногда называют «одеванием» операторной алгебры. Следуя Гейзенбергу, будем считать, что на фундаментальном уровне основной наблюдаемой является ***энергия***, которой соответствует эрмитов оператор H. В качестве *фундаментальной симметрии*, позволяющей структурировать энергетические уровни спектра состояний, выберем группу $\mathrm{SU}(2,2)$ (двулистная накрывающая конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$).

Теорема 3. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы* $\mathrm{SU}(2,2)$*, образующих с H общую систему собственных функций. Тогда множество Ω чистых состояний ω на алгебре $\mathfrak{A}$ соответствует системе циклических векторов $|\psi\rangle$ в ГНС-гильбертовом пространстве H_ω:*

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
|\psi_n\rangle & = & \pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(n)}\left|\omega\right\rangle, \\
|\psi_{n-1}\rangle & = & \pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(n-1)}\left|\omega\right\rangle, \\
 & \vdots & \\
|\psi_2\rangle & = & \pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\left|\omega\right\rangle, \\
|\psi_1\rangle & = & \pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\left|\omega\right\rangle, \\
|\psi_0\rangle & = & \left|\omega\right\rangle, \\
|\psi_1^*\rangle & = & \pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\left|\omega\right\rangle, \\
|\psi_2^*\rangle & = & \pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\left|\omega\right\rangle, \\
 & \vdots & \\
\left|\psi^*_{n-1}\right\rangle & = & \pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(n-1)}\left|\omega\right\rangle, \\
|\psi^*_n\rangle & = & \pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi^*_\omega(\mathfrak{h}^{(n)}\left|\omega\right\rangle, \\
 & \vdots &
\end{array}
\qquad (3)
$$

где $\mathfrak{h}^{(i)} \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(i)})$ — фундаментальное представление спинорной группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$.

Доказательство. Рассмотрим замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ (*алгебра наблюдаемых фон Неймана*) алгебры $\mathfrak{A}$ в σ-слабой операторной топологии[6]. И пусть генераторы комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{su}(2,2)$ являются самосопряжёнными операторами в H_∞, присоединёнными к алгебре наблюдаемых фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}}$, т. е. такими операторами, у которых все спектральные проекторы E_λ, а значит, и все ограниченные функции операторов принадлежат $\overline{\mathfrak{A}}$[7].

Двулистная накрывающая $\mathrm{SU}(2,2)$ конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ изоморфна спинорной группе

$$\mathbf{Spin}_+(2,4) = \{s \in \mathbb{C}_4 \mid N(s) = 1\}, \qquad (4)$$

где $\mathbb{C}_4$ — *алгебра Дирака*. С другой стороны, твисторы могут быть определены как «редуцированные спиноры» конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$. Общие спиноры

[6] Согласно теореме фон Неймана о бикоммутанте, $\overline{\mathfrak{A}}$ совпадает с повторным коммутантом $\mathfrak{A}^{cc}$ алгебры $\mathfrak{A}$ [5].

[7] Следует отметить, что уже на раннем этапе развития квантовой механики в основополагающей «работе трёх» [18] было показано, что оператор энергии H перестановочен со всеми операторами в H_∞, представляющими алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$ группы $\mathrm{SU}(2)$ (см. также [19, с. 138]). В силу изоморфизма $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2)$ [20, с. 28] (так называемый «унитарный трюк» Вейля) этот результат может быть продолжен на группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$. Поскольку операторы групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и оператор энергии H коммутируют между собой, то, как следствие, для этих операторов можно построить общую систему собственных функций.

группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ являются элементами минимального левого идеала *конформной алгебры* $C\!\ell_{2,4}$:

$$I_{2,4} = C\!\ell_{2,4} f_{2,4} = C\!\ell_{2,4}\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_{15})\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_{26}),$$

где $f_{2,4}$ — примитивный идемпотент алгебры $C\!\ell_{2,4}$. Редуцированные спиноры (твисторы) формулируются в рамках чётной подалгебры $C\!\ell^+_{2,4} \simeq C\!\ell_{4,1}$ (*алгебра де Ситтера*). Минимальный левый идеал алгебры $C\!\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$ определяется следующим выражением:

$$I_{4,1} = C\!\ell_{4,1} f_{4,1} = C\!\ell_{4,1}\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_0)\frac{1}{2}(1+i\mathbf{e}_{12}).$$

Следовательно, после редукции $I_{2,4} \to I_{4,1}$, генерируемой изоморфизмом $C\!\ell^+_{2,4} \simeq C\!\ell_{4,1}$[8], мы видим, что твисторы $\mathbf{Z}^\alpha$ являются элементами идеала $I_{4,1}$, который приводит к группе $\mathrm{SU}(2,2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2,4) \in C\!\ell^+_{2,4}$.

