Математические структуры и моделирование
2020. № 2(54). С. 65–85

УДК 512.622
DOI 10.24147/2222-8772.2020.2.65-85

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТРЁХЧЛЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Трубников
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru
М.М. Чернявский
аспирант, e-mail: misha360ff@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье предложен новый простой метод локализации и определения числа действительных решений у произвольного трёхчленного алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Подробно с иллюстрациями рассмотрены все типы исследуемых уравнений. Для каждого типа получены условия существования кратных корней и приведены точные аналитические формулы для их вычисления. Также показано, что если трёхчленное уравнение с действительными коэффициентами имеет кратный корень, то значения всех иных корней могут быть без затруднений выражены через значение кратного с необходимой точностью.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, трёхчленные уравнения, локализация корней, приближённое решение, действительный корень, кратный корень.

1. Постановка задачи и некоторые известные сведения

Трёхчленные алгебраические уравнения вида

$$x^n + px^m + \ q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0)$$

с произвольными действительными коэффициентами p и q возникают во многих приложениях, например, в некоторых задачах аэродинамики [1]. В подобных задачах актуальным является вопрос определения числа действительных корней трёхчленного уравнения и их локализация по коэффициентам p и q.

Рассмотрим кратко известные результаты в области исследований трёхчленных алгебраических уравнений. Значительная часть работ посвящена исследованию таких уравнений при помощи математического аппарата теории групп, в частности теории групп Галуа [2–6]. Отражённые там результаты представляют определённый теоретический интерес с точки зрения фундаментальной науки, однако мало полезны для исследователей, сталкивающихся в своей работе с непосредственным решением трёхчленных алгебраических уравнений.

На практике при выполнении технических расчётов широко распространено решение различных классов уравнений при помощи степенных рядов. Не являются исключением и трёхчленные алгебраические уравнения произвольных степеней [1, 7, 8]. Несмотря на удобство рядов в использовании (особенно при наличии мощной вычислительной техники) их применение зачастую не позволяет заметить новые теоретические факты и закономерности, что затрудняет проведение дальнейших исследований. Стоит также напомнить, что алгебраические уравнения пятой степени общего вида можно решать с помощью тэта-функций [9].

Существует также множество работ, в которых получены оценки расположения для комплексных корней у некоторых типов алгебраических трёхчленных уравнений, а также приводится описание областей их локализации [10–19]. Большинство данных работ посвящено изучению конкретных типов трёхчленных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, однако полученные в них результаты не всегда полезны на практике.

Среди крупных исследований последних двух десятилетий, посвящённых анализу трёхчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами, стоит выделить результаты, изложенные в монографии Г.П. Кутищева [20]. В той работе локализация и число действительных решений исследуемых уравнений определяется из анализа поведения некоторых функций, зависящих только от чисел m и n. Полученные там конструкции имеют громоздкий вид, что усложняет их использование. Авторами настоящей статьи в работе [21] был предложен более простой метод построения подобных функций, определяющих число действительных решений исходного трёхчленного уравнения. Текущая статья является естественным продолжением работы [21].

Цель данной статьи — получить необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов, дающие количество действительных корней трёхчленного уравнения произвольной степени, а также выяснить их расположение.

2. Основные результаты на примерах уравнений пятой степени

2.1. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$x^5 + px + q = 0 \quad (p \neq 0,\ q \neq 0) \tag{1}$$

с действительными коэффициентами p и q. Напомним, что уравнение (1) называют уравнением пятой степени в форме Бринга (иногда его называют нормальной формой Бринга–Жерара) [22, с. 189]. Подстановка $x = kq/p$ $(k \neq 0)$ приводит уравнение (1) к виду

$$k^5 \frac{q^5}{p^5} + kq + q = 0, \tag{2}$$

что позволяет выразить функцию $k = k\,(p, q)$ в виде неявной зависимости через коэффициенты уравнения (1):

$$\frac{k^5}{k+1} = -\frac{p^5}{q^4}. \tag{3}$$

Таким образом, количество действительных корней уравнения (1) и их локализация зависят от поведения функции

$$f\left(k\right) = \frac{k^5}{k+1}. \tag{4}$$

На рисунке 1 изображён график функции (4).

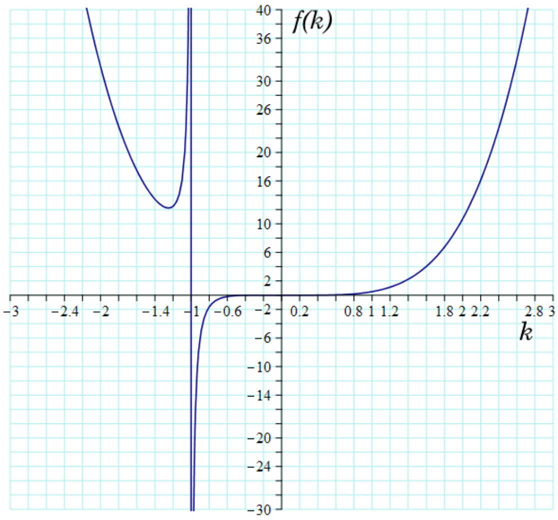


Рис. 1. График функции $f\left(k\right) = \frac{k^5}{k+1}$

Так как производная этой функции имеет вид

$$f'\left(k\right) = \frac{k^4\left(4k+5\right)}{\left(k+1\right)^2},$$

то её локальный минимум достигается при $k_* = -\frac{5}{4}$ и равен $\frac{3125}{256}$, а прямая $k = -1$ является вертикальной асимптотой. Такое поведение функции (4) позволяет установить следующий факт, сформулированный в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. Необходимым и достаточным условием существования трёх различных действительных корней уравнения (1) является неравенство $-\frac{p^5}{q^4} > \frac{3125}{256}$; необходимым и достаточным условием существования действительного корня кратности 2 и другого простого действительного корня является равенство $-\frac{p^5}{q^4} = \frac{3125}{256}$; необходимым и достаточным условием существования одного простого действительного корня является неравенство $-\frac{p^5}{q^4} < \frac{3125}{256}$.*

Число $3125/256 = 5^5/4^4 \approx 12{,}20703$.

