

О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА СТОКСА

В.В. Насыров¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: 000612@pnu.edu.ru

М.Г. Насырова²

к.ф.-м.н., научный сотрудник, e-mail: nassm@mail.ru

¹ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», Хабаровск, Россия

²Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

Аннотация. В работе выполнен расчёт поправочного коэффициента к формуле закона Стокса, для случая движения сферического тела в трубках, заполненных глицерином. Получена интерполяционная формула для определения величины поправочного коэффициента для движения с малыми значениями чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкое течение, уравнение Навье–Стокса, метод конечных элементов, закон Стокса.

Задача Стокса об обтекании шара потоком жидкости допускает две эквивалентные формулировки: в первой осесимметричный неограниченный поток жидкости обтекает неподвижный шар; во второй, рассматриваемой в данной работе, шар движется поступательно в неподвижной жидкости. В обеих постановках жидкость является вязкой и несжимаемой. Аналитическое выражение для силы лобового сопротивления F^{St} , действующей со стороны жидкости на шар, известное как закон Стокса, может быть записано в следующем виде:

$$F^{St} = 3\pi\mu Ud, \quad (1)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, U — модуль скорости шара относительно жидкости, d — диаметр шара. Описание движения шара в жидкости строится на анализе и решении системы уравнений Навье–Стокса:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \cdot (-P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}) + \vec{F}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0, \quad (2b)$$

где ρ — плотность жидкости, \vec{u} — поле скоростей, \vec{F} — удельное силовое поле, P — абсолютное давление, $\hat{\mathbf{K}} = 2\mu\hat{\mathbf{S}} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u})\hat{\mathbf{I}}$ — тензор вязких напряжений, $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T)$ — тензор скоростей деформации, $\hat{\mathbf{I}}$ — единичная матрица.

Сформулируем основные приближения, сделанные Стоксом при решении системы (2): жидкость является несжимаемой ($\rho = const$); движение шара относительно жидкости достаточно медленное. Тогда из-за малости \vec{u} и её производных в системе (2) можно пренебречь инерционными слагаемыми

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \approx 0.$$

Следовательно, при движении шара в стационарном режиме ($U = const$) и отсутствии внешнего силового поля ($\vec{F} = 0$) систему (2) можно переписать в более простом виде:

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{\mu} \nabla P, \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (3b)$$

Граничные условия в задаче Стокса в рассматриваемой выше постановке: жидкость покоится на бесконечном удалении от шара

$$\vec{u} = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

слой жидкости, граничащий с поверхностью шара, «прилипает» к поверхности шара

$$u_z = -U \text{ при } r = \frac{d}{2}. \quad (5)$$

Выпишем решение Стокса для системы уравнений (3) с условиями (4), (5) в сферических координатах (приведено, например, в [1]):

$$u_r(r, \Theta) = -\frac{1}{4}U \cos(\Theta) \left[\frac{3d}{r} - \frac{d^3}{4r^3} \right], \quad (6a)$$

$$u_\Theta(r, \Theta) = \frac{1}{8}U \sin(\Theta) \left[\frac{3d}{r} + \frac{d^3}{4r^3} \right], \quad (6b)$$

$$P(r, \Theta) = P_0 - \frac{3\mu U d}{4r^2} \cos(\Theta). \quad (6c)$$

где P_0 — ссылочное (атмосферное) давление, Θ — полярный угол сферической системы координат. В силу симметрии задачи на поверхности шара только две компоненты тензора напряжений $\hat{\mathbf{T}} = -P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}$ имеют ненулевые значения:

$$T_{rr} = -P(r, \Theta) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{3\mu U}{d} \cos(\Theta), \quad (7a)$$

$$T_{r\Theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \Theta} \frac{\partial u_\Theta}{\partial r} - \frac{u_\Theta}{r} \right) = -\frac{3\mu U}{d} \sin(\Theta). \quad (7b)$$

Сила лобового сопротивления \vec{F}_s , действующая на движущийся в жидкости шар, в общем случае [2] определяется как интеграл по поверхности Ω этого шара:

$$\vec{F}_s = \int_{\Omega} \vec{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} dS, \quad (8)$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности. Проекция силы лобового сопротивления \vec{F}_s на ось Oz

$$F_{sz} = \int_{\Omega} (T_{rr} \cos(\Theta) - T_{r\Theta} \sin(\Theta)) dS$$

позволяет получить закон Стокса (1).

