Математические структуры и моделирование
2020. № 2(54). С. 24–39

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2020.2.24-39

О ПРИТЯЖЕНИИ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ ФУНКЦИЙ ОТ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе приводятся «общепринятое» условие слабой зависимости и условие на класс симметрических функций, которые обеспечивают выполнение полученных ранее автором необходимых и достаточных условий для притяжения функций от зависимых величин к нормальному закону.

Ключевые слова: Симметрические функции, условие равномерно сильного перемешивания, притяжение к нормальному закону.

Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабоэквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393].

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем обозначать $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ стационарную в узком смысле последовательность, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \stackrel{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону.

В статье [3] получены необходимые и достаточные условия (включающие в себя условия слабой зависимости) для стационарных последовательностей, обеспечивающие притяжение сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ к нормальному закону, а в работе [4] этот результат обобщён на случай, в котором вместо сумм S_n участвуют симметрические функции $X_n = f\,(\xi_1, ..., \xi_n)$. Приведём здесь основной результат из [4].

Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\|\xi\|_p = (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} < \infty$, $A_n = \mathbb{E}X_n$, $B_n(p) = \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1}\, \|X_n - A_n\|_p$. Последовательностями вида $B_n(p)$ осуществляется масштабная нормировка в предельных теоремах о сходимости к нормальному закону для последовательностей, удовлетворяющих условию φ-перемешивания, сильного перемешивания и пр. (см., например, [5])

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \overset{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_n}{B_{n+m}(p)} + \frac{\widehat{X}_m}{B_{n+m}(p)}, \quad n+m \to \infty. \qquad (\mathrm{R_f})$$

(Здесь и далее символ $n+m \to \infty$ означает, что $n \to \infty$, а $m = m(n)$ — произвольная последовательность натуральных чисел, а через $\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ обозначаем *независимые* случайные величины такие, что $\widehat{Y}_k \overset{d}{=} Y_k,\ k = 1, 2, ..., n$.)

Если $B_n(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\gamma_n = B_{n+m}^{-1}(p)(A_{n+m} - A_n - A_m) \to 0,\ n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнено условие нормировки (N).

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$B_n^{-1}(p)(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty, \qquad (1)$$

и выполнялось условие нормировки (N)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $(\mathrm{R_f})$*, последовательность* $\{B_n^{-p}(p)|X_n - A_n|^p\}$ *была равномерно интегрируемой и при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} k\mathbb{P}\{|X_n - A_n| \geqslant \varepsilon B_{nk}(p)\} = 0. \qquad (2)$$

Там же отмечалось, что условие $(\mathrm{R_f})$ не только является некоторым условием слабой зависимости, но и накладывает существенные ограничения на функцию f. В настоящей работе приводится класс симметрических функций, «общеупотребительное» условие слабой зависимости и аналог условия Линдеберга, которые обеспечивают выполнение условий теоремы 1 и, следовательно, притяжение $\{X_n\}$ к нормальному закону.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

f_1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

f_2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

f_3. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$;

f_4. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, если $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| + |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})| \to \infty$ (то есть хотя бы одно из слагаемых в $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ стремится к бесконечности).

Эквивалентность в f_3 понимается следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) > N$, то

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|. \tag{3}$$

Простым переобозначением переменных $(\mathbf{x}' = \mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{y}' = -\mathbf{y})$ можно сделать, чтобы в правой части формулы (3) стояло $\varepsilon|f(\mathbf{x})|$, так что для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon|f(\mathbf{x})| + N,$$

и отсюда следует, что для любых $\mathbf{x_1}, ...\mathbf{x_n} \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$|f(\mathbf{x_1}+...+\mathbf{x_k}) - f(\mathbf{x_1}) - ... - f(\mathbf{x_k})| \leqslant \varepsilon(|f(\mathbf{x_1})| + ... + |f(\mathbf{x_{k-1}})| + (k-1)N. \tag{4}$$

Если функция $g(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, а h — конечная нечётная функция, являющаяся правильно меняющейся порядка 1 на $+\infty$, то $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h(g(x_1, x_2, ..x_n))$ также удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$. В частности, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h(x_1 + x_2 + .. + x_n)$ удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}-\sigma$-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, ξ измерима относительно $\mathcal{F}_{\leqslant 0}$, η — относительно $\mathcal{F}_{\geqslant n}$, $\|\xi\|_s < \infty$, $\|\eta\|_t < \infty$, $s, t \geqslant 1$, $1/s + 1/t = 1$, то

$$|\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{s}}(n)\|\xi\|_s\|\eta\|_t \tag{5}$$

[6, с. 392]. В случае, когда $s = 1$ в качестве $\|\eta\|_\infty$ можно взять $\sup\limits_\omega |\eta(\omega)|$.

В [5] получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания и пусть $X_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $\mathbb{E}\xi_k = 0$, $\mathbb{E}|\xi_k|^p < \infty$, $B_n(p) = \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1}\|S_n\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $B_n(p) \to \infty$, $n \to \infty$ и выполняется условие Линдеберга порядка p:*

$$nB_n^{-p}(p)\mathbb{E}\{|\xi_1|^p, |\xi_1| > \varepsilon B_n(p)\} \to 0,\ n \to \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда последовательность $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону с параметрами 0 и 1, то есть $B_n^{-1}(p)X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, $n \to \infty$.