Отметим, что используемая в данном разделе подстановка $x = kq/p$ $(k \neq 0)$ была ранее использована в работе Н.С. Астапова и И.С. Астапова [23] для исследования алгебраического уравнения третьей степени.

Для получения приближенных формул для вычисления действительных корней уравнения (1) мы можем разложить функцию $k\,(t)$, где $\frac{k^5(t)}{k(t)+1} = t$, в ряд Тейлора, взяв в качестве начальной точки точку в окрестности значения $-p^5/q^4$. Например, при $t = 1/2$ получаем $k\,(1/2) = 1$. Приведём выражение отрезка ряда при таких начальных значениях

$$k\,(t) \approx \frac{7}{9} + \frac{4}{9}t + \frac{248}{729}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23696}{59049}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Рассмотрим пример использования его для приближенного вычисления корня уравнения

$$x^5 - 2{,}1x + 3 = 0.$$

Для данного уравнения $t = -p^5/q^4 = 0{,}5042100000$. Подставляя это значение в выражение для отрезка ряда, получаем $k = 1{,}001877171$ и, учитывая подстановку $x = kq/p$, находим значение корня

$$x = -1{,}4312531019.$$

Подстановка этого значения в уравнение $x^5 - 2{,}1x + 3 = 0$ приводит к невязке $-0{,}000325295$. Другой удобной начальной точкой является точка $t = 32/3$. При этом $k\,(32/3) = 2$, и аналогичные вычисления приводят к равенству

$$k(t) \approx \frac{20}{13} + \frac{9}{208}t - \frac{27}{17576}\left(t - \frac{32}{3}\right)^2 + \frac{257013}{3041632256}\left(t - \frac{32}{3}\right)^3.$$

Например, для уравнения $x^5 - 2x + 1{,}3 = 0$ значение $t = -p^5/q^4 = 11{,}20408949$; $k\,(t) = 2{,}022823$ и, следовательно, $x = -1{,}314834950$. Значение невязки при таком значении x составляет $-1{,}158 \times 10^{-6}$.

Заметим, что в случае кратного корня выполняется равенство $p = -5\left(\frac{q}{4}\right)^{4/5}$ и уравнение (1) принимает вид

$$x^5 - 5\left(\frac{q}{4}\right)^{4/5} x + q = 0.$$

Число $t = \left(\frac{q}{4}\right)^{1/5}$ является его двукратным корнем. Учитывая равенство

$$x^5 - 5\left(\frac{q}{4}\right)^{4/5} x + q = x^5 - 5t^4 x + 4t^5 = (x - t)^2\left(x^3 + 2tx^2 + 3t^2 x + 4t^3\right),$$

при помощи системы компьютерной математики Maple 2019 получаем выражения для остальных корней уравнения (1):

$$x_3 = -\frac{\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}} - 5}{3\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}}}\, t;$$

$$x_4 = -\frac{\left(\sqrt{3}\,i - 1\right)\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{3}\,i + 4\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}} + 5}{6\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}}}\,t;$$

$$x_5 = \frac{\left(\sqrt{3}\,i + 1\right)\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{3}\,i - 4\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}} - 5}{6\left(35 + 15\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}}}\,t.$$

2.2. Теперь рассмотрим уравнение

$$x^5 + px^2 + q = 0. \tag{5}$$

Для этого уравнения можно выделить два подслучая: 1) p, q — одного знака; 2) p, q — разных знаков.

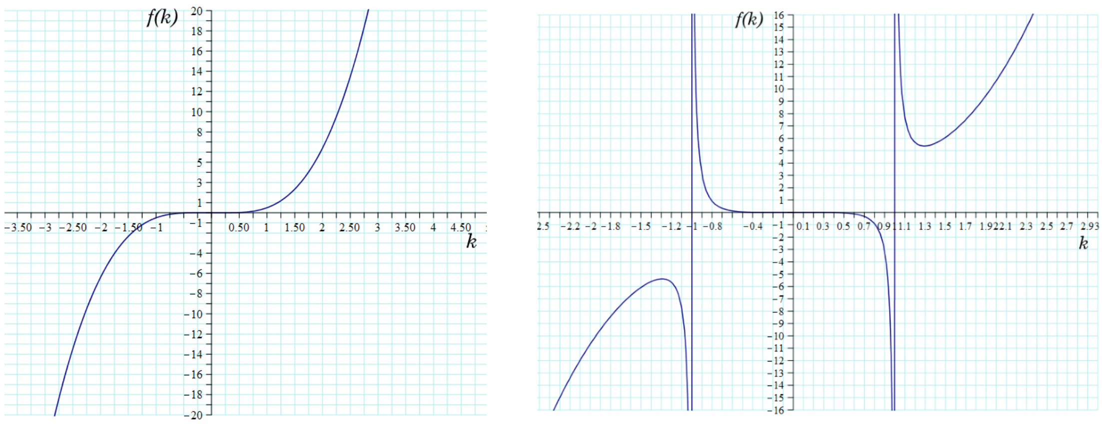
Если p и q одного знака, то применяется подстановка $x = k(q/p)^{1/2}$ $(k \neq 0)$, которая приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{5/2}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^5}{k^2+1}\right)' = \frac{k^4\left(3k^2+5\right)}{\left(k^2+1\right)^2},$$

то функция $f(k) = \frac{k^5}{k^2+1}$ является строго монотонной и, следовательно, при любом значении параметра уравнение (5) имеет единственный действительный корень.



а) б)

Рис. 2. Графики функций $f(k) = \frac{k^5}{k^2+1}$ и $f(k) = \frac{k^5}{k^2-1}$

Для ознакомления приведём график рассматриваемой функции (см. рис. 2 а)).