Отметим ещё раз два существенных условия, ограничивающих практическое применение закона Стокса: медленное движение тела и неограниченность среды, в которой тело движется. Выполнение первого условия не сложно проверить, так как для этого достаточно контролировать величину числа Рейнольдса. Точное выполнение второго условия невозможно при движении тела в ограниченных объёмах — трубах, сосудах и т. п. При движении тела в трубках с жидкостью поле скоростей и распределение давления не будут удовлетворять решению Стокса (6) как из-за возникновения пограничных слоев на стенках трубки, так и вследствие давления стенок трубки (сосуда) на жидкость.

Таким образом, закон Стокса требует введения поправок при ограничении жидкости стенками трубки. В 1961 г. Бреннером в работе [3] предложена корректировка закона Стокса в следующем виде:

$$F^{Br} = \left(1 + 2.105 \frac{d}{D} + o \left[\left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \right) 3\pi\mu U d. \quad (9)$$

В настоящее время существуют различные методы измерения силы сопротивления. В косвенных подходах используются вискозиметры с падающим шариком [4], в прямых подходах — падающие шарики в длинных широких трубках [5]. Формула Бреннера (9) достаточно часто используется для интерпретации и обработки экспериментальных данных (например, [6]) при стандартном для вискозиметров условии: $D/d = 10$. Однако из-за того, что выражение (9) было получено на основе качественного анализа влияния плоских стенок на движение шара, при $D/d < 10$ применение этой формулы не оправдано.

В данной статье, следуя Бреннеру, в закон Стокса вводится поправочный коэффициент:

$$F^{Nas} = C_{corr} 3\pi\mu U d. \quad (10)$$

Далее численным моделированием задачи движения шара в трубке с глицерином устанавливается зависимость C_{corr} от отношения диаметров D/d для $D/d \geq 2$.

В работе [7] указывается, что для несжимаемых сред дискретизация системы уравнений Навье–Стокса методом конечных элементов приводит к плохо обусловленной матрице системы алгебраических уравнений и негативно отражается на результатах численного моделирования, поэтому для улучшения сходимости численных расчетов в системе (2) нами была учтена сжимаемость среды.

В итоге мы решаем следующую систему уравнений:

$$\nabla \cdot (-P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}) = 0, \quad (11a)$$

$$\nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0, \quad (11b)$$

используя метод конечных элементов (МКЭ) [8]. Расчётная область задачи показана на рис. 1. В осесимметричной двухмерной постановке расчётная область представляет собой прямоугольник **B**, в котором шар **A** образует вырез.

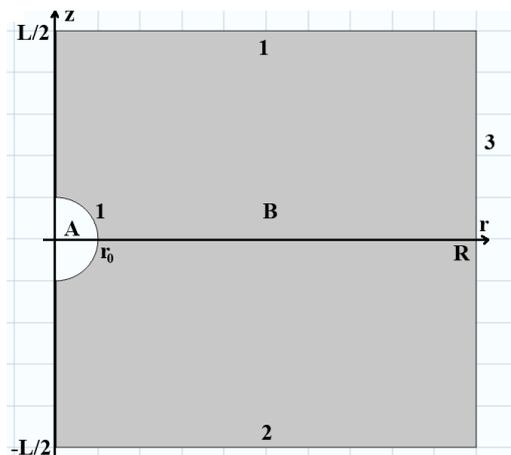


Рис. 1. Геометрия расчётной области

Обратим внимание на то, что в формуле (6с) слагаемое $\frac{3\mu U d}{r^2} \cos(\Theta)$, соответствующее манометрическому давлению на бесконечности, стремится к нулю пропорционально r^{-2} , поэтому на границах 2 и 3 расчётной области (рис. 1) вместо граничного условия (4) мы использовали условие отсутствия добавочного манометрического давления

$$P_m = P(r, \Theta) - P_0 \text{ при } z = \pm L/2. \quad (12)$$

Для корректности такой замены и оценки точности численного алгоритма были выполнены тестовые расчёты для $R = L = 50d = 100$ мм, $d = 2$ мм, $U = 4$ мм/с, $\mu = 0,825039$ Па·с (глицерин). В первом тестовом расчёте на границу 4 расчётной области было наложено условие «свободной границы»:

$$\left(-P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}\right) \vec{n} = 0, \quad (13)$$