Двулистная накрывающая $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ собственной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$ изоморфна спинорной группе

$$\mathbf{Spin}_+(1,3) = \{s \in \mathbb{C}_2 \mid N(s) = 1\}, \tag{5}$$

где $\mathbb{C}_2$ — *алгебра бикватернионов*. Группа (5) является подгруппой группы (4), $\mathbf{Spin}_+(1,3) \subset \mathbf{Spin}_+(2,4)$. Следовательно, $\mathbf{Spin}_+(2,4)/\mathbf{Spin}_+(1,3)$-редукция[9] представления $\mathfrak{B}$ группы $\mathbf{Spin}_+(2,4)$ по подгруппе $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ приводит к разложению $\mathfrak{B}$ в ортогональную сумму неприводимых представлений π_i подгруппы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$:

$$\mathfrak{B} = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \oplus \pi_i \oplus \ldots$$

Система неприводимых представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1,3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ представлена на рис. 1. Рассмотрим произвольное собственное подпространство E_λ оператора энергии H. Как уже отмечалось выше, операторы X_l, Y_l комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и оператор энергии H коммутируют между собой, следовательно, для этих операторов можно построить общую систему собственных функций. Это значит, что подпространство E_λ инвариантно относительно операторов X_l, Y_l (более того, операторы X_l, Y_l можно рассматривать *только* на E_λ). Это позволяет отождествить подпространства E_λ с симметрическими пространствами $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ зацепляющихся представлений $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ группы

[8] Алгебра $C\!\ell_{2,4}$ имеет тип $p-q \equiv 6 \pmod 8$, следовательно, в силу общего изоморфизма $C\!\ell^+_{p,q} \simeq C\!\ell_{q,p-1}$ (см. [21]) имеем $C\!\ell^+_{2,4} \simeq C\!\ell_{4,1}$, где $C\!\ell_{4,1}$ — алгебра де Ситтера, ассоциированная с пространством $\mathbb{R}^{4,1}$. В свою очередь, алгебра $C\!\ell_{4,1}$ имеет тип $p-q \equiv 3 \pmod 8$, т. е. обладает комплексным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ и, следовательно, имеет место изоморфизм $C\!\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$, где $\mathbb{C}_4$ — алгебра Дирака.

[9] Более детально $\mathbf{Spin}_+(2,4)/\mathbf{Spin}_+(1,3)$-редукция (редукция, основанная на разложении Картана, см. [22–24]) разбивается на две последовательные редукции $\mathrm{SU}(2,2)/\mathrm{Sp}(1,1)$ и $\mathrm{Sp}(1,1)/\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, где $\mathrm{Sp}(1,1)$ — двулистная накрывающая группы де Ситтера. Здесь мы ограничиваемся конечномерными представлениями. Более общий случай разложения бесконечномерных представлений локально компактных групп рассмотрен Наймарком [25].

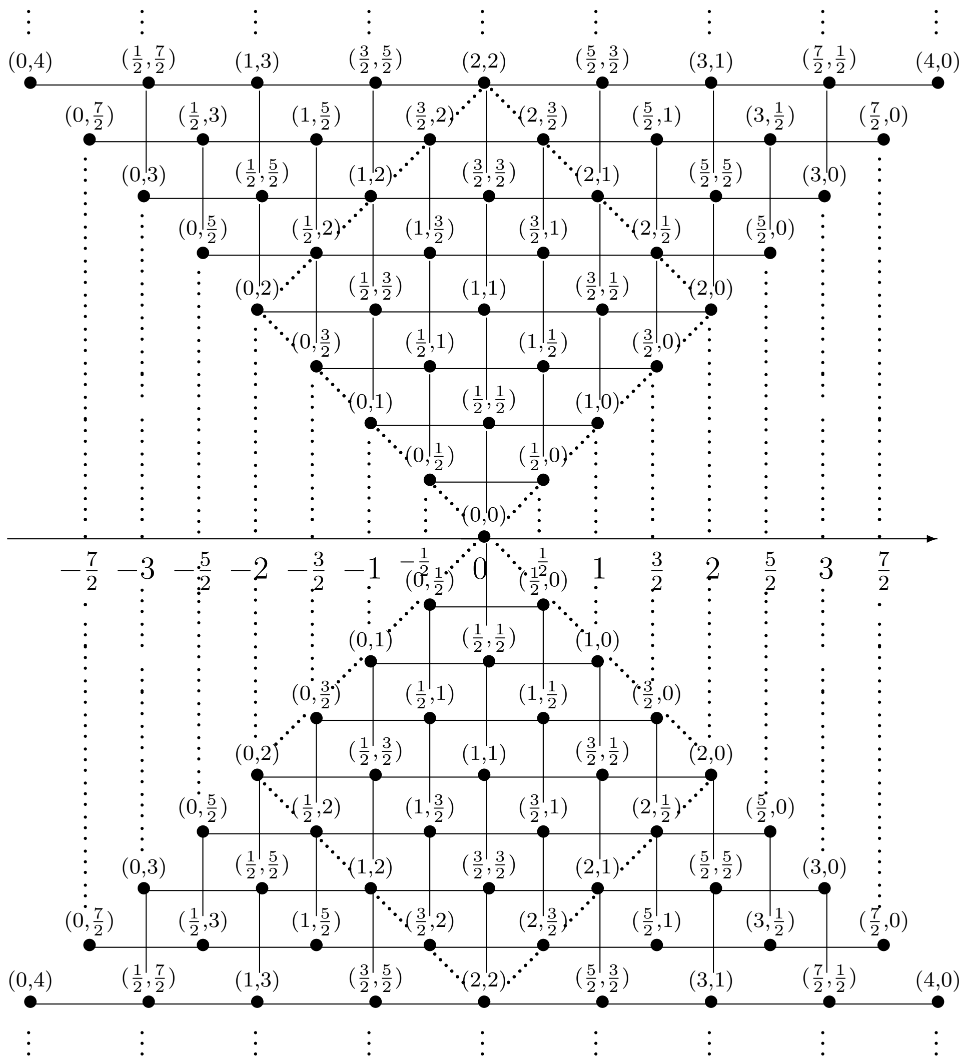


Рис. 1. Система зацепляющихся (циклических) представлений $(l,\dot{l})$ группы Лоренца, где $l=k/2$, $\dot{l}=r/2$. На оси отмечены значения спиновых линий.