(Здесь и далее $\mathbb{E}\{\xi, A\} = \int\limits_A \xi\, \mathbb{P}(d\omega)$.) При $p = 2$ из теоремы 2 следует широко известный результат М. Пелиград о центральной предельной теореме для последовательностей с φ-перемешиванием [7].

Пусть, как и выше, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n),\ n = 1, 2, ...$, но функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$. В настоящей работе из теоремы 1 выводится следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $B_n(p) \to \infty$, и пусть выполняется условие Линдеберга порядка p:*

$$nB_n^{-p}(p)\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| > \varepsilon B_n(p)\} \to 0,\ n \to \infty \qquad (\mathrm{L_p})$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону с параметрами 0 и 1.

Пусть $X_{k,n} = f(\Xi_{k,n}) = f(\xi_k, ..., \xi_n),\ k \leqslant n$. Введём симметризованные величины $X^*_{k,n} = f^*(\Xi_{k,n}) = f(\Xi_{k,n}) - f(\widehat{\Xi}_{k,n})$, где векторы $\Xi_{k,n}$ и $\widehat{\Xi}_{k,n}$ независимы и одинаково распределены. Легко видеть, что для последовательности $\{X^*_n\} = \{X^*_{1,n}\}$ выполняется соотношение (3), а последовательность $\{Y^*_n\}$, $Y^*_n = f^*(\xi_n)$ удовлетворяет условию φ-перемешивания с коэффициентом $\varphi^*(n) \leqslant 2\varphi(n)$ (см., например, [8, с. 174]).

Из слабых неравенств симметризации [1, с. 259] следует

$$\mathbb{P}\{|X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant 2\mathbb{P}\{|X^*_n| \geqslant x\} \leqslant 4\mathbb{P}\{|X_n - A_n| \geqslant x/2\},\ x \geqslant 0,$$

где μ_n — медиана X_n. Отсюда легко выводится

$$\mathbb{E}\{|X_n - \mu_n|^p,\ |X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbb{E}\{|X^*_n|^p,\ |X^*_n| \geqslant x\} \leqslant 16\mathbb{E}\left\{|X_n - a_n|^p,\ |X_n - A_n| \geqslant x/2\right\}. \qquad (6)$$

Так как

$$\mathbb{P}\{|X_n - A_n| \geqslant C_\mu B_n(p)\} \leqslant \frac{\mathbb{E}|X_n - A_n|^p}{C^p_\mu B^p_n(p)} = \frac{1}{2},\quad C_\mu = 2^{1/p}\left\|\mathcal{N}(0,1)\right\|_p,$$

то

$$|\mu_n - A_n| \leqslant C_\mu B_n(p). \qquad (7)$$

Будем обозначать $B^*_n(p) = \mathbb{E}|X^*_n|^p$.

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность удовлетворяет условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $B^*_n(p) \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда*

а) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} B^*_k(p) \leqslant C_1 B^*_n(p)$, где $0 < C_1 < \infty$ не зависит от n;

б) для последовательности $\{X^*_n\}$ выполняется условие $(\mathrm{R_f})$.

Доказательство. Пусть $r = r(n) \to \infty$ растёт столь медленно, что $(B^*_{n+m}(p))^{-1}B^*_r(p) \to 0,\ (B^*_n(p))^{-1}B^*_r(p) \to 0,\ n \to \infty$. В силу **(??)**

$$|B^*_{n+m+r}(p) - B^*_{n+m}(p)| \leqslant \|X^*_{n+m+r} - X^*_{n+m}\|_p \leqslant \|X^*_{n+m+r} - X^*_{n+m} - X^*_r\|_p + \\ + B^*_r(p) \leqslant N + (1+\varepsilon)B^*_r(p). \tag{8}$$

Отсюда следует $B^*_{n+m+r}(p) \sim B^*_{n+m}(p),\ n \to \infty$. Аналогично

$$|B^*_{n+m+r}(p) - \|X^*_n + X^*_{n+r+1,n+m+r}\|_p| \leqslant \|X^*_{n+m+r} - X^*_n - X^*_{n+r+1,n+m+r}\|_p \leqslant \\ \leqslant \|X^*_{n+m+r} - X^*_{n+1,n+r} - f^*(\xi_1,...,\xi_n,\xi_{n+r+1},...\xi_{n+m+r})\|_p + \\ + \|f^*(\xi_1,...,\xi_n,\xi_{n+r+1},...\xi_{n+m+r}) - X^*_n - X^*_{n+r+1,n+m+r}\|_p + B^*_r(p) \leqslant \\ \leqslant 2N + (1+\varepsilon)B^*_r(p) + \varepsilon B^*_n(p) \leqslant 2\varepsilon B^*_n(p), \tag{9}$$

если n достаточно велико. Далее, воспользовавшись симметричностью распределений величин X^*_n и соотношением (5) с $s = 1$, получаем при достаточно больших n

$$\mathbb{E}|X^*_n + X^*_{n+r+1,n+m+r}|^p \geqslant \mathbb{E}\left\{|X^*_n|^p, X^*_n \geqslant 0, X^*_{n+r+1,n+m+r} \geqslant 0\right\} \geqslant \\ \geqslant \mathbb{E}\left\{|X^*_n|^p, X^*_n \geqslant 0\right\} \cdot \left(\frac{1}{2} - 4\varphi(r)\right) \geqslant \frac{1}{8}\left(B^*_n(p)\right)^p. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует $B^*_{n+m+r}(p) \geqslant \left(2^{-3/p} - 2\varepsilon\right) B^*_n(p)$ и, поскольку $B^*_{n+m+r}(p) \sim \sim B^*_{n+m}(p)$, отсюда следует утверждение а) леммы.