Если p и q имеют разные знаки, то подстановка $x = k(-q/p)^{1/2}$ $(k \neq 0)$ приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2-1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2},$$

Так как

$$\left(\frac{k^5}{k^2-1}\right)' = \frac{k^4\,(3k^2-5)}{(k-1)^2(k+1)^2},$$

то точками, в которых достигаются локальные экстремумы функции $\frac{k^5}{k^2-1}$, являются точки $k_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $k_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$. При этом

$$\frac{k_1^5}{k_1^2-1} = \frac{25\sqrt{15}}{18},\ \frac{k_2^5}{k_2^2-1} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}.$$

На рисунке 2 б) изображён график функции $f\,(k) = \frac{k^5}{k^2-1}$.

Таким образом, доказана теорема 2.

Теорема 2. *Если коэффициенты p и q $(p \neq 0,\ q \neq 0)$ имеют одинаковый знак, то уравнение (5) имеет единственный действительный корень.*

Если p и q разных знаков, то при выполнении неравенства $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} > \frac{25\sqrt{15}}{18}$ уравнение (5) имеет три действительных решения. Аналогично, если выполнено неравенство $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < -\frac{25\sqrt{15}}{18}$, то уравнение (5) имеет три действительных решения.

При выполнении одного из равенств $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = \frac{25\sqrt{15}}{18}$, $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$ уравнение (5) имеет кратный действительный корень кратности два и один простой действительный корень.

Наконец, если выполнено неравенство $-\frac{25\sqrt{15}}{18} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < \frac{25\sqrt{15}}{18}$, то уравнение (5) имеет ровно один действительный корень.

Например, для уравнения $x^5 + 5x^2 - 3\cdot 2^{2/3} = 0$ выполняется условие $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$. Непосредственно убеждаемся, что его действительными корнями являются числа

$$\frac{1}{3}\left(5^{2/3} - 2^{2/3}\cdot 5^{1/3} + 2\cdot 2^{1/3}\right),\quad -2^{1/3},\quad -2^{1/3}.$$

Далее заметим, что если $p > 0$, $q < 0$, то значение $t = \left(-\frac{2p}{5}\right)^{1/3}$ является кратным корнем, и если выразить коэффициенты уравнения (5) через этот кратный корень, то получаем два тождества

$$x^5 + px^2 + q = x^5 - \frac{5}{2}t^3x^2 + \frac{3}{2}t^5 = (x-t)^2\left(x^3 + 2tx^2 + 3t^2x + \frac{3}{2}t^3\right).$$

Тогда оставшиеся корни уравнения (5) выражаются через кратный корень следующим образом:

$$x_3 = -\frac{10^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} + 4}{6} t;$$

$$x_4 = -\frac{i \cdot 10^{\frac{2}{3}}\sqrt{3} + 2i \cdot 10^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} - 10^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} + 8}{12} t;$$

$$x_5 = \frac{i \cdot 10^{\frac{2}{3}}\sqrt{3} + 2i \cdot 10^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} + 10^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} - 8}{12} t.$$

3. Нечётно-нечётные уравнения

Перейдём к общему случаю трёхчленного (триномиального) алгебраического уравнения с действительными коэффициентами.

Имеет место следующая классификация [20, с. 189]. В зависимости от чётности степеней неизвестного трёхчленные алгебраические уравнения подразделяются на 4 типа: нечётно-нечётные, нечётно-чётные, чётно-нечётные и чётно-чётные уравнения соответственно.

Пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0) \tag{6}$$

m, n — нечётные числа. Такие уравнения называются нечётно-нечётными уравнениями.

Тогда после подстановки $x = k(q/p)^{1/m}$ $(k \neq 0)$ получаем равенство

$$\frac{k^n}{k^m + 1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

Функция $f(k) = \frac{k^n}{k^m+1}$, которую иногда называют определяющей, возрастает при $k > -1$ и имеет локальный минимум при $k_* = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{1/m}$. При этом

$$f(k_*) = \frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что схематично все графики функций при произвольных нечётных m и n будут выглядеть похожими друг на друга. Например, на рисунке 3 изображён график функции $f(k) = \frac{k^3}{k+1}$.

Таким образом, доказана теорема 3.

Теорема 3. *Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. Необходимым и достаточным условием существования трёх действительных различных корней уравнения (6) является неравенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{(n-m)\,n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}.$$

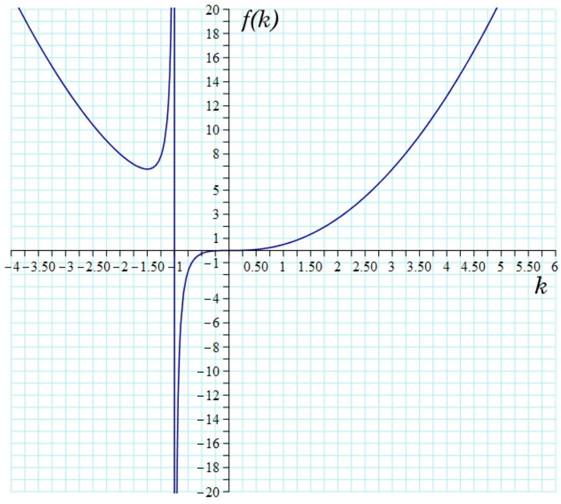


Рис. 3. График функции $f(k) = \frac{k^3}{k+1}$

При этом если p и q отрицательны, то один из этих корней положителен, а два — отрицательны.

При выполнении равенства

$$-\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{(n-m)\,n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}$$

существует один кратный корень x_* кратности два, равный $x_* = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$, и один простой корень.

Необходимым и достаточным условием существования единственного действительного корня является неравенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{(n-m)\,n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m},$$

при этом локализация этого корня определяется выражением $x = k(q/p)^{1/m}$ $(k > -1,\ k \neq 0)$.

Например, уравнение $x^{13} - 3x^7 - 1 = 0$ имеет действительные корни 1,2172; −0,87473; −1,1789.

