

ISSN 2222-8772

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

№ 1(53)
2020



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 1(53)

Омск
2020

Математические структуры и моделирование. — Омск : Омский государственный университет, 2020. — № 1(53). — 152 с.
ISSN 2222-8772 (print)
ISSN 2222-8799 (online)

Редакционная коллегия

- | | |
|---------------------------|--|
| А. К. Гуц | главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. |
| Д. Н. Лавров | ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. |
| Н. Ф. Богаченко | технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. |
| В. П. Голубятников | доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск. |
| С. И. Горлов | доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета. |
| А. Г. Гринь | доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. |
| В. А. Ерошенко | доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь. |
| B. Zilber | Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK. |
| А. Н. Кабанов | канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. |
| А. В. Копыльцов | доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина). |
| А. Г. Коробейников | доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН. |
| П. А. Корчагин | доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ). |
| V. Kreinovich | Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA. |
| В. А. Плетюхов | доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь. |
| Л. Б. Соколинский | доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск. |
| A. A. Fedorenko | Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France. |
| A. Jadczyk | Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France. |

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Омский государственный университет
им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства
массовой информации ПИ № ФС77-72200
от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск,
пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 30.05.2020.

Тираж 60 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Поздравление

В.А. Еровенко 70 лет! 4

Фундаментальная математика и физика

В.А. Еровенко. *Существенные спектры обыкновенных дифференциальных операторов II. Устойчивость спектров* 7

М.Н. Болдырева, А.А. Магазев, И.В. Широков. *Классификация полей Янга–Миллса, допускающих интегралы движения уравнений Вонга* .. 14

М.Н. Подоксёнов, В.В. Черных. *Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли $A(1) \oplus \mathbb{R}^2$* ... 25

С.А. Терентьев, А.К. Гуц. *Область аналитичности спектральной плотности электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде* 37

О. Kosheleva and V. Kreinovich. *On Geometry of Finsler Causality: For Convex Cones, There Is No Affine-Invariant Linear Order (Similar to Comparing Volumes)* 49

Прикладная математика и моделирование

А.В. Еремеев, А.В. Спиров. *Применение оценок из теории эволюционных вычислений к процедурам направленной эволюции* 56

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Анализ роста мицелля на основе модели Чантера–Торнли* ... 77

С.П. Баутин, А.А. Бугаенко, И.Ю. Крутова. *Частные решения линеаризованной системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса* 82

Д.Н. Горелов. *Об одной особенности интеграла Коши по замкнутому контуру* 94

Д.Н. Горелов. *Параметрическая особенность трёхмерного аналога интеграла Коши* 100

G. Acosta, E. Smith, V. Kreinovich. *How to Explain That Changes in Elderlies Depression Level Are Uniformly Distributed* 104

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



Компьютерные науки

Д.В. Козырев, Л.А. Володченкова. *Разработка серверной части программного приложения для удаленного хранения данных* 108

А.И. Горев, Е.Г. Горева. *О применимости существующих алгоритмов обработки данных к Big Data* 139

Проблемы образования

G. Acosta, E. Smith, V. Kreinovich. *Confirmation Bias in Systems Engineering: A Pedagogical Example* 144

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ!

ЕРОВЕНКО Валерий Александрович



Валерий Александрович Еровенко — член редколлегии нашего журнала. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета (г. Минск, Республика Беларусь).

Валерий Александрович родился 2 марта 1950 г. в г. Кирове Российской Федерации. В 1972 г. окончил факультет прикладной математики, а затем и аспирантуру БГУ. С 1975 г. работал ассистентом, доцентом, профессором кафедры функционального анализа механико-математического факультета университета. В 2003 г. он возглавил кафедру общей математики и информатики механико-математического факультета, которой руководит и в настоящее время.

В 1995 г. В.А. Еровенко представил и затем успешно защитил докторскую диссертацию «Спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов в банаховых пространствах» в Совете по защите диссертаций по математике при БГУ.

Представленные в работе результаты относятся к исследованию устойчивости различных существенных спектров ограниченных и замкнутых операторов в банаховых пространствах. Получены обобщения классической теоремы Вейля о существенном спектре на новые специальные классы линейных операторов, являющиеся исчерпывающими для рассматриваемых операторов. Найдены решения задач теории существенных спектров, связанные с совпадением существенных спектров и спектра квазиподобных операторов и различными вопросами непрерывности спектра и существенных спектров ограниченных линейных операторов. В максимальной общности найдены точные формулы и

выявлены общие закономерности для всех существенных спектров различных классов обыкновенных дифференциальных операторов в широкой шкале лебеговых пространств. Доказаны новые теоремы об инвариантности существенных спектров для этих дифференциальных операторов, обобщающие классическую теорему Вейля.

В.А. Еровенко – автор более 300 научных и научно-методических работ, включая монографии и учебные пособия, среди которых «Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов» и «Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах». Он один из авторов «Русско-белорусского математического словаря».

Валерий Александрович уделяет большое внимание преподаванию высшей математики и информатики на нематематических факультетах БГУ.

Большой вклад профессор В.А. Еровенко вносит в подготовку педагогических и научных кадров: он является членом двух докторских советов по защите диссертаций по математике и философии при БГУ.

Желаем Валерию Александровичу крепкого здоровья, научных достижений и творческих успехов на благо дружественной Республики Беларусь!

*Коллеги по редколлегии журнала
«Математические структуры
и моделирование»*

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ II. УСТОЙЧИВОСТЬ СПЕКТРОВ

В.А. Еровенко

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: erovenko@bsu.by

Белорусский государственный университет,
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. В настоящей работе получены точные формулы для нахождения существенных спектров, возмущённых с асимптотически постоянными на бесконечности коэффициентами с использованием относительно компактных и относительно малых возмущений на бесконечности в лебеговых пространствах L^p . Эти формулы можно интерпретировать как новые аналоги классической теоремы Вейля.

Ключевые слова: теория возмущений операторов, существенные спектры, обыкновенные дифференциальные операторы.

1. Основная часть

Пусть T — замкнутый линейный оператор на комплексном банаховом пространстве X . Существенные спектры оператора T можно определить как дополнения в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ множеств, задаваемых различными фредгольмовыми свойствами семейства операторов $T - \lambda I$:

$$\sigma_{ek}(T) := \mathbf{C} \setminus \Delta_k(T), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$\sigma_{e2}^+(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^+(T) \quad \sigma_{e2}^-(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^-(T),$$

где $\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\}$, $\Phi^+(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{nul}(T - \lambda I) < \infty\}$, $\Phi^-(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{def}(T - \lambda I) < \infty\}$, $\Delta_2(T) := \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s-\Phi(T)$, $\Delta_3(T) := \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T)$, $\Delta_4(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T) : \text{ind}(T - \lambda I) = 0\} = \Phi_0(T)$, $\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_4(T) : \text{проколота окрестность точки } \lambda \text{ лежит в резольвентном множестве оператора } T, \rho(T)\}$.

Каждое из множеств $\sigma_{ek}(T)$, $k = \overline{1, 5}$, и $\sigma_{e2}^\pm(T)$ называется *существенным спектром*, ясно, что $\sigma_{ek}(T) \subseteq \sigma_{el}(T)$ для $k \leq l$ и $\sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e2}^\pm(T) \subseteq \sigma_{e3}(T)$, причём указанные включения могут быть собственными [1].

Функциональные пространства для конкретных дифференциальных уравнений, в которых действуют операторы, соответствующие этим уравнениям, условиями задачи, как правило, однозначно не определяются. Поэтому при исследовании задачи в общей постановке целесообразно оператор рассматривать в

различных пространствах. Среди работ по теории L^p -спектров дифференциальных операторов отметим только пионерские работы по существенным спектрам. В работе Рота [2] исследован спектр σ_{e1} для обыкновенных дифференциальных операторов в L^p -пространствах. В работе Балслева и Гамелина [3] рассмотрен спектр σ_{e3} некоторых классов обыкновенных дифференциальных операторов в пространствах L^p , $1 < p < \infty$, и их возмущений, а обобщению этих результатов для спектра σ_{e1} в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, посвящена глава VI монографии Голдберга [4].

Точные формулы для нахождения всех определённых выше существенных спектров возмущённых дифференциальных операторов с асимптотически постоянными на бесконечности коэффициентами, полученные в [5] с использованием техники относительно компактных возмущений в L^p , $1 \leq p < \infty$, обобщаются в настоящей работе на возмущающие дифференциальные «добавки» более общего вида, рассматриваемые как относительно малые возмущения на бесконечности в сочетании с теоремой о расщеплении существенных спектров дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами. Основы метода расщепления для самосопряжённых операторов предложенного И.М. Глазманом изложены в его монографии [6]. В следующей теореме идея метода расщепления обобщается на несамосопряжённые дифференциальные операторы в пространствах L^p , $1 \leq p \leq \infty$.

Рассмотрим формальную дифференциальную операцию вида

$$\mu = \tau + \nu, \quad \tau = \sum_{k=0}^n a_k D^k, \quad \nu = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t) D^k, \quad (1)$$

где a_k , $0 \leq k \leq n$, — постоянные комплексные коэффициенты, а $b_k(t)$, $0 \leq k \leq n-1$, — комплекснозначные функции такие, что $b_k \in C^k(a, \infty)$.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $b_k(t)$, $0 \leq k \leq n-1$, в дифференциальной операции μ (1) удовлетворяют интегральным условиям

$$\sup_{m \leq s < \infty} \int_s^{s+1} |b_k(t)|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (2)$$

Тогда для существенных спектров минимального $T_0(\mu, p, [a, \infty))$, максимального $T(\mu, p, [a, \infty))$ операторов и оператора $S(\mu, p, [a, \infty))$, порождённых дифференциальной операцией μ (1) в банаховых пространствах $L^p(a, \infty)$, $-\infty < a < \infty$, $1 \leq p < \infty$, справедливы равенства, являющиеся обобщением теоремы Вейля, следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a, \infty))] &= \sigma_{ek}[T_0(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = \overline{1, 4}, 2^\pm \\ \sigma_{ek}[T(\mu, p, [a, \infty))] &= \sigma_{ek}[T(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = \overline{1, 4}, 2^\pm. \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через $T(\mu) := T(\mu, p, [a, \infty))$, $T_0(\mu) := T_0(\mu, p, [a, \infty))$, а через $T(\tau + \nu)$, $T_0(\tau + \nu)$, $T(\tau)$, $T_0(\tau)$, $B(\nu)$, $B_0(\nu)$ операторы, определённые в доказательстве теоремы 2 из статьи [1].

Заметим, что неравенство (12) из работы [1] для норм производных выполняется и для дифференциальной операции $\tau - \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому для функций $f \in D(T(\tau)) = D(T(\tau + \nu))$ в соответствующих лебеговых пространствах $L^p(a, \infty), 1 \leq p < \infty$, из неравенств (13) и (14), полученных в работе [1], следует, что найдётся такое $a \in (0, \infty)$ и, в силу условий (2) на коэффициенты b_k , такое достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(a), 0 < \varepsilon < 1$, для которых справедливы неравенства вида

$$\|\nu f\|_p \leq \varepsilon(\|(\tau - \lambda)f\|_p + \|f\|_p), \quad \|\nu f\|_p \leq \varepsilon(\|(\tau + \nu - \lambda)f\|_p + \|f\|_p).$$

Из этих оценок, а также следующих равенств для максимальных операторов $T(\tau + \nu) - \lambda I = (T(\tau) - \lambda I) + B(\nu)$ (см. формулу (8) из [1]) и $T(\tau) - \lambda I = (T(\tau) + B(\nu) - \lambda I) - B(\nu) = (T(\tau + \nu) - \lambda I) - B(\nu)$ вытекает, что оператор $T(\tau + \nu) - \lambda I$ можно рассматривать как относительно малое возмущение оператора $T(\tau) - \lambda I$, а оператор $T(\tau) - \lambda I$ — как относительно малое возмущение оператора $T(\tau + \nu) - \lambda I$. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса замкнутых полуфредгольмовых операторов при относительно малых возмущениях следует, что $\lambda \in \Phi^+(T(\tau))$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Phi^+(T(\tau) + B(\nu))$, и для индексов операторов выполняется равенство $\text{ind}(T(\tau) - \lambda I) = \text{ind}(T(\tau) + B(\nu) - \lambda I) = \text{ind}(T(\tau + \nu) - \lambda I)$. Поэтому для существенных спектров максимального оператора $T(\tau + \nu)$ справедливы равенства:

$$\sigma_{ek}[T(\tau + \nu)] = \sigma_{ek}[T(\tau)], \quad k = \overline{1, 4}, \quad \sigma_{e2}^\pm[T(\tau + \nu)] = \sigma_{e2}^\pm[T(\tau)]. \quad (3)$$

Аналогичными рассуждениями, пользуясь равенством (9) из [1], для минимальных операторов $T_0(\tau)$ и $B_0(\nu)$ можно показать, что для существенных спектров минимального оператора $T_0(\tau + \nu)$ выполняются соответствующие равенства

$$\sigma_{ek}[T_0(\tau + \nu)] = \sigma_{ek}[T_0(\tau)], \quad k = \overline{1, 4}, \quad \sigma_{e2}^\pm[T_0(\tau + \nu)] = \sigma_{e2}^\pm[T_0(\tau)]. \quad (4)$$

Теорема доказана. ■

Обозначим через $S(\mu, p, [a, \infty))$ замкнутый дифференциальный оператор, являющийся расширением минимального и сужением максимального операторов, порождённых дифференциальной операцией μ (1).

Следствие 1. *Существенные спектры дифференциальных операторов, порождённых операцией μ (15), можно вычислить по формулам:*

$$\sigma_{ek}[S(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{e2}^\pm[S(\mu, p, [a, \infty))] = \{P(\lambda) : \text{Re} \lambda = 0\}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma[T_0(\mu, p, [a, \infty))] = \{P(\lambda) : \text{Re} \lambda \geq 0\}, \quad k = 4, 5,$$

$$\sigma_{ek}[T(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma[T(\mu, p, [a, \infty))] = \{P(\lambda) : \text{Re} \lambda \leq 0\}, \quad k = 4, 5,$$

где P — соответствующий дифференциальной операции с постоянными коэффициентами τ полином

$$P(t) := \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Заметим, что в теореме 2 из работы [8] получены точные формулы для нахождения всех существенных спектров максимальных и минимальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Поэтому из равенств (3), (4) следуют соответствующие утверждения в случае формальной дифференциальной операцией $\mu = \tau + \nu$ (1) для существенных спектров $\sigma_{ek}, k = \overline{1, 5}$ и $\sigma_{e2}^{\pm}$ минимального $T_0(\mu)$ и максимального $T(\mu)$ возмущённых дифференциальных операторов в лебеговых пространствах $L^p(a, \infty)$ при достаточно большом a . Оставшиеся равенства для промежуточных дифференциальных операторов $S(\mu, p, [a, \infty))$ вытекают из теоремы 1 работы [7]. Наконец, из теоремы 1 статьи [1] следует справедливость полученных формул всех существенных спектров рассмотренных дифференциальных операторов в лебеговых пространствах $L^p(a, \infty), 1 \leq p < \infty$, для любого $a \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим дифференциальную операцию μ более общего вида как возмущение дифференциальной операции с постоянными коэффициентами дифференциальной операцией с переменными коэффициентами такого же порядка, т. е.

$$\mu = \tau + \nu, \quad \tau = \sum_{k=0}^n a_k D^k, \quad \nu = \sum_{k=0}^n b_k(t) D^k, \quad (5)$$

где $a_k, 0 \leq k \leq n$, — постоянные комплексные коэффициенты, а $b_k(t), 0 \leq k \leq n$, — комплекснозначные функции такие, что $b_k \in C^k(a, \infty)$.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов дифференциальной операции μ (5) выполняются условия $b_n, 1/(a_n + b_n) \in L^\infty$ и коэффициенты $b_k(t), k = \overline{0, n}$, удовлетворяют условиям (2). Тогда для минимального $T_0(\mu, p, [a, \infty))$, максимального $T(\mu, p, [a, \infty))$ и промежуточного $S(\mu, p, [a, \infty))$ дифференциальных операторов, порождённых в $L^p(a, \infty), -\infty < a < \infty, 1 \leq p < \infty$, дифференциальной операцией μ (5) справедливо следующее обобщение теоремы Вейля:

$$\sigma_{ek}[S(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[S(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = 1, 2, 2^\pm, 3,$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[T_0(\tau, p, [a, \infty))],$$

$$\sigma_{ek}[T(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[T(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = 4, 5.$$

Доказательство. Поскольку теорема 2 из работы [1] об относительно малых возмущениях дифференциального оператора в общем виде справедлива для дифференциальной операции τ (1) с переменными коэффициентами, то в виду условий (2) стабилизируемости на бесконечности для коэффициентов $b_k(t), 0 \leq k \leq n$, для доказательства теоремы достаточно исследовать частный случай дифференциальной операции μ (5) для $b_k(t) = 0, 0 \leq k \leq n-1$, вида

$$\mu = \tau + b_n(t) D^n = \sum_{k=0}^n a_k D^k + b_n(t) D^n. \quad (6)$$

Запишем для дифференциальной операции $\mu - \lambda$, где μ определено по формуле (6), представление в виде

$$\mu - \lambda = \left(1 + \frac{b_n(t)}{a_n}\right)(\tau - \lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n(t)}{a_n} a_k D^k + \frac{b_n(t)}{a_n} \lambda.$$

В силу условия (2) на коэффициент $b_n(t)$ максимальный $T(\mu) - \lambda I$ и минимальный $T_0(\mu) - \lambda I$ дифференциальные операторы, порождённые μ (6), можно рассматривать как относительно малые возмущения максимального и минимального дифференциальных операторов, порождённых дифференциальной операцией $(1 + (b_n/a_n))(\tau - \lambda)$ в банаховом пространстве $L^p(a, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, для подходящего достаточно большого a соответствующими дифференциальными операторами, порождёнными дифференциальной операцией $\eta := -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n(t)}{a_n} a_k D^k + \frac{b_n(t)}{a_n} \lambda$.

Оператор, задаваемый умножением на функцию $0 < 1 + (b_n(t)/a_n) < \infty$, обратим, и, следовательно, существенные спектры и спектр максимального $T(\mu)$ и минимального $T_0(\mu)$ операторов, порождённых операцией μ (6), совпадают с существенными спектрами и спектром максимального $T(\tau)$ и минимального $T_0(\tau)$ дифференциальных операторов, порождённых дифференциальной операцией τ с постоянными коэффициентами. Пользуясь теоремой 1 из [1], теоремой об устойчивости индекса полуфредгольмовых операторов, теоремой 1 из [7] и теоремой 2 из [8] и повторяя рассуждения для относительно малого на бесконечности возмущения, проведённые выше для операции ν (1), получим утверждение теоремы для дифференциальной операции μ , определённой по формуле (6). Теорема доказана. ■

Следствие 2. При условиях теоремы 2 для существенных спектров дифференциальных операторов, задаваемых операцией μ (5), справедливы формулы из следствия 1.

Замечание. При дополнительных условиях типа (2) на производные коэффициентов $b_k(t)$, $0 \leq k \leq n$, порядка $1 \leq i \leq k$ в пространстве L^1 можно доказать справедливость формул из следствия 1 для нахождения существенных спектров дифференциальных операторов, рассмотренных в теореме 2, в пространстве $L^\infty(a, \infty)$, $a \in (-\infty, \infty)$.

Теоремы 1 и 2 обобщают результаты работ [3, 4] для существенных спектров Фредгольма и Голдберга максимальных операторов в пространстве $L^p(0, \infty)$ для $1 < p < \infty$ и результаты работы [9] для различных существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Отметим также работы [10, 11] по локализации существенного спектра самосопряжённых дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еровенко В.А. Существенные спектры обыкновенных дифференциальных операторов I. Возмущение операторов // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1. С. 30–37.
2. Rota G.C. Extension theory of differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, No. 1. P. 23–65.
3. Balslev E., Gamelin T.W. The essential spectrum of a class of ordinary differential operators // Pacific J. Math. 1964. Vol. 14, No. 3. P. 755–776.
4. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y. : McGraw-Hill, 1966.
5. Еровенко В.А. Применение абстрактной теории возмущений к исследованию существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов в L^p // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 7. С. 867–875.
6. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М. : Физматгиз, 1963.
7. Еровенко В.А. О L^p –существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов I. Операторы с достаточно гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1024–1034.
8. Еровенко В.А. О L^p –существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов II. Операторы с постоянными коэффициентами и операторы Эйлера // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1162–1170.
9. Evans W.D., Lewis R.T., Zettl A. Non-self-adjoint operators and their essential spectra // Lect. Notes Math. 1983. No. 32. P. 123–160.
10. Race D. On the essential spectra of linear 2nth order differential operators with complex coefficients // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. Vol. 92A, No. 1. P. 65–75.
11. Müller-Rfeiffer E. Spectral theory of ordinary differential operators. N.Y. : John Wiley & Sons, 1981.

**ESSENTIAL SPECTRA OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS II.
STABILITY OF SPECTRA****V.A. Erovenko**Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: erovenko@bsu.by

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Abstract. The article contains precise formulas for finding of the essential spectra that are revolted with asymptotically constants on infinity in coefficients with use of rather compact and rather small indignations on infinity in Lebesgue spaces of L^p . These formulas are new analogs of the classical theorem of Weyl.

Keywords: perturbation theory of operators, essential spectra, ordinary differential operators.

REFERENCES

1. Erovenko V.A. Sushchestvennyye spektry obyknovennykh differentsial'nykh operatorov I. Vozmushchenie operatorov. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2019, no. 1, pp. 30–37. (in Russian)
2. Rota G.C. Extension theory of differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1958, vol. 11, no. 1, pp. 23–65.
3. Balslev E. and Gamelin T.W. The essential spectrum of a class of ordinary differential operators. *Pacific J. Math.*, 1964, vol. 14, no. 3, pp. 755–776.
4. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y., McGraw-Hill Publ., 1966.
5. Erovenko V.A. Primenenie abstraktnoi teorii vozmushchenii k issledovaniyu sushchestvennykh spektrov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov v L^p . *Differents. uravneniya*, 1997, vol. 33, no. 7, pp. 867–875. (in Russian)
6. Glazman I.M. Pryamyie metody kachestvennogo spektral'nogo analiza singulyarnykh differentsial'nykh operatorov. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. (in Russian)
7. Erovenko V.A. O L^p -sushchestvennykh spektrakh некотorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov I. Operatory s dostatochno gladkimi koeffitsientami. *Differents. uravneniya*, 1996, vol. 32, no. 8, pp. 1024–1034. (in Russian)
8. Erovenko V.A. O L^p -sushchestvennykh spektrakh некотorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov II. Operatory s postoyannymi koeffitsientami i operatory Eilera. *Differents. uravneniya*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1162–1170. (in Russian)
9. Evans W.D., Lewis R.T., and Zettl A. Non-self-adjoint operators and their essential spectra, *Lect. Notes Math.*, 1983, no. 32, pp. 123–160.
10. Race D. On the essential spectra of linear 2nth order differential operators with complex coefficients. *Proc. Roy. Soc., Edinburgh*, 1982, vol. 92A, no. 1. pp. 65–75.
11. Müller-Rfeiffer E. Spectral theory of ordinary differential operators. N.Y., John Wiley & Sons, 1981.

Дата поступления в редакцию: 25.11.2019

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА, ДОПУСКАЮЩИХ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОНГА

М.Н. Болдырева

аспирант, e-mail: b_oldyrev_a@mail.ru

А.А. Магазев

д.ф.-м.н., e-mail: magazev@omgtu.ru

И.В. Широков

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: iv_shirokov@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. В статье исследуются калибровочные поля, характеризующиеся существованием нетривиальных интегралов движения уравнений Вонга. Для калибровочной группы $SU(2)$ детально описан класс полей, допускающих только изоспиновые первые интегралы. Получена классификация всех калибровочно неэквивалентных полей Янга–Миллса в трехмерном пространстве, допускающих линейный интеграл движения уравнений Вонга.

Ключевые слова: поле Янга–Миллса, уравнения Вонга, интеграл движения, калибровочное преобразование.

Введение

Уравнения Вонга [1], полученные им в 1970 г., до сих пор привлекают внимание специалистов по теории калибровочных полей и квантовой хромодинамике (см., например, [2,3]). Полученные как результат классического приближения уравнения Дирака, эти уравнения описывают движение классической частицы с изоспином в неабелевом калибровочном поле. Так как масштабы квантовой хромодинамики ограничены размером порядка нуклона, подобные частицы, конечно же, не могут быть полностью описаны классическими уравнениями. Однако во многих квантовых задачах важную роль играют именно классические решения уравнений движения (квазиклассическое приближение, интеграл по траекториям), что делает задачу их нахождения актуальной. Кроме того, особенности движения классических частиц часто помогают понять и определённые квантовые закономерности.

При нахождении решений уравнений Вонга первостепенное значение имеют интегралы движения, то есть величины, постоянные на фазовых траекториях изоспиновой частицы. В общем случае задача их нахождения по сложности сопоставима с самой задачей интегрирования уравнений движения, поэтому

обычно их поиск осуществляется в заранее предопределённом классе функций. Например, для интегралов движения, являющихся полиномами от импульсных переменных, имеется общая ковариантная процедура их построения, предложенная ван Холтеном [4]. В настоящей статье мы исследуем вопрос существования интегралов движения, линейных по импульсным и изоспиновым координатам. Оказывается, что пуассонова алгебра подобных интегралов имеет весьма прозрачную алгебраическую структуру, что позволяет сформулировать содержательную задачу о классификации калибровочных полей с такими интегралами движения.

Структура нашей статьи следующая. В первом разделе мы напоминаем некоторые известные факты, касающиеся уравнений Вонга. Здесь же мы приводим определяющие уравнения для линейных интегралов движения, полученные одним из авторов ранее в работе [5]. Во втором разделе мы подробно исследуем класс полей Янга–Миллса, допускающих чисто изоспиновый интеграл движения. В третьем разделе мы получаем полную классификацию полей Янга–Миллса в трёхмерном евклидовом пространстве, для которых уравнения Вонга имеют нетривиальный линейный интеграл движения.

1. Интегралы движения уравнений Вонга

Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие. Классическая динамика изоспиновой частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле A_i^α на M , может быть описана *уравнениями Вонга* [1]:

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad \dot{p}_i = F_{ij}^\alpha g^{jk} p_k \tau_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k, \quad \dot{\tau}_\alpha = -f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma A_i^\beta g^{ij} p_j. \quad (1)$$

Здесь g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора, (x^i, p_i) и τ_α — фазовые и изоспиновые координаты частицы соответственно, $f_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры Ли $\mathcal{K}$ калибровочной группы K , F_{ij}^α — компоненты тензора напряжённости калибровочного поля, определяемые как

$$F_{ij}^\gamma = \frac{\partial A_j^\gamma}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i^\gamma}{\partial x^j} + f_{\alpha\beta}^\gamma A_i^\alpha A_j^\beta. \quad (2)$$

Точкой обозначена производная по собственному времени частицы. Константу связи мы полагаем равной единице. Если не оговорено противное, по повторяющимся индексам мы подразумеваем суммирование.