Далее, воспользовавшись (8) и (9), при при любом $\delta > 0$ и при достаточно больших n получаем

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+r+1,n+m+r}|}{B^*_{n+m}(p)} > 2\delta\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\frac{|X^*_{n+m+r} - X^*_n - X^*_{n+r+1,n+m+r}|}{B^*_{n+m}(p)} > \delta\right\} + \\ + \mathbb{P}\left\{\frac{|X^*_{n+m+r} - X^*_{n+m}|}{B^*_{n+m}(p)} > \delta\right\} \leqslant \left(\frac{2\varepsilon B^*_n(p)}{\delta B^*_{n+m}(p)}\right)^p + \left(\frac{N + (1+\varepsilon)B^*_r(p)}{\delta B^*_{n+m}(p)}\right)^p,$$

что можно сделать сколь угодно малым выбором ε и n, так что $(B^*_{n+m}(p))^{-1}|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+r+1,n+m+r}| \to 0$ по вероятности и

$$\frac{X^*_{n+m}}{B^*_{n+m}(p)} \overset{d}{\sim} \frac{X^*_n}{B^*_{n+m}(p)} + \frac{X^*_{n+r+1,n+m}}{B^*_{n+m+r}(p)}. \tag{11}$$

В силу (5)

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_n + X^*_{n+r+1,n+m+r}}{B^*_{n+m}(p)}\right\} - \mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_n}{B^*_{n+m}(p)}\right\}\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_{n+r+1,n+m+r}}{B^*_{n+m}(p)}\right\}\right| \leqslant$$

$\leqslant 4\varphi^{\frac{1}{2}}(r) \to 0,\ n \to \infty$, и из (11) и того, что $X^*_{n+r+1,n+m+r} \overset{d}{=} X^*_m$, получаем теперь условие (R_f) для последовательности $\{X^*_n\}$. Лемма доказана. ■

Обозначим

$$\overline{X}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k|, \; Y_k = f(\xi_k), \quad k, m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что при $i + m \leqslant k$

$$|X_k| \geqslant |X_i| - (1+\varepsilon)(|Y_{i+1}| + ... + |Y_{i+m-1}| + |X_{i+m,k}|) - mN, \tag{12}$$

а при $k \leqslant n - m$

$$|X_n| \leqslant |X_{k-1}| + (1+\varepsilon)\left(|Y_k| + ... + |Y_{k+m-1}| + |X_{k+m,n}|\right) + (m+1)N. \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $k \leqslant n$ *и* $r \geqslant 1$, *функция* f *удовлетворяет условиям* $f_1 - f_4$, *а* $c_n \to \infty$. *Если* n *таково, что в* (12) $mN < c_n$ *и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_j| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_k \geqslant (r+3)c_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant rc_n\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i = \{\overline{X}_{i-1} < (r+3)c_n \leqslant |X_i|\}$, $i = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = \{\overline{X}_k \geqslant (r+3)c_n\}$. В силу (12) при $i \leqslant k - m$

$$\left\{|X_i| \geqslant (r+3)c_n, \; \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| < \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}, \; |X_{i+m,k}| < \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} \subseteq \left\{|X_k| \geqslant rc_n\right\},$$

то есть при $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\{|X_k| < rc_n\} \subseteq \{X_i < (r+3)c_n\} \cup \left\{|X_{i+m,k}| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\},$$

откуда

$$\{|X_k| < rc_n, E_i\} \subseteq \left\{|X_{i+m,k}| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}, E_i\right\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}, E_i\right\}. \tag{14}$$

С помощью (14) и условия φ-перемешивания получаем

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_k \geqslant (r+3)c_n\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant rc_n\right\} + \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left\{|X_k| < rc_n, \; E_i\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant rc_n\right\} + \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\{|X_{i+m,k}| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}, E_i\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{X_k \geqslant rc_n\right\} + \left(\max_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{P}\left\{|X_i| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m)\right)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\{E_i\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|\geqslant\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}\leqslant\mathbb{P}\left\{X_k\geqslant rc_n\right\}+$$

$$+\gamma\mathbb{P}\{\overline{X}_n\geqslant(r+3)c_n\}+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_j|\geqslant\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\},$$

откуда следует утверждение леммы. ∎

Следующее предложение — это аналог неравенства М. Пелиград (леммы 3.1 из [7]).