Рассмотрим, например, случай $n = 7$, $m = 1$. Кратный корень в этом случае равен $t = \left(-\frac{p}{7}\right)^{1/6}$. Тогда, выражая коэффициенты уравнения $x^7 + px + q = 0$ через кратный корень, получаем тождество

$$x^7 + px + q = x^7 - 7t^6x + 6t^7 = (x-t)^2\left(x^5 + 2tx^4 + 3t^2x^3 + 4t^3x^2 + 5t^4x + 6t^5\right).$$

Для того чтобы решить уравнение

$$x^5 + 2tx^4 + 3t^2x^3 + 4t^3x^2 + 5t^4x + 6t^5 = 0,$$

сделаем подстановку $x = ty$, тогда, приближённо решая уравнение

$$y^5 + 2y^4 + 3y^3 + 4y^2 + 5y + 6 = 0,$$

получаем его корни $y_1 = 0{,}5516854635 + 1{,}253348860i$; $y_2 = 0{,}5516854635 - 1{,}253348860i$; $y_3 = -0{,}8057864694 + 1{,}222904713i$; $y_4 = -0{,}8057864694 - 1{,}222904713i$; $y_5 = -1{,}491797988$.

Корни уравнения $x^7 + px + q = 0$ в этом случае будут иметь вид

$$x_1 = x_2 = \Big(-\frac{p}{7}\Big)^{1/6},\ x_3 = y_1\Big(-\frac{p}{7}\Big)^{1/6},\ \ldots,\ x_7 = y_5\Big(-\frac{p}{7}\Big)^{1/6}.$$

4. Нечётно-чётные уравнения

В данном разделе статьи рассмотрим нечётно-чётные уравнения (6) (n — нечётное, m — чётное). Чтобы у читателя не возникли сомнения по поводу истинности полученных результатов, рассмотрим подробнее все четыре возможные ситуации в зависимости от знаков p и q.

4.1. Пусть $p > 0$, $q > 0$. Тогда подстановка $x = k(q/p)^{1/m}$ $(k \neq 0)$ приводит уравнение (6) к равенству

$$k^n\left(\frac{q}{p}\right)^{n/m} + pk^m\frac{q}{p} + q = 0 \ \Leftrightarrow\ k^n\left(\frac{q}{p}\right)^{n/m} + q\left(k^m + 1\right) = 0.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$\frac{k^n}{k^m + 1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

К точно такому же выражению приходим, полагая $p < 0$, $q < 0$.

Из последнего равенства вытекает теорема 4.

Теорема 4. *Нечётно-чётные уравнения в случае, когда p и q одного знака, имеют единственный действительный корень. Этот корень отрицателен при положительных значениях коэффициентов p, q и положителен при отрицательных p, q.*

В качестве примера, иллюстрирующего рассматриваемую ситуацию, приведём график функции $f\left(k\right) = \frac{k^7}{k^4+1}$ (см. рис. 4)).

4.2. Пусть $p > 0$, $q < 0$. После подстановки

$$x = k(-q/p)^{1/m} = k(-q)^{1/m}/p^{1/m} \quad (k \neq 0)$$

в уравнение (6) получаем

$$k^n\frac{(-q)^{n/m}}{p^{n/m}} + pk^m\frac{(-q)^{m/m}}{p^{m/m}} + q = 0 \ \Leftrightarrow\ k^n\frac{(-q)^{n/m}}{p^{n/m}} - q\left(k^m - 1\right) = 0,$$

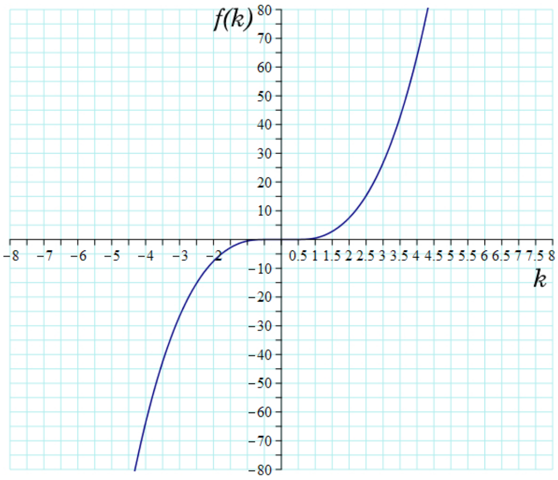


Рис. 4. График функции $f\,(k) = \frac{k^7}{k^4+1}$

$$\Rightarrow \frac{k^n}{k^m-1} = q\frac{p^{n/m}}{(-q)^{n/m}} < 0,$$

то есть при $p > 0$, $q < 0$ нас будут интересовать значения определяющей функции $f\,(k) = \frac{k^n}{k^m-1}$, лежащие в нижней полуплоскости.

Если $p < 0$, $q > 0$, то подстановка

$$x = k(-q/p)^{1/m} = k\,q^{1/m}/(-p)^{1/m} \qquad (k \neq 0)$$

в уравнение (6) приводит к следующему:

$$k^n\frac{q^{n/m}}{(-p)^{n/m}} + pk^m\frac{q^{m/m}}{(-p)^{m/m}} + q = 0 \;\Leftrightarrow\; k^n\frac{q^{n/m}}{(-p)^{n/m}} - q\,(k^m-1) = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{k^n}{k^m-1} = q\frac{(-p)^{n/m}}{q^{n/m}} > 0,$$

то есть при $p < 0$, $q > 0$ нас будут интересовать значения определяющей функции $f\,(k) = \frac{k^n}{k^m-1}$, лежащие в верхней полуплоскости.

Так как

$$\left(\frac{k^n}{k^m-1}\right)' = \frac{k^{n-1}\left[(n-m)\,k^m-n\right]}{(k^m-1)^2},$$

то в нечётно-чётном случае точкой локального минимума является значение $k_* = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}$, а точкой локального максимума — значение $k_{**} = -\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m}$. При этом в точке локального минимума выполняется равенство

$$\frac{k_*^n}{k_*^m-1} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

а в точке локального максимума равенство

$$\frac{k_{**}^{n}}{k_{**}^{m}-1}=-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}.$$

Проиллюстрируем рассматриваемую ситуацию на примере функции $f(k)=\frac{k^7}{k^4-1}$ (см. рис. 5)).