Как показали Стернберг [6] и Вейнштейн [7], уравнения Вонга могут быть представлены в гамильтоновой форме. Введём обобщённые импульсы $P_i \equiv p_i + A_i^\alpha \tau_\alpha$ и определим в пространстве функций от переменных x^i, P_i и τ_α скобку Пуассона

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial P_i} - f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_\beta}, \quad (3)$$

являющуюся, как легко видеть, прямой суммой обычной канонической скобки и скобки Ли–Пуассона на дуальном пространстве $\mathcal{K}^*$. Тогда уравнения (1) можно

записать в виде гамильтоновой системы

$$\dot{x}^i = \{H, x^i\}, \quad \dot{P}_i = \{H, P_i\}, \quad \dot{\tau}_\alpha = \{H, \tau_\alpha\}, \quad (4)$$

где гамильтониан частицы $H = H(x, P, \tau)$ задается равенством

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} (P_i - A_i^\alpha \tau_\alpha) (P_j - A_j^\beta \tau_\beta).$$

Напомним, что *интегралы движения* гамильтоновых систем — это функции, имеющие с гамильтонианом тождественно нулевую скобку Пуассона. Очевидные интегралы движения системы уравнений (4) — это сам гамильтониан H и функции Казимира калибровочной алгебры $\mathcal{K}$, являющиеся инвариантами коприсоединённого представления соответствующей калибровочной группы K . Таким образом, истинная динамика частицы происходит не во всем пространстве $T^*M \times \mathcal{K}^*$, а на его подмногообразии $T^*M \times \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — некоторая орбита коприсоединённого представления в $\mathcal{K}^*$.

Как правило, упомянутых интегралов не хватает для осуществления процедуры интегрирования гамильтоновой системы (4), в связи с чем актуальной становится проблема поиска дополнительных интегралов движения. Так как данная задача по сложности сопоставима с самой задачей интегрирования, целесообразно ограничить область поиска некоторым заданным классом функций, для которых задача построения интегралов движения стала бы содержательной. В простейшем случае это может быть класс функций, линейных по переменным P_i и τ_α :

$$X(x, P, \tau) = \xi^i(x) P_i + \chi_i^\alpha(x) \tau_\alpha. \quad (5)$$

Можно показать [5], что условие $\{H, X\} = 0$ для функции (5) будет эквивалентно системе равенств

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} g_{kj} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} g_{ik} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi^\gamma}{\partial x^i} + f_{\alpha\beta}^\gamma A_i^\alpha \chi^\beta + \xi^j \frac{\partial A_i^\gamma}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} A_j^\gamma = 0,$$

первое из которых есть не что иное, как условие *киллинговости* векторного поля $\xi = \xi^i(x) \partial_i$, а второе может быть переписано более компактно как

$$d\chi + [A, \chi] = -\mathcal{L}_\xi A. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли в направлении векторного поля ξ , $A = (A_i^\alpha dx^i) e_\alpha$, $\chi = \chi^\alpha e_\alpha$, где $\{e_\alpha\}$ — базис в калибровочной алгебре $\mathcal{K}$, выбранный так, что $[e_\alpha, e_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$.

Важно отметить, что уравнение (6) калибровочно инвариантно в следующем смысле: если $\mathcal{K}$ -значная функция χ удовлетворяет ему для заданного потенциала A , тогда функция

$$\tilde{\chi} = g\chi g^{-1} - (\xi g) g^{-1} \quad (7)$$

будет удовлетворять уравнению (6) для калибровочно эквивалентного потенциала

$$\tilde{A} = gAg^{-1} - dg g^{-1}. \quad (8)$$

Здесь $g : M \rightarrow K$ — произвольная гладкая K -значная функция на M .

В работе [5] показано, что векторы Киллинга ξ , для которых система (6) совместна, образуют подалгебру в алгебре всех киллинговых векторных полей на M . Обозначим эту подалгебру символом $\mathcal{G}$ и выберем в ней некоторый базис, образованный векторными полями $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$, $a = 1, \dots, n \equiv \dim \mathcal{G}$. Тогда мы имеем набор n интегралов движения уравнений Вонга

$$X_a = \xi_a^i(x)P_i + \chi_a^\alpha(x)\tau_\alpha, \quad a = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $\chi_a^\alpha(x)$ — функции, удовлетворяющие равенствам (6) для заданного векторного поля ξ_a . В дополнение к интегралам (9) могут существовать также *изоспиновые* интегралы движения, порождаемые решениями однородного уравнения

$$d\vartheta + [A, \vartheta] = 0, \quad (10)$$

получаемого из (6) приравниванием к нулю правой части. Если $\{\vartheta_1(x), \dots, \vartheta_r(x)\}$ — базис соответствующего пространства решений, то изоспиновые интегралы имеют вид

$$Y_\mu = \vartheta_\mu^\alpha(x)\tau_\alpha, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (11)$$

где число r не превышает размерность алгебры $\mathcal{K}$. Легко показать, что этот набор функций замкнут относительно скобки Пуассона (3) и образует некоторую алгебру Ли, которую мы будем обозначать символом $\mathcal{N}$.

В статье [5] исследована структура пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, порождаемой интегралами движения (9) и (11): алгебра $\mathcal{N}$ образует в $\mathcal{P}$ идеал, причём соответствующая фактор-алгебра $\mathcal{P}/\mathcal{N}$ является изоморфной алгебре $\mathcal{G}$. Это означает, что алгебра $\mathcal{P}$ представляет собой некоторое *расширение* алгебры $\mathcal{G}$ с помощью алгебры $\mathcal{N}$.

2. Поле Янга–Миллса: случай $\mathcal{N} \neq 0$

Рассмотрим в качестве калибровочной группы K трёхмерную простую группу $SU(2)$. Калибровочное поле в этом случае называют *полем Янга–Миллса*. Для дальнейших целей в алгебре Ли $su(2)$ этой группы мы зафиксируем базис $\{e_\alpha\}$, коммутационные соотношения в котором имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2. \quad (12)$$

Проанализируем возможную структуру идеала $\mathcal{N}$, образованного изоспиновыми интегралами движения в случае поля Янга–Миллса. Предварительно отметим, что однородное уравнение (10) является калибровочно-инвариантным: если ϑ — его решение для потенциала A , тогда функция

$$\tilde{\vartheta} = g\vartheta g^{-1}$$

будет являться решением (10) для калибровочно-эквивалентного потенциала (8).

Ясно, что для калибровочных полей «общего положения» уравнение (10) будет иметь только нулевое решение, что означает $\mathcal{N} = \{0\}$. Тем не менее, допустим, что это не так и существует некоторое решение $\vartheta \neq 0$. Очевидно, что с помощью локального калибровочного преобразования мы можем добиться $\vartheta = \kappa(x)e_1$, где $\kappa(x)$ — ненулевая скалярная функция на M . Подставляя эту функцию в уравнение (10), мы получаем $d\kappa = A^2 = A^3 = 0$, то есть κ является ненулевой константой, а потенциал поля имеет вид

$$A = a(x)e_1 \quad \text{или} \quad A_i^\alpha = a_i(x)\delta_1^\alpha, \quad (13)$$

где $a(x) = a_i(x)dx^i$ — скалярная дифференциальная 1-форма на M .

Подставляя потенциал (13) в уравнение (10), получаем систему уравнений на неизвестные функции ϑ^α :

$$d\vartheta^1 = 0, \quad d\vartheta^2 = a(x)\vartheta^3, \quad d\vartheta^3 = -a(x)\vartheta^2. \quad (14)$$

Так как должно быть $d^2\vartheta^2 = d^2\vartheta^3 = 0$, в качестве необходимого условия разрешимости этой системы имеем

$$\vartheta^2 da = \vartheta^3 da = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Если $da \neq 0$, то из (15) следует $\vartheta^2 = \vartheta^3 = 0$, в то время как из первого уравнения системы (14) получаем $\vartheta^1 = \text{const}$. Таким образом, в калибровочном поле вида (13), где $da \neq 0$, идеал $\mathcal{N}$ одномерен и порождается функцией $Y = \tau_1$ (см. формулу (11)).

2. Если $da = 0$, потенциал (13) калибровочно тривиален, так как в этом случае $F = (da)e_1 = 0$. Как известно, для такого поля существует калибровка, в которой потенциал будет равен нулю: $\tilde{A} = 0$. Но это значит, что в этой калибровке общее решение (10) имеет вид $\tilde{\vartheta}^\alpha = \text{const}$, откуда следует, что идеал $\mathcal{N}$ трёхмерен и изоморфен алгебре $su(2)$.

Резюмируем полученные результаты в виде следующего предложения.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{N}$ — идеал, образованный изоспиновыми интегралами движения уравнений Вонга. Тогда $\mathcal{N} \neq 0$, если и только если поле Янга–Миллса с точностью до калибровочного преобразования имеет вид (13). При этом:

- 1) если $da \neq 0$, то $\dim \mathcal{N} = 1$;
- 2) если $da = 0$, то $\mathcal{N} \simeq su(2)$.

В заключение этого раздела, обсудим некоторые особенности полей Янга–Миллса вида (13). Во-первых, отметим, что тензор этого калибровочного поля имеет достаточно простой вид

$$F_{ij}^\alpha = b_{ij}\delta_1^\alpha, \quad \text{где} \quad b_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}.$$

Во-вторых, выше мы уже отмечали, что изоспиновая переменная τ_1 для таких полей является интегралом движения. Это также непосредственно следует из уравнений Вонга (1), так как $\dot{\tau}_1 = -f_{1\beta}^\gamma \tau_\gamma A_i^\beta g^{ij} p_j = 0$ в силу того, что $A_i^\beta = a_i \delta_1^\beta$. Вводя обозначение $\tau_1 \equiv e$, из (1) получаем следующие уравнения на фазовые координаты (x^i, p_i) :

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad \dot{p}_i = e b_{ij} g^{jk} p_k - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k. \quad (16)$$

Так как данные уравнения не содержат изоспиновых переменных, последние никак не влияют на поведение фазовых траекторий частицы: фазовое поведение частицы не «чувствует» динамику в изоспиновом пространстве. Существенно также, что уравнения (16) по форме совпадают с уравнениями движения обычной скалярной частицы с зарядом e во внешнем электромагнитном поле с напряжённостью b_{ij} . Таким образом, с точки зрения уравнений Вонга поля Янга–Миллса вида (13) фактически эквивалентны электромагнитным полям с абелевой калибровочной группой $U(1)$.

3. Классификация полей Янга–Миллса, допускающих алгебру $\mathcal{P} \neq 0$

В настоящем разделе мы собираемся дать классификацию полей Янга–Миллса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, допускающих нетривиальную пуассонову алгебру $\mathcal{P}$. Так как случай $\mathcal{N} \neq 0$ фактически сводится к случаю электромагнитного поля, нам нет нужды его здесь рассматривать, поскольку все электромагнитные поля, допускающие нетривиальный линейный по импульсам интеграл движения уравнений Лоренца, перечислены в работе [8].

В случае $\mathcal{N} = 0$ пуассонова алгебра $\mathcal{P}$ изоморфна алгебре $\mathcal{G}$ (напомним, что последняя определяется как подалгебра векторов Киллинга, для которых уравнение (6) является совместным). Это означает, что интегралы движения $X_a = \xi_a^i(x) P_i + \chi_a^\alpha(x) \tau_\alpha$, образующие базис пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, должны удовлетворять соотношениям

$$\{X_a, X_b\} = c_{ab}^c X_c,$$

где c_{ab}^c — структурные константы алгебры $\mathcal{G} = \{\xi_a\}$: $[\xi_a, \xi_b] = c_{ab}^c \xi_c$. С использованием выражения (3) для скобки Пуассона данные соотношения могут быть записаны в виде

$$\xi_a \chi_b^\gamma - \xi_b \chi_a^\gamma + f_{\alpha\beta}^\gamma \chi_a^\alpha \chi_b^\beta = c_{ab}^c \chi_c^\gamma. \quad (17)$$

Отметим, что полученная система уравнений не зависит явно от потенциалов поля Янга–Миллса и для заданной алгебры $\mathcal{G}$ представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка на неизвестные $su(2)$ -значные функции $\chi_a = \chi_a^\alpha(x) e_\alpha$.

Допустим, что мы нашли общее решение системы уравнений (17). Выберем из полученного множества решений те из них, которые являются неэквивалентными относительно преобразований вида (7). Подставляя эти решения

в выражение (6), получаем систему уравнений на неизвестные потенциалы $A = A_i^\alpha(x)dx^i e_\alpha$, которая в общем случае может быть неинтегрируемой. Добавляя соответствующие условия совместности и интегрируя полученную расширенную систему, мы найдём явный вид потенциалов поля Янга–Миллса, которые допускают нетривиальную алгебру интегралов движения уравнений Вонга. Подчеркнём, что заодно мы находим и базис самой пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, задаваемый набором функций (9).

При разбиении полей Янга–Миллса на классы эквивалентности, помимо калибровочных преобразований вида (8) удобно также учитывать преобразования, порождаемые группой изометрий $E(3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Иначе говоря, мы будем считать два поля Янга–Миллса *эквивалентными*, если их $su(2)$ -значные 1-формы A и $\tilde{A}$ с точностью до локального калибровочного преобразования связаны преобразованием из $E(3)$:

$$\phi^* \tilde{A} = gAg^{-1} - dg g^{-1}, \quad \phi \in E(3), \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2).$$

Нетрудно показать, что подалгебры $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}} \subset e(3)$, соответствующие эквивалентным полям A и $\tilde{A}$, будут $E(3)$ -сопряжены в $e(3)$, поэтому при перечислении неэквивалентных полей Янга–Миллса нам будет достаточно ограничиться подалгебрами, неэквивалентными относительно внутренних автоморфизмов.

Классификация всех собственных подалгебр алгебры $e(3)$ с точностью до $E(3)$ -сопряжений хорошо известна [9]; соответствующий список приведён в таблице 1. Для обозначения подалгебр мы используем нотацию $\mathcal{G}_{n,k}$, где n — размерность подалгебры, а k — её порядковый номер в списке подалгебр с данной размерностью. Для обозначения семейства неэквивалентных подалгебр, непрерывно параметризованных параметром λ , мы используем обозначение $\mathcal{G}_{n,k}^\lambda$. Подалгебры задаются явным указанием базисных векторных полей $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$ в прямоугольных декартовых координатах $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. В третьей колонке указываются подгруппы $E(3)$, генерируемые соответствующими алгебрами Ли.

Таблица 1. Подалгебры алгебры $e(3)$ с точностью до $E(3)$ -сопряжений

Подалгебра	Базисные векторные поля ξ_a	Подгруппа
$\mathcal{G}_{1,1}$	$\xi_1 = \partial_z$	$\mathbb{R}$
$\mathcal{G}_{1,2}$	$\xi_1 = y\partial_x - x\partial_y$	$SO(2)$
$\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$	$\xi_1 = y\partial_x - x\partial_y + \lambda^{-1}\partial_z, \lambda > 0$	$\overline{SO(2)}$
$\mathcal{G}_{2,1}$	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial_y$	$\mathbb{R}^2$
$\mathcal{G}_{2,2}$	$\xi_1 = \partial_z, \xi_2 = y\partial_x - x\partial_y$	$\mathbb{R} \times SO(2)$
$\mathcal{G}_{3,1}$	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial_y, \xi_3 = \partial_z$	$\mathbb{R}^3$
$\mathcal{G}_{3,2}^\lambda$	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial, \xi_3 = y\partial_x - x\partial_y + \lambda^{-1}\partial_z, \lambda > 0$	$\overline{E(2)}$
$\mathcal{G}_{3,3}$	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial_y, \xi_3 = y\partial_x - x\partial_y$	$E(2)$
$\mathcal{G}_{3,4}$	$\xi_1 = z\partial_y - y\partial_z, \xi_2 = x\partial_z - z\partial_x, \xi_3 = y\partial_x - x\partial_y$	$SO(3)$
$\mathcal{G}_{4,1}$	$\xi_1 = \partial_x, \xi_2 = \partial_y, \xi_3 = \partial_z, \xi_4 = y\partial_x - x\partial_y$	$E(2) \times \mathbb{R}$

Сформулируем теперь алгоритм классификации полей Янга–Миллса, допускающих нетривиальные алгебры $\mathcal{P}$ (с нулевым идеалом $\mathcal{N}$).

1. Фиксируем подалгебру $\mathcal{G}_{n,k}$ из таблицы 1 и находим для неё все решения системы уравнений (17) с точностью до калибровочных преобразований (7).
2. Для тех решений системы уравнений (17), для которых выполнено условие интегрируемости, находим общее решение уравнения (6).
3. Выписываем полученные потенциалы A_i^α калибровочного поля и соответствующие им интегралы движения уравнений Вонга в соответствии с формулой (9).

Ниже приведен список найденных с помощью предложенного алгоритма полей Янга–Миллса. Подалгебры из таблицы 1 мы дополнили двумя несобственными подалгебрами: нулевой подалгеброй $\mathcal{G}_0 = \{0\}$ и самой алгеброй $e(3)$, обозначаемой как $\mathcal{G}_6$. В записях мы придерживаемся следующей нотации: f_α , g_α и h_α — произвольные функции своих аргументов, μ_α — произвольные постоянные, $\varepsilon = \pm 1$. Кроме того, мы используем различные типы координат в $\mathbb{R}^3$:

- 1) полярные в случае подалгебр $\mathcal{G}_{1,2}$ и $\mathcal{G}_{2,2}$: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$;
- 2) спиральные в случае подалгебры $\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = \zeta - \varphi/\lambda$;
- 3) сферические для подалгебры $\mathcal{G}_{3,4}$: $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$;
- 4) декартовы x , y и z — в остальных случаях.

Подалгебра $\mathcal{G}_0$ (поле общего положения):

$$A^\alpha = f_\alpha(x, y, z)dx + g_\alpha(x, y, z)dy + h_\alpha(x, y, z)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,1}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(x, y)dx + g_\alpha(x, y)dy + h_\alpha(x, y)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$X_1 = P_z.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,2}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho, z)d\rho + g_\alpha(\rho, z)d\varphi + h_\alpha(\rho, z)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho, \zeta)d\rho + g_\alpha(\rho, \zeta)d\varphi + h_\alpha(\rho, \zeta)d\zeta, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{2,1}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(z)dx + g_\alpha(z)dy + h_\alpha(z)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{2,2}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho)d\rho + g_\alpha(\rho)d\varphi + h_\alpha(\rho)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = P_z, \quad X_2 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,1}$:

$$A^\alpha = a_\alpha dx + b_\alpha dy + c_\alpha dz, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,2}^\lambda$:

$$A^\alpha = [a_\alpha \sin(\lambda z) + b_\alpha \cos(\lambda z)]dx + [a_\alpha \cos(\lambda z) - b_\alpha \sin(\lambda z)]dy + \mu_\alpha dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = yP_x - xP_y + \frac{P_z}{\lambda}.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,3}$:

$$A^1 = f_1(z)dz, \quad A^2 = f_2(z)dx + \varepsilon f_3(z)dy, \quad A^3 = f_3(z)dx - \varepsilon f_2(z)dy,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = yP_x - xP_y + \varepsilon\tau_1.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,4}$:

$$A^1 = f_1(r)dr + \varepsilon \cos \vartheta d\varphi,$$

$$A^2 = -\varepsilon f_2(r) \sin \vartheta d\varphi + f_3(r)d\vartheta, \quad A^3 = \varepsilon f_3(r) \sin \vartheta d\varphi + f_2(r)d\vartheta;$$

$$X_1 = \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta P_\varphi + \sin \varphi P_\vartheta - \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \varepsilon \tau_1, \quad X_2 = \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta P_\varphi - \cos \varphi P_\vartheta - \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \varepsilon \tau_1,$$

$$X_3 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{4,1}$:

$$A^1 = \mu_1 dx, \quad A^2 = \mu_2 dx + \varepsilon \mu_3 dy, \quad A^3 = \mu_3 dx - \varepsilon \mu_2 dy;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z, \quad X_4 = yP_x - xP_y + \varepsilon \tau_1.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_6 \simeq e(3)$:

$$A^1 = A^2 = A^3 = 0;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z,$$

$$X_4 = zP_y - yP_z + \tau_1, \quad X_5 = xP_z - zP_x + \tau_2, \quad X_6 = yP_x - xP_y + \tau_3.$$

Заключение

Как показало наше исследование, в случае калибровочной группы $SU(2)$ чисто изоспиновый интеграл движения допускают только $U(1)$ -значные поля, подобные электромагнитному. Кроме того, мы получили исчерпывающую классификацию калибровочно-неэквивалентных полей Янга–Миллса, допускающих нетривиальный линейный по импульсам интеграл движения уравнений Вонга. Полученные нами классы полей Янга–Миллса могут служить в качестве анзацев для различных калибровочных теорий с $SU(2)$ -симметрией, например, в задачах, связанных с поиском точных решений уравнения Янга–Миллса.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90200.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wong S.K. Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin // *Il Nuovo Cimento A*. 1970. V. 65, No. 4. P. 689–694.
2. Goldberger W.D., Ridgway A.K. Radiation and the classical double copy for color charges // *Physical Review D*. 2017. V. 95, No. 12. P. 125010.
3. Kajantie K., McLerran L.D., Paatelainen R. Gluon radiation from a classical point particle. II. Dense gluon fields // *Physical Review D*. 2020. V. 101, No. 5. P. 054012.
4. Van Holten J.W. Covariant hamiltonian dynamics // *Physical Review D*. 2007. V. 75, No. 2. P. 025027.
5. Магазев А.А. Об интегрируемости уравнений Вонга в классе линейных интегралов движения // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2015. Т. 58, № 12. С. 133–140.
6. Sternberg S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1977. V. 74, No. 12. P. 5253–5254.
7. Weinstein A. A universal phase space for particles in Yang-Mills fields // *Letters in Mathematical Physics*. 1978. V. 2, No. 5. P. 417–420.
8. Болдырева М.Н., Магазев А.А. Об алгебрах Ли симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2016. Т. 59, No. 10. С. 132–139.
9. Beckers J. [et. al.] Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. 1977. V. 18, No. 1. P. 72–83.

CLASSIFICATION OF YANG–MILLS FIELDS ADMITTING INTEGRALS OF MOTION FOR THE WONG EQUATIONS

M.N. Boldyreva

Post Graduate Student, e-mail: b_oldyrev_a@mail.ru

A.A. Magazev

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: magazev@omgtu.ru

I.V. Shirokov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: iv_shirokov@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. In the paper, we investigate the gauge fields that are characterized by the existence of non-trivial integrals of motion for the Wong equations. For the gauge group $SU(2)$, the class of fields admitting only the isospin first integrals is described in detail. All gauge non-equivalent Yang–Mills fields admitting a linear integral of motion for the Wong equations are classified in the three-dimensional Euclidean space.

Keywords: Yang–Mills field, the Wong equations, integral of motion, gauge transformation.

REFERENCES

1. Wong S.K. Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin. II Nuovo Cimento A., 1970, vol. 65, no. 4., pp. 689–694.
2. Goldberger W.D. and Ridgway A.K. Radiation and the classical double copy for color charges. Physical Review D., 2017, vol. 95, no. 12, pp. 125010.
3. Kajantie K., McLerran L.D., and Paatelainen R. Gluon radiation from a classical point particle. II. Dense gluon fields. Physical Review D., 2020, vol. 101, no. 5, pp. 054012.
4. Van Holten J.W. Covariant hamiltonian dynamics. Physical Review D., 2007, vol. 75, no. 2, pp. 025027.
5. Magazev A.A. Ob integriruemosti uravneniy Wonga v klasse lineynykh integralov dvizheniya. Izvestiya visshih uchebnykh zavedeniy. Fizika, 2015, vol. 58, no. 12, pp. 133–140. (in Russian)
6. Sternberg S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1977, vol. 74, no. 12, pp. 5253–5254.
7. Weinstein A. A universal phase space for particles in Yang-Mills fields. Letters in Mathematical Physics, 1978, vol. 2, no. 5, pp. 417–420.
8. Boldyreva M.N., Magazev A.A. Ob algebrakh Li simmetrii stacionarnykh uravneniy Shredingera i Pauli. Izvestiya visshih uchebnykh zavedeniy. Fizika, 2016, vol. 59, no. 10, pp. 132–139. (in Russian)
9. Beckers J. [et. al.] Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in non-relativistic quantum mechanics. Journal of Mathematical Physics, 1977, vol. 18, no. 1, pp. 72–83.

Дата поступления в редакцию: 30.03.2020

АВТОИЗОМЕТРИИ И АВТОПОДОБИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$

М.Н. Подоксенов

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

В.В. Черных

студентка, e-mail: chernykh_valeriya@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$, снабжённая лоренцевым скалярным произведением. Находятся все однопараметрические группы изометрий и подобий, являющиеся одновременно автоморфизмами алгебры Ли, а также условия существования таких однопараметрических групп. Условия существования связаны с расположением идеалов алгебры Ли относительно конуса изотропных векторов.

Ключевые слова: алгебра Ли, лоренцева метрика, автоморфизм, подобие, изометрия.

1. Постановка задачи

Линейное преобразование алгебры Ли $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[FX, FY] = F[X, Y] \forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle, \rangle$. Преобразование $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется подобием с коэффициентом e^μ , если $\langle FX, FY \rangle = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование F называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием или гомотетическим автоморфизмом. Преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, будем называть автоизометрией.

Риманово или лоренцево многообразие (M, g) называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть рассматриваемое многообразие G представляет односвязную экспоненциальную группу Ли, и пусть $\mathcal{G}$ — соответствующая ей алгебра Ли. Тогда задача поиска левоинвариантных лоренцевых метрик на группе Ли G , при которых она является самоподобным многообразием, сводится к следующей задаче: необходимо найти все однопараметрические группы автоподобий $F(t) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ (см. [1]).

В работе [2] были найдены все способы задания лоренцева скалярного произведения на четырёхмерной алгебре Ли $\mathcal{H} \mathfrak{f} \oplus \mathcal{R}$, при которых эта алгебра

Ли допускает однопараметрическую группу автоподобий или автоизометрий. Цель данной работы: найти все автоподобия и автоизометрии четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$, относящейся к VI типу Бианки (подтип VI₁), при условии задания на ней лоренцева скалярного произведения. Для случая евклидова скалярного произведения эта задача решена в работе [3].