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon>0,\ r\geqslant 1$, *функция* f *удовлетворяет условиям* f_1-f_4, *а* $c_n\to\infty$. *Если* n *таково, что в* (13) $(m+1)N<c_n$ *и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}\left\{|X_j|\geqslant\frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\}+\varphi(m)\leqslant\gamma<1,$$

то

$$\mathbb{P}\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n\right\}\leqslant\frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n|\geqslant rc_n\}+\frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k|\geqslant\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k=\{\overline{X}_{k-1}<(r+3)c_n\leqslant|X_k|\},\ k=1,...,n$. Тогда $E_iE_j=\varnothing$, $i\neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k=\{\overline{X}_n\geqslant(r+3)c_n\}$. В силу (13)

$$\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n,\ E_k,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}\subseteq\{E_k,\ |X_{k+m,n}|\geqslant\frac{c_n}{1+\varepsilon}\}. \tag{15}$$

Аналогично

$$\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}\subseteq$$

$$\subseteq\left\{\overline{X}_{n-m}\geqslant(r+3)c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\},$$

следовательно,

$$\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}=$$

$$=\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n,\ \overline{X}_{n-m}\geqslant(r+3)c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}. \tag{16}$$

С помощью (15) и (16) получаем

$$\mathbb{P}\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n\right\}-\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|\geqslant\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbb{P}\left\{|X_n|\geqslant(r+6)c_n,\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|<\frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}=$$

$$= \mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant (r+6)c_n, \overline{X}_{n-m} \geqslant (r+3)c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| < \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-m}\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant (r+6)c_n, E_k, \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| < \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}. \tag{17}$$

Из соотношений (15), (17) и условия φ-перемешивания следует

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant (r+6)c_n\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n-m}\mathbb{P}\{E_k,\ |X_{k+m,n}| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\} + \mathbb{P}\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} + \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m)\right)\sum_{k=1}^{n-m}\mathbb{P}\{E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Отсюда с помощью леммы 2 получаем утверждение леммы. ■

Лемма 4. *Пусть $p > 0$, функция f, последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ удовлетворяют условиям леммы 4, где*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \tau = \frac{7^p\gamma}{1-\gamma} < 1,$$

и пусть при любом $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$nc_n^{-p}\mathbb{E}\left\{|X_1|^p, |X_1| \geqslant \varepsilon c_n\right\} \to 0,\ n \to \infty. \tag{18}$$

Тогда

a) последовательность $\{c_n^{-p}|X_n|^p\}$ равномерно интегрируема;

b) при любом $\delta > 0$

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} k\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \delta\sqrt{k}c_n\right\} = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Покажем сначала, что из условия (18) следует равномерная интегрируемость последовательности $\left\{c_n^{-p}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p\right\}$. Так как $\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p \leqslant \sum_{j=1}^{n}|Y_j|^p$ и $Y_j \overset{d}{=} Y_1 \overset{d}{=} X_1$, то

$$\sup_{n\geqslant 1} c_n^{-p}\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p, \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant Nc_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant M} nc_n^{-p}\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| \geqslant Nc_n\} + \sup_{n\geqslant M} nc_n^{-p}\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| \geqslant Nc_n\}.$$

В силу (18) второе слагаемое в правой части последнего неравенства можно сделать сколь угодно малым выбором $M > 0$, а при фиксированном M первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым выбором $N > 0$.

Далее имеем

$$\mathbb{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geqslant N\} = -\int_N^\infty x^p \, d\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\} = N^p\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant N\} + p\int_N^\infty x^{p-1}\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\}\, dx.$$

Отсюда в силу леммы 3 при $N \geqslant 1$ и достаточно больших n получаем

$$\mathbb{E}\{|X_n|^p,\ |X_n| \geqslant 7Nc_n\} \leqslant \tau(Nc_n)^p\, \mathbb{P}\{|X_n| \geqslant Nc_n\}+$$
$$+\tau p\int_{Nc_n}^\infty x^{p-1}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant x\}\, dx + \gamma^{-1}\tau(Nc_n)^p\, \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{Nc_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}+$$
$$+p\gamma^{-1}\tau\int_{Nc_n}^\infty x^{p-1}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{x}{m(1+\varepsilon)}\right\} dx = \tau\mathbb{E}\{|X_n|^p, |X_n| \geqslant Nc_n\}+$$
$$+\gamma^{-1}\tau m^p(1+\varepsilon)^p\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p, \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{Nc_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}. \tag{20}$$

Так как последовательность $\left\{c_n^{-p}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p\right\}$ равномерно интегрируема, то

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} c_n^{-p}\,\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p, \max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{Nc_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} = 0.$$

Пусть

$$R = \lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} c_n^{-p}\,\mathbb{E}\{|X_n|^p, |X_n| \geqslant Nc_n\}.$$

Из равномерной интегрируемости $\left\{c_n^{-p}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p\right\}$ следует

$$A = \sup_{n\geqslant 1} c_n^{-p}\,\mathbb{E}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^p < \infty$$

и из (20) выводим

$$R_n = c_n^{-p}\,\mathbb{E}|X_n|^p \leqslant (7N)^p + c_n^{-p}\,\mathbb{E}\{|X_n|^p,\ |X_n| \geqslant 7Nc_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \tau R_n + (7N)^p + \gamma^{-1}\tau m^p(1+\varepsilon)^p A,\ 0 < \tau < 1,$$

так что $\sup\limits_{n\geqslant 1} R_n < \infty,\ 0 \leqslant R < \infty$, а из (20) вытекает $R \leqslant \tau R$, следовательно, $R = 0$ и последовательность $\{c_n^{-p}|X_n|^p\}$ равномерно интегрируема.