Лоренца и тем самым получить конкретную реализацию («одевание») операторной алгебры $\pi(\mathfrak{A}) \Rightarrow \pi(H)$, где циклическое представление $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$. Структура представления $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ определяется следующим тензорным произведением:

$$\boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},\frac{r}{2}} = \boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},0} \otimes \boldsymbol{\tau}_{0,\frac{r}{2}} \simeq \underbrace{\boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0} \otimes \boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0}}_{k\ \text{раз}} \bigotimes \underbrace{\boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}}}_{r\ \text{раз}}, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0}(\boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}})$ — фундаментальное представление группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Тогда отображение

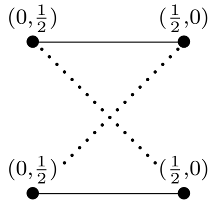
$$\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(1)})\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(2)})\cdots\pi_\omega(\mathfrak{h}^{(n)}\left|\omega\right\rangle \longmapsto \boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},0} \otimes \boldsymbol{\tau}_{0,\frac{r}{2}}\left|\omega\right\rangle$$

задаёт систему циклических векторов $|\psi\rangle$ в ГНС-гильбертовом пространстве H_ω, при этом $|\psi_0\rangle = \boldsymbol{\tau}_{0,0}\left|\omega\right\rangle$, где $\boldsymbol{\tau}_{0,0}$ — единичное представление группы

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$. Следовательно, чистые сепарабельные состояния ω операторной алгебры $\pi(\mathfrak{A})$ (оператора энергии H) соответствуют циклическим векторам (3) в H_ω. ■

Замечание 1. В рамках двоичной структуры, реализуемой неприводимыми представлениями спинорной группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, имеем чистые сепарабельные состояния произвольного спина (см. рис. 1). Состояния полуцелого спина образуют ***фермионные линии*** $1/2$, $3/2$, ... (соответственно, дуальные фермионные линии $-1/2$, $-3/2$, ...). Состояния целого спина образуют ***бозонные линии*** 0, 1, 2, ... (соответственно, дуальные бозонные линии -1, -2, ...). При этом фермионным линиям соответствуют циклические векторы $\boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},0}\otimes\boldsymbol{\tau}_{0,\frac{r}{2}}\,|\omega\rangle$ с нечётным числом сомножителей $\boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0}$ $(\boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}})$ в тензорном произведении, бозонным линиям соответствуют циклические векторы с чётным тензорным произведением. Следовательно, здесь естественным образом возникает $\mathbb{Z}_2$-градуировка. Далее, с каждым циклическим вектором ассоциирована алгебра Клиффорда. В случае числового поля $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$-градуировка приводит к супергруппе $G(\mathbb{C}_n,\gamma,\circlearrowleft)$, реализующей периодичность Картана–Ботта для алгебр $\mathbb{C}_n$, где циклическое действие супергруппы задаётся группой Брауэра–Уолла $BW_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_2$ (более подробно см. [26, 27]).

Простейшие фермионные состояния спина $1/2$ конуса представлений (см. рис. 1) образуют следующий «квадруплет»:



Поскольку эти состояния образованы фундаментальными представлениями $\boldsymbol{\tau}_{\frac{1}{2},0}$ $(\boldsymbol{\tau}_{0,\frac{1}{2}})$, то естественно предположить, что они соответствуют электрону, но не как частице[10].

[10]Ю. Румер и А. Фет в книге [19] пишут: «До сих пор мы считали, что *одна и та же частица* — например, электрон — может находиться в двух спиновых состояниях со спином $+1/2$ и $-1/2$. Однако электрон без определённого значения спина никогда не наблюдается и представляет собой лишь абстрактное понятие. Ввиду этого вполне закономерна другая точка зрения: можно считать, что существуют *две* элементарные частицы — электрон со спином $+1/2$ и электрон со спином $-1/2$, в то время как «просто электрон» в природе не встречается. При этом можно сохранить понятие об электроне как о некоторой абстрактной частице, энергия которой в магнитном поле всегда расщепляется на два возможных значения» [19, с. 161–162]. Далее у Дирака находим: «В квантовой теории, однако, возможны скачкообразные переходы, так что если электрон первоначально находился в состоянии с положительной кинетической энергией, то он может перейти в состояние с отрицательной кинетической энергией» [28, с. 358]. Таким образом, некая «абстрактная частица» может находиться в четырёх состояниях: как электрон в двух спиновых состояниях $+1/2$ или $-1/2$, и как позитрон в двух спиновых состояниях $+1/2$ или $-1/2$. На этом примере становится отчётливо ясно, что классическая концепция «частицы» является абсолютно абстрактным (чуждым) понятием на микроуровне. Электрон как частица — это фикция, существующая только в человеческом сознании. Нет «частиц», есть только состояния. Как отмечал Эрих Йоос: «There are no particles» (www.decoherence.de) см. также [29].

5. $\mathbb{K}$-гильбертово пространство

Квантовая механика может быть определена с использованием гильбертовых пространств над любой из трёх ассоциативных алгебр с делением: вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ и кватернионов $\mathbb{H}$. Р. Йордан, Дж. фон Нейман и Е. Вигнер [1] в исторически первой классификации алгебр наблюдаемых рассматривали вещественную, комплексную и кватернионную квантовые теории на равных основаниях. Однако в отличие от общепринятой комплексной версии вещественная и кватернионная версии квантовой механики сталкиваются с рядом «проблем» (отсутствие теоремы Стоуна, тензорное произведение двух кватернионных гильбертовых пространств не является кватернионным гильбертовым пространством). В [30] показано, что эти проблемы могут быть решены, если интерпретировать вещественную, комплексную и кватернионную квантовые теории как части некоторой единой структуры. Эта структура также известна как «троичный путь» Фримена Дайсона [31] (см. также математические «троицы» Арнольда [32]).