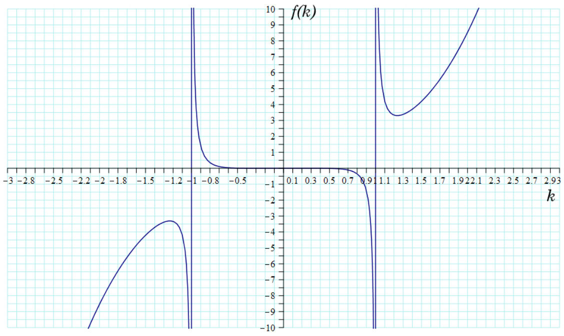


Рис. 5. График функции $f(k)=\frac{k^7}{k^4-1}$

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $p\neq 0$, $q\neq 0$. Если p и q имеют разные знаки, то при выполнении одного из неравенств*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},\quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (6) имеет три различных действительных решения.

Если имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},\quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (6) имеет двукратный действительный корень $x=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$ и простой действительный корень.

При выполнении двойного неравенства

$$-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (6) имеет единственный действительный корень.

Пусть выполнено равенство

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}.$$

В этом случае для нечётно-чётных уравнений первоначальное уравнение приводится к виду

$$x^n - \frac{n}{m}t^{n-m}x^m + \frac{n-m}{m}\,t^n = 0,$$

где t — кратный корень: $t = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$.

Далее осуществим разложение на множители. Например, пусть $n = 7$, $m = 2$, тогда

$$x^7 - \frac{7}{2}t^5x^2 + \frac{5}{2}t^7 = \frac{1}{2}(x-t)^2\left(2x^5 + 4tx^4 + 6t^2x^3 + 8t^3x^2 + 10t^4x + 5t^5\right).$$

Сделав подстановку $x = ty$, получаем приближённо корни уравнения

$$2y^5 + 4y^4 + 6y^3 + 8y^2 + 10y + 5 = 0:$$

$$y_1 = 0{,}3807121627 + 1{,}308055916i;\ y_2 = 0{,}3807121627 - 1{,}308055916i;$$

$$y_3 = -0{,}9773621705 + 0{,}8453110167i;\ y_4 = -0{,}9773621705 - 0{,}8453110167i;$$

$$y_5 = -0{,}8066999845.$$

Следовательно, корни уравнения $x^7 + px^2 + q = 0$ определяются однозначно:

$$x_1 = x_2 = \left(-\frac{2p}{7}\right)^{1/5},\ x_3 = y_1\left(-\frac{2p}{7}\right)^{1/5},\ \ldots,\ x_7 = y_5\left(-\frac{2p}{7}\right)^{1/5}.$$

5. Чётно-нечётные уравнения (n — чётное, m — нечётное)

В этом случае подстановка $x = k(q/p)^{1/m}$ $(k \neq 0)$ приводит к равенству

$$\frac{k^n}{k^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^n}{k^m+1}\right)' = \frac{k^{n-1}\left[(n-m)\,k^m + n\right]}{(k^m+1)^2},$$

то локальный минимум этой определяющей функции достигается при $k = 0$, а локальный максимум при $k_* = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{1/m} < 0$. В точке k_* имеет место равенство

$$\frac{k_*^n}{k_*^m+1} = \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m} < 0.$$

Эти факты означают, что справедлива теорема 6.

Теорема 6. *Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. При выполнении одного из неравенств*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > 0, \quad -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m}$$

уравнение (6) имеет два действительных решения.

Если выполнено равенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m},$$

то уравнение (6) имеет кратный корень $x = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$.

Для определённой наглядности на рисунке 6 изображён график функции $f(k) = \frac{k^4}{k^3+1}$.

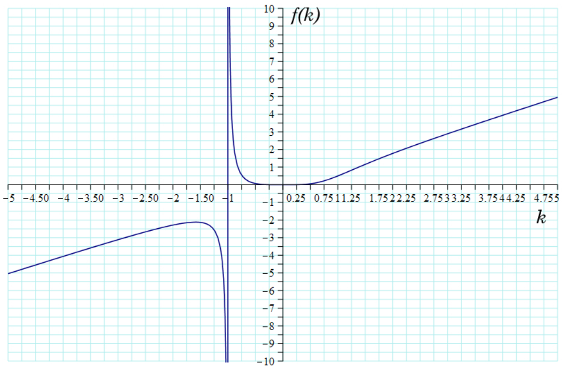


Рис. 6. График функции $f(k) = \frac{k^4}{k^3+1}$

Рассмотрим подробнее случай, когда для чётно-нечётного уравнения выполнено равенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m},$$

то есть когда исходное уравнение имеет кратный корень $t = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$. В этом случае для чётно-нечётных уравнений первоначальное трёхчленное уравнение приводится к виду

$$x^n - \frac{n}{m}t^{n-m}x^m + \frac{n-m}{m}t^n = 0.$$

Например, пусть $n = 6$, $m = 1$, тогда получим

$$x^6 - 6t^5x + 5t^6 = (x-t)^2\left(x^4 + 2tx^3 + 3t^2x^2 + 4t^3x + 5t^4\right),$$

где $x_1 = x_2 = t = \left(-\frac{p}{6}\right)^{1/5}$ — значение кратного действительного корня.