Задача нахождения однопараметрических групп автоизометрий рассматриваемой алгебры Ли и условий на скалярное произведение, при выполнении которых такие группы существуют, представляет интерес по следующей причине. Её решение позволит в дальнейшем выяснить размерность группы движений однородного лоренцева многообразия соответствующей связной группы Ли.

2. Основные результаты

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ задаются одним равенством: $[E_1, E_2] = E_2$. Будем называть такой базис каноническим. Эта алгебра Ли содержит трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, являющийся линейной оболочкой векторов E_2, E_3, E_4 , а также двумерный центр $\mathcal{Z}$, являющийся линейной оболочкой векторов E_3, E_4 . Одномерное подпространство $\mathbf{R}E_2$ является производной алгеброй Ли: $\mathbf{R}E_2 = \mathcal{G}_4^{(2)} = [\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$.

Все указанные выше векторные подпространства должны быть инвариантными относительно автоморфизмов алгебры Ли. Поэтому любой автоморфизм алгебры Ли $F : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ в каноническом базисе задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \varepsilon & \mu \\ \delta & 0 & \lambda & \nu \end{pmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$, $\begin{vmatrix} \varepsilon & \mu \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} \neq 0$, а все остальные коэффициенты могут принимать любые значения. Итак, полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ восьмимерная.

В дальнейшем обозначаем $E'_i = F(E_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $F : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ — преобразование алгебры Ли $\mathcal{G}_4$; скалярное произведение будем называть метрикой и обозначать $X \cdot Y$, а обозначение $\langle X, Y \rangle$ будем использовать для линейной оболочки векторов X, Y . Вектор, скалярный квадрат которого равен 1 или -1 , будем называть единичным.

В следующей теореме сигнатура характеризует метрику, которая индуцируется на указанном идеале, матрица Грама и матрица группы преобразований указаны в каноническом базисе; во всех случаях $\varepsilon > 0, \nu \neq 0, \mu \neq 0$ и $t \in \mathbf{R}$. Например, запись $E_2 : (+)$ означает, что вектор E_2 является пространственно-подобным, а запись $E_2 : (0)$ означает, что вектор E_2 является изотропным. Если для группы автоподобий положить $\mu = 0$, то получим группу автоизометрий.

Теорема 1. Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+, +, +, -)$. Тогда эта алгебра Ли допускает однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий только в следующих случаях, указанных в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Автоизометрии

Условие	Матрица Грама	Матрица, задающая однопараметрическую группу преобразований
$\mathcal{L} : (+, +, +),$ $E_2 \in Z^\perp$	$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, -),$ $E_2 : (-),$ $E_2 \in Z^\perp$	$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, -),$ $E_2 : (+),$ $E_2 \in Z^\perp$	$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, -),$ $\mathcal{Z} : (+, +),$ $E_2 : (0)$	$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_4(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Для доказательства теоремы нам понадобится одна лемма. Пусть L — трёхмерное пространство, на котором заданы евклидова, лоренцева или вырожденная метрики сигнатуры $(+, +, 0)$, H — его двумерное подпространство, на котором индуцируется невырожденная метрика. Тогда, как показано в [3], в L можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3) , состоящий из единичных векторов, такой что $E_1 \notin H, E_1 \notin H^\perp, E_3 \in H, E_3 \cdot E_1 = E_3 \cdot E_2 = 0$, при этом E_2 сонаправлен ортогональной проекции вектора E_1 на двумерное подпространство H . Важно отметить, что такой базис можно выбрать даже в случае, когда метрика является вырожденной. Там же доказана следующая лемма.

Лемма 1. Пусть линейное преобразование $F : L \rightarrow L$ сохраняет скалярное произведение. Если вектор E_1 является собственным вектором этого преобразования, а подпространство H инвариантно относительно этого

преобразования, то F действует по формулам:

$$F(E_1) = \theta E_1, F(E_2) = \theta E_2, F(E_3) = \pm E_3, \theta = \pm 1.$$

Таблица 2. Автоподобия

Условие	Матрица Грама	Матрица, задающая однопараметрическую группу преобразований
$\mathcal{L} : (+, +, 0),$ $\mathcal{Z} : (+, 0),$ $E_2 : (+)$ $E_2 \in Z^\perp$	$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_5(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, 0),$ $\mathcal{Z} : (+, 0),$ $E_2 : (+)$ $E_2 \in Z^\perp$	$\Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_6(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 0 & 1 & t \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, 0),$ $\mathcal{Z} : (+, 0),$ $E_2 : (+)$ $E_2 \notin Z^\perp$	$\Gamma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \varepsilon \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$	$F_7(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 0 & 1 & t \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathcal{L} : (+, +, 0),$ $\mathcal{Z} : (+, +),$ $E_2 : (0)$	$\Gamma_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$F_8(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \cos t & -e^{\mu t} \sin t \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \sin t & e^{\mu t} \cos t \end{pmatrix}$

Замечание 1. Матрица Грама выбранного базиса имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & 0 \\ g_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если скалярное произведение является вырожденным, то её определитель должен быть равен нулю. Следовательно, $g_{12} = \pm 1$. Изменив, при необходимости, направление одного из векторов E_1 или E_2 , получим $g_{12} = 1$. Тогда вектор $E_1 - E_2$ является изотропным. Для пространства с невырожденной метрикой g_{12} может быть произвольным, отличным от ± 1 .

Лемма верна и в случае, когда вектор E_1 является изотропным, только в матрице Грама будет $g_{11} = 0$.

Необходимо отметить некоторые свойства трёхмерного пространства L с вырожденной метрикой. Пусть метрика имеет сигнатуру $(+, +, 0)$, и относительно базиса (E_1, E_2, E_3) скалярное произведение векторов $X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3)$ задаётся формулой $X \cdot Y = x_2 y_2 + x_3 y_3$. Если двумерное подпространство P не содержит вектор E_1 , то на нём индуцируется положительно определённая метрика и $P^\perp = \mathbf{R}E_1$. Если двумерное подпространство P содержит вектор E_1 , то на нём индуцируется вырожденная метрика и $P^\perp$ есть двумерное подпространство, которое тоже содержит E_1 .

3. Доказательство теоремы

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев расположения идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ относительно конуса изотропных векторов. Идеалы $\mathcal{L}, \mathcal{Z}, \mathbf{R}E_2 = \mathcal{G}_4^{(2)}$ должны быть инвариантны относительно любого автоподобия или автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{G}_4$. Согласно лемме автоизометрии сводятся только к симметриям, в тех случаях, когда E_2 не ортогонален $\mathcal{Z}$ и при этом на $\mathcal{Z}$ индуцируется невырожденная метрика. Поэтому мы такие случаи из рассмотрения исключаем. Базис, который мы выбираем, всегда предполагается каноническим, если не оговорено противное.

Случай 1. На идеале L индуцируется положительно определённое скалярное произведение. Мы можем выбрать базис так, что $E_1 \perp \mathcal{L}, E_2^2 = 1$ (см. рис. 1 а)). Любое автоподобие $F : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ должно оставлять инвариантным идеал $\mathcal{L}$. Поэтому сохраняет направление вектора E_1 , а, значит, выполнено $E'_1 = E_1$. Поэтому автоподобий при таком способе задания метрики быть не может.

Пусть $E_2 \perp \mathcal{Z}$. Тогда можем дополнить E_2 до ортонормированного базиса (E_2, E_3, E_4) в $\mathcal{L}$. Тогда матрица Грама базиса (E_1, E_2, E_3, E_4) имеет вид Γ_1 (см. табл. 1), а алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ допускает автоизометрии, действие которых задаётся с помощью одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$t \in R$. Однопараметрическую группу образуют только изометрии, действие которых описывается матрицей (1) со знаком «+» во второй строке, т. е. матрицей $F_1(t)$ (см. табл. 1).

Случай 2. На идеале $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределённое скалярное произведение. Мы можем выбрать канонический базис так, что $E_1 \perp \mathcal{L}$. Так же, как и в случае 1, для любого автоподобия выполнено $E'_1 = E_1$.

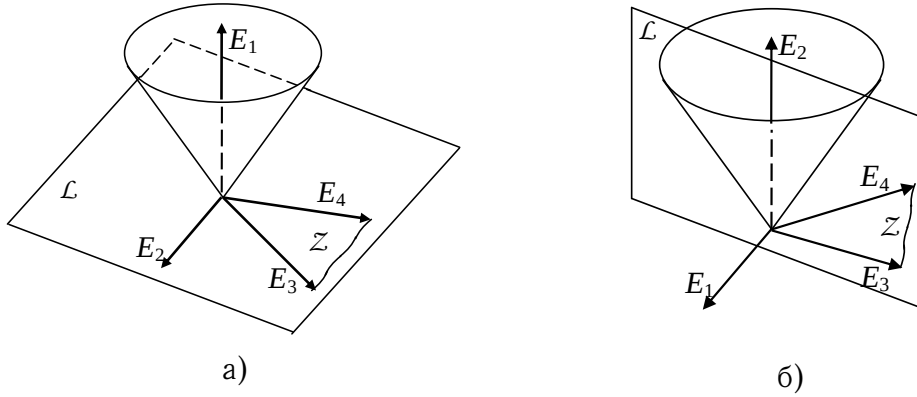


Рис. 1. Расположение базисных векторов

2.1. Пусть вектор E_2 времениподобный и $E_2 \perp \mathcal{Z}$ (см. рис. 1 б)). Точно также, как и в случае 1, алгебра Ли допускает автоизометрии, действие которых описывается с помощью одной из матриц (1) или (2). Однопараметрическую группу образуют только изометрии, действие которых описывается матрицей (1) со знаком «+» во второй строке. Это значит, мы имеем матрицу $F_2(t)$; матрица Грама имеет вид Γ_2 (см. табл. 1).

2.2. Пусть вектор E_2 пространственноподобный и $E_2 \perp \mathcal{Z}$ (см. рис. 2 а)). Точно также, как и в случае 1, алгебра Ли допускает только автоизометрии, действие которых описывается с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \operatorname{ch} t & \tau \operatorname{sh} t \\ 0 & 0 & \theta \operatorname{sh} t & \tau \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \theta = \pm 1, \tau = \pm 1, t \in R.$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования при $\theta = \tau = 1$. Таким образом, мы имеем матрицу $F_3(t)$; матрица Грама имеет вид Γ_3 (см. табл. 1).

2.3. Пусть вектор E_2 не изотропный, и на $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденная метрика (см. рис. 2 б)). Тогда в $\mathcal{Z}$ существует единственное изотропное направление, которое равно $\mathcal{Z}^\perp \cap \mathcal{L}$. Поэтому $E_2 \notin \mathcal{Z}^\perp$. Выберем E_3 принадлежащим этому направлению, а $E_4 \perp E_2$, причём можем сделать E_4 и E_2 единичными.

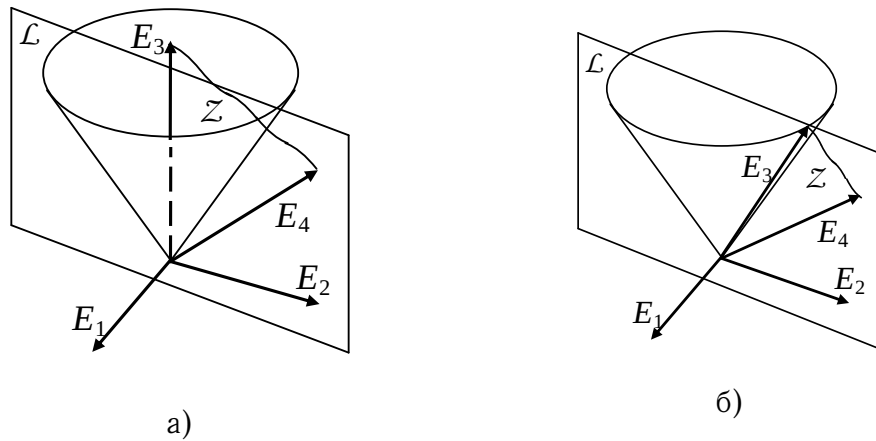


Рис. 2. Расположение базисных векторов

Матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $g_{23} = E_2 \cdot E_3 \neq 0$. Любая автоизометрия сохраняет направления $\mathbf{R}E_2, \mathbf{R}E_3, \mathbf{R}E_4$, и поскольку $g_{23} \neq 0$, она действует по формулам $E'_1 = E_1, E'_2 = \theta E_2, E'_3 = \theta E_3, E'_4 = \pm E_4, \theta = \pm 1$. Следовательно, однопараметрические группы автоизометрий отсутствуют.

2.4. Пусть вектор E_2 изотропный, и на $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденная метрика. Выберем E_3 и E_4 так же, как и в случае 2.3 (см. рис. 3 а)). В этом случае, любая изометрия имеет два инвариантных изотропных собственных вектора, лежащих в идеале $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что преобразование, действующее на двумерном подпространстве $\langle E_2, E_3 \rangle$ по формулам $E'_2 = e^{\nu t} E_2, E'_3 = e^{-\nu t} E_3$, является изометрией. В итоге мы имеем полную группу изометрий, которая задаётся матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta e^{\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta e^{-\nu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \nu \neq 0, \theta = \pm 1.$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, для которых $\theta = 1$ и $E'_4 = E_4$, т. е. задающиеся матрицей $F_4(t)$.

За счёт умножения векторов E_2 и E_3 на числа, отличные от нуля, мы можем добиться, что $E_2 \cdot E_3 = 1$. Заметим, что на рисунке 3 а) изображён для удобства вектор $-E_2$. В итоге матрица Грама принимает вид Γ_4 (таблица 1).

Случай 3. На идеале $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение.

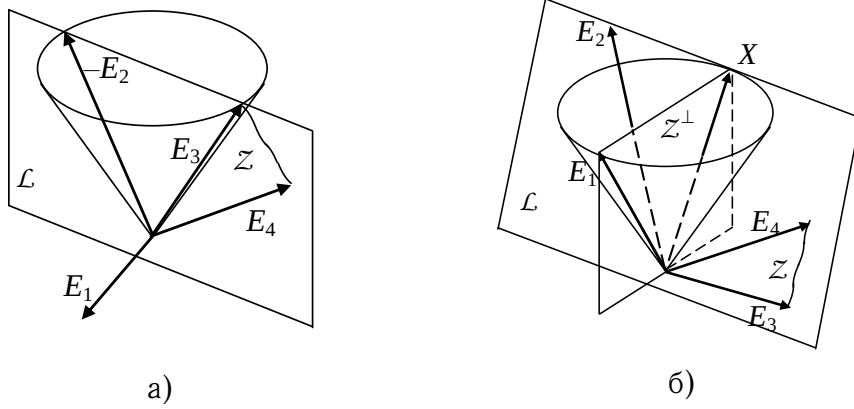


Рис. 3. Расположение базисных векторов

3.1. Вектор E_2 не изотропен, и на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется евклидово скалярное произведение (см. рис. 3 б)). Тогда $E_2 \notin \mathcal{Z}^\perp$.

Подпространство $\mathcal{Z}^\perp$ двумерно, и на нём индуцируется лоренцево скалярное произведение. Это подпространство инвариантно относительно действия любых автоподобий и автоизометрий, а значит, два его изотропных направления тоже должны быть инвариантны. Выберем $E_1 \in \mathcal{Z}^\perp, E_1 \notin \mathcal{L}, E_1^2 = 0$ так, чтобы сохранялась операция скобки Ли, и пусть вектор X принадлежит второму изотропному направлению в $\mathcal{Z}^\perp$. Подпространство $E_1^\perp$ содержит E_1 и $\mathcal{Z}$, причём $E_1^\perp \cap \mathcal{L} = \mathcal{Z}$. Поэтому $E_1^\perp$ не может содержать E_2 . Значит, $g_{12} = E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Дополним E_2 до базиса во всём $\mathcal{L}$ так, чтобы E_3, E_4 образовывали ортонормированный базис в $\mathcal{Z}$ и E_3 был коллинеарен ортогональной проекции единичного вектора E_2 на $\mathcal{Z}$. Согласно замечанию, матрица Грама примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{12} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме любое автоподобие должно действовать по формулам

$$E'_1 = E_1, E'_2 = k\theta E_2, E'_3 = k\theta E_3, E'_4 = \pm k E_4, \theta = \pm 1, k > 0.$$

Такое преобразование будет подобием, только если $X' = k^2 X$. С другой стороны, $X' = k\theta X$, поскольку X коллинеарен $E_2 - E_3$. Следовательно, $k = 1$; тем самым алгебра Ли допускает только автоизометрии типа симметрий, т. е. однопараметрические группы автоизометрий отсутствуют.

3.2. Вектор E_2 не изотропен, на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Тогда в $\mathcal{Z}$ существует только одно изотропное направление, и оно ортогонально E_2 . Выбираем E_3 , принадлежащим этому направлению

(см. рис. 4 а)). При любой изометрии или подобии вектор E_3 является собственным.

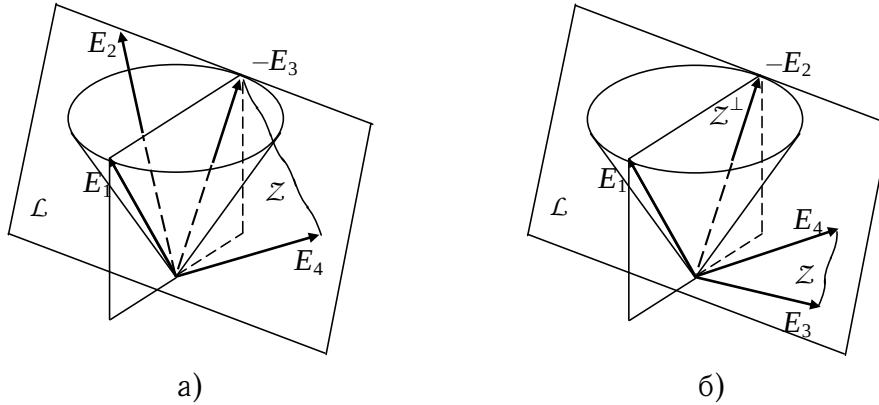


Рис. 4. Расположение базисных векторов

Следует рассмотреть два варианта: автоподобие имеет два изотропных собственных направления или оно имеет только одно такое направление.

Пусть автоподобие F имеет ещё одно изотропное собственное направление J . Выберем E_1 , принадлежащим этому направлению, а $E_4 \perp E_1$. Согласно [4] относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) , F задаётся матрицей вида

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \nu \neq 0, \mu \neq 0, \theta = \pm 1, t \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

где звёздочками обозначена ортогональная матрица Q ; матрица Грама данного базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае можем считать, что $E_1 = \lambda_1 e_1$, $E_3 = \lambda_2 e_2$, и, учитывая общий вид автоморфизмов, имеем $\mu = -\nu$, т. е. $E'_1 = E_1$. Если отбросить тривиальный случай $\mu = \nu = 0$, преобразование вида (3) имеет собственный вектор, не принадлежащий подпространству $\mathcal{P} = \langle E_1, E_3 \rangle$, только если матрица Q пропорциональна единичной матрице и $E_2 \in \mathcal{P}^\perp$.

Поскольку $g_{13} = E_1 \cdot E_3 \neq 0$, то направление вектора E_3 не может меняться на противоположное. В результате общий вид матриц всех автоподобий в выбранном базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta e^{\mu t} \end{pmatrix}, \mu \neq 0, \theta = \pm 1, t \in \mathbf{R}.$$

Однопараметрическую группу образуют преобразования с $\theta = 1$, т. е. задающиеся матрицей $F_5(t)$. Умножая E_3 на число, можем добиться, что $g_{13} = 1$; так же нормируем E_2 и E_4 , причём можем выбрать $E_4 \in E_2^\perp$. Матрица Грама принимает вид Γ_5 (см. табл. 2).

Пусть автоподобие F имеет только одно изотропное собственное направление $\mathbf{R}E_3$. Тогда, согласно [4], существует базис (e_1, e_2, e_3, e_4) в $\mathcal{G}_4$, в котором матрица однопараметрической группы гомотетий и матрица Грама имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что переход к базису $(\alpha e_1, e_2, \beta e_3, e_4)$, $\alpha\beta = 1$, не меняет ни матрицу Грама, ни общий вид матрицы преобразования.

Единственное изотропное инвариантное направление $\mathbf{R}e_1$ должно совпадать с $\mathbf{R}E_3$. Неизотропное инвариантное направление $\mathbf{R}e_4$ должно совпадать с $\mathbf{R}E_2$. Очевидно, мы имеем два двумерных инвариантных подпространства с вырожденной метрикой: $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_1, e_4 \rangle$. Однако можно убедиться, что инвариантными являются все подпространства $\langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4 \rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и любое из них может выступать в качестве $\mathcal{Z}$, кроме $\langle e_1, e_4 \rangle$.

Сначала предположим, что $\mathcal{Z} = \langle e_1, e_2 \rangle$. Выберем $E_1 \in \mathbf{R}e_3$, $E_2 = e_4$, $e_3 \in \mathbf{R}e_1$, $E_4 = e_2$. За счёт умножения вектора E_3 на число добьёмся, чтобы $E_1 \cdot E_3 = -1$. В новом каноническом базисе получим ту же матрицу Грама, а матрица однопараметрической группы преобразований примет вид $F_6(t)$ (см. табл. 2). Расположение базисных векторов отличается от рисунка 4 а) только направлением вектора E_3 .

Предположим теперь, что $\mathcal{Z} = \langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4 \rangle$, $\alpha \neq 0$ (поскольку $E_2 \notin \mathcal{Z}$). Выберем E_1, E_2, E_3, E_4 так же, как и выше. Временно наш базис не является каноническим, и $\mathcal{Z} = \langle e_1, \beta E_2 + \alpha E_4 \rangle$. Сначала мы заменим E_4 на $E_{4,0} = \beta/\alpha E_4$. Тогда в матрице Грама изменится только $g_{44} = \varepsilon > 0$, а матрица $F_6(t)$ не изменится. Теперь окончательно выберем новый вектор $E_4 = E_2 + E_{4,0}$. Пересчитаем матрицу Грама и матрицу $F_6(t)$ для нового базиса. Получим матрицы Γ_7 и $F_7(t)$ (см. табл. 2).

3.3. Вектор E_2 изотропен, на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется невырожденное скалярное произведение. Тогда $E_2 \in \mathcal{Z}^\perp$. Выберем канонический базис, как показано на рисунке 4 б), причём E_3 и E_4 образуют ортонормированный базис в $\mathcal{Z}$ и $g_{12} = 1$.

Матрица Грама принимает вид Γ_8 (см. табл. 2). Общий вид матрицы автоподобий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm e^{2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \cos t & -e^{\mu t} \sin t \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \sin t & e^{\mu t} \cos t \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, которые задаются матрицей (4) со знаком «+» во второй строке, т. е. имеем матрицу $F_8(t)$ (см. табл. 2). ■

Заключение

В данной работе мы нашли полную группу автоморфизмов четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus R^2$, определили канонический вид лоренцевых метрик в этой алгебре Ли, при которых она допускает однопараметрическую группу автоизометрий или автоподобий, и указали матрицы, которые задают эти группы преобразований. Полученные результаты будут использованы при построении самоподобных однородных лоренцевых многообразий группы Ли $A^+(1) \times (\mathbf{R}^+)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Віцебского гос. ун-та. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н., Гаджиева Ф.С. Автоподобия и автоизометрии одной четырёхмерной алгебры Ли VI типа Бианки // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. 2019. № 4. С. 124–130.
3. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2020. С. 27–29.
4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann. of Global Anal. Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.

AUTOISOMETRIES AND AUTOSIMILARITIES OF LIE ALGEBRA $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ **M.N. Podoksenov**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department "Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

V.V. Chernykh

Student, e-mail: chernykh_valeriya@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider four-dimensional Lie algebra $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ endowed with Lorentzian scalar product. We find all the one-parameter groups of isometries and similarities, which are simultaneously automorphisms of Lie algebra, and also we find the conditions of existence of such one-parameter group. Conditions of existence are associated with the location of ideals with respect to isotropic cone.

Keywords: Lie algebra, Lorentzian metrics, automorphism, similarity, isometry.

REFERENCES

1. Podoksenov M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geizenberga, snabzhennoi levoinvariantnoi lorentsevoi metrikoi. Vestnik Vitebskogo gos. un-ta, 2011, no. 5, pp. 10-15. (in Russian)
2. Podoksenov M.N. and Gadzhieva F.S. Avtopodobiya i avtoizometrii odnoi chetyrekhmernoj algebry Li VI tipa Bianki. Vestnik Polotskogo gos. un-ta, Seriya S, 2019, no. 4, pp. 124–130. (in Russian)
3. Podoksenov M.N. and Guts A.K. Avtoizometrii algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$. Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 72-i Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 20 fevralya 2020 g., Vitebsk, VGU im. P.M. Masherova Publ., 2020, pp. 27-29. (in Russian)
4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann. of Global Anal. Geom., 1985, vol. 3, no. 1, pp. 59–84.

Дата поступления в редакцию: 08.03.2020

ОБЛАСТЬ АНАЛИТИЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

С.А. Терентьев

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: sa.terentyev@gmail.com

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Электромагнитное поле в задачах электроразведки часто представляется в виде интегралов с быстроосциллирующим ядром. При вычислении этих интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в плоскость комплексного переменного. В статье изучена допустимая область деформации контура интегрирования в случае неоднородной среды, в которой сильные и слабые решения для электромагнитного поля аналитичны. Источник поля — гармонический вертикальный электрический или магнитный диполь.

Ключевые слова: электроразведка, электромагнитное поле вертикального электрического или магнитного диполя, быстроосциллирующие интегралы, деформация контура, комплексная плоскость, отсутствие особых точек, область деформации.

1. Введение

При аналитическом решении задач электроразведки очень часто компоненты электромагнитного поля могут быть выражены в виде интеграла

$$\int_0^{+\infty} u(z, \lambda) K(r, \lambda) d\lambda,$$

где $K(r, \lambda)$ — быстро осциллирующее по λ ядро. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в комплексную область $\mathbb{C}$ изменения переменной λ . В связи с этим необходимо прежде всего определить область $D_\lambda \subset \mathbb{C}$, в которой подынтегральная функция $u(p, \lambda)$ не имеет особенностей по λ . Примеры таких алгоритмов с обоснованием для простейших моделей даны в [1–3].

В статье мы исследуем эту задачу для произвольной вертикально неоднородной среды, параметры которой ε (диэлектрическая проницаемость), σ (электрическая проницаемость) и μ (магнитная проницаемость) зависят от глубины z

залегания слоя и, вообще говоря, кусочно-непрерывны. Полученные результаты могут быть распространены и на случай цилиндрической среды.