Согласно теореме Гурвица [33], существуют четыре нормированные алгебры с делением: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. В отличие от первых трёх алгебра октонионов $\mathbb{O}$ неассоциативна. Для квантовой механики важно, что каждая нормированная алгебра с делением является C^*-алгеброй, в которой определено вещественное линейное отображение

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{A}\\ x & \longmapsto & x^*,\end{array}$$

удовлетворяющее равенствам $(xy)^* = y^*x^*$, $(x^*)^* = x$. Для $\mathbb{C}$ это отображение является *комплексным сопряжением*, для $\mathbb{R}$ — тождественным отображением. Для кватернионов $\mathbb{H}$ имеет место[11]

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})^* = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Во всех случаях ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$) справедливо тождество $xx^* = x^*x = \|x\|^2\mathbf{1}$.

Для трёх ассоциативных алгебр с делением ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$) структура C^*-алгебры позволяет определить гильбертово пространство. Пусть $\mathbb{K}$ — ассоциативная нормированная алгебра с делением. Тогда $\mathbb{K}$-***векторное пространство*** будет правым $\mathbb{K}$-модулем, если существует такая абелева группа V, снабжённая отображением

$$\begin{array}{ccc}V \times \mathbb{K} & \longrightarrow & V\\ (v, X) & \longmapsto & vx,\end{array}$$

удовлетворяющим условиям

$$(v + w)(x) = vx + wx, \quad v(x + y) = vx + vy, \quad (vx)y = v(xy).$$

[11] Аналогично, для октонионов $\mathbb{O}$ $*$-операция задаётся выражением

$$(a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_7\mathbf{e}_7)^* = a_0\mathbf{1} - a_1\mathbf{e}_1 - \ldots - a_7\mathbf{e}_7.$$

При этом отображение $T: V \to V'$ между $\mathbb{K}$-векторными пространствами является $\mathbb{K}$-***линейным***, если

$$T(vx + wy) = T(v)x + T(w)y$$

для всех $v, w \in V$ и $x, y \in \mathbb{K}$. Далее ***внутреннее произведение*** на $\mathbb{K}$-векторном пространстве определяется отображением

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle v \mid w \rangle, \end{array}$$

которое $\mathbb{K}$-линейно по второму аргументу и удовлетворяет равенству $\langle v \mid w \rangle = \langle w \mid v \rangle^*$ для всех $v, w \in V$, а также является ***положительно-определённым***: $(v, v) \geqslant 0$. Как обычно, внутреннее произведение определяет норму $\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$, которая переводит векторное пространство в полное метрическое пространство. Тогда $\mathbb{K}$-векторное пространство с внутренним произведением является $\mathbb{K}$-***гильбертовым пространством***.

Теорема 4. *Пусть C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы* $\mathrm{SU}(2,2)$*, образующих с H общую систему собственных функций. И пусть множество чистых сепарабельных состояний ω на алгебре $\mathfrak{A}$ соответствует системе циклических векторов $|\psi\rangle$ в ГНС-гильбертовом пространстве H_ω. Тогда $\mathbb{K}$-линейная структура ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) переводит H_ω в физическое $\mathbb{K}$-гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{K})$, в котором выделяются три базовых сектора:*
1) Сектор заряженных состояний $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{C})$.
2) Сектор нейтральных состояний $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{H})$.
3) Сектор истинно нейтральных состояний $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Согласно теореме 3 чистое сепарабельное состояние ω операторной алгебры $\pi(\mathfrak{A})$ задаётся циклическим вектором $\boldsymbol{\tau}_{\frac{k}{2},0} \otimes \boldsymbol{\tau}_{0,\frac{r}{2}} |\omega\rangle$ в ГНС-гильбертовом пространстве H_ω. Представление (6) действует в симметрическом пространстве

$$\mathrm{Sym}_{(k,r)} = \underbrace{\mathrm{Sym}_{(1,0)} \otimes \mathrm{Sym}_{(1,0)} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}_{(1,0)}}_{k \text{ раз}} \bigotimes \underbrace{\mathrm{Sym}_{(0,1)} \otimes \mathrm{Sym}_{(0,1)} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}_{(0,1)}}_{r \text{ раз}}.$$

Векторами пространства $\mathrm{Sym}_{(k,r)}$ являются *симметрические спинтензоры*, получающиеся в результате операции симметризации из общих спинтензоров вида

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_r} = \sum \boldsymbol{s}^{\alpha_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_k} \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\dot{\alpha}_r},$$

которые, в свою очередь, являются векторами спинпространства

$$\mathbb{S}_{2^{k+r}} = \mathbb{S}_{2^k} \otimes \dot{\mathbb{S}}_{2^r} \simeq \underbrace{\mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_2}_{k \text{ раз}} \bigotimes \underbrace{\dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \cdots \otimes \dot{\mathbb{S}}_2}_{r \text{ раз}}.$$

Далее, спинпространство $\mathbb{S}_{2^{n/2}}$ является минимальным левым идеалом $I_{p,q}$ алгебры Клиффорда $C\!\ell_{p,q}$[12]:

$$\mathbb{S}_{2^{n/2}} = I_{p,q} = C\!\ell_{p,q} f_{p,q},$$

где $f_{p,q}$ — примитивный идемпотент алгебры $C\!\ell_{p,q}$, $n = p + q$. Алгебры Клиффорда $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ подразделяются на восемь различных типов со следующей структурой колец.