Сделав подстановку $x = ty$, преобразуем выражение $x^4 + 2tx^3 + 3t^2x^2 + 4t^3x + 5t^4$ из правой части последнего равенства к виду $y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 4y + 5$. Несложно убедиться в том, что уравнение

$$y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 4y + 5 = 0$$

не имеет действительных корней. Заметим, что системы компьютерной математики Maple 2019 и Wolfram Mathematica 12 не генерируют значения корней данного уравнения в аналитическом виде через радикалы. Прямое использование некоторых известных методов решения алгебраических уравнений четвёртой степени позволяет получить аналитические выражения для корней в виде очень громоздких конструкций, которые не имеют особой практической ценности. Ниже представлены приближенные значения корней вышеупомянутого уравнения.

$$y_1 = 0{,}2878154796 + 1{,}416093080i;\ y_2 = 0{,}2878154796 - 1{,}416093080i;$$

$$y_3 = -1{,}287815480 + 0{,}8578967583i;\ y_4 = -1{,}287815480 - 0{,}8578967583i.$$

Следовательно, корни уравнения $x^6 + px + q = 0$ определяются однозначно:

$$x_1 = x_2 = \left(-\frac{p}{6}\right)^{1/5},\ x_3 = y_1\left(-\frac{p}{6}\right)^{1/5},\ \ldots,\ x_6 = y_4\left(-\frac{p}{6}\right)^{1/5}.$$

6. Чётно-чётные уравнения (*n*, *m* — чётные)

Очевидно, что при положительных p, q чётно-чётное уравнение (6) действительных корней не имеет. При отрицательных p, q неравенство

$$\frac{k^n}{k^m + 1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > 0$$

влечёт существование двух действительных решений.

Более сложная ситуация возникает, когда p и q имеют разные знаки. В этом случае подстановка $x = k(-q/p)^{1/m}$ $(k \neq 0)$ приводит к равенству

$$\frac{k^n}{k^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и локальный минимум определяющей функции $\frac{k^n}{k^m-1}$ достигается в точках

$$k_{*1} = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} > 1, \quad k_{*2} = -\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} < -1.$$

Его значение

$$f\left(k_*\right) = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}.$$

Например, при $n = 4$, $m = 2$, $k_* = \sqrt{2}$, $f\left(k_*\right) = 4$.

Приведём график функции $f\left(k\right) = \frac{k^4}{k^2-1}$ (см. рис. 7)).

Таким образом, справедлива теорема 7.

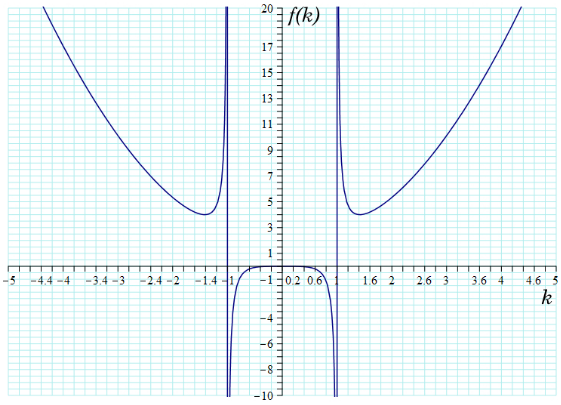


Рис. 7. График функции $f\left(k\right)=\frac{k^4}{k^2-1}$

Теорема 7. *Пусть $p\neq 0$, $q\neq 0$. Если p и q имеют разные знаки, то при выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (6) имеет четыре действительных решения, два из которых отрицательны, а два — положительны.

Если имеет место равенство (заметим, что p в этом случае должно быть отрицательным)

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (6) имеет два кратных корня, кратность каждого из которых равна двум:

$$x_1=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)},\quad x_2=-\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}.$$

При условии

$$0<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (6) действительных корней не имеет.

Наконец, если

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<0,$$

то уравнение (6) имеет два действительных корня.

Рассмотрим подробнее случай, когда для чётно-чётного уравнения выполнено равенство

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}\qquad(p<0)\,,$$

то есть когда исходное уравнение имеет два кратных действительных корня, кратность каждого из которых равна двум:

$$t_1 = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}, \quad t_2 = -\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}.$$

Обозначим $t = t_1$, тогда $t_2 = -t$. Выражая p и q из соотношений для t_1 и t_2 и подставляя в условие наличия двукратного корня, получим, что исходное чётно-чётное трёхчленное уравнение примет вид:

$$x^n - \frac{n}{m}t^{n-m}x^m + \frac{n-m}{m}t^n = 0.$$

Например, при $n = 6$, $m = 4$ получим

$$x^6 - \frac{3}{2}t^2x^4 + \frac{1}{2}t^6 = \frac{1}{2}(x-t)^2(x+t)^2\left(2x^2+t^2\right).$$

Тогда корни уравнения $x^6 + px^4 + q = 0$ $(p < 0)$ в случае наличия кратности определяются однозначно:

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\left(-\frac{2p}{3}\right)},\ x_3 = x_4 = -\sqrt{\left(-\frac{2p}{3}\right)},$$

$$x_5 = i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(-\ \frac{2p}{3}\right)},\ x_6 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(-\ \frac{2p}{3}\right)}.$$

7. Аналитическая связь между модулем и аргументом комплексных корней трёхчленных алгебраических уравнений

Целью данного раздела является установление аналитической зависимости между модулем и аргументом комплексных корней трёхчленных алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами.