Функцию K называем ядром интегрального оператора, а $u(z, \lambda)$ — *спектральной плотностью*.

Мы продолжим λ в комплексную плоскость

$$\mathbb{C} = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}\}.$$

Область, лежащую в плоскости $\mathbb{C}$, в которой плотность $u(z, \lambda)$ не имеет особенностей по λ , будем обозначать через D_λ .

Наша задача — найти область D_λ для сильного и слабого решений $u(z, \lambda)$.

Данная статья продолжает исследования, изложенные в [4–6]. Приведённые результаты были анонсированы в [7].

2. Исходные уравнения

Будем изучать гармонические источники и поля, т. е. предполагаем следующую зависимость от времени:

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^{m, \text{ct.}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{j}^{e, \text{ct.}}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} = -i\omega\rho^{e, \text{ct.}} = -\operatorname{div} \mathbf{j}^{e, \text{ct.}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} i\omega\mu\mathbf{H} = i\omega\rho^{m, \text{ct.}} = \operatorname{div} \mathbf{j}^{m, \text{ct.}}, \quad (4)$$

где $\mathbf{j}^{e, \text{ct.}}$ и $\mathbf{j}^{m, \text{ct.}}$ — векторы объёмной плотности электрического и магнитного сторонних токов, которые возбуждаются полями, не учитываемые в искомом электромагнитном поле;

$\rho^{e, \text{ct.}}$, $\rho^{m, \text{ct.}}$ — объёмные плотности электрического и магнитного сторонних зарядов.

Далее будем совершать преобразования Фурье вида

$$\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Тогда (2) перепишем в виде

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}} = i\xi\hat{H}_y - i\eta\hat{H}_x, \quad (5)$$

а из (3) получаем:

$$\frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] = -i\xi(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_x - i\eta(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_y - i\xi\hat{j}_x^{e, \text{ct.}} - i\eta\hat{j}_y^{e, \text{ct.}}. \quad (6)$$

Разделим (6) на $(\sigma - i\omega\varepsilon)$ и продифференцируем по z :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] \right\} = -i\xi \frac{d\hat{E}_x}{dz} - i\eta \frac{d\hat{E}_y}{dz} - \\ - \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} [i\xi \hat{j}_x^{e, \text{ct.}} + i\eta \hat{j}_y^{e, \text{ct.}}] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (1)

$$i\eta \hat{E}_z - \frac{d\hat{E}_y}{dz} = i\omega\mu \hat{H}_x - \hat{j}_x^{m, \text{ct.}}, \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{E}_x}{dz} - i\xi \hat{E}_z = i\omega\mu \hat{H}_y - \hat{j}_y^{m, \text{ct.}}. \quad (9)$$

Отсюда, учитывая (5) и (7), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] \right\} + \frac{\lambda^2 - k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] = \\ = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} [i\xi \hat{j}_x^{e, \text{ct.}} + i\eta \hat{j}_y^{e, \text{ct.}}] \right\} + \frac{\lambda^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} \hat{j}_z^{e, \text{ct.}} + i\eta \hat{j}_x^{m, \text{ct.}} - i\xi \hat{j}_y^{m, \text{ct.}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu.$$

Аналогичное уравнение имеем для $\hat{H}_z$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{i\omega\mu} \frac{d}{dz} [i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}}] \right\} + \frac{\lambda^2 - k^2}{i\omega\mu} [i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}}] = \\ = -\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{i\omega\mu} [i\xi \hat{j}_x^{m, \text{ct.}} + i\eta \hat{j}_y^{m, \text{ct.}}] \right\} - \frac{\lambda^2}{i\omega\mu} \hat{j}_z^{m, \text{ct.}} - i\eta \hat{j}_x^{e, \text{ct.}} + i\xi \hat{j}_y^{e, \text{ct.}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично равенствам (5) и (6) из (1), (4) получаем:

$$i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}} = i\xi \hat{E}_y - i\eta \hat{E}_x, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dz} [i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}}] = -i\omega\mu (i\xi \hat{H}_x + i\eta \hat{H}_y) + i\xi \hat{j}_x^{m, \text{ct.}} + i\eta \hat{j}_y^{m, \text{ct.}}. \quad (13)$$

Уравнения (5), (6), (12), (13) дают:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{i\xi}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] + i\eta [i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}}] - \right. \\ \left. - \frac{\xi^2 \hat{j}_x^{e, \text{ct.}} + \xi\eta \hat{j}_y^{e, \text{ct.}}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{E}_y = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{i\eta}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e, \text{ct.}}] - i\xi [i\omega\mu \hat{H}_z - \hat{j}_z^{m, \text{ct.}}] - \right.$$

$$-\frac{\xi\eta\hat{j}_x^{e,ct.} + \eta^2\hat{j}_y^{e,ct.}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\Bigg\}, \quad (15)$$

$$\hat{H}_x = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{i\xi}{i\omega\mu} \frac{d}{dz} [i\omega\mu\hat{H}_z - \hat{j}_z^{m,ct.}] + i\eta[(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e,ct.}] + \frac{\xi^2\hat{j}_x^{m,ct.} + \xi\eta\hat{j}_y^{m,ct.}}{i\omega\mu} \right\}, \quad (16)$$

$$\hat{H}_y = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{i\eta}{i\omega\mu} \frac{d}{dz} [i\omega\mu\hat{H}_z - \hat{j}_z^{m,ct.}] - i\xi[(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}_z^{e,ct.}] + \frac{\xi\eta\hat{j}_x^{m,ct.} + \eta^2\hat{j}_y^{m,ct.}}{i\omega\mu} \right\}. \quad (17)$$

Таким образом, достаточно определить $\hat{E}_z$ и $\hat{H}_z$.

3. Случай диполей. Сильные решения

В этом параграфе в качестве источников поля будут рассматриваться электрический и магнитный диполи, расположенные в точке $(0, 0, 0)$. То есть токи $j^{e,ct.}, j^{m,ct.}$ будут сингулярными функциями: в случаях вертикального диполя $j^{ct.} = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z))$ и горизонтального — $j^{ct.} = (\delta(x)\delta(y)\delta(z), 0, 0)$. Если при $z = 0$ параметры среды не являются непрерывными функциями, то определение вертикального диполя сторонним током не является однозначным (это будет отмечено ниже в постановке краевой задачи). В этом случае вертикальный диполь должен быть описан с помощью напряжённостей поля сторонних э.д.с. и м.д.с.

Таким образом, при возбуждении поля с помощью диполя уравнения (10), (11) невозможно рассматривать в классическом смысле. Их следует рассматривать как дифференциальные уравнения в классе обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. При этом приходится особо оговаривать класс гладкости входящих в уравнения коэффициентов.

Оба уравнения (10) и (11) имеют вид

$$Lu \equiv -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{p(z)} \frac{du}{dz} \right) + \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} u = f(z), \quad (18)$$

где $f(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ — линейная комбинация δ -функции и ее производной. Функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ является решением этого уравнения, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$(u, L^* \varphi) = (f, \varphi).$$

Покажем, что в случае *достаточно гладких коэффициентов* к задаче (18) можно прийти, рассматривая следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} L\tilde{u} = 0 & (z \neq 0), \\ [\tilde{u}]_0 = \alpha, \\ \left[\frac{1}{p(z)} \frac{d\tilde{u}}{dz} \right]_0 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $[F]_0 = F(+0) - F(-0)$.

Положим

$$u = \begin{cases} \tilde{u}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (Lu, \varphi) &\equiv (u, L^* \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \tilde{u} \overline{L^* \varphi} dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ -\tilde{u} \frac{1}{p(z)} \frac{d\overline{\varphi}}{dz} \Big|_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \frac{1}{p(z)} \frac{d\tilde{u}}{dz} \overline{\varphi} \Big|_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) L\tilde{u} \overline{u} dz \right\} = \\ &= [\tilde{u}]_0 \frac{1}{p(0)} \frac{d\overline{\varphi}(0)}{dz} - \left[\frac{1}{p(z)} \frac{d\tilde{u}}{dz} \right]_0 \overline{\varphi}(0) \end{aligned}$$

или

$$Lu \equiv -\alpha \left(\frac{\delta(z)}{p(z)} \right)' - \beta \delta(z). \quad (20)$$

Это и есть уравнение (18), где

$$f(z) = -\alpha \left(\frac{\delta(z)}{p(z)} \right)' - \beta \delta(z).$$

Приведём значения коэффициентов α, β задачи (19) для различных диполей. Введём обозначения:

$$p_e(z) = \sigma - i\omega\varepsilon, \quad p_h(z) = i\omega\mu,$$

$$\tilde{u}_e(z) = p_e(z) \hat{E}_z(z) + \hat{j}_z^{e, \text{ст.}}(z),$$

$$\tilde{u}_h(z) = p_h(z) \hat{H}_z(z) - \hat{j}_z^{m, \text{ст.}}(z).$$

1) Вертикальный электрический диполь:

$$\hat{j}^{e, \text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = -\lambda^2/p_e(0),$$

$$\hat{j}^{m, \text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = 0.$$

2) Горизонтальный электрический диполь:

$$\hat{j}^{e, \text{ст.}} = (\delta(z), 0, 0), \quad \alpha_e = -i\xi, \quad \beta_e = 0,$$

$$\hat{j}^{m, \text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = i\eta.$$

3) Вертикальный магнитный диполь:

$$\hat{j}^{e, \text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = 0,$$

$$\hat{j}^{m, \text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = \lambda^2/p_h(0).$$

4) Горизонтальный электрический диполь:

$$\widehat{j}^{e, \text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = -i\eta,$$

$$\widehat{j}^{m, \text{ст.}} = (\delta(z), 0, 0), \quad \alpha_h = i\xi, \quad \beta_h = 0.$$

Таким образом, в отличие от постановки (18) в операторной постановке (19) в случае горизонтальных диполей можно отказаться от условия

$$\frac{1}{p(z)} \in C(0).$$

Определение же коэффициентов β задачи (19) для вертикальных диполей через сторонние токи при $1/p(z) \notin C(0)$ неоднозначно. При постановке задачи в этом случае с помощью сторонней э.д.с. (м.д.с.) коэффициенты β определяются однозначно:

$$1) \widehat{E}^{\text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \beta_e = -\lambda^2;$$

$$2) \widehat{H}^{\text{ст.}} = (0, 0, -\delta(z)), \quad \beta_h = \lambda^2.$$

Подводя итоги, отмечаем, что задача о поле диполя в вертикально-неоднородной среде имеет вид (19). Предполагается, что

$$\frac{1}{p(z)}, \quad \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}); \quad \left(\frac{1}{p(z)} \right)' \in L^\infty(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{C}).$$

Здесь $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Решение её ищется в виде $W_2^2(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.

Под $W_2^l(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ понимается замыкание в норме

$$\|u\| = \left\{ \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \sum_{i=0}^l \left| \frac{d^i u}{dz^i} \right|^2 dz \right\}^{1/2} \quad (21)$$

пространства функций $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, сужения которого на $\mathbb{R}^-$ и $\mathbb{R}^+$ совпадают с соответствующими сужениями пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (или $W_2^l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

4. Случай диполя. Вариационная постановка, слабые решения

Вместо решения задачи (19) в классе $W_2^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (сильные решения) нетрудно перейти к следующей вариационной задаче:

$$r(u, \varphi) = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \left\{ \frac{1}{p(z)} \frac{du}{dz} \frac{d\bar{\varphi}}{dz} + \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} u \bar{\varphi} \right\} dz = -\beta \bar{\varphi}(0) = l(\varphi), \quad (22)$$

$$\forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Слабые решения этой задачи ищем среди элементов замкнутого выпуклого множества $k_\alpha \subset W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, определяемого условием $[u]_0 = \alpha$. При этом достаточно потребовать, чтобы коэффициенты

$$\frac{1}{p(z)}, \quad \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

в частности, были кусочно-непрерывными и ограниченными.

В связи с заменой $\varphi \leftrightarrow i\varphi$ формулировка (22) эквивалентна **каждой** из следующих формулировок (23), (24):

$$\operatorname{Re} r(u, \varphi) = \operatorname{Re} l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad (23)$$

$$\operatorname{Im} r(u, \varphi) = \operatorname{Im} l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \quad (24)$$

Обозначим

$$p_1 = \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma}{p(z)} \right), \quad p_2 = \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma}{p(z)} \right), \\ q_1 = \operatorname{Re} \left(\gamma \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} \right), \quad q_2 = \operatorname{Im} \left(\gamma \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} \right),$$

где $\gamma \neq 0$ — произвольная комплексная константа.

Пусть

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}, \\ U = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} u \\ \operatorname{Im} u \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi \\ \operatorname{Im} \varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi^T = (\operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi), \\ B = \gamma \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \beta \\ \operatorname{Im} \beta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha \\ \operatorname{Im} \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда (23), (24) могут быть переписаны в виде:

$$R(U, \Phi) = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \left\{ \frac{d\Phi^T}{dz} P \frac{dU}{dz} + \Phi^T Q U \right\} dz = \\ = L(\Phi) = -\Phi^T(0)B, \quad \forall \Phi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2). \quad (25)$$

Решение ищется среди элементов замкнутого выпуклого множества $K_A \subset W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$, определяемого условием $[U]_0 = A$.

Задача (25) может быть сформулирована и как вариационное неравенство [8]:

$$R(U, \tilde{U} - U) \geq L(\tilde{U} - U), \quad \forall \tilde{U} \in K_A. \quad (26)$$

Здесь решение, как и раньше, ищется в K_A .

Следуя [8], сформулируем достаточные условия существования и единственности решения задачи (27).

Пусть $R(U, \tilde{U})$ является билинейной, и вообще говоря, несимметричной формой, а $L(\Phi)$ — линейной и непрерывной в $W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ и $W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ соответственно, причем билинейная форма — аналитическая:

$$\exists c > 0 \forall U \in W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2) (|R(U, U)| \geq c \|U\|^2).$$

Тогда решение задачи (26) существует и единственно.

Таким образом, в области

$$D_\lambda = \left\{ \lambda = \lambda_x + i\lambda_y : |\lambda| < \infty \wedge \operatorname{vrai} \sup_z \left| \frac{1}{p(z)} \right| < \infty \wedge \right. \\ \left. \wedge \operatorname{vrai} \sup_z \left| \frac{q(z, \lambda)}{p(z)} \right| < \infty \wedge \operatorname{vrai} \inf_z p_1 > 0 \wedge \operatorname{vrai} \inf_z q_1 > 0 \right\}$$

решение задачи (22) существует и единственно.

5. Аналитичность слабого решения

Легко видеть, что в общем случае решение строится в виде линейной комбинации решений задач вида

$$r(v, \varphi) = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad v \in k_\alpha, \quad (27)$$

где $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$ или $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$.

При этом компоненты электромагнитного поля выражаются посредством линейной комбинации интегралов вида [1]:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^k v}{dz^k} \lambda^p \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} J_0(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}) d\lambda, \quad (28)$$

здесь $k = 0, 1$; $p = -1, 1, 3$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, 1, 2$; $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ при $p = -1$, и $J_0(-)$ — функция Бесселя.

Для применения методов вычисления интегралов (28), связанных с деформацией контура интегрирования в комплексную плоскость переменной λ [1–3], достаточно установить область аналитичности функции $v(z, \lambda)$

Теорема 1. Область D_λ является областью аналитичности по λ решения задачи (27) при произвольном z .

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in D_\lambda$. Тогда существует такая окрестность $S_\varepsilon(\lambda_0)$ точки λ_0 , в которой определенная выше билинейная форма является равномерно эллиптической, т. е.

$$\exists c > 0 \forall \lambda \in S_\varepsilon(\lambda_0) \forall V \in W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2) (|R(V, V)| \geq c \|V\|^2).$$

Это легко следует из аналитичности по λ коэффициента $q(z, \lambda)$.

Обозначим через V_0, V — решения задачи (25) и задачи (27) для λ_0 и произвольного $\lambda \in S_\varepsilon(\lambda_0)$, соответственно.

Так как $V_0 - V \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, то

$$R_0(V_0, V_0 - V) = L_0(V_0 - V),$$

$$R(V, V_0 - V) = L(V_0 - V).$$

Но в виду свойств коэффициентов β задачи (27)

$$L_0(V_0 - V) = L(V_0 - V).$$

Учитывая это, запишем

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \left\{ \frac{d}{dz} (V_0 - V)^T P \frac{d}{dz} (V_0 - V) + (V_0 - V)^T Q (V_0 - V) \right\} dz = \\ = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) (V_0 - V)^T (Q - Q_0) V_0 dz. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|V_0 - V\| &\leq \frac{1}{c} \frac{\|R(V_0 - V, V_0 - V)\|}{\|V_0 - V\|} \leq \\ &\leq \sup_z \|(Q - Q_0)(z)\| \cdot \|V_0\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0, \end{aligned}$$

поскольку $q(z, \lambda)$ — аналитическая функция по λ .

Здесь через $\|Q\|$ обозначена норма матрицы Q .

Значит $\lambda \rightarrow V(z, \lambda)$ непрерывная по λ абстрактная функция.

Аналогично уравнению (29) запишем

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \left\{ \frac{d}{dz} \Phi^T P \frac{d}{dz} \frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} + \Phi^T Q_0 \frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} \right\} dz = \\ = - \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \Phi^T \frac{Q_0 - Q}{\lambda_0 - \lambda} V dz. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \left\{ \frac{d}{dz} \Phi^T P \frac{d}{dz} W + \Phi^T Q W \right\} dz =$$

$$= - \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \Phi^T Q'_\lambda V dz \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (31)$$

Так как в D_λ

$$\sup_z \|Q'_\lambda\| < +\infty,$$

то правые части уравнений (30) и (31) близки благодаря аналитичности Q и непрерывности функции $\lambda \rightarrow V(z, \lambda)$.

Задачи (30) и (31) отличаются лишь правыми частями, а, значит, это одна и та же задача с близкими правыми частями. Но так как $|R(U, U)| \geq c \|U\|^2$, то задача эта корректна. Следовательно, решения задач (30) и (31) близки, точнее,

$$\left\| \frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} - W \right\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

Из теоремы вложения $W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ следует, что

$$\sup_z \left| \frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} - W \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0,$$

т. е. V аналитична по λ в области D_λ . ■

Замечание. Мы использовали конкретный вид функции $q(z, \lambda)$, имеющий вид

$$\frac{\lambda^2 - k^2}{i\omega\mu} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda^2 - k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}.$$

Но теорема верна для любой функции $q(z, \lambda)$, удовлетворяющей условию $\sup_z \|Q'_\lambda\| < +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск : Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1975.
2. Терентьев С.А. Теоретическое исследование полей источников магнитотеллурического поля // Отчёт по НИР. Омск : ОмГУ, 1980. Деп.во ВНИИЦ, № Б 818289.
3. Терентьев С.А. Основные закономерности поведения поля плоской волны в слоистых средах с эллиптическим цилиндром: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1972.
4. Терентьев С.А., Гуц А.К. Теоретическое исследование электромагнитного поля в проводящих неоднородных средах // Отчёт по НИР. Омск : ОмГУ, 1980. Деп.во ВНИИЦ 25.02.81, № Б 919817. 48 с.
5. Терентьев С.А., Гуц А.К. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 61–77.
6. Терентьев С.А., Гуц А.К. Особенности спектральной плотности электромагнитного поля для электрического и магнитного диполей в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2019. № 2(50). С. 66–78.

7. Гуц А.К., Терентьев С.А. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Сб.: Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Омск : ОмПИ, 1982. С. 78–80.
8. Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М. : Мир, 1979.

THE ANALYTICITY DOMAIN OF SPECTRAL DENSITY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS CONDUCTIVE MEDIUM

S.A. Terentyev

PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: sa.terentyev@gmail.com

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The electromagnetic field in electrical exploration problems is often represented as integrals with a fast-oscillating nucleus. When calculating these integrals on a computer, it is necessary to deform the contour of integration into the plane of the complex variable. The article studies the allowable deformation region of the integration contour in the case of a non-uniform medium, in which strong and weak solutions of electromagnetic field are analytical. The source of the field is a vertical dipole. A similar problem was solved for a horizontally layered medium with a harmonious electrical or magnetic dipole as a source.

Keywords: Electrical exploration, electromagnetic field of vertical electric or magnetic dipole, fast-oscillating integrals, deformation contour, complex plane, absence of singular points, deformation domain.

REFERENCES

1. Tabarovskii L.A. *Primenenie metoda integral'nykh uravnenii v zadachakh geoelektriki*. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otделение, 1975. (in Russian)
2. Terent'ev S.A. *Teoreticheskoe issledovanie polei istochnikov magnitotelluricheskogo polya. Otchet po NIR*, Omsk, OmGU Publ., 1980, Dep.vo VNTITs, no. B 818289. (in Russian)
3. Terent'ev S.A. *Osnovnye zakonomernosti povedeniya polya ploskoi volny v sloistyykh sredakh s ellipticheskim tsilindrom: dis. ... kand. fiz.mat. nauk*. Novosibirsk, 1972. (in Russian)
4. Terent'ev S.A. and Guts A.K. *Teoreticheskoe issledovanie elektromagnitnogo polya v provodyashchikh neodnorodnykh sredakh. Otchet po NIR*, Omsk, OmGU Publ., 1980, Dep. vo VNTITs 25.02.81, no. B 919817, 48 p. (in Russian)
5. Terent'ev S.A. and Guts A.K. *Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 4(48), pp. 61–77. (in Russian)

6. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Osobennosti spektral'noi plotnosti elektromagnitnogo polya dlya elektricheskogo i magnitnogo dipolei v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 2(50), pp. 66–78. (in Russian)
7. Guts A.K. and Terent'ev S.A. Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Sb.: Avtomatizatsiya analiza i sinteza struktur EVM i vychislitel'nykh algoritmov, Omsk, OmPI Publ., 1982, pp. 78–80. (in Russian)
8. Glovinski R., Lions Zh.L., and Tremol'er R. Chislennoe issledovanie variatsionnykh neravenstv. Moscow, Mir Publ., 1979. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 05.03.2020

ON GEOMETRY OF FINSLER CAUSALITY: FOR CONVEX CONES, THERE IS NO AFFINE-INVARIANT LINEAR ORDER (SIMILAR TO COMPARING VOLUMES)

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Some physicists suggest that to more adequately describe the causal structure of space-time, it is necessary to go beyond the usual pseudo-Riemannian causality, to a more general Finsler causality. In this general case, the set of all the events which can be influenced by a given event is, locally, a generic convex cone, and not necessarily a pseudo-Reimannian-style quadratic cone. Since all current observations support pseudo-Riemannian causality, Finsler causality cones should be close to quadratic ones. It is therefore desirable to approximate a general convex cone by a quadratic one. This can be done if we select a hyperplane, and approximate intersections of cones and this hyperplane. In the hyperplane, we need to approximate a convex body by an ellipsoid. This can be done in an affine-invariant way, e.g., by selecting, among all ellipsoids containing the body, the one with the smallest volume; since volume is affine-covariant, this selection is affine-invariant. However, this selection may depend on the choice of the hyperplane. It is therefore desirable to directly approximate the convex cone describing Finsler causality with the quadratic cone, ideally in an affine-invariant way. We prove, however, that on the set of convex cones, there is no affine-covariant characteristic like volume. So, any approximation is necessarily not affine-invariant.

Keywords: space-time geometry, Finsler spaces, causality.

1. Formulation of the Corresponding Physical Problem: Analysis of Finsler Causality Relations

Geometric description of physical causality: a brief reminder (for details, see, e.g., [5]). In Newton's mechanics, a space-time event (t, x) can causally influence an event (t', x') if and only if $t \leq t'$. In Special Relativity Theory, a space-time event (t, x) , with $x = (x_1, \dots, x_m)$, can causally influence an event (t', x') with $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ if the difference vector

$$(\Delta t, \Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \stackrel{\text{def}}{=} (t' - t, x'_1 - x_1, \dots, x'_m - x_m)$$

belongs to the quadratic cone

$$C = \{(\Delta t, \Delta x_1, \dots, \Delta x_m) : \Delta t \geq 0 \text{ \& } (\Delta t)^2 - (\Delta x_1)^2 - \dots - (\Delta x_m)^2 \geq 0\}.$$

According to the General Relativity Theory, similar cones describe *local* causality: a space-time event (t, x) , with $x = (x_1, \dots, x_m)$, can causally influence an event $(t + dt, x + dx)$ with $dx = (dx_1, \dots, dx_m)$ if the difference vector $(dt, dx_1, \dots, dx_m)$ belongs to the cone

$$C = \{(dt, dx_1, \dots, dx_m) : dt \geq 0 \text{ \& } (dt)^2 - (dx_1)^2 - \dots - (dx_m)^2 \geq 0\}.$$

Finsler causality. Some physical theories use more general – not necessarily quadratic – convex cones to describe causality; see, e.g., [1, 4, 6]. This generalization of the usual causality is known as *Finsler causality*.

It is desirable to approximate Finsler causality with the usual one. As of now, all observations are consistent with the usual causality relation, namely with the locally quadratic causality cones of General Relativity theory. Thus, even if the actual causality relation is a Finsler one, it is close to the usual quadratic one. So, to be able to efficiently deal with Finsler causality relations, it is therefore desirable to be able to approximate Finsler causality cones with quadratic ones. This way, we will be able to use the formulas corresponding to the usual quadratic causality as the first approximation, and thus to concentrate our analysis on the – empirically small – differences between these causality relations.

How can we find such an approximation?

A possible approach to the desired approximation. A convex cone is uniquely determined by its intersection with a hyperplane – which is a convex body. For the quadratic cone that corresponds to the usual causality relation, this intersection is a bounded quadratic body, i.e., an ellipsoid – and vice versa, for each ellipsoid, the corresponding cone is a quadratic cone. For general convex cones, the intersection is a generic convex body.

So, to approximate a generic convex cone by a quadratic one, it is sufficient to approximate a general convex body by an ellipsoid. This is indeed possible. For example, to every bounded convex body $B \subseteq \mathbb{R}^n$ with a non-empty interior, we can associate a unique ellipsoid E enclosing this body: namely, out of all ellipsoids E that contain the set B , we can select the ellipsoid E_0 with the smallest possible volume $V(E)$ (see, e.g., [2, 3]):

$$V(E_0) = \min\{V(E) : E \text{ is an ellipsoid and } B \subseteq E\}.$$

This definition makes perfect sense, since for ellipsoids, $E \subseteq E'$ and $E \neq E'$ imply that $V(E) < V(E')$. Thus, the fact that the ellipsoid E_0 has the minimal possible volume implies that there is no sub-ellipsoid $E' \subseteq E_0$ that contains the original body B .