I. Центрально-простые алгебры.

1 Два типа $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ с вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$.

2 Два типа $p - q \equiv 3, 7 \pmod 8$ с комплексным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$.

3 Два типа $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$ с кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$.

II. Полупростые алгебры.

4 Тип $p - q \equiv 1 \pmod 8$ с двойным вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$.

5 Тип $p - q \equiv 5 \pmod 8$ с двойным кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$.

Соответственно, с каждым циклическим вектором $|\psi\rangle$ пространства H_ω, в зависимости от тензорной размерности представления $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$, ассоциирована $\mathbb{K}$- или $\mathbb{K}\oplus\mathbb{K}$-линейная структура[13]. Наличие $\mathbb{K}$-линейной структуры переводит ГНС-гильбертово пространство H_ω в $\mathbb{K}$-гильбертово пространство[14].

---

[12]Это определение следует из алгебраической теории Шевалле [34]. В силу теоремы Веддербарна–Артина для алгебры Клиффорда $C\!\ell_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ имеет место изоморфизм $C\!\ell_{p,q} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) \simeq \mathrm{Mat}_{2^m}(\mathbb{K})$, где $m = \frac{p+q}{2}$, $I_{p,q} = C\!\ell_{p,q} f$ — минимальный левый идеал алгебры $C\!\ell_{p,q}$, а $\mathbb{K} = f C\!\ell_{p,q} f$ — кольцо деления для $C\!\ell_{p,q}$. Тогда, если $C\!\ell_{p,q}$ является простой алгеброй, то отображение $C\!\ell_{p,q} \overset{\gamma}{\longrightarrow} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{S})$, $u \longrightarrow \gamma(u)$, $\gamma(u)\psi = u\psi$ даёт неприводимое представление алгебры $C\!\ell_{p,q}$ в спинпространстве $\mathbb{S}_{2^m}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = C\!\ell_{p,q} f$, где $\psi \in \mathbb{S}_{2^m}$, $m = \frac{p+q}{2}$. С другой стороны, если $C\!\ell_{p,q}$ является полупростой алгеброй, то отображение $C\!\ell_{p,q} \overset{\gamma}{\longrightarrow} \mathrm{End}_{\mathbb{K}\oplus\hat{\mathbb{K}}}(\mathbb{S} \oplus \hat{\mathbb{S}})$, $u \longrightarrow \gamma(u)$, $\gamma(u)\psi = u\psi$ даёт приводимое представление алгебры $C\!\ell_{p,q}$ в двойном спинпространстве $\mathbb{S}\oplus\hat{\mathbb{S}}$, где $\hat{\mathbb{S}} = \{\hat{\psi} | \psi \in \mathbb{S}\}$. В этом случае идеал $\mathbb{S}\oplus\hat{\mathbb{S}}$ обладает правой $\mathbb{K} \oplus \hat{\mathbb{K}}$-линейной структурой, $\hat{\mathbb{K}} = \{\hat{\lambda} | \lambda \in \mathbb{K}\}$, и $\mathbb{K} \oplus \hat{\mathbb{K}}$ изоморфна двойному вещественному кольцу деления $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, если $p - q \equiv 1 \pmod 8$, или двойному кватернионному кольцу $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, если $p - q \equiv 5 \pmod 8$. Отображение γ определяет так называемое *леворегулярное* спинорное представление алгебры $C\!\ell(Q)$ в спинпространствах $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S} \oplus \hat{\mathbb{S}}$ соответственно.

[13]В случае нечётномерных алгебр $C\!\ell_{p,q}$ с кольцами $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ (типы $p - q \equiv 1, 5 \pmod 8$) существуют гомоморфные отображения $\epsilon : C\!\ell_{p,q} \to C\!\ell_{p,q-1}$, $\epsilon : C\!\ell_{p,q} \to C\!\ell_{q,p-1}$, где фактор-алгебры имеют вид ${}^\epsilon C\!\ell_{p,q-1} \simeq C\!\ell_{p,q}/\operatorname{Ker}\epsilon$, ${}^\epsilon C\!\ell_{q,p-1} \simeq C\!\ell_{p,q}/\operatorname{Ker}\epsilon$, $\operatorname{Ker}\epsilon = \left\{\mathcal{A}^1 - \omega\mathcal{A}^1\right\}$ — ядро гомоморфизма ϵ. В этом случае двойные идеалы $\mathbb{S} \oplus \hat{\mathbb{S}}$ можно заменить на фактор-идеалы ${}^\epsilon\mathbb{S}$ и перейти к фактор-представлениям ${}^\epsilon\pi$ (более подробно см. [35, 36]).

[14]Согласно теореме 3, пространство H_ω является эмерджентной конструкцией, т. е. следствием структуры C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых. Аналогично, $\mathbb{K}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K})$-линейная структура на H_ω не является наперёд заданной (как при обычном определении), а появляется эмерджентным образом в зависимости от тензорной структуры циклических векторов.