моделирующее отсутствие стенок. Во втором расчёте — условие «жёсткой стенки», останавливающей течение жидкости в любом направлении на этой границе:

$$\vec{u} = 0 \text{ при } r = R. \quad (14)$$

Результаты тестовых расчётов представлены на рис. 2, 3 в сравнении с решениями Стокса (6). Расчётные зависимости для граничных условий (13) и (14), проведённые сплошными линиями, практически совпадают как между собой (с точностью до толщины линии на графике), так и с кривыми, соответствующими решениям Стокса, отмеченными пунктирной линией. На рис. 2 показано давление вдоль оси трубы (граница 1, рис. 1), при $|z| < r_0$ давление

берётся по поверхности шара. На рис. 3 показано значение проекции скорости жидкости на ось Oz , взятое на оси трубы, при $|z| < r_0$ скорость также берётся вдоль поверхности шара и соответствует скорости шара.

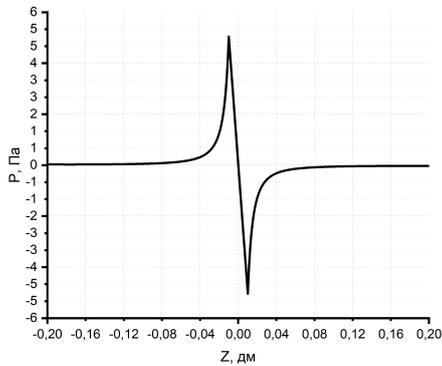


Рис. 2. Давление в жидкости вдоль оси трубки, $D/d = 100$. Сплошная линия – результаты МКЭ расчётов, пунктирная линия – (6)

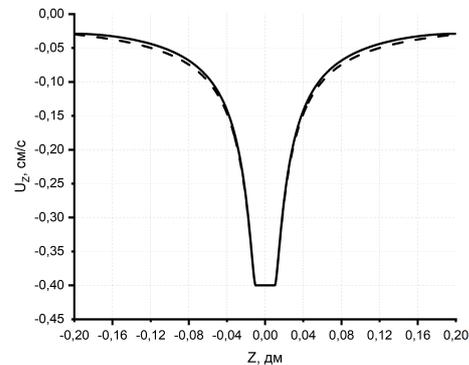


Рис. 3. Скорость жидкости вдоль оси трубки, $D/d = 100$. Сплошная линия – результаты МКЭ расчётов, пунктирная линия – (6)

Хорошее совпадение расчётов свидетельствует как о достаточном качестве выбранной конечно-элементной расчётной сетки, так и о достаточной степени сходимости МКЭ расчётов. Небольшое расхождение расчётных кривых с теоретическими на больших расстояниях ($|z| > 10d$) связано с конечным значением параметра L . Значение силы сопротивления, определяемой в рамках численной модели из (8), с условием (13) равно $F_{sz} = 6.3422 \cdot 10^{-5} H$, с условием (14) равно $F_{sz} = 6.3422 \cdot 10^{-5} H$. Величина силы Стокса $F^{St} = 6.2207 \cdot 10^{-5} H$. Таким образом, можно сделать вывод, что при относительно больших диаметрах трубок ($D/d \geq 100$) влияние боковых стенок трубки на движение шара не существенно и, с одной стороны, замена граничного условия исходной задачи (4) на граничное условие численной модели (12) корректно, с другой стороны, введение поправок в формулу (1) ещё не требуется.

Численное моделирование поля скоростей и давления подтверждает предположение, что решение Стокса не может применяться для описания параметров жидкости, по крайней мере для $D/d < 10$, то есть при движении шара в трубках с диаметром, сравнимым по величине с диаметром шара. Так, на рис. 4, 5 показаны давление и значение проекции скорости жидкости на ось Oz , вдоль оси трубы, для $D/d = 5$. Различия расчётных кривых и кривых, вычисленных по формулам (6), очевидны. Сила сопротивления, равная $F_{sz} = 9.3609 \cdot 10^{-5} H$, отличается почти на 50 % от величины силы Стокса, что подтверждает необходимость введения поправочного коэффициента C_{corr} в формуле (10).