Strictly speaking, to describe the volume, we need to fix (affine) coordinates in the corresponding hyperplane. However, while the actual values of the volume

depend on the coordinates, the resulting ellipsoid is the same no matter what coordinates we use. The reason for this is that the volume is *affine-covariant*: for any affine transformation T that describes the transition to new affine coordinates, and for every ellipsoid E , we have $V(TE) = c(T) \cdot V(E)$ for some constant $c(T)$. As a result, for every two ellipsoids E and E' , we have $V(E) < V(E') \Leftrightarrow V(TE) < V(TE')$, i.e., which ellipsoid has larger volume and which has smaller volume does not depend on the choice of the coordinates.

Limitations of the usual approximation, and the resulting problem. The problem with the above approximation idea is that to follow this idea, we must first choose a hyperplane, and there is no guarantee that for a different hyperplane, we will not get a different approximation.

To make the approximation more physically meaningful, it is therefore desirable to avoid such an arbitrary choice, and instead of approximating a body by an ellipsoid, to directly approximate a general convex cone C by a quadratic cone Q . Out of all possible quadratic cones Q that contain C , it is desirable to select the “smallest” one in the sense of an appropriate total order $\leq$ on the class of all quadratic ellipsoids. This selection should not depend on the choice of coordinates. To guarantee that, it is desirable to make sure that the corresponding order is affine-covariant, i.e., that $Q < Q'$ if and only if $TQ < TQ'$.

What we do in this paper. In this paper, we show that for quadratic cones, there are no affine-invariant volume-like characteristics. Moreover, we show that there is no affine-invariant ordering relation between quadratic cones.

The physical meaning of this result is that it is not possible to approximate Finsler causality by quadratic causality in an affine-invariant way.

2. Definitions and the Main Result

Definition 1. Let $n \geq 2$.

- By an affine transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, we mean a reversible mapping of the type $x_i \rightarrow \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_j$.
- By a quadratic cone, we mean an image TQ_0 of the standard quadratic cone

$$Q_0 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0 \text{ \& } x_1^2 \geq x_2^2 + \dots + x_n^2\}$$

under an affine transformation.

Notation. For each $n \geq 2$, let $\mathcal{Q}_n$ denote the set of all n -dimensional quadratic cones.

Definition 2. By a linear (total) pre-order we mean a transitive relation $\leq$ for which, for every two objects a and b , we have $a \leq b$ or $b \leq a$.

Comment. For some objects a and b , it is possible to have both $a \leq b$ and $b \leq a$. For example, for the corresponding relation on the ellipsoids $E \leq E' \Leftrightarrow V(E) \leq V(E')$,

when we have two ellipsoids E and E' of the same volume, then we have both $E \leq E'$ and $E' \leq E$.

Notation. We will denote:

- the situation when $a \leq b$ and $b \not\leq a$ by $a < b$, and
- the situation when $a \leq b$ and $b \leq a$ by $a \sim b$.

Definition 3. Let $n \leq 2$.

- A linear pre-order on the set $\mathcal{Q}_n$ is called $\subseteq$ -consistent if $Q \subseteq Q'$ and $Q \neq Q'$ imply that $Q < Q'$.
- A linear pre-order on the set $\mathcal{Q}_n$ is called affine-invariant if for each affine transformation T , $Q \leq Q'$ implies $TQ < TQ'$.

Proposition. For each $n \geq 2$, no linear order on the set $\mathcal{Q}_n$ of all n -dimensional quadratic cones is both $\subseteq$ -consistent and affine-invariant.

Comment. The formulation of this proposition of ours first appeared in *Geombinatorics* journal.

Proof. We will prove this result by contradiction. Let us assume that a linear order $\leq$ is a $\subseteq$ -consistent and affine-invariant linear order on the set $\mathcal{Q}_n$, and let us deduce a contradiction from this assumption.

1°. Let us first consider the case $n = 2$.

1.1°. Let us first consider the following quadratic cone

$$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0 \& x_2 \geq 0\}.$$

An affine transformation $T_1 : (x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, x_1)$ maps this cone into

$$T_1 Q_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0 \& x_2 \geq 0\}.$$

If we apply the same transformation T_1 again, we get

$$T_1^2 Q_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0 \& x_2 \leq 0\},$$

$$T_1^3 Q_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0 \& x_2 \leq 0\},$$

and $T_1^4 Q_1 = Q_1$.

1.2°. Since $\leq$ is a linear order, we have either $Q_1 \leq T_1 Q_1$ or $T_1 Q_1 \leq Q_1$. Let us consider these two possibilities one by one.

1.2.1°. If $Q_1 \leq T_1 Q_1$, then, since the order $\leq$ is affine-invariant, we get $T_1 Q_1 \leq T_1^2 Q_1$, $T_1^2 Q_1 \leq T_1^3 Q_1$, and $T_1^3 Q_1 \leq Q_1$. Thus, by transitivity, we get $T_1 Q_1 \leq Q_1$ and hence,

$$Q_1 \sim T_1 Q_1.$$

1.2.2°. If $T_1Q_1 \leq Q_1$, then we similarly get $Q_1 \leq T_1Q_1$ and thus, $Q_1 \sim T_1Q_1$. So, in both cases, we have $Q_1 \sim T_1Q_1$.

1.3°. Let us now consider a different affine transformation

$$T_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2).$$

For this transformation, $T_2Q_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq x_1\}$ and

$$T_2T_1Q_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0 \& x_1 \leq x_2\}.$$

Since $Q_1 \sim T_1Q_1$, we have $T_2Q_1 \sim T_2T_1Q_1$.

On the other hand, since $T_2Q_1 \subseteq Q_1$ and $T_2Q_1 \neq Q_1$, we have $T_2Q_1 < Q_1$. Similarly, since $T_1Q_1 \subseteq T_2T_1Q_1$ and $T_1Q_1 \neq T_2T_1Q_1$, we have $T_1Q_1 < T_2T_1Q_1$. From $T_2Q_1 < Q_1$, $Q_1 \sim T_1Q_1$, and $T_1Q_1 < T_2T_1Q_1$, we conclude that

$$T_2Q_1 < T_2T_1Q_1,$$

which contradicts to the previous conclusion that $T_2Q_1 \sim T_2T_1Q_1$. This contradiction shows that for $n = 2$, indeed, no $\subseteq$ -consistent and affine-invariant is possible on the class $\mathcal{Q}_n$.

2°. Let us now consider the case $n > 2$. In this case, we consider a cone

$$Q_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0 \& x_1 \cdot x_2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2\},$$

and transformations

$$T_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (-x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

and

$$T_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Thus, the inverse transformations take the form

$$T_1^{-1}(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n) = (x'_2, -x'_1, x'_3, \dots, x'_n)$$

and

$$T_2^{-1}(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n) = (x'_1 - x'_2, x'_2, x'_3, \dots, x'_n).$$

Here too, $T_1^4Q_1 = Q_1$, thus $Q_1 \sim T_1Q_1$. The set $T_2Q_1 = \{x' : T_2^{-1}x' \in Q_1\}$ has the form

$$T_2Q_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 - x_2 \geq 0 \& (x_1 - x_2) \cdot x_2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2\}.$$

The corresponding inequality

$$(x_1 - x_2) \cdot x_2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2$$

is equivalent to

$$x_1 \cdot x_2 - x_2^2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2$$

and thus, implies that

$$x_1 \cdot x_1 \geq x_1 \cdot x_2 - x_2^2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2,$$

so $T_2Q_1 \subseteq Q_1$ and $T_2Q_1 \neq Q_1$ and hence, $T_2Q_1 < Q_1$.

Similarly, the set $T_2T_1Q_1$ consists of all the points $(x_1, \dots, x_n)$ for which

$$-x_2 \cdot (x_1 - x_2) \geq x_3^2 + \dots + x_n^2,$$

i.e., for which

$$-x_2 \cdot x_1 + x_2^2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2.$$

So, if $(x_1, \dots, x_n) \in T_1Q_1$, i.e., if

$$-x_2 \cdot x_1 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2,$$

then

$$-x_2 \cdot x_1 + x_2^2 \geq x_3^2 + \dots + x_n^2$$

and thus, $x \in T_2T_1Q_1$. So here too, $T_1Q_1 \subseteq T_2T_1Q_1$ and $T_1Q_1 \neq T_2T_1Q_1$, hence $T_1Q_1 < T_2T_1Q_1$.

Similarly to Part 1 of this proof, from $T_2Q_1 < Q_1$, $Q_1 \sim T_1Q_1$, and

$$T_1Q_1 < T_2T_1Q_1,$$

we conclude that $T_2Q_1 < T_2T_1Q_1$, which contradicts to the previous conclusion that $T_2Q_1 \sim T_2T_1Q_1$. This contradiction shows that for any n , no $\subseteq$ -consistent and affine-invariant is possible on the class $\mathcal{Q}_n$.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721. The authors are thankful to D. G. Pavlov and to all the participants of the 5th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory FERT, (Moscow-Fryazino, Russia) for valuable discussions.

REFERENCES

1. Asanov S.S. Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
2. Busemann H. Metric Methods of Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1943.
3. Busemann H. Geometry of Geodesics. Dover Publ., New York, 2005.

4. Chang Z. and Li V. Modified Friedmann model in Randers-Finsler space of approximate Berwald type as a possible alternative to dark energy hypothesis. Physics Letters, 2009, vol. B676, pp. 173–176.
5. Misner C.W., Thorne K.S., and Wheeler J.A. Gravitation. Freeman Publ., San Francisco, California, 1973.
6. Pavlov D.G., Atanasiu Gh., and Balan V. (eds.) Space-Time Structure. Algebra and Geometry, Lilia-Print, Moscow, 2007.

О ГЕОМЕТРИИ ПРИЧИННОСТИ ФИНСЛЕРА: ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ НЕ СУЩЕСТВУЕТ АФФИННО-ИНВАРИАНТНОГО ЛИНЕЙНОГО ПОРЯДКА (АНАЛОГИЧНОГО СРАВНЕНИЮ ОБЪЁМОВ)

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Некоторые физики предполагают, что для более адекватного описания причинной структуры пространства-времени необходимо выйти за пределы обычной псевдоримановой причинности и перейти к более общей причинности Финслера. В этом общем случае множество всех событий, на которые может влиять данное событие, является локально выпуклым конусом общего типа, а не обязательно квадратичным конусом псевдориманова типа. Поскольку все текущие наблюдения подтверждают псевдориманову причинность, конусы причинности Финслера должны быть близки к квадратичным. Поэтому желательно аппроксимировать общий выпуклый конус квадратичным. Это можно сделать, если мы выберем гиперплоскость и аппроксимируем пересечения конусов и этой гиперплоскости. В гиперплоскости нам нужно аппроксимировать выпуклое тело эллипсоидом. Это можно сделать аффинно-инвариантным способом, например, выбрав среди всех эллипсоидов, содержащих тело, тот, который имеет наименьший объем; так как объем является аффинно-ковариантным, этот отбор является аффинно-инвариантным. Однако, этот отбор может зависеть от выбора гиперплоскости. Поэтому желательно непосредственно аппроксимировать выпуклый конус, описывающий причинность Финслера, квадратичным конусом, в идеале аффинно-инвариантным образом. Однако, мы доказываем, что на множестве выпуклых конусов не существует аффинно-ковариантной характеристики, такой как объем. Поэтому любое приближение не обязательно является аффинно-инвариантным.

Ключевые слова: геометрия пространства-времени, финслеровы пространства, причинность.

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019

ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНОК ИЗ ТЕОРИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ К ПРОЦЕДУРАМ НАПРАВЛЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ

А.В. Еремеев^{1,2}

д.ф.-м.н., доцент, e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

А.В. Спиров^{2,3}

к.б.н., e-mail: sspirov@yandex.ru

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия

²Институт научной информации по общественным наукам РАН, Москва, Россия

³Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Область эволюционных вычислений возникла в компьютерных науках в результате переноса идей из эволюционной биологии и развивалась независимо в течение нескольких десятилетий. Цель настоящей работы состоит в демонстрации возможности переноса некоторых результатов из теории эволюционных вычислений обратно в биологию. Показано, что эволюционные алгоритмы без элитных особей могут рассматриваться как модели эволюционного поиска последовательности синтетического энхансера «с нуля». Эта задача состоит в отыскании одного из небольшого числа предположительно неизвестных последовательностей энхансера, начиная работу с исходного случайного набора последовательностей ДНК. В геной инженерии для таких целей используются методы направленной эволюции, и в частности, метод SELEX. В настоящей работе применяются верхние оценки математического ожидания времени первого достижения целевой области пространства решений, известные для эволюционных алгоритмов, для оценки среднего числа итераций процедуры SELEX до получения искомой серии последовательностей. Кроме того, с использованием теории эволюционных вычислений предлагается верхняя оценка математического ожидания доли последовательностей ДНК с достаточно высокой приспособленностью после заданного числа итераций процедуры SELEX. Оба подхода оцениваются в вычислительном эксперименте с использованием целевой функции Royal Road, с некоторым упрощением определяющей количество сайтов специфического связывания транскрипционного фактора.

Ключевые слова: время первого достижения, процедура SELEX, функция Royal Road, энхансер.

Введение

Область эволюционных вычислений возникла в компьютерных науках в результате переноса идей из биологии и развивалась независимо в течение нескольких десятилетий, будучи обогащаемая методами из теории вероятностей, теории сложности и оптимизации. Цель настоящей работы состоит в демонстрации того, как некоторые результаты из теории эволюционных вычислений могут быть перенесены обратно в эволюционную биологию. Поскольку некоторые биологические термины могут оказаться незнакомы читателю, статья снабжена приложением с терминологическими пояснениями.

Процедуры направленной эволюции типа SELEX (систематическая эволюция лигандов путём экспоненциального обогащения) известны как ценный инструмент в поиске ДНК- и РНК-последовательностей с высокой способностью связывания с предварительно определённой молекулой-мишенью, например — молекулой белка. Однако процедура SELEX затратна по времени и стоимости. В связи с этим параллельно с практическими процедурами *in vitro* для отбора и оценки последовательностей ДНК и РНК были разработаны подходы *in silico*, позволяющие сократить время и стоимость получения искомым последовательностей за счёт компьютерного имитационного моделирования процедуры SELEX (см., например, [10, 15]).

Биотехнологические подходы, подобные SELEX, могут рассматриваться как экспериментальные реализации эволюционных алгоритмов (ЭА) [23]. В этих процедурах циклически оценивают, мутируют и применяют отбор к популяциям молекул нуклеиновых кислот с целью получения требуемой последовательности нуклеотидов (например последовательности промотора или энхансера). Энергию свободного связывания транскрипционного фактора с последовательностью нуклеотидов можно рассматривать как молекулярную реализацию функций приспособленности известного семейства Royal Road [20], взятую с обратным знаком, т. к. наиболее адаптированные последовательности соответствуют минимумам энергии свободного связывания. Как и в случае функций Royal Road (см. например функцию *R3* из [17]), искомая последовательность (в ДНК-алфавите) должна включать несколько коротких подпоследовательностей нуклеотидов (называемых сайтами), точно совпадающих с консенсусной последовательностью, или близких к ним, как показано на рис. 1. Значение высоты букв, представляющих последовательность нуклеотидов сайта связывания, будет пояснено ниже в разделе 1.1. Последовательности спейсеров между сайтами являются произвольными, но длина их может иметь значение. Каждый сайт служит мишенью для специфического связывания некоторого транскрипционного фактора (рис. 1), и такое связывание лежит в основе функционирования регуляторного элемента (транскрипционный фактор контролирует активность гена через его регуляторный элемент). Как и в случае с функцией приспособленности Royal Road в ЭА, поиск последовательности нуклеотидов в процедуре SELEX происходит «с нуля». Нахождение каждого нового сайта повышает уровень приспособленности последовательности дискретно. Порядок, в котором формируются сайты связывания, является произвольным.

В современной литературе необходимость развивать моделирование и теорию экспериментальных подходов типа SELEX широко признана, как и признано то, что численные и аналитические подходы из области эволюционных вычислений должны найти эффективное применение и развитие в биоинформатике. Однако одной из серьёзных трудностей при этом является тот факт, что SELEX может проводиться над популяциями молекул астрономически высокой численности (10^8 – 10^{15}), тогда как в ЭА типично используются популяции численностью в сотни или тысячи особей. На персональной ЭВМ технически возможно реализовать ЭА и с популяцией из миллионов особей, но популяции порядка 10^9 находятся на грани возможностей современных (супер)компьютеров [16]. Именно это в первую очередь обосновывает необходимость дальнейшего развития теории ЭА для нужд биоинженерии, поскольку мы не можем промоделировать такие эксперименты SELEX численно [16, 18].

Настоящая работа нацелена на *прогноз эффективности* процедур SELEX, если имеются предварительные оценки длины последовательности нуклеотидов отдельного энхансера и её статистических свойств. Аналитические методы исследования, используемые в данной работе, позволяют получать оценки для процедур SELEX с популяциями такого размера, для которых численное моделирование не представляется возможным.

Отметим некоторые различия между оптимизацией функций Royal Road и проблемой поиска последовательности нуклеотидов с помощью SELEX-процедуры. Одно из решающих отличий состоит в том, что каждый участок в функции Royal Road («строительный блок» в терминах ЭА) имеет единственную подходящую для него последовательность, в то время как в биологии каждый сайт представляет собой семейство последовательностей, близких в метрике Хэмминга между собой и дающих близкие к минимуму значения энергии свободного связывания. Также важно, что в SELEX на стадии отбора имеется промежуточная «популяция» молекул, которые связываются с белками-мишенями (с вероятностью отбора, монотонно зависящей от их способности к связыванию), а затем выбираются для построения «молекул-потомков», т. е. амплификации в полимеразной цепной реакции. Не всякая процедура отбора, известная в ЭА, имеет такую промежуточную популяцию. Например, турнирная и пропорциональная селекция в классическом генетическом алгоритме не имеют такой популяции, т. к. в этих процедурах родительский генотип выбирается независимо для каждого нового потомка. Наконец, современные процедуры SELEX могут включать в себя до 50 итераций, в то время как число итераций ЭА, как правило, измеряется тысячами.

Практический случай, аналогичный нашему исследованию, можно найти в результатах генетической селекции на основе *in vivo* SELEX с последовательностями вируса репы *Turnip Crinkle Virus* (TCV) [25], где 28 пар нуклеотидных оснований (п.н.) вирусного регуляторного элемента *motif1-hairpin* были рандомизированы и затем подвергнуты селекции на растениях. Большинство из «победителей» в этом эксперименте содержали до трёх коротких последовательностей (5–7 п.н.), многие из которых обнаруживаются в известных в природе промоторных элементах этого вируса.

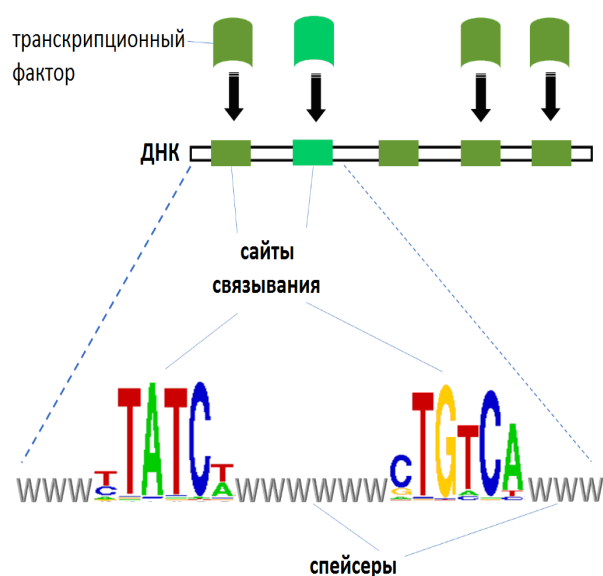


Рис. 1. Пример генно-регуляторного элемента. Энхансер обычно представляет собой кластер сайтов специфического связывания с ДНК-связывающими факторами — активаторами. Каждый сайт представляет собой короткую последовательность нуклеотидов. Сайты обычно разделены спейсерными последовательностями. Сайты связывания представлены прямоугольниками и логотипами последовательностей. W — произвольный нуклеотид.

С одной стороны, верхняя граница [9] на математическое ожидание времени первого достижения целевого участка генотипического пространства для ЭА позволяет оценить сверху среднее время получения достаточно эффективной серии последовательностей (например сайтов связывания транскрипционных факторов) в процедуре SELEX. С другой стороны, теоретический подход из [12] даёт верхнюю оценку средней доли последовательностей ДНК с достаточно высокой приспособленностью на заданной итерации процедуры SELEX. Теоретические границы, найденные с помощью этих подходов, оцениваются в вычислительном эксперименте с использованием функции приспособленности Royal Road, которая рассматривается как упрощённая оценка энергии свободного связывания с транскрипционным фактором FIS в процедуре SELEX, взятая с обратным знаком.

1. Регуляторный элемент гена

Известно, что ген состоит из кодирующей и регуляторной частей. Регуляторная часть просто организованных генов, как правило, включает промотор и энхансер, как показано на рис. 2.

Энхансер — короткий участок ДНК, который может быть специфически связан с белками (факторами транскрипции), чтобы увеличить вероятность того, что начнётся процесс транскрипции определённого гена (обычно факторы, специфически связывающиеся с энхансером, являются активаторами). Как

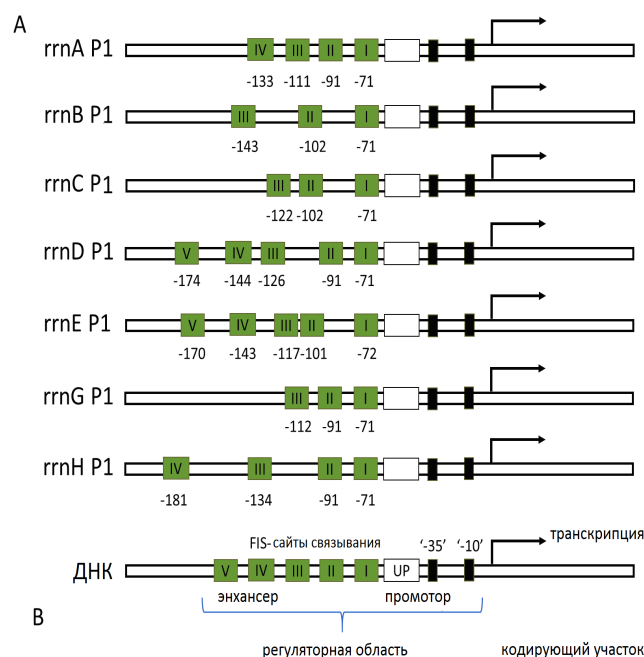


Рис. 2. Оперон рибосомной РНК (*rrn*) бактерии кишечной палочки *E. coli* как пример прокариотических генов с энхансерами. Каждый из регуляторных регионов состоит из основного промотора и области активации UAR. UAR включает в себя элемент UP и кластер сайтов связывания (3–5 сайтов) для ДНК-связывающего фактора FIS. Расстояния между соседними FIS-сайтами мало отличаются или кратны 20–21 п.н. (А) — схематическое изображение семи регуляторных областей оперона *rrn*. (В) — схема гена *rrn* с кластером из пяти сайтов связывания FIS. Отрицательные числа обозначают позиции (в п.н.) от начала транскрипции для различных регуляторных сайтов основного промотора и UAR. Основной промотор состоит из сайтов «-10» и «-35». Стрелка обозначает начало транскрипции и указывает её направление [13].

правило, энхансер представляет собой кластер сайтов для распознавания и связывания факторами транскрипции и другими ДНК-связывающими факторами (как показано на рис. 2). Каждый сайт связывания представляет собой относительно короткую последовательность пар нуклеотидных оснований, сходную или идентичную так называемой консенсусной последовательности для данного ДНК-связывающего фактора. Чем ближе последовательность сайта к консенсусу, тем выше вероятность того, что фактор найдёт и свяжется с ним, и тем ниже будет энергия свободного связывания, и тем выше вероятность того, что ген начнёт транскрибироваться. Здесь мы будем использовать хорошо известный и всесторонне изученный пример прокариотического энхансера для семейства генов рибосомальной РНК *E. coli* (рибосомальный оперон), как показано на рис. 2. Это один из наиболее изученных и относительно просто организованных прокариотических генов с энхансером. Данный регуляторный элемент включает в себя кластер ДНК-связывающих сайтов для транскрипционного фактора FIS. Другой известный пример промотора с кластером сайтов связывания детально

исследован в дрожжах *Yarrowia lipolytica* [7].

1.1. Сайт связывания транскрипционного фактора FIS

Не только последовательности нуклеотидов в сайтах связывания, но также и порядок, и расстояния между соседними сайтами могут иметь решающее значение для правильного функционирования энхансера. Некоторые авторы называют это грамматикой генно-регуляторных элементов [14]. В кластере FIS-сайтов крайне важно, чтобы начальные позиции соседних сайтов разделялись расстояниями, равными или кратными 20–21 п.н. (см. рис. 2). Предполагается, что эта особенность связана с величиной шага двойной спирали ДНК (20–21 п.н. соответствует двум поворотам спирали ДНК). Для нашего рассмотрения мы будем использовать **упрощающее предположение 1**: *расстояние между начальными позициями сайтов связывания кратно константе (большей, чем длина сайта)*. В частности, для сайтов FIS эта константа будет составлять 20 п.н.

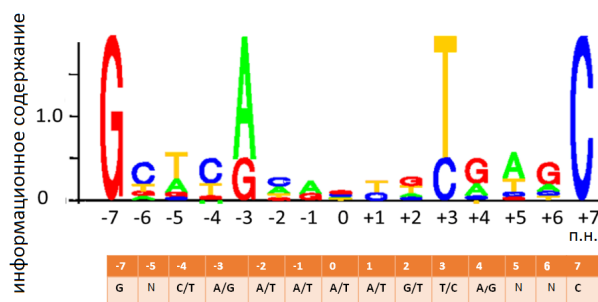


Рис. 3. Логотип консенсусной последовательности для фактора FIS. Положение подсчитывается в п.н. от середины последовательности (сайт является палиндромным) [21].

Рассмотрим более детально сайт FIS. Как уже упоминалось выше, сайты связывания для данного фактора имеют не тождественную последовательность нуклеотидов, а целое семейство похожих последовательностей, которые несколько различаются между собой энергией свободного связывания с фактором. Для представления частот встречаемости нуклеотидных последовательностей с требуемыми свойствами традиционно используется так называемый логотип последовательности. Он состоит из стопки букв в каждой позиции последовательности. Частота встречаемости нуклеотида в каждой позиции представлена относительной высотой соответствующей буквы. Общая высота стопки букв представляет информационное содержание позиции (измеряется в битах), равное исходной энтропии этой позиции минус апостериорное значение энтропии (в смысле Шеннона). Логотип последовательности для сайтов связывания FIS показан на рис. 3. Из этого рисунка видно, что может быть сделано **упрощающее предположение 2**: *каждая позиция сайта связывания FIS имеет один или два подходящих нуклеотида*. В дальнейшем мы будем

рассматривать сайт связывания как активный, если последовательность ДНК имеет подходящие буквы во всех своих позициях.