Поскольку с циклическим представлением $\pi \equiv \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$ ассоциировано спин-пространство $\mathbb{S}_{2^{k+r}}(\mathbb{K})$, то, как следствие, имеем три типа представлений: вещественные $\pi_{\mathbb{R}}$, комплексные $\pi_{\mathbb{C}}$ и кватернионные $\pi_{\mathbb{H}}$ циклические представления. При этом

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{R}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{R}): \ \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{H}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{H}): \ \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{R}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{H}): \ \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{H}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{R}): \ \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{R}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{C}): \ \mathbb{C} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{C}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{C}): \ \mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{H}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{C}): \ \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{C}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{C}): \ \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\mathbb{C}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{C}): \ \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\overline{\mathbb{C}}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{R}): \ \mathbb{C} \otimes \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}, \\
\mathbb{S}_{2^{n_1}}(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{S}_{2^{n_2}}(\overline{\mathbb{H}}) & \simeq & \mathbb{S}_{2^{n_1+n_2}}(\mathbb{R}): \ \mathbb{H} \otimes \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}.
\end{array} \tag{7}$$

Далее, с каждой комплексной алгеброй Клиффорда $\mathbb{C}_n = \mathbb{C} \otimes C\!\ell_{p,q}$ ассоциировано комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$, где $n = p + q$. Операция выделения вещественного подпространства $\mathbb{R}^{p,q}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ лежит в основе определения дискретного преобразования, известного в физике как ***зарядовое сопряжение*** C. Любой элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n$ можно однозначно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in C\!\ell_{p,q}$. Тогда отображение

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2$$

переводит алгебру $\mathbb{C}_n$ в себя взаимно однозначно и с сохранением операций сложения и умножения элементов $\mathcal{A}$; операция умножения элемента на число переходит в операцию умножения на комплексно-сопряжённое число. Любое отображение алгебры $\mathbb{C}_n$ на себя, обладающее перечисленными свойствами, называется *псевдоавтоморфизмом* [37]. Таким образом, выделение $\mathbb{R}^{p,q}$ в $\mathbb{C}^n$ индуцирует в $\mathbb{C}_n$ псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$. Спинорные представления псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ определяются теоремой 1 в [35] (см. также [36]).

Циклические векторы $|\psi\rangle$ $\mathbb{K}$-гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ с ассоциированной $\mathbb{C}$- или $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$-структурой задают ***заряженные состояния***. Соответствующие циклические представления $\pi_{\mathbb{C}}$ образуют верхнюю полу конуса представлений на рис. 1 (состояния с положительной энергией). Состояниям с отрицательной энергией (антиматерия) отвечает нижняя пола конуса представлений (соответствующие циклические векторы $|\psi\rangle$ имеют комплексно-сопряжённую $\overline{\mathbb{C}}$- или $\overline{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathbb{C}}$-структуру). Далее циклические векторы $|\psi\rangle$ с ассоциированной $\mathbb{H}$- или $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$-структурой задают ***нейтральные состояния***[15]. Соответствующие циклические представления $\pi_{\mathbb{H}}$ образуют верхнюю полу конуса кватернионных

[15]Поскольку вещественная спинорная структура появляется в результате редукции $\mathbb{C}_{2(k+r)} \rightarrow C\!\ell_{p,q}$, то, как следствие, зарядовое сопряжение C (псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$) для алгебр $C\!\ell_{p,q}$

представлений (аналогичному конусу на рис. 1). Как и в случае $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, состояния с отрицательной энергией (антисостояния) образуют нижнюю полу конуса, при этом циклические векторы $|\psi\rangle$ имеют сопряжённую $\overline{\mathbb{H}}$- или $\overline{\mathbb{H}} \oplus \overline{\mathbb{H}}$-структуру. В свою очередь циклические векторы $|\psi\rangle$ с ассоциированной $\mathbb{R}$- или $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$-структурой задают ***истинно нейтральные состояния***[16]. В случае $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ конус вещественных представлений $\pi_{\mathbb{R}}$ состоит из одной верхней полы.

Таким образом, физическое $\mathbb{K}$-гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ разбивается на три сектора: $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{C})$, $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{H})$ и $\mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{R})$. При этом ни в одном из трёх секторов число состояний не является фиксированным, согласно (7) состояния из одного сектора переходят в другой, образуя тем самым единую структуру (подобно «троичному пути» Дайсона[17]). В рамках единой троичной структуры каждый циклический вектор $|\psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}(\mathbb{K})$ обладает тензорной структурой (энергия, масса) и $\mathbb{K}$-линейной структурой (заряд), причём соединение этих двух структур приводит к динамическому изменению заряда и массы[18]. ■

Литература

1. Jordan P., Neumann J.v., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 29–64.
2. Neumann J.v. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I) // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1936. V. 1(43). P. 415–484.
3. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 930–948.
4. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М. : Мир, 1976. 423 с.
5. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987. 616 с.
6. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986. 304 с.

над вещественным числовым полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ (типы $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$)) редуцируется к *обмену состояние-антисостояние* C' (теорема 1 в [35], см. также [36, 38]).

[16] В случае истинно нейтральных состояний псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ редуцируется к тождественному преобразованию (состояние совпадает со своим антисостоянием).

[17] Согласно [30], «троичный путь» Дайсона [31] может быть реализован в рамках теории категорий. Пусть $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{C}}$ и $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{H}}$ — категории вещественных, комплексных и кватернионных гильбертовых пространств соответственно. Тогда существуют функторы, переводящие категории $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{R}}$ и $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{H}}$ в $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{C}}$. А также существуют функторы, отображающие $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{C}}$ и $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{H}}$ в $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{R}}$ (соответственно, $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{R}}$ и $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{C}}$ в $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{H}}$). Отсюда следует, что ни одна из трёх форм квантовой механики не является «привилегированной»: каждая содержит остальные две.