Далее из условия (18) следует

$$\beta_n = \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} \leqslant n\mathbb{P}\left\{|Y_1| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant nm^p(1+\varepsilon)^p c_n^{-p}\mathbb{E}\left\{|X_1|^p, |X_1| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\} \to 0,\ n\to\infty. \tag{21}$$

Пусть $r > 1$. Из леммы 3 при достаточно больших n получаем

$$\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant (r+7)c_n\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant rc_n\} + \frac{\beta_n}{1-\gamma},$$

так что при достаточно больших $k > 0$

$$k\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \delta\sqrt{k}c_n\right\} \leqslant \frac{k\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant (\delta\sqrt{k}-7)c_n\} + \frac{k\beta_n}{1-\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant k\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \mathbb{P}\{|X_n| \geqslant (\delta\sqrt{k}-14)c_n\} + \frac{k\beta_n}{1-\gamma} + \frac{k\gamma\beta_n}{(1-\gamma)^2} \leqslant \ldots$$

$$\leqslant k\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\left[\frac{\delta\sqrt{k}}{7}\right]} + \frac{k\beta_n}{1-2\gamma},$$

где $[x]$ — целая часть x. По условию $\frac{\gamma}{1-\gamma} < 1$ $\left(\gamma < \frac{1}{2}\right)$ и из последнего соотношения с помощью (21) выводим (19). ■

Лемма 5. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность удовлетворяет условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $B_n^*(p) \to \infty$, $n \to \infty$ и выполняется условие Линдеберга порядка p. Тогда*

а)

$$C_2 B_n(p) \leqslant B_n^*(p) \leqslant C_3 B_n(p),$$

б)

$$B_{nk}^*(p) \geqslant C_4\sqrt{k}B_n^*(p),$$

где $0 < C_2, C_3, C_4 < \infty$ не зависят от n.

Доказательство. Пусть $k \leqslant n$, $\mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$.

Обозначим

$$\xi_k^{\triangledown} = \xi_k\mathbf{1}(|f(\xi_k)| \leqslant \delta B_n(p)), \quad \xi_k^{\vartriangle} = \xi_k\mathbf{1}(|f(\xi_k)| > \delta B_n(p)), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$X_{k,n}^{\triangledown} = f(\Xi_{k,n}^{\triangledown}) = f(\xi_k^{\triangledown}, \ldots, \xi_n^{\triangledown}),\ X_{k,n}^{\vartriangle} = f(\Xi_{k,n}^{\vartriangle}) = f(\xi_k^{\vartriangle}, \ldots, \xi_n^{\vartriangle}),$$

$$\widehat{X}_{k,n}^{\vartriangle} = f(\widehat{\Xi}_{k,n}^{\triangledown}),\ \widehat{X}_{k,n}^{\vartriangle} = f(\widehat{\Xi}_{k,n}^{\vartriangle}),$$

где векторы $\Xi_{k,n}^{\triangledown}$ и $\widehat{\Xi}_{k,n}^{\triangledown}$ независимы и одинаково распределены, то же касается $\Xi_{k,n}^{\vartriangle}$ и $\widehat{\Xi}_{k,n}^{\vartriangle}$. Далее обозначим

$$X_{k,n}^{\blacktriangledown} = X_{k,n}^{\triangledown} - \widehat{X}_{k,n}^{\triangledown}, \quad X_{k,n}^{\blacktriangle} = X_{k,n}^{\vartriangle} - \widehat{X}_{k,n}^{\vartriangle},$$

$$Y_k^{\triangledown} = f(\xi_k^{\triangledown}),\ Y_k^{\vartriangle} = f(\xi_k^{\vartriangle}),\ Y_k^{\blacktriangledown} = Y_k^{\triangledown} - \widehat{Y}_k^{\triangledown},\ Y_k^{\blacktriangle} = Y_k^{\vartriangle} - \widehat{Y}_k^{\vartriangle}.$$

Нижний индекс n используется вместо $(1,n)$, например $X_n = X_{1,n}$.

Пусть выполняется условие Линдеберга порядка $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тогда при любом $x > 0$ и при $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\{|X_n^{\vartriangle}| > x\} \leqslant n\mathbb{P}\{|X_1| > \delta B_n(p)\} \leqslant \frac{n}{\delta^p B_n^p(p)} \mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| > \delta B_n(p)\} \to 0, \quad (22)$$

и из леммы 3 аналогично (20) выводим (обозначения леммы 4)

$$\mathbb{E}|X_n^{\vartriangle}|^p \leqslant \tau \mathbb{E}|X_n^{\vartriangle}|^p + \gamma^{-1}\tau m^p(1+\varepsilon)^p\, \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k^{\vartriangle}|^p\right\} \quad 0 \leqslant \tau < 1.$$

Отсюда

$$\mathbb{E}|X_n^{\vartriangle}|^p \leqslant \frac{\tau m^p(1+\varepsilon)^p}{\gamma(1-\tau)} n\mathbb{E}\{|X_1|^p, |X_1| > \delta B_n(p)\} = o(B_n^p(p))$$

$$|A_n^{\vartriangle}| = |\mathbb{E}X_n^{\vartriangle}| \leqslant \|X_n^{\vartriangle}\|_p = o(B_n(p)).$$

В силу (4)

$$|X_n - X_n^{\triangledown} - X_n^{\vartriangle}| \leqslant \varepsilon |X_n^{\vartriangle}| + N, \quad |X_n - X_n^{\triangledown}| \leqslant (1+\varepsilon)|X_n^{\vartriangle}| + N,$$