2. Неэлитарный эволюционный алгоритм с (μ, λ) –селекцией как модель SELEX

2.1. Схема алгоритма

Рассмотрим задачу максимизации:

$$\max\{\phi(x) : x \in \mathcal{A}^n\}, \quad (1)$$

где ϕ — целевая функция (называемая *функцией приспособленности* в литературе по ЭА), $\mathcal{A}$ — алфавит для кодирования решений, например, $\{0, 1\}$ в случае компьютерных систем или $\{A, C, G, T\}$, если (1) рассматривается как модель адаптации в молекулярной генетике.

В области эволюционных алгоритмов задачи вида (1) решаются эвристически посредством имитационного моделирования популяции особей (особями называют последовательности из множества $\mathcal{A}^n$), которые подвергаются случайным мутациям, селекции, а иногда и кроссинговеру (см., например [5]). При этом каждую отдельную позицию в кодированном представлении решений в виде последовательности из $\mathcal{A}^n$ иногда называют «геном». Однако во избежание двусмысленности термин «ген» в настоящей работе будет пониматься только в исходном биологическом смысле, а в контексте эволюционного алгоритма вместо «генов» будем говорить о позициях строки из $\mathcal{A}^n$. Ожидается, что эволюционный процесс будет направлять поиск к оптимальному решению (или локальному оптимуму). Иногда сходимость к оптимуму может быть гарантирована теоретически при времени счёта, стремящемся к бесконечности [19], или могут быть доказаны верхние оценки на математическое ожидание количества пробных решений, просматриваемых до первого достижения оптимума [5, 9].

Популяцию из λ особей на итерации t обозначим через

$$X^t = (x^{1t}, \dots, x^{\lambda t}) \in \mathcal{A}^{n\lambda},$$

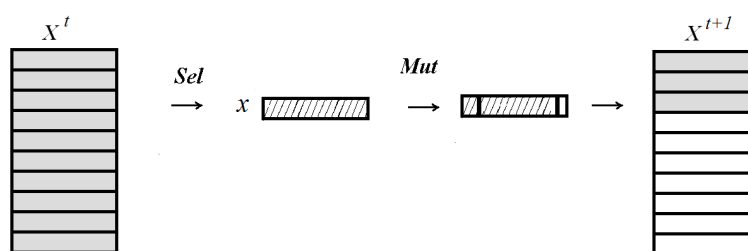
где x^{kt} — особь с номером k в X^t , $k = 1, \dots, \lambda$.

При мутации некоторое подмножество позиций в строке x изменяется случайным образом. Для любой заданной особи x результат оператора мутации может рассматриваться как случайная величина $\text{Mut}(x) \in \mathcal{X}$ с распределением вероятностей, зависящим от x . Наиболее часто используемый вариант этого оператора, *побитовая мутация*, случайным образом меняет каждую позицию строки x с заданной вероятностью мутации p_m .

В настоящей статье рассматривается только побитовая мутация в предположении, что новое значение для любой мутированной позиции x_i выбирается случайным образом из $\mathcal{A} \setminus \{x_i\}$.

В операторе (μ, λ) –селекции родители выбираются равномерно случайным образом среди μ наиболее приспособленных особей в популяции. Общая схема работы ЭА, рассматриваемого в данной статье, имеет следующий вид.

1. Построить начальную популяцию X^0 случайным образом.
2. Для всех t от 0 до $t_{\max} - 1$ выполнять:
 - 2.1. Для всех k от 1 до λ выполнять:
 - 2.1.1. Выбрать родительскую особь x из X^t с помощью (μ, λ) -селекции.
 - 2.1.2. Добавить $x_k^{(t+1)} := \text{Mut}(x)$ в популяцию X^{t+1} .
3. Результат — лучшее из найденных решений $\tilde{x}^t$, т. е. наиболее приспособленная особь из $X^0, \dots, X^t$.

Рис. 4. Итерация t эволюционного алгоритма ЭА.

Одна итерация этого алгоритма показана на рис. 4. В теоретических исследованиях ЭА обычно рассматриваются без критерия остановки. Поэтому также будем считать, что $t_{\max} = \infty$. Описанный ЭА может рассматриваться как упрощённая версия генетического алгоритма (см., например [19]), в котором не используется оператор кроссинговера.

2.2. Моделирование SELEX для регуляторной области гена

2.2.1. Краткое описание SELEX

Процедура SELEX *in vitro* работает следующим образом (см., например [10]). Изначально химически синтезированная «библиотека» разнообразных молекул ДНК заданной длины помещается в раствор вместе с молекулами-мишенями. После достижения равновесного состояния несвязанные молекулы удаляются и молекулярные комплексы мишень/ДНК расщепляются. Освобождённые таким образом последовательности ДНК умножаются ПЦР. При этом возможны некоторые случайные модификации последовательностей, которые могут рассматриваться как мутации, после чего выполняется следующая итерация SELEX. Как правило, этот процесс проходит несколько итераций, а в некоторых случаях — и несколько десятков итераций. Аналогичная процедура может быть применена к молекулам РНК. Процедура SELEX также может быть реализована *in vivo* (в живой природе), или *in silico* (в компьютерном эксперименте), или в их комбинации [15]. В отличие от SELEX *in vitro* процедура SELEX *in vivo* ищет последовательности, которые повышают некоторый функционал качества (понимается как приспособленность) в живых организмах, см.,

например [25]. На завершающей стадии полученные на последней итерации SELEX последовательности нуклеотидов секвенируются и производится анализ кинетики их связывания с молекулой-мишенью.

Стадия мутагенеза в SELEX *in vitro* типично осуществляется экспериментальными процедурами полимеразной цепной реакции (ПЦР). При этом умножение популяции молекул осуществляется полимеразной реакцией и сочетается с внесением точечных замен (ошибок копирования). Точечные мутации неизбежны в процедурах ПЦР, более того, их уровень может быть специально увеличен. ПЦР могут также вызывать и более сложные мутации, но их частота невысока.

Методы направленной эволюции, такие как SELEX *in silico*, направлены на поиск требуемых последовательностей нуклеотидов в вычислительном эксперименте и по своей схеме аналогичны ЭА [23]. В настоящей работе, в отличие от этих методов, ЭА рассматривается как модель процедуры SELEX, а цель анализа состоит в прогнозировании эффективности SELEX *in vitro* или *in vivo*.

Промежуточная «популяция» молекул, которые в SELEX на стадии отбора оказываются связаны с белками-мишенями, может рассматриваться как праобраз подпопуляции из μ особей в операторе (μ, λ) -селекции в ЭА. Совокупность молекул, полученных в результате амплификации в полимеразной цепной реакции, рассматривается как очередная популяция ЭА численности λ .

2.2.2. Семейство псевдо-булевых функций Royal Road

Функции Royal Road были впервые введены для изучения гипотезы об эффективной рекомбинации строительных блоков в операторах кроссинговера генетических алгоритмов [17]. Исходное определение функции Royal Road в [17] было дано для двоичного алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}^n$ в предположении, что задано некоторое множество схем S , где под схемой понимается некоторая n -элементная строка символов из алфавита $\mathcal{A} \cup \{“*”\}$. Строка $x \in \mathcal{A}$ называется *экземпляром* схемы $s \in S$ тогда и только тогда, когда $x_i = s_i$ для всех позиций, где $s_i \neq “*”$. Предположим, что задан набор положительных весов c_s , $s \in S$. В [17] функция Royal Road определяется как

$$\phi(x) := \sum_{s \in S} c_s \cdot [x \text{ является экземпляром } s].$$

Здесь и далее $[\cdot]$ обозначает скобку Иверсона:

$$[P] := \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно;} \\ 0 & \text{– иначе} \end{cases}$$

для любого утверждения P , которое может быть либо истинно, либо ложно.

Одна из наиболее часто используемых версий функций Royal Road (см., например [9]) определена для алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}^n$ в предположении, что задано n/r невзвешенных неперекрывающихся между собой схем с r фиксированными

позициями в каждой (позиции одной схемы при этом называются *блоком*):

$$\text{ROYALROAD}_r(x) := \sum_{i=0}^{n/r-1} \prod_{j=1}^r x_{ir+j}.$$

В настоящей статье определение Royal Road функции обобщается на не двоичные алфавиты и позиции схемы с двумя подходящими буквами с целью моделирования кластера из нескольких сайтов связывания. Без ограничения общности будем считать, что во всех позициях с одним подходящим значением требуется выбор последней буквы $a_{|\mathcal{A}|}$ алфавита $\mathcal{A}$, и такие требования предъявляются к первым r_1 позициям каждого блока. Далее все позиции с двумя подходящими буквами допускают две последние буквы $a_{|\mathcal{A}|-1}, a_{|\mathcal{A}|}$ алфавита, и они занимают оставшиеся r_2 позиций каждого блока, $r = r_1 + r_2$. Мы будем обозначать эту обобщённую функцию Royal Road через $\text{ROYALROAD}_{r_1, r_2}(x)$, предполагая, что

$$\text{ROYALROAD}_{r_1, r_2}(x) := \sum_{i=0}^{n/r-1} \prod_{j=1}^{r_1} [x_{ir+j} = a_{|\mathcal{A}|}] \prod_{j=r_1+1}^r [x_{ir+j} \in \{a_{|\mathcal{A}|}, a_{|\mathcal{A}|-1}\}].$$

Как следует из [7, 13], по мере увеличения числа сайтов связывания фактора транскрипции увеличивается экспрессия соответствующего гена *in vivo*. Эта закономерность была продемонстрирована на примере процедуры SELEX *in vivo* по направленной эволюции энхансера репликации motif1-hairpin у вируса репы TCV [25]. В наиболее приспособленных решениях содержались серии из трёх последовательностей, сходных с известными «мотивами» в энхансерах вируса TCV в живой природе. Увеличение интенсивности отбора последовательностей по мере увеличения числа сайтов связывания можно ожидать и в процедурах SELEX *in vitro*, т. к. каждый новый сайт связывания увеличивает вероятность связывания участка ДНК с молекулой-мишенью. В связи с этим далее принимается следующее **упрощающее предположение 3**: *критерий отбора молекул, используемый в SELEX, является возрастающей функцией числа действующих сайтов связывания в последовательности нуклеотидов x* . С учётом упрощающих предположений 1–3 приспособленность промотора FIS может быть оценена обобщённой функцией Royal Road с числом блоков от 4 до 6 (каждый блок соответствует отдельному сайту связывания фактора FIS), где $r_1 = 2, r_2 = 6$. Пространство поиска состоит из строк длиной $n = 32, 40$ или 48, содержащих символы из 4-буквенного алфавита $\mathcal{A} = \{A, C, G, T\}$.

В области SELEX *in vitro* близкий к предложенной модели подход представлен в работе [24]. Здесь число блоков равно 2, но при этом, в отличие от функций Royal Road, имеются разные консенсусы у блоков.

3. Теоретический анализ неэлитарного эволюционного алгоритма с (μ, λ) -селекцией

3.1. Верхние границы для доли генотипов с высокой приспособленностью в популяции эволюционного алгоритма

Предположим, что $\phi_0 := \min\{\phi(x) : x \in \mathcal{X}\}$ и задано d линий уровня функции приспособленности, так что $\phi_0 < \phi_1 < \phi_2 \dots < \phi_d$. Определим $d + 1$ подмножеств $\mathcal{X}$

$$H_i := \{x : \phi(x) \geq \phi_i\}, \quad i = 0, \dots, d.$$

Очевидно, что $H_0 = \mathcal{X}$. Для удобства определим $H_{d+1} := \emptyset$. Кроме того, обозначим подмножества линий уровня $A_i := H_i \setminus H_{i+1}$, $i = 0, \dots, d$, которые дают разбиение всего пространства $\mathcal{X}$.

Теперь предположим, что для всех $i = 0, \dots, d$ и $j = 1, \dots, d$ известны априорные верхние оценки β_{ij} на вероятности мутационного перехода из подмножества A_i в H_j на шаге 2.1.2 алгоритма из раздела 2.1.

$$\Pr\{\text{Mut}(x) \in H_j \mid x \in A_i\} \leq \beta_{ij}.$$

В дальнейшем $\mathbf{B}$ обозначает матрицу с элементами β_{ij} , $i = 0, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$. Популяция на итерации t может быть представлена вектором популяции

$$\mathbf{z}^{(t)} = (z_1^{(t)}, z_2^{(t)}, \dots, z_d^{(t)}),$$

где $z_i^{(t)} \in [0, 1]$ — доля генотипов из H_i в X^t . Вектор популяции $\mathbf{z}^{(t)}$ является случайным вектором, где $z_i^{(t)} \geq z_{i+1}^{(t)}$ для $i = 1, \dots, d-1$, так как $H_{i+1} \subseteq H_i$.

Пусть $\Pr\{x^{(t)} \in H_j\}$ — вероятность того, что особь, которая добавляется после селекции и мутации в X^t , имеет генотип в H_j , $j = 0, \dots, d$, $t > 0$. Согласно схеме ЭА $\Pr\{x^{(t)} \in H_j\} = \Pr\{x_1^{(t)} \in H_j\} = \dots = \Pr\{x_\lambda^{(t)} \in H_j\}$. Следующее утверждение легко доказать (см., например, предложение 1 в [12]).

Утверждение 1. Для всех $t > 0$, $i = 1, \dots, d$ имеет место равенство $\mathbf{E}[z_i^{(t)}] = \Pr\{x^{(t)} \in H_i\}$.

Пусть $P_{\text{ch}}(z_i)$ обозначает вероятность выбора родителя особи из H_i . По определению (μ, λ) -селекции,

$$P_{\text{ch}}(z_i) = \begin{cases} z_i \lambda / \mu, & \text{если } z_i \leq \mu / \lambda, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В результате рассуждений, аналогичных приведённым в разделе 3.1 из [12] (см., например [3]), можно сделать вывод о том, что

$$\Pr\{x^{(t+1)} \in H_j \mid \mathbf{z}^{(t)} = \mathbf{z}\} \leq \sum_{i=0}^d \beta_{ij} (P_{\text{ch}}(z_i^{(t)}) - P_{\text{ch}}(z_{i+1}^{(t)})),$$

откуда следуют верхние оценки

$$\mathbf{E}[z_j^{(t+1)}] \leq \beta_{dj} - \sum_{i=1}^d (\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j}) \mathbf{E}[1 - P_{\text{ch}}(z_i^{(t)})] \quad (2)$$

для ожидаемой доли генотипов с приспособленностью не ниже уровня ϕ_i , где $i = 1, \dots, d$.

Пусть $((d+1) \times d)$ -матрица $\mathbf{B}$ называется *монотонной* тогда и только тогда, когда $\beta_{i-1,j} \leq \beta_{i,j}$ для всех i, j от 1 до d . Монотонность матрицы $\mathbf{B} = (\beta_{i,j})$ означает, что чем больше уровень приспособленности A_i родительского решения, тем больше его нижняя оценка вероятности перехода в любое заданное подмножество H_j , $j = 1, \dots, d$. Другими словами, это означает, что $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j} \geq 0$.

Следующее утверждение доказывается аналогично утверждению 4 из [12] (см. подробнее в [3]).

Утверждение 2. Если $\mathbf{B}$ монотонна, то для всех $j = 1, \dots, d$ выполнено

$$\mathbf{E}[z_j^{(t+1)}] \leq \beta_{dj} - \sum_{i=1}^d (\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j}) \left(1 - P_{\text{ch}}(\mathbf{E}[z_i^{(t)}])\right). \quad (3)$$

Итеративным применением неравенства (3) компоненты математического ожидания вектора популяции $\mathbf{E}[\mathbf{z}^{(t)}]$ могут быть ограничены до любого t , начиная с исходного вектора $\mathbf{E}[\mathbf{z}^{(0)}]$, описывающего популяцию X^0 . В связи с тем, что на данный момент замкнутой математической формулы для верхней оценки вектора $\mathbf{E}[\mathbf{z}^{(t)}]$ не известно, далее его оценки получаются описанным алгоритмом.

В случае функции $\text{ROYALROAD}_{r_1, r_2}$ мы будем использовать термин *1-блок* для любого блока, в котором назначение символов соответствует его схеме (т. е. во всех r_1 позициях, в которых требуется однозначное понимание консенсуса, присвоены требуемые значения, а во всех r_2 позициях, которые допускают два варианта, присвоено одно из двух допустимых значений). В противном случае мы будем называть этот блок *0-блоком*. Вероятности перехода между 0- и 1-состояниями блока под действием мутации описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pr(0 \rightarrow 1) &\leq \frac{2}{3}p_m; \quad \Pr(0 \rightarrow 0) = 1 - \Pr(0 \rightarrow 1); \\ \Pr(1 \rightarrow 1) &= \left(1 - p_m + \frac{1}{3}p_m\right)^{r_2} (1 - p_m)^{r_1}; \quad \Pr(1 \rightarrow 0) = 1 - \Pr(1 \rightarrow 1). \end{aligned}$$

Естественно предположить, что d равно количеству блоков $n/(r_1 + r_2)$, а подмножества $H_0, \dots, H_d$ соответствуют линиям уровня $\phi_0 = 0, \phi_1 = 1, \dots, \phi_d = d$. Матрица верхних границ $\mathbf{B}$ вычисляется по формуле (20) из [12]. Эта матрица $\mathbf{B}$ удовлетворяет свойству монотонности при условии, что $\frac{2}{3}p_m \leq \Pr(1 \rightarrow 1)$, например, в случае $r_1 = 2, r_2 = 6$ это верно для всех $p_m < 1/4$. Программная реализация описанного алгоритма вычисления верхних оценок для $\mathbf{E}[z_j^{(t)}]$, $j = d-2, d-1, d$, приводится в [4].

3.2. Теоретическая верхняя оценка на среднее время первого получения требуемой последовательности

Предположим, что известна нижняя оценка p_0 для вероятности не снизить уровень приспособленности любого генотипа при мутации, т. е. $\Pr\{\text{Mut}(x) \in H_j \mid x \in A_j\} \geq p_0$ для всех $j = 1, \dots, d-1$. Кроме того, предположим, что для каждого уровня $j = 0, \dots, d-1$ известны нижние оценки s_j вероятностей улучшающих мутаций, то есть $\Pr\{\text{Mut}(x) \in H_{j+1} \mid x \in A_j\} \geq s_j$ для всех $j = 0, \dots, d-1$. Обозначим $s_* := \min_{j=0, \dots, d-1} s_j$.

На основе теоремы об уровнях функции приспособленности в [9] получено

Следствие 1. Если неэлитарный ЭА с (μ, λ) -селекцией применяется при:

- достаточно малом отношении μ/λ таком, что $\mu/\lambda \leq p_0/(1+\delta)$ при некотором $\delta \in (0, 1]$,
- достаточно большом размере популяции таком, что $\lambda \geq \left(\frac{4\lambda}{\delta^2\mu}\right) \ln\left(\frac{128(d+1)\lambda}{s_*\delta^2\mu}\right)$,

то номер итерации t , при котором впервые будет получена особь из H_d , оценивается сверху величиной

$$UB := \left(\frac{8}{\delta^2}\right) \sum_{j=0}^{d-1} \left(\ln\left(\frac{6\delta\lambda}{4 + \mu s_j \delta}\right) + \frac{1}{\mu s_j} \right).$$

Легко проверить, что если функция $\text{ROYALROAD}_{r_1, r_2}$ используется как функция приспособленности в ЭА, тогда можно предположить:

$$p_0 := (1 - p_m)^{(d-1)r_1} \left(1 - \frac{2p_m}{3}\right)^{(d-1)r_2},$$

$$s_* := \left(\frac{p_m}{3}\right)^{r_1} \left(\frac{2p_m}{3}\right)^{r_2} \left((1 - p_m)^{r_1} \left(1 - \frac{2p_m}{3}\right)^{r_2}\right)^{(d-1)}. \quad (4)$$

Здесь нижняя оценка s_* базируется на «худшем» из возможных сценариев, когда для улучшения приспособленности требуется с помощью мутации получить верные значения во всех позициях одного блока, при этом не изменив содержимое других блоков, если ни одна позиция в рассматриваемом блоке до мутации не соответствовала консенсусу. Чем больше позиций содержится в блоке и чем больше отношение r_1/r_2 , тем более заниженной будет оценка (4).

$$s_j := (d-j)s_*, \quad j = 0, \dots, d-1. \quad (5)$$

Нижняя оценка (5) вероятности улучшения приспособленности в случае, когда j блоков соответствуют консенсусу, получена из того, что имеется $d-j$ способов улучшить ровно один из оставшихся блоков, не изменяя остальных. Эта оценка мало отклоняется от точного значения вероятности улучшения приспособленности, т. к. шансы увеличить два блока сразу очень малы.

Упрощения, использованные при получении (4) и (5), в отличие от упрощающих предположений 1–3, относятся не к построению математической модели, а к вычислению оценок времени достижения искомой последовательности в рамках выбранной модели.

4. Применение оценок из теории ЭА к процедуре SELEX

4.1. Доля оптимальных последовательностей в вычислительном эксперименте и верхняя оценка для неё

Ниже представлены результаты вычислительного эксперимента в сравнении с теоретическими оценками, полученными в разделе 3.1. С этой целью рассмотрим применение ЭА к функции приспособленности $\text{ROYALROAD}_{2,6}$, моделирующей SELEX для случая 5 сайтов FIS. Средняя доля особей из подмножеств H_d, H_{d-1} и H_{d-2} представлена на рис. 5. Здесь $\lambda = 10^6$, $\mu = 10^4$, $p_m = 0,1$.

Статистика в вычислительном эксперименте набиралась по 1000 прогонам алгоритма, в каждом из которых только одна особь $x_1^{(t)}$ для каждого t проверялась на попадание в целевое подмножество H_d, H_{d-1} или H_{d-2} . Заметим, что $\mathbf{E}[z_i^{(t)}] = \Pr\{x_1^{(t)} \in H_i\}$ по утверждению 1 и, например, для H_d при заданном t мы имеем серию из 1000 испытаний Бернулли, где вероятность успеха $\Pr\{x_1^{(t)} \in H_d\}$ оценивается по результатам описанного эксперимента. Доверительные интервалы уровня 95 % для вероятности успеха в схеме Бернулли были построены с использованием нормального приближения, как описано в [1], гл. 34. На рис. 5 результаты эксперимента показаны пунктирными линиями, а сплошные линии соответствуют верхним оценкам, полученным итеративным применением формулы (3).

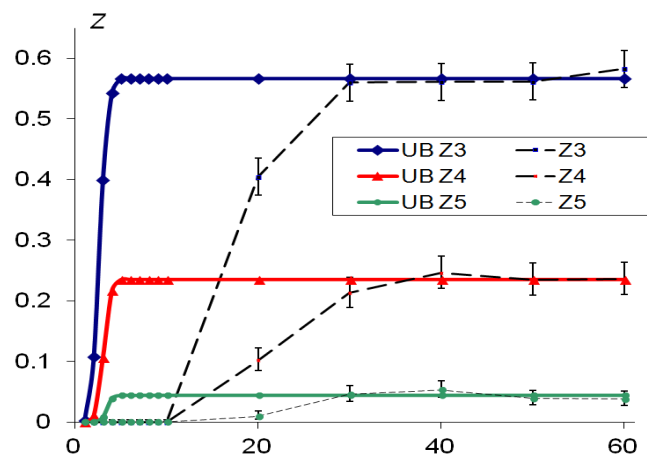


Рис. 5. Сравнение теоретических верхних оценок (UBz_3, UBz_4 и UBz_5) и экспериментального оценивания для средней пропорции оптимальных и субоптимальных особей z_5, z_4 и z_3 в популяции ЭА с $\lambda = 10^6$, $\mu = 10^5$, $p_m = 0,1$, моделирование SELEX для 5 FIS-сайтов (функция приспособленности $\text{ROYALROAD}_{2,6}$). Доверительные интервалы рассчитываются с уровнем 95 %.

Как видно из рис. 5, после 30 итераций верхняя оценка из утверждения 2 становится близкой к истинному значению пропорции оптимальных и субоптимальных генотипов (с точностью до ширины доверительного интервала). Общее время счёта в этом вычислительном эксперименте с ЭА на Xeon QuadCore 2.5 ГГц (при его двухпоточном использовании) составило более месяца, в то время как оценка по формуле (3) вычисляется за долю секунды.

4.2. Верхняя оценка математического ожидания времени оптимизации в сравнении с вычислительным экспериментом

Чтобы оценить верхнюю границу ожидаемого времени работы ЭА, полученную в следствии 1, нами проведён вычислительный эксперимент с 1000 независимыми прогонами ЭА с вероятностью мутации $p_m = 0,1$. Применение теоретической оценки среднего времени первого получения оптимума к случаю FIS-энхансера с 4 сайтами связывания, смоделированного функцией Royal Road с $r_1 = 2, r_2 = 6, n = 32$, в предположении, что в ЭА $\lambda = 10^5, \mu = 10^3$, даёт $UB = 3,9 \cdot 10^9$, тогда как в эксперименте среднее число итераций до получения оптимума оказалось равным 30,75.

Также было рассмотрено применение теоретической оценки среднего времени первого получения оптимума к случаю с 5 сайтами связывания, при использовании модельной функции Royal Road с $r_1 = 4, r_2 = 2, n = 30$ (что соответствует примеру на рис. 1). При настраиваемых параметрах $\lambda = 10^5, p_m = 0,1$ и $\mu = 500$ оценка даёт $UB = 4,85 \cdot 10^7$, тогда как в эксперименте потребовалось 30,46 итераций в среднем.

Общее время счёта в этих экспериментах составило несколько минут, однако при моделировании практически значимых случаев с численностью популяции $\lambda = 10^8$ и более аналогичный вычислительный эксперимент может оказаться проблематичным.

4.3. Обсуждение результатов

Можно предположить, что причина большой переоценки времени поиска, вытекающей из следствия 1, заключается в чрезмерно пессимистическом предположении об изменениях в блоках функции Royal Road при мутации, используемых для вычисления значений s_* и s_j в (4) и (5). Эти вероятностные оценки рассчитываются для наихудшего случая, если предположить, что если сайт не удовлетворяет требованиям связывания, то все позиции в этом сайте отличаются от требуемых значений. Эта гипотеза также согласуется с результатами нашего дополнительного эксперимента, в котором было установлено $r_1 = 0, r_2 = 1$ и $n = 40$. При $\lambda = 100, p_m = 0,025$ и $\mu = 10$ были получены значительно более близкие результаты: $UB = 392,6$ и в среднем 45,715 итераций в эксперименте. Таким образом, для улучшения оценки из следствия 1 требуется дополнительный анализ изменчивости в блоках функции Royal Road под действием мутации.