[18] Например, алгебраическим аналогом процесса аннигиляции электрон-позитронной пары $e^-e^+ \to \gamma$ является $\mathbb{C} \otimes \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$. Другим примером является *нейтринная теория света* де Бройля–Йордана [39, 40], согласно которой фотон есть композитное состояние из нейтрино и антинейтрино, т. е. согласно (7), имеем $\mathbb{H} \otimes \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \to \mathbb{R}$). Нейтринная теория света есть частный случай более общей *теории слияния* де Бройля [41]. Следует отметить, что этим вопросам в своё время уделили внимание Макс Борн [42] и Ральф Крониг [43] (см. также [44, 45]).

7. Haag R. Discussion des “axiomes” et des proprietés asymptotiques d’une theorie des champs locale particules composees / Les Problemes mathematiques de la theorie quantique des champs. Colloque CRNS. 1957. V. 83. P. 151–163.
8. Buchholz D., Haag R. The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3674–3697.
9. Эйнштейн А. Релятивистская теория несимметричного поля / Собрание научных трудов. Т. 2. Работы по теории относительности 1921–1955. М. : Наука, 1966. С. 849–873.
10. Weizsäcker C.F.v. Komplementarität und Logik I // Naturwiss. 1955. V. 42. P. 521–529.
11. Görnitz Th., Graudenz D, Weizsäcker C.F.v. Quantum Field Theory of Binary Alternatives // Int. J. Theor. Phys. 1992. V. 31. P. 1929–1959.
12. Wheeler J.A. Hermann Weyl and the Unity of Knowledge // American Scientist. 1986. V. 74. P. 366–375.
13. Варламов В.В. Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 5–23.
14. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 11–28.
15. Варламов В.В. О системе аксиом нелокальной квантовой теории // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4(44). С. 5–25.
16. Benatti F., Floreanini R. Entanglement in Algebraic Quantum Mechanics: Majorana fermion systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2016. V. 49. 305303.
17. Gelfand I., Neumark M. On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1943. V. 12(54). P. 197–217.
18. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zur Quantenmechanik. II // Zs. Phys. 1926. V. 35. P. 557–615.
19. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970. 400 с.
20. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton : Princeton University Press, 1986.
21. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805.
22. Varlamov V.V. Relativistic wavefunctions on the Poincaré group // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 5467–5476.
23. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 805–822.
24. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 163–201.
25. Наймарк М.А. Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы // Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962. 1964. С. 38–82.
26. Varlamov V.V. Cyclic structures of Cliffordian supergroups and particle representations of $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2014. V. 24. P. 849–874; arXiv: 1207.6162 [math-ph] (2012).
27. Варламов В.В. Спинорная структура и периодичность алгебр Клиффорда // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 4–20.
28. Дирак П. Принципы квантовой механики. М. : Наука, 1979. 480 с.
29. de Ronde C., Massri C. Against ‘Particle Metaphysics’ and ‘Collapses’ within the

Definition of Quantum Entanglement // arXiv: 1911.10990 [quant-ph] (2019).
30. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics // Found. Phys. 2012. V. 42. P. 819–855.
31. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics // J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 1199–1215.
32. Arnold V.I. Symplectization, complexification and mathematical trinities / The Arnoldfest: Proceedings of a Conference in Honor of V.I. Arnold for His Sixtieth Birthday. AMS, Providence, Rhode Island, 1999.
33. Hurwitz A. Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1898. 309–316.
34. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York: Columbia University Press, 1954.
35. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7. С. 114–127.
36. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168.
37. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. 1955. Т. 10. С. 3–110.
38. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
39. de Broglie L. Sur une analogue entre l'equation de Dirac et l'onde électromagnétique // Compt. Rend. 1932. 195. 536.
40. Jordan P. Zur Neutrinotheorie des Lichtes // Z. Phys. 1934. No. 97(7–8). P. 464–472.
41. de Broglie L. Theorie Generale des Particules a Spin (Methode de Fusion). Paris: Gauthier-Villars, 1943. Русский перевод: де Бройль Л. Избранные научные труды. Т. 3. Теория света на основе теории слияния. Частицы со спином. М. : Академия Медиаиндустрии, 2013. 524 с.
42. Born M., Nagendra Nath N.S. The neutrino theory of light // Proc. Indian. Acad. Sci. 1936. A3. 318.
43. Kronig R.L. On a relativistically invariant formulation of the neutrino theory of light // Physica. 1936. V. 3(10). P. 1120–1132.
44. Perkins W.A. Neutrino theory of photons // Phys. Rev. 1965. V. 137(5B). P. B1291–B1301.
45. Varlamov V.V. About Algebraic Foundations of Majorana-Oppenheimer Quantum Electrodynamics and de Broglie-Jordan Neutrino Theory of Light // Annales de la Fondation Louis de Broglie. 2002. V. 27. P. 273–286.

ALGEBRAIC QUANTUM MECHANICS: I. BASIC DEFINITIONS

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. An algebraic formulation of a quantum theory with a binary structure is considered.

Keywords: spinor structure, conformal group, Hilbert space, matter spectrum.