откуда

$$|A_n - A_n^{\triangledown} - A_n^{\vartriangle}| \leqslant \varepsilon \|X_n^{\vartriangle}\|_p + N = o(B_n(p)), \quad |A_n - A_n^{\triangledown}| = o(B_n(p)), \quad (23)$$

где $A_n^{\triangledown} = \mathbb{E}X_n^{\triangledown}$.

$$|\|X_n - A_n\|_p - \|X_n^{\triangledown} - A_n^{\triangledown}\|_p| \leqslant \|X_n - X_n^{\triangledown}\|_p + |A_n - A_n^{\triangledown}| = o(B_n(p)). \quad (24)$$

Аналогично выводится

$$|B_n^*(p) - \|X_n^{\blacktriangledown}\|_p| = o(B_n(p)). \quad (25)$$

В леммы 2 и 3 вместо $X_{k,n}$ подставим $X_{k,n}^{\blacktriangledown}$ и положим $c_n = NB_n^*(p)$. С помошью леммы 1a и (22) получаем

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_k^{\blacktriangledown}| \geqslant NB_n^*(p)\} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_k^*| \geqslant NB_n^*(p)\}+$$

$$+2n\mathbb{P}\{|X_1| > \delta B_n(p)\} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\frac{B_k^*(p)}{NB_n^*(p)}\right)^p + o_n(1) = o_N(1) + o_n(1),$$

и, выбрав $N > 0$ и $n > 0$ достаточно большими, мы обеспечим выполнение условий лемм 2 и 3. Из леммы 3 аналогично (20) выводим

$$\mathbb{E}(X_n^{\blacktriangledown})^2 \leqslant (7NB_n^*(p))^2 + \mathbb{E}\left\{(X_n^{\blacktriangledown})^2,\ |X_n^{\blacktriangledown}| \geqslant 7NB_n^*(p)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (7NB_n^*(p))^2 + \tau\mathbb{E}(X_n^{\blacktriangledown})^2 + \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2 \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} (Y_k^{\blacktriangledown})^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (7NB_n^*(p))^2 + \tau\mathbb{E}(X_n^\blacktriangledown)^2 + \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2\delta^2 B_n^2(p). \tag{26}$$

Отсюда с учётом (24) при достаточно малых δ получаем

$$(B_n^*(p))^2 \geqslant (7N)^{-2}\left((1-\tau)\mathbb{E}(X_n^\blacktriangledown)^2 - \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2\delta^2 B_n^2(p)\right) =$$

$$= (7N)^{-2}\left(2(1-\tau)\mathbb{E}(X_n^\triangledown - A_n^\triangledown)^2 - \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2\delta^2 B_n^2(p)\right) \geqslant$$

$$\geqslant (7N)^{-2}\left(2(1-\tau)\|X_n^\triangledown - A_n^\triangledown\|_p^2 - \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2\delta^2 B_n^2(p) \geqslant C_2^2 B_n^2(p)\right), \tag{27}$$

то есть левое неравенство в утверждении а) леммы. Правое неравенство достаточно очевидно:

$$B_n^*(p) = \|X_n - \widehat{X}_n\|_p \leqslant 2\|X_n - A_n\|_p = C_3 B_n(p).$$

Аналогично (28) при фиксированном натуральном k получаем

$$(B_{nk}^*(p))^2 \geqslant (7N)^{-2}((1-\tau)\mathbb{E}(X_{nk}^\blacktriangledown)^2 - \gamma^{-1}\tau m^2(1+\varepsilon)^2\delta^2 B_{nk}^2(p)),$$

что, с учетом утверждения а), при достаточно малых $\delta > 0$ дает нам

$$(B_{nk}^*(p))^2 \geqslant C_5\mathbb{E}(X_{nk}^\blacktriangledown)^2 = C_5\sigma_{nk}^\blacktriangledown, \quad 0 < C_5 < \infty. \tag{28}$$

В силу (25) $\sigma_n^\blacktriangledown \to \infty$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, а $m = m(n) \to \infty$ таково, что $(\sigma_n^\blacktriangledown)^{-1}\sigma_m^\blacktriangledown \to 0$, $(\sigma_n^\blacktriangledown)^{-1}\sigma_{km}^\blacktriangledown \to 0$, $n \to \infty$. Обозначим $W = X_{kn+1,kn+(k-1)m}^\blacktriangledown$,

$U_j = X_{(j-1)(n+m)+1,jn+(j-1)m}^\blacktriangledown$, $j = 1,...,k$, $V_j = X_{jn+(j-1)m+1,j(n+m)}^\blacktriangledown$, $j = 1,...,k-1$.

Из (4) выводим

$$|X_{nk}^\blacktriangledown - \sum_{j=1}^k U_j - \sum_{j=1}^{k-1} V_j - W| \leqslant \varepsilon\left(\sum_{j=1}^k |U_j| + \sum_{j=1}^{k-1}|V_j| + |W|\right) + 2kN. \tag{29}$$

Отсюда

$$\left|\sigma_{nk}^\blacktriangledown - \left\|\sum_{j=1}^k U_j\right\|_2\right| \leqslant k\varepsilon\sigma_n^\blacktriangledown + k(1+\varepsilon)\sigma_m^\blacktriangledown + (1+\varepsilon)\sigma_{km}^\blacktriangledown + 2kN = k\varepsilon\sigma_n^\blacktriangledown(1+o_n(1).$$