В завершение рассмотрим, как сделанные упрощения могли повлиять на адекватность предложенных оценок.

Упрощающее предположение 1 о равенстве расстояний между начальными позициями всех сайтов связывания исключает некоторые (по-видимому маловероятные) альтернативные варианты возникновения сайтов связывания с другими сдвигами, что, скорее всего, занижает оценки численности наиболее приспособленных последовательностей и увеличивает оценки среднего времени поиска.

Для изучения эффекта от упрощающего предположения 2 (о том, что каждая позиция сайта связывания FIS имеет один или два подходящих нуклеотида) требуется дополнительное исследование. При этом следовало бы учитывать тот факт, что энергия свободного связывания транскрипционного фактора с отдельным сайтом связывания хорошо аппроксимируется аддитивной функцией от последовательности нуклеотидов (см., например [6]), а вероятность связывания в отдельном сайте описывается сигмоидальной функцией от энергии свободного связывания [11].

По упрощающему предположению 3 критерий отбора молекул является возрастающей функцией от числа действующих сайтов связывания. Если данное предположение неприменимо, то возможны как завышенные, так и заниженные оценки при использовании предложенного подхода.

Использование (μ, λ) -селекции в ЭА в качестве модели SELEX также представляет собой упрощение. Детальному исследованию распределений вероятностей отбора в процедуре SELEX посвящено значительное число публикаций – см., например [11, 16, 22]. Однако теоретический или экспериментальный анализ ЭА с распределениями вероятностей селекции из этих работ представляется чрезвычайно трудоёмким. С целью уточнения модели имеет смысл рассмотреть «релаксированную» версию (μ, λ) -селекции, где решение о включении индивида в промежуточную популяцию численности μ будет не детерминированным, а рандомизированным соответствующим образом. При прочих равных условиях такая «релаксированная» версия селекции будет давать меньшую вероятность выбора наилучших особей в популяции, чем стандартная (μ, λ) -селекция, а значит, можно ожидать и большего времени поиска требуемой последовательности.

5. Заключение

Два подхода из теории эволюционных алгоритмов (оценки доли достаточно приспособленных особей в популяции ЭА и оценки среднего времени первого достижения оптимума) применены для моделирования экспериментальных методов современной биоинженерии. С этой целью теоретические оценки, полученные с помощью обоих подходов, применены к неэлитарному эволюционному алгоритму с (μ, λ) -селекцией и функцией приспособленности Royal Road. Показано, что этот ЭА может рассматриваться как модель процедуры направленной эволюции SELEX для получения генно-регуляторного элемента со многими сайтами связывания. Теоретические оценки сопоставлены с результатами

вычислительных экспериментов.

Проведённый анализ показывает, что теоретические оценки, рассмотренные в разделе 3.1, в принципе могут быть использованы для прогноза числа достаточно эффективных энхансеров после заданного числа итераций процедуры SELEX. Верхние границы на среднее число итераций SELEX до получения требуемой последовательности (раздел 3.2) представляются чрезмерно пессимистичными. Необходимы дальнейшие исследования для улучшения теоретических оценок, чтобы они могли быть применены к процедурам SELEX, состоящим всего из нескольких раундов. Также необходимы дальнейшие исследования для сравнения теоретических прогнозов и вычислительных экспериментов с результатами практических экспериментов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-18-01536.

Приложение

Настоящее приложение содержит пояснения некоторых биологических терминов, использованных в статье.

Амплификация (лат. *amplificatio* – усиление, увеличение) – процесс образования дополнительных копий молекул ДНК.

Полимеразная цепная реакция (ПЦР) – экспериментальный метод молекулярной биологии, позволяющий добиться значительного увеличения малых концентраций определённых фрагментов нуклеиновой кислоты (ДНК) в биологическом материале (пробе). ПЦР позволяет проводить случайный мутагенез: ошибки в последовательность ДНК вносятся полимеразой в условиях, понижающих её специфичность.

Транскрипционный фактор FIS (Factor for inversion stimulation): белок – транскрипционный фактор, способный специфически связываться со своими сайтами связывания в энхансере и, как следствие, усиливать транскрипцию соответствующего гена (гена-мишени для FIS). «Специфическое связывание» транскрипционного фактора заключается в том, что такой белок способен находить, узнавать и специфически нековалентно связываться с определёнными последовательностями оснований молекулы ДНК. Такие последовательности называются сайтами связывания (это относительно короткие последовательности).

Энхансер (англ. *enhancer* – усилитель) – небольшой участок ДНК, который после связывания с ним факторов транскрипции стимулирует транскрипцию гена.

Элемент UP (upstream promoter element) – последовательность, расположенная «выше» канонического элемента «-35» у некоторых бактериальных промоторов, усиливающая действие такого промотора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
2. Нуклеиновые кислоты. От А до Я / Ред. С. Мюллер. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013.
3. Рычкова М.А. О математическом ожидании численности особей с высокой приспособленностью в популяции эволюционного алгоритма. Омск: ОмГУ, 2018. URL: <http://iitam.omsk.net.ru/~eremeev/rychkova.pdf> (дата обращения: 24.09.2019).
4. Программа для вычисления верхней оценки вектора популяции. URL: http://msm.omsu.ru/jrns/jrn53/upper_bound_on_z.zip (дата обращения: 04.02.2020).
5. Auger A., Doerr B. Theory of Randomized Search Heuristics: Foundations and Recent Developments. River Edge, NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc., 2011.
6. Benos P.V., Bulyk M.L., Stormo G.D. Additivity in protein–DNA interactions: how good an approximation is it? // Nucleic Acids Res. 2002. V. 30, Issue 20. P. 4442–4451.
7. Blazeck J., Liu L., Redden H., Alper H., Tuning gene expression in *Yarrowia lipolytica* by a hybrid promoter approach // Appl. Environ. Microbiol. 2011. V. 77, No. 22. P. 7905–7914.
8. Borisovsky P., Ereemeev A. Comparing evolutionary algorithms to the (1+1)-EA // Theoretical Computer Science. 2008. V. 403, No. 1. P. 33–41.
9. Corus D., Dang D.-C., Ereemeev A.V., Lehre P.K. Level-based analysis of genetic algorithms and other search processes // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2018. V. 22, Issue 5. P. 707–719.
10. Darmostuk M., Rimpelova S., Gbelcova H., Ruml T. Current approaches in SELEX: An update to aptamer selection technology // Biotechnology Advances. 2015. V. 33. P. 1141–1161.
11. Djordjevic M., Sengupta A.M. Quantitative modeling and data analysis of SELEX experiments // Physical Biology. 2005. V. 3, No. 1. P. 13–28.
12. Ereemeev A.V. On proportions of fit individuals in population of genetic algorithm with tournament selection // Evolutionary Computation. 2018. V. 26, No. 2. P. 269–297.
13. Hirvonen C.A., Ross W., Wozniak C.E., Marasco E., Anthony J.R., Aiyar S.E., Newburn V.H., Gourse R.L. Contributions of UP elements and the transcription factor FIS to expression from the seven rrn P1 promoters in *Escherichia coli* // J. Bacteriol. 2001. V. 183, No. 21. P. 6305–6314.
14. Gertz J., Siggia E.D., Cohen B.A. Analysis of combinatorial cis-regulation in synthetic and genomic promoters // Nature. 2009. V. 457. P. 215–218.
15. Kinghorn A.B., Fraser L.A., Lang S., Shiu S., Tanner J.A. Aptamer bioinformatics // International journal of molecular sciences. 2017. V. 18, No. 12. P. 2516.
16. Lee Y.-G., McKay B., Kim K.-I., Kim D.-K., Hoai N.-X. Investigating vesicular selection: A selection operator in *in vitro* evolution // Applied Soft Computing. 2011. V. 11, Issue 8. P. 5528–5550.
17. Mitchell M., Forrest S., Holland J.H. The royal road for genetic algorithms: fitness landscapes and GA performance // Proceedings of the 1st European Conf. on Artificial Life. Cambridge, MA: MIT Press, 1992. P. 245–254.

18. Oh I.S., Lee Y., McKay R. Simulating chemical evolution // Proceedings of 2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation. New Orleans, LA, 2011. P. 2717–2724.
19. Rudolph G. Finite Markov chain results in evolutionary computation: A tour d'horizon // Fundamental Informaticae. 1998. V. 35, No. 1–4. P. 67–89.
20. Spirov A., Holloway D. New approaches to designing genes by evolution in the computer // Real-World Applications of Genetic Algorithms / O. Roeva. London: InTech, 2012. P. 235–260.
21. Shao Y., Feldman-Cohen L.S., Osuna R. Functional characterization of the *Escherichia coli* FIS-DNA binding sequence // J. Mol. Biol. 2008. V. 376, No. 3. P. 771–85.
22. Spill F., Weinstein Z.B., Shemirani A.I., Ho N., Desai D., Zaman M.H. Controlling uncertainty in aptamer selection // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. V. 113, No. 43. P. 12076–12081.
23. Voigt C.A., Martinez C., Wang Z.G., Mayo S.L., Arnold F.H. Protein building blocks preserved by recombination // Nat Struct Biol. 2002. V. 9. P. 553–558.
24. Wu L., Curran J.F. An allosteric synthetic DNA // Nucleic Acids Research. 1999. V. 27, No. 6. P. 1512–1516.
25. Zhang G., Simon A.E. A multifunctional Turnip Crinkle Virus replication enhancer revealed by *in vivo* functional SELEX // J. Mol. Biol. 2003. V. 326. P. 35–48.

ESTIMATES FROM EVOLUTIONARY ALGORITHMS THEORY APPLIED TO DIRECTED EVOLUTION

A.V. Eremeev^{1,2}

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

A.V. Spirov^{2,3}

Ph. D. (Biology), e-mail: sspirov@yandex.ru

¹Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk

²The Institute of Scientific Information, for Social Sciences RAS, Moscow

³I.M. Sechenov Institute of Evolutionary Physiology and Biochemistry RAS, St. Petersburg

Abstract. The field of evolutionary computation emerged in the area of computer science due to transfer of ideas from biology and developed independently for several decades, enriched with techniques from probability theory, complexity theory and optimization methods. Our aim is to consider how some recent results from the theory of evolutionary computation may be transferred back into biology. It has been noted that the non-elitist evolutionary algorithms optimizing Royal Road fitness functions may be considered as models of evolutionary search for the synthetic enhancer sequences “from scratch”. This problem asks for a tight cluster of supposedly unknown motifs from the initial random (or partially random) set of DNA sequences using SELEX approaches. We apply the upper bounds on the expected hitting time of a target area of genotypic space in order to upper-bound the expected time to finding a sufficiently fit series of motifs in a SELEX procedure. On the other hand, using the theory of evolutionary computation, we propose an upper bound on the expected proportion of the DNA sequences with sufficiently high fitness at a given round of a SELEX

procedure. Both approaches are evaluated in computational experiment, using a Royal Road fitness function as a model of the SELEX procedure for regulatory FIS factor binding site.

Keywords: runtime analysis, SELEX procedure, Royal Road function, enhancer.

REFERENCES

1. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki*. Moscow, Mir Publ., 1975. (in Russian)
2. *Nucleic Acids from A to Z: A Concise Encyclopedia* / Ed. by S. Müller. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008.
3. Rychkova M.A. O matematicheskom ozhidanii chislennosti osobei s vysokoi prispособlennost'yu v populyatsii evolyutsionnogo algoritma. Omsk, OmGU Publ., 2018. URL: <http://iitam.omsk.net.ru/~eremeev/rychkova.pdf> (24.09.2019). (in Russian)
4. Supplementary materials – program for computing the upper bound on population vector, 2020. URL: http://iitam.omsk.net.ru/~eremeev/upper_bound_on_z.zip (24.09.2019).
5. Auger A., Doerr B. *Theory of Randomized Search Heuristics: Foundations and Recent Developments*. River Edge, NJ, USA, World Scientific Publishing Co., Inc., 2011.
6. Benos P.V., Bulyk M.L., and Stormo G.D. Additivity in protein–DNA interactions: how good an approximation is it? *Nucleic Acids Res.*, 2002, vol. 30, issue 20, pp. 4442–4451.
7. Blazeck J., Liu L., Redden H., and Alper H. Tuning gene expression in *Yarrowia lipolytica* by a hybrid promoter approach. *Appl. Environ. Microbiol.*, 2011, vol. 77, no. 22, pp. 7905–7914.
8. Borisovsky P. and Ereemeev A. Comparing evolutionary algorithms to the (1+1)-EA. *Theoretical Computer Science*, 2008, vol. 403, no. 1, pp. 33–41.
9. Corus D., Dang D.C., Ereemeev A.V., and Lehre P.K. Level-based analysis of genetic algorithms and other search processes. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, vol. 22, issue 5, pp. 707–719.
10. Darmostuk M., Rimpelova S., Gbelcova H., and Ruml T. Current approaches in SELEX: An update to aptamer selection technology. *Biotechnology Advances*, 2015, vol. 33, pp. 1141–1161.
11. Djordjevic M., Sengupta A.M. Quantitative modeling and data analysis of SELEX experiments. *Physical Biology*, 2005, vol. 3, no. 1, pp. 13–28.
12. Ereemeev A.V. On proportions of fit individuals in population of genetic algorithm with tournament selection. *Evolutionary Computation*, 2018, vol. 26, no. 2, pp. 269–297.
13. Hirvonen C.A., Ross W., Wozniak C.E., Marasco E., Anthony J.R., Aiyar S.E., Newburn V.H., and Gourse R.L. Contributions of UP elements and the transcription factor FIS to expression from the seven rrn P1 promoters in *Escherichia coli*. *J. Bacteriol.*, 2001, vol. 183, no. 21, pp. 6305–6314.
14. Gertz J., Siggia E.D., and Cohen B.A. Analysis of combinatorial cis-regulation in synthetic and genomic promoters. *Nature*, 2009, vol. 457, pp. 215–218.
15. Kinghorn A.B., Fraser L.A., Lang S., Shiu S., and Tanner J.A. Aptamer bioinformatics. *International journal of molecular sciences*, 2017, vol. 18, no. 12, pp. 2516.

16. Lee Y.-G., McKay B., Kim K.-I., Kim D.-K., and Hoai N.-X. Investigating vesicular selection: A selection operator in *in vitro* evolution. *Applied Soft Computing*, 2011, vol. 11, issue 8, pp. 5528–5550.
17. Mitchell M., Forrest S., and Holland J.H. The royal road for genetic algorithms: fitness landscapes and GA performance. *Proceedings of the 1st European Conf. on Artificial Life*, Cambridge, MA, MIT Press, 1992, pp. 245–254.
18. Oh I.S., Lee Y., and McKay R. Simulating chemical evolution. *Proceedings of 2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation*, New Orleans, LA, 2011, pp. 2717–2724.
19. Rudolph G. Finite Markov chain results in evolutionary computation: A tour d'horizon. *Fundamental Informaticae*, 1998, vol. 35, no. 1–4, pp. 67–89.
20. Spirov A. and Holloway D. New approaches to designing genes by evolution in the computer. *Real-World Applications of Genetic Algorithms*, O. Roeva, London, InTech, 2012, pp. 235–260.
21. Shao Y., Feldman-Cohen L.S., and Osuna R. Functional characterization of the *Escherichia coli* FIS-DNA binding sequence. *J. Mol. Biol.*, 2008, vol. 376, no. 3, pp. 771–85.
22. Spill F., Weinstein Z.B., Shemirani A.I., Ho N., Desai D., and Zaman M.H. Controlling uncertainty in aptamer selection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, vol. 113, no. 43, pp. 12076–12081.
23. Voigt C.A., Martinez C., Wang Z.G., Mayo S.L., and Arnold F.H. Protein building blocks preserved by recombination. *Nat Struct Biol.*, 2002, vol. 9, pp. 553–558.
24. Wu L. and Curran J.F. An allosteric synthetic DNA. *Nucleic Acids Research*, 99, vol. 27, no. 6, pp. 1512–1516.
25. Zhang G. and Simon A.E. A multifunctional Turnip Crinkle Virus replication enhancer revealed by *in vivo* functional SELEX. *J. Mol. Biol.*, 2003, vol. 326, pp. 35–48.

Дата поступления в редакцию: 28.09.2019

АНАЛИЗ РОСТА МИЦЕЛИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЧАНТЕРА-ТОРНЛИ

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Модель роста мицелия Чантера-Торнли анализируется с точки зрения математической теории бифуркаций. Показано, что можно наблюдать не только непрерывный рост мицелия, но и его скачкообразную эволюцию.

Ключевые слова: мицелий, модель Чантера-Торнли, скачкообразный рост, теория бифуркаций.

Выращивание мицелия исследуется в рамках модели Чантера–Торнли, представляющую собой систему дифференциальных уравнений. Как правило, анализ сводится к исследованию решений задачи Коши [1, 2]. Мы посмотрели на процесс выращивания мицелия с точки зрения смены стационарных равновесных состояний, которые имеются в модели Чантера–Торнли. Результат был анонсирован в [3].

1. Модель Чантера-Торнли

В 1978 году Чантер и Торнли [1], изучая рост мицелия (грибницы) в компосте (ёмкость фиксированного и постоянного объёма V_c , в которой осуществляется выращивание грибов на питательном субстрате с образованием спорофор), построили математическую модель роста грибов.

Поскольку определение сухой массы мицелия является наиболее употребительной мерой роста, то динамика мицелия описана Чантером и Торнли с помощью дифференциального уравнения, в которое мы внесли незначительное изменение:

$$\frac{dw_m}{dt} = qs_m(t) \left[1 - \frac{w_m - w_m^0}{A_m} \right] (w_m - w_m^0), \quad (1)$$

где w_m – сухой вес мицелия в компосте, $w_m^0 > 0$ – исходное количество (маточного) мицелия при $t = 0$, $q > 0$ – коэффициент пропорциональности, $s_m > 0$ – концентрация субстрата в мицелии (вычисляемый как отношение соответствующих абсолютных содержаний к физическому объёму компартментов).

Величина A_m рассматривалась Чантером и Торнли как максимально достижимая величина для сухого веса мицелия. Естественно предположить, что она

зависит от условий, в которых произрастает мицелий. Они предполагали, что A_m разумно рассматривать как эффект физического ограничения, обеспеченного деревянным подносом, содержащим компост и мицелий [1].

Непрерывная динамика роста мицелия во времени (см. рис. 1) была получена посредством решения дифференциального уравнения (1) и представлена в работах [1, 2].

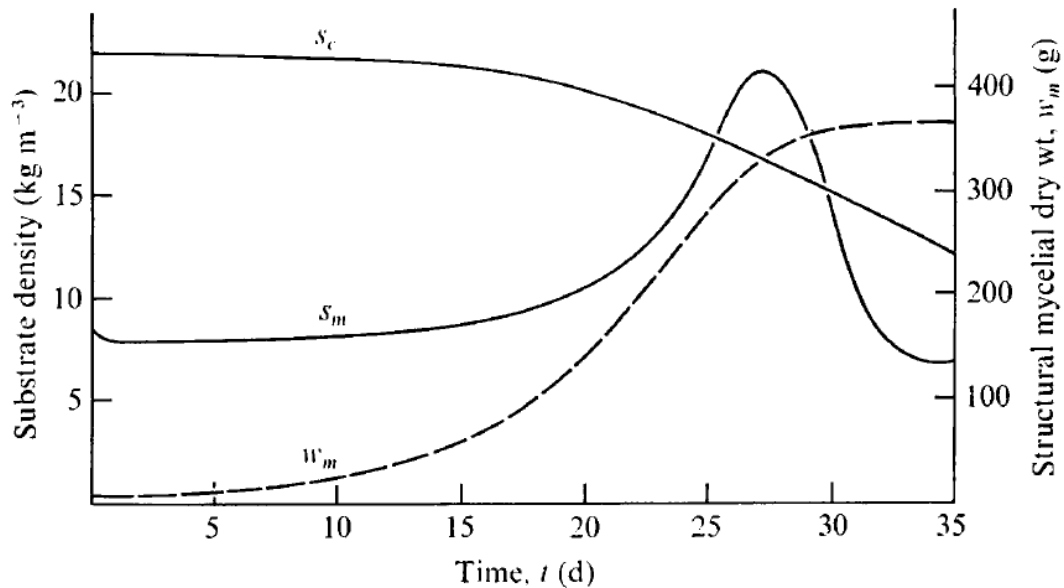


Рис. 1. Динамика изменения сухой массы мицелия w_m , плотности субстрата s_m в мицелии и плотности субстрата s_c в компосте [1]. Здесь $w_m^0 = 0$

2. Стационарные равновесия

Рассмотрим модель Чантера–Торнли с точки зрения математической теории бифуркаций [4].

Как принято в теории бифуркаций, для уравнения (1) следует искать стационарные равновесные решения, удовлетворяющие условию:

$$\frac{dw_m}{dt} = 0. \quad (2)$$

Из этого уравнения находим две кривые $w = w(A)$ равновесия на плоскости (A_m, w_m) :

$$w_m = w_m^0 \quad \text{и} \quad w_m = w_m^0 + A_m. \quad (3)$$

Находясь в стационарном равновесии, величина сухой массы мицелия w_m не меняется с течением времени.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dw}{dt} = f(w, A), \quad (4)$$

$$f(w, A) = qs_m(t) \frac{A - (w - w_m^0)}{A} (w - w_m^0).$$

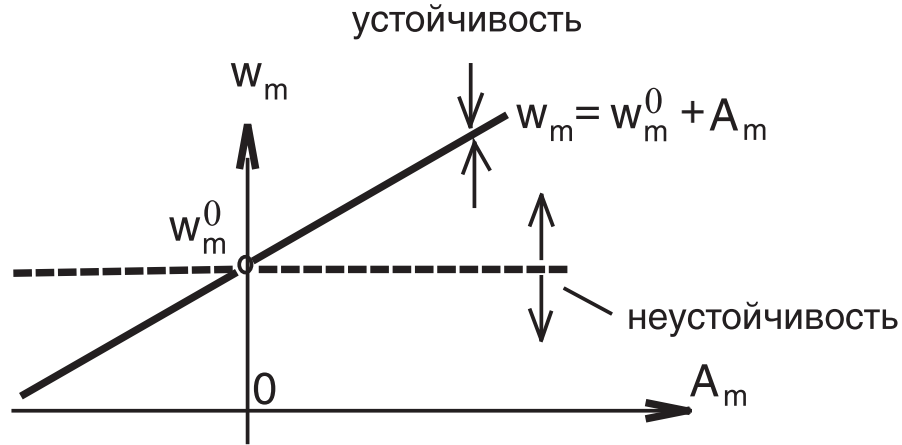


Рис. 2. Две ветви равновесий для уравнения (1). Пунктирная линия – неустойчивые равновесия; сплошная линия – устойчивые равновесия

Устойчивость равновесий. Для того чтобы установить устойчивость равновесий, используем теорему из § 11.7 книги [4, с. 24].

Имеем, раскладывая правую часть уравнения (4) в ряд Тейлора в «точке» равновесия $(w(A), A_m)$,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \underbrace{f(w(A), A)}_{=0} + f'_w(w(A), A)(w - w(A)) + \dots \\ &= f'_w(w(A), A)(w - w(A)) + \dots \end{aligned}$$

Если

$$\sigma = f'_w(w(A), A) = qs_m \frac{A - 2(w - w_m^0)}{A} < 0,$$

то равновесие $w(A)$ устойчиво, и неустойчиво $\sigma > 0$.

Для равновесий $w_m = w_m^0$

$$\sigma = f'_w(w_m^0, A) = qs_m \cdot 1 > 0.$$

Следовательно, равновесия с кривой равновесий $w(A) = w_m^0$ неустойчивы для $A_m > 0$ (рис. 2).

Для равновесия $w_m(A) = w_m^0 + A_m$

$$\sigma = f'_w(w_m(A), A_m) = qs_m \frac{A_m - 2(w_m - w_m^0)}{A_m} = qs_m \frac{A_m - 2A_m}{A_m} = -qs_m < 0.$$

Поэтому равновесия, лежащие на кривой равновесий $w_m = w_m^0 + A_m$, устойчивы при $A_m > 0$ (рис. 2).

3. Выводы

Таким образом, мицелий, имея начальный вес w_m^0 , находится в неустойчивом равновесном состоянии с $A_m > 0$. Неизбежные малые спонтанные возмущения или действия персонала в системе «компост-субстрат-мицелий-спорофоры» приведут к скачку в устойчивое равновесие $w_m = w_m^0 + A_m$. Иначе говоря, долго состояние $w_m = w_m^0$ существовать не может, поскольку внешние условия подталкивают мицелий к росту.

При изменении значения параметра A_m система поменяет равновесие, причём либо останется на устойчивой ветви $w_m = w_m^0 + A_m$, либо соскочит на неустойчивую ветвь $w_m = w_m^0$ и оттуда вновь неизбежно перескочит на устойчивую ветвь. Эти скачкообразные перемещения сопровождаются как ростом сухого веса мицелия, так и, возможно, его уменьшением. Уменьшение веса связано с уменьшением A_m .

Более того, непредсказуемые случайные воздействия окружающей среды на растущий мицелий могут приводить к тому, что его сухой вес не является непрерывно меняющейся величиной, а есть величина, меняющаяся скачкообразно от одного постоянного значения, отвечающего стационарному равновесию, к другому такому же равновесию, но с иным весом. И это мы связали с изменениями параметра A_m .

Однако может ли параметр A_m меняться при выращивании мицелия? Чантер и Торнли высказывались о величине A_m как эффекте деревянного подноса, содержащего компост и мицелий. Но следует вспомнить и о необходимости снижать температуру в компосте, заинокулированном грибами, в начале процесса выращивания мицелия, и о мероприятиях по предотвращению пересыхания компоста, об уплотнении компоста и т. д. В какой-то мере это означает наличие колебаний значений величины A_m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Chanter D.O., Thornley J.H.M. Mycelial Growth and the Initiation and Growth of Sporophores in the Mushroom Crop: a Mathematical Model // Journal of General Microbiology. 1978. V. 106. P. 55–65.
2. Вигонт В.А., Миронычева Е.С., Топаж А.Г. Модификация модели роста грибов Чантера–Торнли и её анализ средствами многоподходного имитационного моделирования // Компьютерные исследования и моделирования. 2015. Т. 7, № 2. С. 375–385.
3. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Скачкообразный рост мицелия в модели Чантера–Торнли роста грибов // Омские научные чтения – 2019 [Электронный ресурс]: материалы Третьей Всероссийской научно-практической конференции (Омск, 2–5 декабря 2019 г.). Электрон. текстовые дан. Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. Всероссийская научно-практическая конференция (Омск, 2–6 декабря 2019 г.). Омск : ОмГУ, 2019. С. 129–130.
4. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М. : Мир, 1983. 301 с.