References

1. Jordan P., Neumann J.V., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. Math., 1934, vol. 35, pp. 29–64.
2. Neumann J.V. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1936, vol. 1(43), pp. 415–484.
3. Segal I. Postulates for general quantum mechanics. Ann. Math., 1947, vol. 48, pp. 930–948.
4. Emkh Zh. Algebraicheskie metody v statisticheskoi mekhanike i kvantovoi teorii polya. Moscow, Mir Publ., 1976, 423 p. (in Russian)
5. Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., and Todorov I.T. Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya. Moscow, Nauka Publ., 1987, 616 p. (in Russian)
6. Khoruzhii S.S. Vvedenie v algebraicheskuyu kvantovuyu teoriyu polya. Moscow, Nauka Publ., 1986, 304 p. (in Russian)
7. Haag R. Discussion des “axiomes” et des proprietés asymptotiques d’une theorie des champs locale particules composees. Les Problemes mathematiques de la theorie quantique des champs, Colloque CRNS, 1957, vol. 83, pp. 151–163.
8. Buchholz D. and Haag R. The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics. J. Math. Phys., 2000, vol. 41, pp. 3674–3697.
9. Einshtein A. Relyativistskaya teoriya nesimmetrichnogo polya. Sobranie nauchnykh trudov, vol. 2, Raboty po teorii otnositel’nosti 1921–1955, Moscow, Nauka Publ., 1966, pp. 849–873. (in Russian)
10. Weizsäcker C.F.V. Komplementarität und Logik I. Naturwiss, 1955, vol. 42, pp. 521–529.
11. Görnitz Th., Graudenz D, and Weizsäcker C.F.V. Quantum Field Theory of Binary Alternatives. Int. J. Theor. Phys., 1992, vol. 31, pp. 1929–1959.
12. Wheeler J.A. Hermann Weyl and the Unity of Knowledge. American Scientist, 1986, vol. 74, pp. 366–375.
13. Varlamov V.V. Spektr materii Geizenberga v abstraktno-algebraicheskom podkhode. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2016, no. 3(39), pp. 5–23. (in Russian)
14. Varlamov V.V. Kvantovanie massy i gruppa Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 2(42), pp. 11–28. (in Russian)

15. Varlamov V.V. O sisteme aksiom nelokal'noi kvantovoi teorii. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 4(44), pp. 5–25. (in Russian)
16. Benatti F. and Floreanini R. Entanglement in Algebraic Quantum Mechanics: Majorana fermion systems. J. Phys. A: Math. Theor., 2016, vol. 49, 305303.
17. Gelfand I. and Neumark M. On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1943, vol. 12(54), pp. 197–217.
18. Born M., Heisenberg W., and Jordan P. Zur Quantenmechanik. II. Zs. Phys., 1926, vol. 35, pp. 557–615.
19. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Teoriya unitarnoi simmetrii. Moscow, Nauka Publ., 1970, 400 p. (in Russian)
20. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton, Princeton University Press, 1986.
21. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras. Int. J. Theor. Phys., 2001, vol. 40, pp. 769–805.
22. Varlamov V.V. Relativistic wavefunctions on the Poincaré group. J. Phys. A: Math. Gen., 2004, vol. 37, pp. 5467–5476.
23. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group. J. Phys. A: Math. Gen., 2006, vol. 39, pp. 805–822.
24. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group. J. Phys. A: Math. Theor., 2007, vol. 40, pp. 163–201.
25. Naimark M.A. Beskonechnomernye predstavleniya grupp i smezhnye voprosy. Itogi nauki, Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir., 1962, 1964, pp. 38–82. (in Russian)
26. Varlamov V.V. Cyclic structures of Cliffordian supergroups and particle representations of $\mathbf{Spin}_+(1,3)$. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2014, vol. 24, pp. 849–874; arXiv: 1207.6162 [math-ph] (2012).
27. Varlamov V.V. Spinornaya struktura i periodichnost' algebr Klifforda. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2015, no. 3(35), pp. 4–20. (in Russian)
28. Dirak P. Printsipy kvantovoi mekhaniki. Moscow, Nauka Publ., 1979, 480 p. (in Russian)
29. de Ronde C. and Massri C. Against 'Particle Metaphysics' and 'Collapses' within the Definition of Quantum Entanglement. arXiv: 1911.10990 [quant-ph] (2019).
30. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics. Found. Phys., 2012, vol. 42, pp. 819–855.
31. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, pp. 1199–1215.
32. Arnold V.I. Symplectization, complexification and mathematical trinities. The Arnoldfest: Proceedings of a Conference in Honor of V.I. Arnold for His Sixtieth Birthday, AMS, Providence, Rhode Island, 1999.
33. Hurwitz A. Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898, pp. 309–316.
34. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York, Columbia University Press, 1954.
35. Varlamov V.V. Diskretnye simmetrii na prostranstvakh faktor-predstavlenii gruppy Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2001, vol. 7, pp. 114–127. (in Russian)
36. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. Adv. Appl. Clifford Alge-

bras, 2004, vol. 14, pp. 81–168.
37. Rashevskii P.K. Teoriya spinorov. UMN, 1955, vol. 10, pp. 3–110. (in Russian)
38. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2015, vol. 25, pp. 487–516.
39. de Broglie L. Sur une analogue entre l'equation de Dirac et l'onde électromagnétique. Compt. Rend., 1932, 195, 536.
40. Jordan P. Zur Neutrinotheorie des Lichtes. Z. Phys., 1934, no. 97(7–8), pp. 464–472.
41. de Broglie L. Theorie Generale des Particules a Spin (Methode de Fusion). Paris: Gauthier-Villars, 1943.
42. Born M. and Nagendra Nath N.S. The neutrino theory of light. Proc. Indian. Acad. Sci., 1936, A3, 318.
43. Kronig R.L. On a relativistically invariant formulation of the neutrino theory of light. Physica, 1936, vol. 3(10), P. 1120–1132.
44. Perkins W.A. Neutrino theory of photons. Phys. Rev., 1965, vol. 137(5B), pp. B1291–B1301.
45. Varlamov V.V. About Algebraic Foundations of Majorana-Oppenheimer Quantum Electrodynamics and de Broglie-Jordan Neutrino Theory of Light. Annales de la Fondation Louis de Broglie, 2002, vol. 27, pp. 273–286.

Дата поступления в редакцию: 02.04.2020