Из (5) следует, что $|\mathbb{E}U_jU_l| \leqslant 4\varphi^{1/2}(m)(\sigma_n^\blacktriangledown)^2$, $j \neq l$, откуда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^k U_j\right)^2 = k\mathbb{E}U_1^2 + \sum_{j\neq l=l}^k \mathbb{E}U_jU_l = k(\sigma_n^\blacktriangledown)^2(1+o_n(1)). \tag{30}$$

Из (28), (29) и (30) при $\varepsilon < k^{-2}$ получаем теперь

$$B_{nk}^*(p) \geqslant \sqrt{C_5}\left(\left\|\sum_{j=1}^k U_j\right\|_2 - k^{-1}\varepsilon\sigma_n^\blacktriangledown + o(\sigma_n^\blacktriangledown)\right) \geqslant C_4\sqrt{k}B_n^*(p),$$

то есть утверждение б) леммы.

■

Доказательство теоремы 3. Покажем, что для последовательности $\{X_n^*\}$ выполняются условия теоремы 1.

Условие $(\mathrm{R_f})$ доказано в лемме 1б.

В лемме 4 для последовательности $\{X_n^*\}$ положим $c_n = NB_n^*(p)$, $N > 0$. Тогда в силу леммы 1а

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_k| \geqslant c_n\} \leqslant \frac{C_1 B_n^*(p)}{NB_n^*(p)} = \frac{C_1}{N}$$

и, выбрав $N > 0$ и m достаточно большими, можно обеспечить выполнение первого условия леммы 4 ($\tau < 1$).

Пусть теперь выполняется условие $(\mathrm{L_p})$. Из (6) и леммы 5а следует тогда

$$n(B_n^*(p))^{-p}\mathbb{E}\,\{|X_1^*|^p, |X_1^*| \geqslant \varepsilon B_n^*(p)\} \to 0,\ n \to \infty,$$

то есть выполняется условие (18). В силу утверждения а) леммы 4 последовательность $\{(B_n^*)^{-p}|X_n^*|^p\}$ равномерно интегрируема.

Наконец, из леммы 4б и леммы 5б выводим

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} k\mathbb{P}\{|X_n^*| \geqslant \varepsilon B_{nk}^*(p)\} \leqslant \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} k\mathbb{P}\{|X_n^*| \geqslant \varepsilon C_4\sqrt{k} B_n^*(p)\} = 0,$$

то есть выполняется условие (2). Из теоремы 1 следует теперь, что

$$b_n^{-1}X_n^* \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n\to\infty, \quad b_n = \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1}\, B_n^*(p).$$

Воспользуемся теперь известным результатом Н.А. Сапогова [9]. Пусть U_n и V_n — независимые случайные величины, функции распределения величин U_n, $U_n + V_n$ и $\mathcal{N}(0,1)$ будем обозначать соответственно F_n, G_n и Φ. Если $\sup\limits_x |G_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \varepsilon_n$, $\mathbb{E}\{U_n, |U_n| \leqslant N_n\} = \alpha_n, \mathbb{E}\{U_n^2, |U_n| \leqslant N_n\} - \alpha_n^2 = \beta_n^2$, $N_n = \sqrt{-2\ln\varepsilon_n} + 1$, $F_n(0) = 1/2$, то из [9] следует

$$\sup_x \left|\mathbb{P}\left\{\frac{U_n - \alpha_n}{\beta_n} < x\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant C\beta_n^{-3}(-\ln\varepsilon_n)^{-\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

где $C > 0$ — абсолютная константа.

Пусть μ_n - медиана X_n такая, что $\mathbb{P}\{X_n < \mu_n\} = 1/2$. (Без ограничения общности можем считать, что такая медиана существует, в противном случае мы можем вместо $\{X_n\}$ рассматривать последовательность $\{X_n + \eta_n\}$, где η_b — непрерывные величины, не зависящие от X_n и $\eta_n \to 0$ по вероятности, так что «добавка» η_n не повлияет на предельное распределение $b_n^{-1}(X_n - A_n)$.) Положим $U_n = \dfrac{X_n - \mu_n}{b_n}$, $V_n = -\dfrac{\widehat{X}_n - \mu_n}{b_n}$, тогда $U_n + V_n = \dfrac{X_n^*}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, так что $\sup\limits_x |G_n(x) - \Phi(x)| = \varepsilon_n \to 0$, $N_n = \sqrt{-2\ln\varepsilon_n} + 1 \to \infty$, $n \to \infty$. Вместе с $\{(B_n^*)^{-p}|X_n^*|^p\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{b_n^{-p}|X_n^*|^p\}$, а в силу (6) и равномерная интегрируемость $\{b_n^{-p}|X_n - \mu_n|^p\}$. Отсюда в силу (7) и леммы 5а

$$\sup_n (B_n^*(p))^{-p}\mathbb{E}\{|X_n - A_n|^p,\ |X_n - A_n| \geqslant NB_n^*(p)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n 2^{p-1}(B_n^*(p))^{-p}\mathbb{E}\{|X_n-\mu_n|^p,\ |X_n-\mu_n|\geqslant NB_n^*(p)-|A_n-\mu_n|\}+$$

$$+\sup_n 2^{p-1}(B_n^*(p))^{-p}|A_n-\mu_n|^p\mathbb{P}\{|X_n-A_n|\geqslant NB_n^*(p)\}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_n 2^{p-1}(B_n^*(p))^{-p}\mathbb{E}\{|X_n-\mu_n|^p,\ |X_n-\mu_n|\geqslant (N-C_\mu C_3^{-1})B_n^*(p)\}+$$

$$+\sup_n \frac{2^{p-1}C_\mu^p B_n^p(p)\mathbb{E}|X_n-A_n|^p}{N^p(B_n^*(p))^{2p}}=o_N(1),$$

то есть последовательность $\{(B_n^*(p))^{-p}|X_n-A_n|^p\}$ равномерно интегрируема.