Расчёты, выполненные с учётом граничного условия (14) для диаметра трубки D/d , изменяющегося от 2 до 100, показали, что при неизменной вязкости коэффициент C_{corr} , действительно, является функцией отношения диаметров

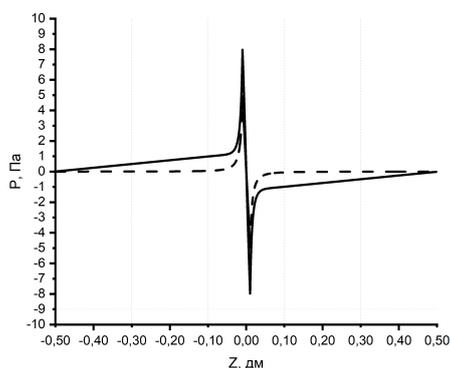


Рис. 4. Давление в жидкости вдоль оси трубки, $D/d = 5$. Сплошная линия – результаты МКЭ расчётов, пунктирная линия – (6)

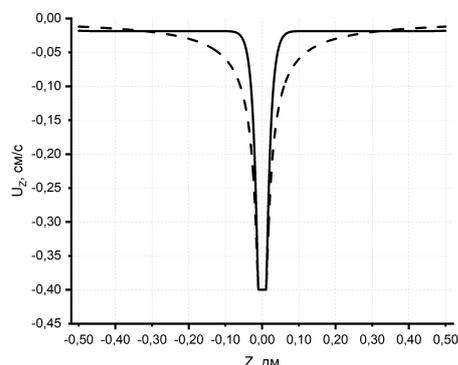


Рис. 5. Скорость жидкости вдоль оси трубки, $D/d = 5$. Сплошная линия – результаты МКЭ расчётов, пунктирная линия – (6)

D/d , а зависимость C_{corr} от скорости шара можно пренебречь в первом приближении.

Зависимость коэффициента C_{corr} от отношения диаметра трубки к диаметру шара показана на рис. 6 сплошной линией, пунктирной линией отмечена кривая, рассчитанная по аппроксимационной формуле, полученной по результатам наших расчётов:

$$C_{corr} = 1 + 15.4 \frac{d^2}{D^2} \text{ при } D/d \geq 2. \quad (15)$$

На рис. 6 отмечены два набора экспериментальных данных. Измеренные автором значения C_{corr} для $D/d = 4, 6, 10, 24$ обозначены точками. Для их расчёта использовался метод «падающего шарика»: измерялась установившаяся скорость металлического шарика, падающего в вертикальной стеклянной трубке, заполненной глицерином. Так как при таком движении сила сопротивления, действующая на шарик, оказывается одной и той же в разных трубках, то значения C_{corr} можно вычислялись из отношения

$$C_{corr} = \frac{U_{D/d}}{U_{\infty}}.$$

где $U_{D/d}$ — установившаяся скорость шарика в трубке с диаметром D , U_{∞} — установившаяся скорость шарика в «широкой» трубке (в нашем случае оказалось достаточно взять трубку с $D/d = 24$). К сожалению, автору не удалось уменьшить экспериментальную погрешность ниже 20 %, так как в узких трубках ($D/d < 5$) небольшие начальные смещения шарика от оси трубки приводили к его торможению в поверхностных слоях вблизи стенок. Помимо экспериментальных данных автора на график нанесены значения коэффициента C_{corr} , рассчитанные с использованием формулы (10), в которой в

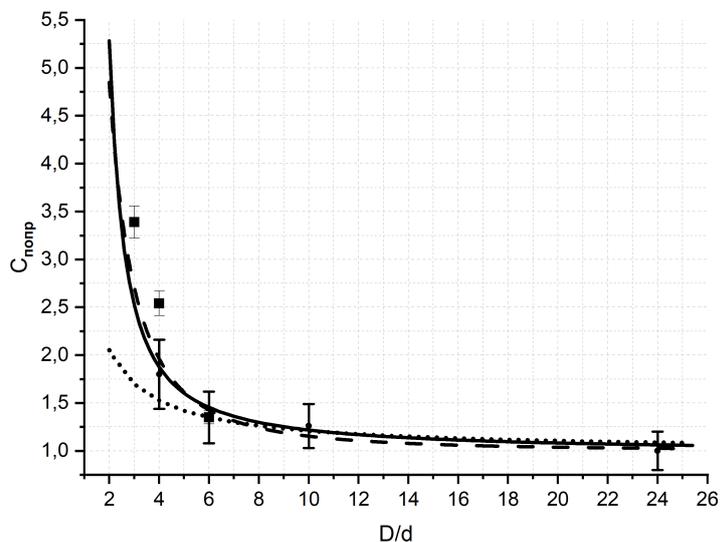


Рис. 6. Поправочный коэффициент C_{corr} . Сплошная линия — результаты МКЭ расчётов, пунктирная линия — аппроксимационная формула (15), линия из точек — из формулы (9), ■ — экспериментальные данные из [9], ● — наши экспериментальные данные.