Сначала рассмотрим трёхчленное алгебраическое уравнение третьей степени с действительными коэффициентами p и q:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p \neq 0,\ q \neq 0)\,. \tag{7}$$

Нас интересуют комплексные решения уравнения (7), записанные в тригонометрической форме, то есть числа вида

$$x = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{8}$$

Подставив выражение (8) в исходное уравнение (7), получим

$$r^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) + pr\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) + q = 0. \tag{9}$$

Преобразуем уравнение (9) к виду

$$\left(r^3\cos 3\varphi + pr\cos\varphi + q\right) + i\left(r^3\sin 3\varphi + pr\sin\varphi\right) = 0. \tag{10}$$

Последнее равенство эквивалентно системе уравнений:

$$r^3\cos 3\varphi + pr\cos\varphi + q = 0; \tag{11}$$

$$r^3\sin 3\varphi + pr\sin\varphi = 0. \tag{12}$$

Из уравнения (12) выражаем $p = -r^2\sin 3\varphi/\sin\varphi$ и подставляем в уравнение (11):

$$r^3\cos 3\varphi - \frac{r^3\cos\varphi\sin 3\varphi}{\sin\varphi} + q = 0,$$

что равносильно уравнению

$$r^3\left(\frac{\sin\varphi\cos 3\varphi - \cos\varphi\sin 3\varphi}{\sin\varphi}\right) = -q \quad \Leftrightarrow \quad r^3\sin(-2\varphi) = -q\sin\varphi,$$

откуда окончательно получаем

$$r^3 = \frac{q}{2\cos\varphi}. \tag{13}$$

Таким образом, мы получили очень простую связь между модулем и аргументом для комплексных решений уравнения (7) в случае наличия у него комплексно-сопряжённой пары корней. Сам по себе факт существования такой явной аналитической связи представляет определённый интерес.

Далее, действуя по аналогии, мы можем получить выражение, подобное формуле (13), для трёхчленного алгебраического уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами вида (14)

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m,\ p \neq 0,\ q \neq 0). \tag{14}$$

Подставляя число $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в уравнение (14), получим

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + pr^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) + q = 0.$$

Выделяя действительную и мнимую составляющие левой части данного уравнения и приравнивая их к нулю, получим эквивалентную систему уравнений:

$$r^n\cos n\varphi + pr^m\cos m\varphi + q = 0; \tag{15}$$

$$r^n\sin n\varphi + pr^m\sin m\varphi = 0. \tag{16}$$

Из уравнения (16) выражаем $p = -r^{n-m}\sin n\varphi/\sin m\varphi$ и подставляем в уравнение (15):

$$r^n\cos n\varphi - \frac{r^{n-m}\sin n\varphi}{\sin m\varphi}r^m\cos m\varphi + q = 0,$$

что преобразуется к виду

$$r^n \left(\frac{\sin m\varphi \cos n\varphi - \cos m\varphi \sin n\varphi}{\sin m\varphi} \right) = -q \;\Leftrightarrow\; r^n \sin\left(m\varphi - n\varphi\right) = -q \sin m\varphi,$$

откуда окончательно получаем

$$r^n = \frac{q \sin m\varphi}{\sin\left(\left(n-m\right)\varphi\right)}.$$

Убедимся в справедливости последней формулы на примере. Пусть

$$x^7 - 5x^2 + 13 = 0.$$

Приближенные значения его корней имеют вид:

$$x_1 \approx -1{,}260494631; \quad x_{2,3} \approx 1{,}274138351 \pm 0{,}4488548137i;$$

$$x_{4,5} \approx 0{,}4076784747 \pm 1{,}526928854i; \quad x_{6,7} \approx -1{,}051569510 \pm 1{,}075578775i.$$

Несложно убедиться в том, что для каждого из комплексных корней выполняется равенство $r^7 = 13 \sin 2\varphi / \sin 5\varphi$.

8. Заключение

Авторами данной статьи разработан простой и единообразный метод, позволяющий устанавливать число действительных решений трёхчленных алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами. Метод основан на том факте, что при помощи определённых подстановок трёхчленное уравнение приводится к уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

Во многих частных случаях зависимость решений от одного параметра позволяет находить удобные аналитические выражения для корней трёхчленного уравнения, а при дальнейшем развитии метода получать степенные ряды от этого параметра, что приводит к удобным аналитическим формулам приближённого нахождения решений.

Авторы надеются, что метод будет полезен математикам, которые в своей практической работе сталкиваются с необходимостью решать и исследовать трёхчленные уравнения.

Литература

1. Кравченко В.Ф. Аналитический метод решения трёхчленных алгебраических уравнений с помощью элементарных функций K_{ml} // Учёные записки ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 4. С. 135-144.

2. Cohen S.D., Movahhedi A., Salinier A. Galois Groups of Trinomials // Journal of Algebra. 1999. V. 222. P. 561–573.
3. Mukhopadhyay A., Murty M.R., Srinivas K. Counting squarefree discriminants of trinomials under abc // Proceedings of the American Mathematical Society. 2009. V. 137, No. 10. P. 3219–3226.
4. Bremner A., Spearman B.K. Cyclic sextic trinomials $x^6 + Ax + B$ // International Journal of Number Theory. 2010. V. 6, No. 1. P. 161–167.
5. Сергеев А.Э., Потёмкина Л.Н. Параметрические триномы со знакопеременной группой Галуа // Научный журнал КубГАУ. 2012. № 76(02). С. 216–225.
6. Patsolic J., Rouse J. Trinomials defining quintic number fields // International Journal of Number Theory. 2017. V. 13, No. 7. P. 1881–1894.
7. Eagle A. Series for all the Roots of a Trinomial Equation // The American Mathematical Monthly. 1939. V. 46, No. 7. P. 422–425.
8. Cella O., Lettl G. Power series and zeroes of trinomial equations // Aequationes Mathematicae. 1992. V. 43, No. 1. P. 94–102.
9. Прасолов В.В., Соловьёв Ю.П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М. : Изд-во «Факториал», 1997. 288 с.
10. Kennedy E.C. Bounds for the Roots of a Trinomial Equation // The American Mathematical Monthly. 1940. V. 47, No. 7. P. 468–470.
11. Kim S.-H. Certain Trinomial Equation and Lacunary Polynomials // Communications of the Korean Mathematical Society. 2009. V. 24, No. 2. P. 239–245.
12. Szabo P.G. On the roots of the trinomial equation // Central European Journal of Operations Research. 2010. V. 18, No. 1. P. 97–104.
13. Theobald T., de Wolf T. Power series and zeroes of trinomial equations // Mathematische Annalen. 2016. V. 366, No. 1–2. P. 219–247.
14. Brilleslyper M.A., Schaubroeck L.E. Counting Interior Roots of Trinomials // Mathematics Magazine. 2018. V. 91, No. 2. P. 142–150.
15. Howell R., Kyle D. Locating trinomial zeros // Involve, a Journal of Mathematics. 2018. V. 11, No. 4. P. 711–720.
16. Koiran P. Root separation for trinomials // Journal of Symbolic Computation. 2019. V. 95, No. 1. P. 151–161.
17. Botta V., da Silva J.V. On the behavior of roots of trinomial equations // Acta Mathematica Hungarica. 2019. V. 157, No. 1. P. 54–62.
18. Bilu Y., Luca F. Trinomials with given roots // Indagationes Mathematica. 2020. V. 31, No. 1. P. 33–42.
19. Botta V. Roots of Some Trinomial Equations // Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. 2017. V. 5, No. 1. P. 1–5.
20. Кутищев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени. М. : Издательство ЛКИ, 2019. 232 с.
21. Трубников Ю.В., Чернявский М.М. О распределении корней трёхчленных алгебраических уравнений произвольной степени // Вестник Витебского государственного университета. 2020. № 1(106). С. 21–33.
22. Прасолов В.В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.
23. Астапов Н.С., Астапов И.С. Сравнительный анализ решений алгебраических уравнений третьей и четвёртой степеней // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 1. С. 14–28.