Так как $b_n^{-p}\mathbb{E}\left\{|X_n-\mu_n|^p,|X_n-\mu_n|>N_nb_n\right\}\to 0,\ n\to\infty$, то с помощью (7) получаем

$$\alpha_n=\mathbb{E}\left\{\frac{X_n-\mu_n}{b_n},|X_n-\mu_n|\leqslant N_nb_n\right\}=\frac{A_n-\mu_n}{b_n}+o_n(1),$$

$$\beta_n^2=\mathbb{E}\left\{\frac{(X_n-\mu_n)^2}{b_n^2},|X_n-\mu_n|\leqslant N_nb_n\right\}-\alpha_n^2\geqslant$$

$$\geqslant \mathbb{E}\left\{\frac{(X_n-A_n)^2}{b_n^2},|X_n-A_n|\leqslant N_nb_n-C_\mu B_n(p)\right\}+$$

$$+2\frac{A_n-\mu_n}{b_n}\mathbb{E}\left\{\frac{X_n-A_n}{b_n},|X_n-\mu_n|>N_nb_n\right\}+\frac{(A_n-\mu_n)^2}{b_n^2}-\alpha_n^2+o_n(1)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\mathbb{E}\left\{\frac{|X_n-A_n|^p}{b_n^p},|X_n-A_n|\leqslant N_nb_n-C_\mu B_n(p)\right\}\right)^{2/p}-$$

$$-\frac{C_\mu B_n(p)}{b_n}o_n(1)+o_n(1)=\left(b_n^{-1}\|\mathcal{N}(0,1)\|_pB_n(p)\right)^2+o_n(1)\geqslant C_7>0,\qquad(32)$$

где $C_7>0$ не зависит от n. Из (31) выводим теперь

$$\sup_x\left|\mathbb{P}\left\{\frac{U_n-\alpha_n}{\beta_n}<x\right\}-\Phi(x)\right|=\sup_x\left|\mathbb{P}\left\{\frac{X_n-A_n}{\beta_nb_n}<x+o_n(1)\right\}-\Phi(x)\right|\to 0,$$

откуда следует $(\beta_nb_n)^{-1}(X_n-A_n)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1),\quad n\to\infty$. В силу (32) последовательность $\{(\beta_nb_n)^{-p}|X_n-A_n|^p\}$ равномерно интегрируема, так что

$$(\beta_nb_n)^p\sim\mathbb{E}|X_n-A_n|^p\|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-p}=B_n^p.(p)$$

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962, 719 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука. 1985.
3. Гринь А.Г. О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.

4. Гринь А.Г. О притяжении симметрических функций от зависимых величин к нормальному закону // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4(44). С. 26–32.
5. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабозависимых величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
6. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука. 1965. 524 с.
7. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, No. 4. P. 1304–1313.
8. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions // Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics). Boston – Basel – Stuttgart : Birkhäuser, 1986. V. 11. P. 165–192.
9. Сапогов Н.А. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределённой приближённо нормально // Вестник Ленинградского университета. 1959. Вып. 19. С. 78–105.

ON THE ATTRACTION TO THE NORMAL LAW OF FUNCTIONS OF WEAKLY DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin
Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The paper gives a “generally accepted” condition of weak dependence and a condition on the class of symmetric functions that provide fulfilment of the necessary and sufficient conditions, obtained earlier by the author, for attracting functions of dependent quantities to the normal law.

Keywords: symmetric functions, uniformly strong mixing condition, attraction to normal law.

References

1. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL Publ., 1962, 719 p. (in Russian)
2. Seneta E. Pravil’no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1985. (in Russian)
3. Grin’ A.G. O minimal’nykh usloviyakh slaboi zavisimosti v predel’nykh teoremakh dlya statsionarnykh posledovatel’nostei. Teoriya veroyatn. i ee primen., 2009, vol. 54, no. 2, pp. 344–354. (in Russian)
4. Grin’ A.G. O prityazhenii simmetricheskikh funktsii ot zavisimykh velichin k normal’nomu zakonu. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 4(44), pp. 26–32. (in Russian)

5. Grin' A.G. Normiruyushchie posledovatel'nosti v predel'nykh teoremakh dlya slabo zavisimykh velichin. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 285–300. (in Russian)
6. Ibragimov I.A., Linnik Yu.V. Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p. (in Russian)
7. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences. Ann. Probab., 1985, vol. 13, no. 4, pp. 1304–1313.
8. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions, Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics). Boston – Basel – Stuttgart, Birkhäuser, 1986, vol. 11, pp. 165–192.
9. Sapogov N.A. O nezavisimykh slagaemykh summy sluchainykh velichin, raspredelennoi priblizhenno normal'no. Vestnik Leningradskogo universiteta, 1959, vol. 19, pp. 78–105. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 18.02.2020