качестве силы сопротивления подставлялись экспериментально измеренные в работе [9] значения силы сопротивления, действующей на шарик, обтекаемый потоком глицерина, для $D/d = 3, 4, 6$.

Очевидно, что рассчитанный числовой множитель в формуле (15) должен зависеть от параметров жидкости и выяснение зависимости C_{corr} от вязкости, плотности жидкости требует дальнейшего анализа за пределами данной работы. Отметим, что поправочный коэффициент в формуле Бреннера (9), как и следовало ожидать, практически совпадает с экспериментом при $D/d > 10$, но даёт неправильное поведение кривой $C_{corr}(D/d)$ при малых диаметрах трубки. Интерполяционная формула (15) для поправочного коэффициента, предлагаемая в статье, лучше описывает эксперимент в более широком интервале D/d . В заключении отметим, что из-за широкого применения закона Стокса его корректировка, предлагаемая в рамках данной статьи, может иметь несомненное прикладное значение.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1529/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 519 с.

2. Morrison F.A. An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge University Press, New York, 2013. P. 940.
3. Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface // *Chemical Engineering Science*. 1961. V. 16. P. 24–251.
4. *Viscosity and Flow Measurement : A Laboratory Handbook of Rheology* Interscience Publishers / J.R. van Wazer [et al.]. New York : John Wiley & Sons 1963.
5. Greenwood M.S., Fazio F., Russotto M., Wilkosz A. Using the Atwood machine to study Stokes' law // *Am. J. Phys.* 1986. V. 54. P. 904–906.
6. Chen S. The Resistive Force on a Sphere with a String Moving in a Viscous Fluid // *Chinese journal of physics*. 1994. V. 32, No. 4. P. 395–404.
7. Волков П.К. О природе движения жидкостей // *Вестник Югорского государственного университета*. 2011. № 2. С. 8–28.
8. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. М. : Мир. 1984.
9. Dolz M., Casanovas A., Delegido J., Hernandez M.J. An experimental setup to verify Stokes' law using an electronic balance // *Revista Mexicana de Fisica E*. V. 50, No. 1, P. 29–32.

ABOUT THE STOKES LAW APPLICABILITY

V.V. Nasyrov¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: 000612@pnu.edu.ru

M.G. Nasyrova²

Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher, e-mail: nassm@mail.ru

¹Federal State Educational Institution of Higher Professional Education "Pacific National University", Khabarovsk, Russia

²Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, Russia

Abstract. We find the correction coefficient for the Stokes law that permit to use this formula in case of a spherical body in a tube with the glycerol. An interpolation formula for the correction coefficient for a motion with low-Reynolds-number is obtained.

Keywords: numerical modeling, viscous flow, Navier–Stokes equation, finite element method, Stokes formula.

REFERENCES

1. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoi neshhimaemoi zhidkosti*. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1955, 519 p. (in Russian)
2. Morrison F.A. An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge University Press, New York, 2013, pp. 940.
3. Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical Engineering Science*, 1961, vol. 16, pp. 24–251.

4. Viscosity and Flow Measurement : A Laboratory Handbook of Rheology Interscience Publishers. J.R. van Wazer [et al.]. New York, John Wiley & Sons, 1963.
5. Greenwood M.S., Fazio F., Russotto M., and Wilkosz A. Using the Atwood machine to study Stokes' law. Am. J. Phys., 1986, vol. 54, pp. 904–906.
6. Chen S. The Resistive Force on a Sphere with a String Moving in a Viscous Fluid. Chinese journal of physics, 1994, vol. 32, no. 4, pp. 395–404.
7. Volkov P.K. O prirode dvizheniya zhidkosti. Vestnik Yugorskogo gosudarstvennogo universiteta, 2011, no. 2, pp. 8–28. (in Russian)
8. Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy. Moscow, Mir Publ., 1984. (in Russian)
9. Dolz M., Casanovas A., Delegido J., and Hernandez M.J. An experimental setup to verify stokes' law using an electronic balance. Revista Mexicana de Fisica E., vol. 50, no. 1, pp. 29–32.

Дата поступления в редакцию: 18.03.2020