LOCALIZATION AND FINDING SOLUTIONS OF TRINOMIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

Yu.V. Trubnikov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru
M.M. Chernyavsky
Postgraduate Student, e-mail: misha360ff@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. The article proposes a new simple method for localizing and determining the number of real solutions for an arbitrary trinomial algebraic equation with real coefficients. In detail, with illustrations, an analysis is made of all types of equations under study. For each type, conditions for the existence of multiple roots are obtained and exact analytical formulas for calculating them are given. For trinomial equations with a multiple root, it is shown that all other roots can be expressed through a multiple with the required accuracy.

Keywords: algebraic equations, trinomial equations, root localization, approximate solution, real root, multiple root.

References

1. Kravchenko V.F. Analiticheskii metod resheniya trekhchlennykh algebraicheskikh uravnenii s pomoshch'yu elementarnykh funktsii K_{ml}. Uchenye zapiski TsAGI, 1988, vol. 19, no. 4, pp. 135-144. (in Russian)
2. Cohen S.D., Movahhedi A., and Salinier A. Galois Groups of Trinomials. Journal of Algebra, 1999, vol. 222, pp. 561–573.
3. Mukhopadhyay A., Murty M.R., and Srinivas K. Counting squarefree discriminants of trinomials under abc. Proceedings of the American Mathematical Society, 2009, vol. 137, no. 10, pp. 3219–3226.
4. Bremner A. and Spearman B.K. Cyclic sextic trinomials $x^6 + Ax + B$. International Journal of Number Theory, 2010, vol. 6, no. 1. pp. 161–167.
5. Sergeev A.E. and Potemkina L.N. Parametricheskie trinomy so znakoperemennoi gruppoi Galua. Nauchnyi zhurnal KubGAU, 2012, no. 76(02), pp. 216–225. (in Russian)
6. Patsolic J. and Rouse J. Trinomials defining quintic number fields. International Journal of Number Theory, 2017, vol. 13, no. 7. pp. 1881–1894.
7. Eagle A. Series for all the Roots of a Trinomial Equation. The American Mathematical Monthly, 1939, vol. 46, no. 7. pp. 422–425.
8. Cella O. and Lettl G. Power series and zeroes of trinomial equations. Aequationes Mathematicae, 1992, vol. 43, no. 1, pp. 94–102.
9. Prasolov V.V. and Solov'ev Yu.P. Ellipticheskie funktsii i algebraicheskie uravneniya. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 288 p. (in Russian)
10. Kennedy E.C. Bounds for the Roots of a Trinomial Equation, The American Mathematical Monthly, 1940, vol. 47, no. 7, pp. 468–470.

11. Kim S.H. Certain Trinomial Equation and Lacunary Polynomials. Communications of the Korean Mathematical Society, 2009, vol. 24, no. 2, pp. 239–245.
12. Szabo P.G. On the roots of the trinomial equation. Central European Journal of Operations Research, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 97–104.
13. Theobald T. and de Wolf T. Power series and zeroes of trinomial equations. Mathematische Annalen, 2016, vol. 366, no. 1–2, pp. 219–247.
14. Brilleslyper M.A. and Schaubroeck L.E. Counting Interior Roots of Trinomials. Mathematics Magazine, 2018, vol. 91, no. 2, pp. 142–150.
15. Howell R. and Kyle D. Locating trinomial zeros. Involve, a Journal of Mathematics, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 711–720.
16. Koiran P. Root separation for trinomials. Journal of Symbolic Computation, 2019, vol. 95, no. 1, pp. 151–161.
17. Botta V. and da Silva J.V. On the behavior of roots of trinomial equations. Acta Mathematica Hungarica, 2019, vol. 157, no. 1, pp. 54–62.
18. Bilu Y. and Luca F. Trinomials with given roots. Indagationes Mathematica, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 33–42.
19. Botta V. Roots of Some Trinomial Equations. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 1–5.
20. Kutishchev G.P. Reshenie algebraicheskikh uravnenii proizvol'noi stepeni. Moscow, LKI Publ., 2019, 232 p. (in Russian)
21. Trubnikov Yu.V. and Chernyavskii M.M. O raspredelenii kornei trekhchlennykh algebraicheskikh uravnenii proizvol'noi stepeni. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta, 2020, no. 1(106), pp. 21–33. (in Russian)
22. Prasolov V.V. Mnogochleny. Moscow, MTsNMO Publ., 2014, 336 p. (in Russian)
23. Astapov N.S. and Astapov I.S. Sravnitel'nyi analiz reshenii algebraicheskikh uravnenii tret'ei i chetvertoi stepenei. Sibirskii zhurnal chistoi i prikladnoi matematiki, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 14–28. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 06.04.2020