MYCELIAL GROWTH ANALYSIS BASED ON THE CHANTER-THORNLEY MODEL

L.A. Volodchenkova

Ph.D. (Biology), Asso professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The Chanter-Thornley mycelial growth model is analyzed with point of view of the mathematical bifurcation theory. It was shown that one can observe not only the continuous growth of the mycelium, but also its saltatory evolution.

Keywords: mycelium, Chanter-Thornley model, saltatory growth, bifurcation theory.

REFERENCES

1. Chanter D.O. and Thornley J.H.M. Mycelial Growth and the Initiation and Growth of Sporophores in the Mushroom Crop: a Mathematical Model. *Journal of General Microbiology*, 1978, vol. 106, pp. 55–65.
2. Vigont V.A., Mironicheva E.S., and Topazh A.G. Modifikaciya modeli rosta gribov Chantera-Tornli i ee analiz sredstvami mnogopodhodnogo imitacionnogo modelirovaniya. *Kompyuternie issledovaniya i modelirovaniya*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 375–385. (in Russian)
3. Volodchenkova L.A. and Guts A.K. Skachkoobrazniy rost miceliya v modeli Chantera-Tornli rosta gribov. *Omskiye nauchnye chteniya – 2019 [Elektronik resurs]: materialy Tret'ey Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferencii (Omsk, 2–5 dekabrya 2019 g.)*, Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2019, pp. 129–130. (in Russian)
4. Yoss Zh. and Dzhozef D. *Elementarnaya teoriya ustoychivosti i bifurkaciy*. Moscow, Mir publ., 1983, 301 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 30.03.2020

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЁТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА

С.П. Баутин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SBautin@usurt.ru

А.А. Бугаенко

аспирант, e-mail: bugaenkoanya@yandex.ru

И.Ю. Крутова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Снежинский физико-технический институт Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», Снежинск, Россия

Аннотация. Для системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса проведена линеаризация в случае когда не учитывается действие силы тяжести. Найдены частные решения в виде бегущих волн.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, линеаризация, точные решения.

Введение

Природные восходящие закрученные потоки: торнадо, тропические циклоны, огненные вихри — представляют собой сложные и ещё достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надёжное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса.

В монографиях [1–5] (более подробную библиографию см. в [3,4]) с использованием этой математической модели — система уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса — и с применением методологии характеристической задачи Коши [6–8] проведены аналитические и численные исследования течений воздуха в природных восходящих закрученных потоках.

В силу нелинейности системы уравнений газовой динамики построение её решений является достаточно трудоёмким. Это и послужило причиной линеаризации системы уравнений газовой динамики на её точных решениях [9].

Далее в работе в случае неучёта действия силы тяжести приведена линеаризованная на точном решении линейная система уравнений с частными производными. Неучёт действия силы тяжести возможен при исследовании газодинамических течений в придонных частях природных восходящих закрученных потоков, в которых параметры газа несильно зависят от высоты. Также

в работе в случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы построено несколько конкретных решений.

1. Линеаризация системы уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma / \gamma$ при учёте действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [1–5]:

$$\begin{cases} c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \frac{(\gamma - 1)}{2} c (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_x = a v_2 - b v_3, \\ v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_y = -a v_1, \\ v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_z = b v_1 - g. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: p — давление газа; ρ — плотность газа; $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы идеального газа; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox , Oy , Oz ;

$$\boldsymbol{\Omega} = (0; \Omega_2; \Omega_3); \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi; \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

— вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z) , вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega_3$; $b = 2\Omega_2$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g = \text{const} > 0$ — ускорение свободного падения. В данной работе $g = 0$.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния — u_{00} , c_{00} , t_{00} , r_{00} — стандартным образом [1–5] введены безразмерные переменные:

$$f = \frac{f_*}{f_{00}},$$

где f_* и f_{00} — соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины f . При этом положено, что

$$u_{00} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}.$$

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$c = 1; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0. \quad (2)$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$c = 1 + \tilde{c}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}},$$

и эти выражения подставляются в систему (1).

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1).

Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [9]:

$$\begin{cases} c_t + \frac{(\gamma - 1)}{2} (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_x = av_2 - bv_3, \\ v_{2t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_y = -av_1, \\ v_{3t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_z = bv_1. \end{cases} \quad (3)$$

В монографии [6] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером один у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра ε . Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида [6], и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням ε сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, даёт первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

2. Бегущие волны

2.1. Частное решение в случае зависимости от переменной y

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных x и z и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t, y) = c_n(t) \cos ny; \\ v_1(t, y) = v_{1n}(t) \sin ny; \\ v_2(t, y) = v_{2n}(t) \sin ny; \\ v_3(t, y) = v_{3n}(t) \sin ny \end{cases} \quad (4)$$

с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $v_{1n}(t)$, $v_{2n}(t)$, $v_{3n}(t)$. Здесь n — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (4) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c'_n(t) + \frac{(\gamma-1)}{2}nv_{2n}(t) = 0; \\ v'_{1n}(t) = av_{2n}(t) - bv_{3n}(t); \\ v'_{2n}(t) - \frac{2}{(\gamma-1)}nc_n(t) = -av_{1n}(t); \\ v'_{3n}(t) = bv_{1n}(t). \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы (5) будем искать в виде

$$\begin{cases} c_n(t) = c_n^0 \cos(nv^*t); \\ v_{1n}(t) = v_{1n}^0 \cos(nv^*t); \\ v_{2n}(t) = v_{2n}^0 \sin(nv^*t); \\ v_{3n}(t) = v_{3n}^0 \sin(nv^*t). \end{cases} \quad (6)$$

Представление (6) подставляется в систему (5), и получается однородная система линейных алгебраических уравнений для констант $c_n^0, v_{1n}^0, v_{2n}^0, v_{3n}^0$

$$\begin{cases} -v^*nc_n^0 + \frac{(\gamma-1)}{2}nv_{2n}^0 = 0; \\ -v^*nv_{1n}^0 - av_{2n}^0 + bv_{3n}^0 = 0; \\ v^*nv_{2n}^0 - \frac{2}{(\gamma-1)}nc_n^0 + av_{1n}^0 = 0; \\ v^*nv_{3n}^0 - bv_{1n}^0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -v^*n & 0 & \frac{(\gamma-1)}{2}n & 0 \\ 0 & -v^*n & -a & b \\ -\frac{2}{(\gamma-1)}n & a & v^*n & 0 \\ 0 & -b & 0 & v^*n \end{vmatrix}.$$

Раскрытие этого определителя по третьей строке приводит к биквадратному уравнению:

$$n^4(v^*)^4 - n^2(v^*)^2(a^2 + b^2 + n^2) + n^2b^2 = 0.$$

Делаем замену $V^* = (v^*)^2$

$$n^2(V^*)^2 - V^*(a^2 + b^2 + n^2) + b^2 = 0,$$

находим дискриминант

$$D = (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + 2n^2a^2 + (b^2 - n^2)^2 > 0,$$

получаем следующие корни квадратного уравнения

$$V_{1,2}^* = \frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}.$$

Значение $V_{1,2}^* > 0$, т. к.

$$a^2 + b^2 + n^2 > \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2};$$

$$(a^2 + b^2 + n^2)^2 > (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2.$$

Получили 4 действительных попарно-сопряжённых корня

$$v_{1,2,3,4}^* = \pm \sqrt{V_{1,2}^*} = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}}.$$

Возвращаемся к системе (7). Из первого уравнения:

$$c_n^0 = \frac{(\gamma - 1)}{2v^*} v_{2n}^0. \quad (8)$$

Из четвёртого уравнения:

$$v_{3n}^0 = \frac{b}{v^* n} v_{1n}^0. \quad (9)$$

Из второго уравнения:

$$v_{1n}^0 = v_{2n}^0 \frac{av^*n}{b^2 - (v^*)^2 n^2}. \quad (10)$$

Подставляем все в третье уравнение:

$$nv_{2n}^0 \left[v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{a^2 v^*}{b^2 - (v^*)^2 n^2} \right] = 0.$$

Рассмотрим отдельно

$$v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{a^2 v^*}{b^2 - (v^*)^2 n^2} = \frac{(v^*)^2 (b^2 - (v^*)^2 n^2) - b^2 + (v^*)^2 n^2 + a^2 (v^*)^2}{v^* (b^2 - (v^*)^2 n^2)}.$$

В числителе получили исходное уравнение, корень которого есть v^*

$$-(v^*)^4 n^2 + (v^*)^2 [a^2 + b^2 + n^2] - b^2 = -[(v^*)^4 n^2 - (v^*)^2 [a^2 + b^2 + n^2] + b^2] = 0.$$

Таким образом уравнение для v_{2n}^0 является таким:

$$v_{2n}^0 \cdot 0 = 0,$$

т. е. в качестве значения v_{2n}^0 можно брать любое число.

В результате искомое частное решение системы (3) задаётся формулами:

$$\begin{cases} c(t, y) = c_n^0 \cos(nv^*t) \cos ny; \\ v_1(t, y) = v_{1n}^0 \cos(nv^*t) \sin ny; \\ v_2(t, y) = v_{2n}^0 \sin(nv^*t) \sin ny; \\ v_3(t, y) = v_{3n}^0 \sin(nv^*t) \sin ny, \end{cases} \quad (11)$$

где v_{2n}^0 — произвольная константа, а остальные коэффициенты задаются формулами (8), (9), (10).

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (11) системы (3) является бегущей волной

$$\begin{cases} c(t, y) = 0,5c_n^0 (\cos[n(y + v^*t)] + \cos[n(y - v^*t)]); \\ v_1(t, y) = 0,5v_{1n}^0 (\sin[n(y + v^*t)] + \sin[n(y - v^*t)]); \\ v_2(t, y) = 0,5v_{2n}^0 (\cos[n(y + v^*t)] - \cos[n(y - v^*t)]); \\ v_3(t, y) = 0,5v_{3n}^0 (\cos[n(y + v^*t)] - \cos[n(y - v^*t)]), \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных:

$$y \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью

$$v_{1,2}^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}}.$$

Сделаем оценку $v_{1,2}^*$. Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \psi + 4\Omega^2 \cos^2 \psi = 4\Omega^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2 &= n^4 + (a^2 + b^2)^2 + 2n^2(a^2 - b^2) = \\ &= n^4 + 16\Omega^4 + 8\Omega^2n^2(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi). \end{aligned}$$

Последнее выражение заведомо будет больше n^4 , если

$$\sin^2 \psi - \cos^2 \psi \geq 0, \quad (12)$$

то есть, для случая Северного полушария при

$$\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В случае Южного полушария для выполнения неравенства (12) требуется выполнение неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq -\frac{\pi}{4}.$$

Значит

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2} > n^2,$$

$$(a^2 + b^2 + n^2) + \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2} > 2n^2.$$

Таким образом,

$$v_1^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) + \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}} > 1$$

и

$$v_2^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) - \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}} < 1,$$

если выполнено неравенство (12), причём $v_2^* < 1 < v_1^*$.

Естественно, что для системы (3) можно строить и другие частные решения с использованием гармоник и по другим пространственным переменным, как в случае зависимости только от какой-то одной пространственной переменной, так и в случае одновременной зависимости решений от многих пространственных переменных.

Т.к. дальше будет рассматриваться зависимость от переменной z — для найденных v_1^* и v_2^* будем использовать обозначение $v_{1y,2y}^*$.

2.2. Частное решение в случае зависимости от переменной z

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных x и y и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t, z) = c_n(t) \cos nz; \\ v_1(t, z) = v_{1n}(t) \sin nz; \\ v_2(t, z) = v_{2n}(t) \sin nz; \\ v_3(t, z) = v_{3n}(t) \sin nz \end{cases} \quad (13)$$

с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $v_{1n}(t)$, $v_{2n}(t)$, $v_{3n}(t)$. Здесь n — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (13) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c'_n(t) + \frac{(\gamma - 1)}{2} n v_{3n}(t) = 0, \\ v'_{1n}(t) = a v_{2n}(t) - b v_{3n}(t), \\ v'_{2n}(t) = -a v_{1n}(t), \\ v'_{3n}(t) - \frac{2}{(\gamma - 1)} n c_n(t) = b v_{1n}(t). \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (14) будем искать в виде

$$\begin{cases} c_n(t) = c_n^0 \cos(nv^*t); \\ v_{1n}(t) = v_{1n}^0 \cos(nv^*t); \\ v_{2n}(t) = v_{2n}^0 \sin(nv^*t); \\ v_{3n}(t) = v_{3n}^0 \sin(nv^*t). \end{cases} \quad (15)$$

Представление (15) подставляется в систему (14), и получается однородная система линейных алгебраических уравнений для констант $c_n^0, v_{1n}^0, v_{2n}^0, v_{3n}^0$

$$\begin{cases} -nv^*c_n^0 + \frac{(\gamma-1)}{2}nv_{3n}^0 = 0; \\ -nv^*v_{1n}^0 - av_{2n}^0 + bv_{3n}^0 = 0; \\ nv^*v_{2n}^0 + av_{1n}^0 = 0; \\ nv^*v_{3n}^0 - \frac{2}{(\gamma-1)}nc_n^0 - bv_{1n}^0 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -nv^* & 0 & 0 & \frac{(\gamma-1)}{2}n \\ 0 & -nv^* & -a & b \\ 0 & a & nv^* & 0 \\ -\frac{2}{(\gamma-1)}n & -b & 0 & nv^* \end{vmatrix}.$$

Раскрытие определителя по четвёртой строке приводит к биквадратному уравнению:

$$n^4(v^*)^4 - n^2(v^*)^2(a^2 + b^2 + n^2) + n^2a^2 = 0.$$

Делаем замену $V^* = (v^*)^2$

$$n^2(V^*)^2 - V^*(a^2 + b^2 + n^2) + a^2 = 0,$$

находим дискриминант

$$D = (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2 = b^4 + 2a^2b^2 + 2n^2b^2 + (a^2 - n^2)^2 > 0,$$

получаем следующие корни квадратного уравнения

$$V_{1,2}^* = \frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}.$$

Значение $V_{1,2}^* > 0$, т.к.

$$a^2 + b^2 + n^2 > \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2};$$

$$(a^2 + b^2 + n^2)^2 > (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2.$$

Получили 4 действительных попарно-сопряжённых корня

$$v_{1,2,3,4}^* = \pm \sqrt{V_{1,2}^*} = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}}.$$

Возвращаемся к системе (16). Из первого уравнения:

$$c_n^0 = \frac{(\gamma - 1)}{2v^*} v_{3n}^0. \quad (17)$$

Из третьего уравнения:

$$v_{2n}^0 = -\frac{a}{nv^*} v_{1n}^0. \quad (18)$$

Из второго уравнения:

$$v_{1n}^0 = -v_{3n}^0 \frac{bnv^*}{a^2 - n^2(v^*)^2}. \quad (19)$$

Подставляем все в четвёртое уравнение:

$$nv_{3n}^0 \left[v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{b^2v^*}{a^2 - n^2(v^*)^2} \right] = 0.$$

Рассмотрим отдельно

$$v^* - \frac{1}{v^*} - \frac{b^2v^*}{a^2 - n^2(v^*)^2} = \frac{(v^*)^2(a^2 - n^2(v^*)^2) - a^2 + n^2(v^*)^2 + b^2(v^*)^2}{(v^*)^2(a^2 - n^2(v^*)^2)}.$$

В числителе получили исходное уравнение, корень которого есть v^*

$$-n^2(v^*)^4 + (v^*)^2[a^2 + b^2 + n^2] - a^2 = -[n^2(v^*)^4 - (v^*)^2[a^2 + b^2 + n^2] + a^2] = 0.$$

Таким образом, уравнение для v_{3n}^0 является таким:

$$v_{3n}^0 \cdot 0 = 0,$$

т. е. в качестве значения v_{3n}^0 можно брать любое число.

В результате искомое частное решение системы (3) задаётся формулами:

$$\begin{cases} c(t, z) = c_n^0 \cos(nv^*t) \cos nz; \\ v_1(t, z) = v_{1n}^0 \cos(nv^*t) \sin nz; \\ v_2(t, z) = v_{2n}^0 \sin(nv^*t) \sin nz; \\ v_3(t, z) = v_{3n}^0 \sin(nv^*t) \sin nz, \end{cases} \quad (20)$$

где v_{3n}^0 — произвольная константа, а остальные коэффициенты задаются формулами (17), (18), (19).

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (20) системы (3) является бегущей волной

$$\begin{cases} c(t, z) = 0,5c_n^0(\cos[n(z + v^*t)] + \cos[n(z - v^*t)]); \\ v_1(t, z) = 0,5v_{1n}^0(\sin[n(z + v^*t)] + \sin[n(z - v^*t)]); \\ v_2(t, z) = 0,5v_{2n}^0(\cos[n(z + v^*t)] - \cos[n(z - v^*t)]); \\ v_3(t, z) = 0,5v_{3n}^0(\cos[n(z + v^*t)] - \cos[n(z - v^*t)]), \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных

$$z \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью:

$$v_{1z,2z}^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}}.$$

Данное обозначение введено, чтобы отличать случай зависимости от y .

Сделаем оценку $v_{1z,2z}^*$. Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \psi + 4\Omega^2 \cos^2 \psi = 4\Omega^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2 &= n^4 + (a^2 + b^2)^2 + 2n^2(b^2 - a^2) = \\ &= n^4 + 16\Omega^4 + 8\Omega^2n^2(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

Последнее выражение заведомо будет больше n^4 , если

$$\cos^2 \psi - \sin^2 \psi \geq 0, \quad (21)$$

то есть для случая Северного полушария, если

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}.$$

В случае Южного полушария для выполнения неравенства (21) требуется выполнение неравенства

$$-\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2} &> n^2, \\ (a^2 + b^2 + n^2) + \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2} &> 2n^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_{1z}^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) + \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} > 1$$

и

$$v_{2z}^* = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + n^2) - \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} < 1,$$

если выполнено неравенство (21), причём $v_{2z}^* < 1 < v_{1z}^*$.

Заключение

В работе в случае неучёта силы тяжести проведена линеаризация линейной системы уравнений с частными производными на точном решении — однородном покое. В случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы построено несколько конкретных решений, являющихся бегущими волнами. Для случая каждой из независимых переменных y и z получено по две скорости распространения бегущих волн. Причём для конкретных широт и в случае независимой переменной y , и в случае независимой переменной z одна из скоростей больше единицы.

Наличие для системы уравнений газовой динамики нескольких скоростей распространения бегущих волн является достаточно неожиданным фактом. Подобное происходит только в случае многокомпонентных сред [10]. Очевидно, этот факт связан с тем, что в системе уравнений газовой динамики учитывается действие силы Кориолиса, когда $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / Баутин С.П. [и др.]. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / Баутин С.П. [и др.]. Екатеринбург : УрГУПС. 2017. 216 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
7. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Сборник «Численные методы механики сплошной среды». ВЦ СО АН СССР. 1973, Т. 4, № 1. С. 3–15.
8. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
9. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса: препринт. Снежинск : СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019. 52 с.
10. Баутин С.П. Скорость звука в многокомпонентной покоящейся среде // Прикладная механика и техническая физика, 2008. Т. 49, № 3. С. 35–44.

PARTICULAR SOLUTIONS OF A LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS EQUATIONS IN THE ABSENCE OF GRAVITY TAKING INTO ACCOUNT THE ACTIONS OF THE CORIOLIS FORCE

Bautin S. P.

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: SBautin@usurt.ru

Bugaenko A. A.

Post Graduate Student, e-mail: bugaenkoanya@yandex.ru

Krutova I. Yu.

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University
"MEPhI", Snezhinsk, Russia

Abstract. For the system of gas dynamics equations, taking into account the action of the Coriolis force, linearization is carried out in case when the effect of gravity is not taken into account. Particular solutions in the form of running waves are found.

Keywords: system of equations of gas dynamics, Coriolis force, linearization, exact solutions.

REFERENCES

1. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
2. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty. Bautin S.P. [i dr.], Novosibirsk, Nauka Publ.; Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2013, 216 p. (in Russian)
3. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug osi. Bautin S.P. [i dr.], Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017, 216 p. (in Russian)
4. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenii gaza pri uchete deistviya sily Koriolisa. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019, 181 p. (in Russian)
5. Bautin S.P. and Obukhov A.G. Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferynykh vikhrei. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012, 152 p. (in Russian)
6. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)
7. Bautin S.P. Analiticheskie resheniya zadachi o dvizhenii porshnya. Sbornik "Chislennyye metody mekhaniki sploshnoi sredy", VTs SO AN SSSR, 1973, vol. 4, no. 1, pp. 3–15. (in Russian)
8. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya kvazilineinoi analiticheskoi sistemy. Differentsial'nye uravneniya, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 2052–2063. (in Russian)
9. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Linearizovannaya sistema uravnenii gazovoi dinamiki pri uchete deistviya sily Koriolisa: preprint. Snezhinsk, SFTI NIYaU MIFI, 2019, 52 p. (in Russian)
10. Bautin S.P. Skorost' zvuka v mnogokomponentnoi pokoyashcheysya srede. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2008, vol. 49, no. 3, pp. 35–44. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 18.12.2019

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРАЛА КОШИ ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ

Д.Н. Горелов

д.т.н., профессор, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Проведено исследование параметрической особенности интеграла Коши, возникающей при сближении сторон замкнутого контура. Получены формулы, связывающие значения интеграла Коши на разных сторонах предельно узкого контура.

Ключевые слова: интеграл Коши, формулы Сохоцкого–Племели, параметрическая особенность интеграла Коши.

1. В конце XX века создатели вычислительных технологий столкнулись с загадочным численным феноменом. При аэродинамическом расчёте крыловых профилей было обнаружено, что с уменьшением толщины профилей неудержимо возрастает погрешность расчётов [1]. Для иллюстрации серьёзности обсуждаемой проблемы на рис. 1, 2 приведены результаты аэродинамического расчёта симметричных профилей Жуковского, для которых известны точные решения методом конформных отображений [3]. Точки определяют результаты численного решения интегральных уравнений с ядром Коши первого (1) и второго (2) рода. Сплошная линия соответствует точному решению. Интегральные уравнения решались методом дискретных вихрей. Численное решение задачи обтекания окружности (рис. 1) практически совпадает с точным. Но по мере сужения контура точность расчёта начинает падать. Для 10 % профиля (рис. 2) результаты расчёта оказываются уже практически неприемлемыми. Что является причиной такого численного феномена? Попытки объяснить происходящее сходимость методов численного решения не увенчались успехом [1]. Нужно было найти другую причину. К поиску её автор возвращался время от времени в течение многих лет.

Было установлено, что рассматриваемый вычислительный феномен вызван параметрической особенностью интегральных уравнений с ядром Коши [3, 4] (этот новый термин введён в работе [3]). Такая особенность возникает при сближении двух бесконечных множеств точек на разных сторонах замкнутого контура. Взаимодействие сближающихся сторон контура приводит к трансформации интегральных уравнений. В предельном случае бесконечно узкого контура интегральные уравнения становятся одинаковыми на сторонах этого контура, что делает невозможным их решение.

Интегральные уравнения с ядром Коши основаны на свойствах интеграла Коши. Поэтому можно ожидать, что интеграл Коши по замкнутому контуру

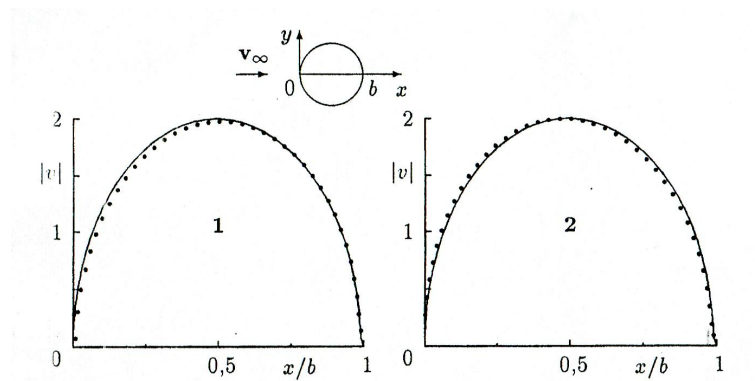


Рис. 1. Расчёт распределения модуля скорости по окружности

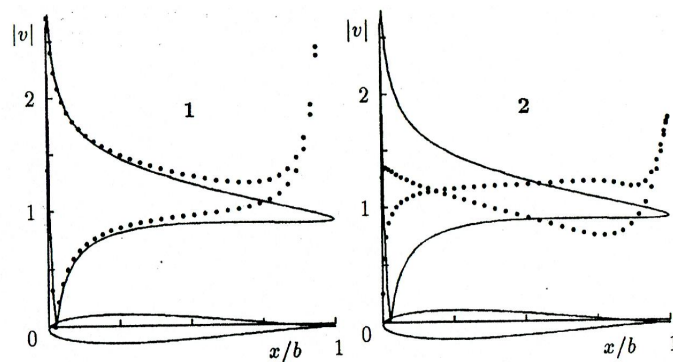


Рис. 2. Расчёт распределения модуля скорости по 10 % профилю Жуковского

имеет параметрическую особенность. Доказательству этого утверждения посвящена настоящая работа.

2. Пусть в комплексной плоскости $z = x + iy$ находится достаточно гладкий замкнутый контур L . Обозначим через D^+ , D^- внешнюю и внутреннюю области к контуру L (рис. 3). Рассмотрим интеграл Коши по контуру L , задавая его в виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \quad \zeta \in L, z \in D^+, D^-. \quad (1)$$

Здесь функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера. Обход контура L совершается против часовой стрелки.

Функция $F(z)$ является аналитической в областях D^+ , D^- .

В точках контура интеграл Коши (1) становится интегралом типа Коши $F_0(z)$. По определению

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \quad \zeta, z \in L. \quad (2)$$

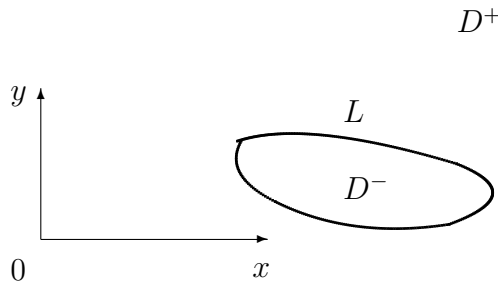


Рис. 3. Замкнутый контур

В точке $z \in L$ интеграл (2) имеет особенность, которая возникает при приближении точки интегрирования ζ к рассматриваемой точке z . Интеграл (2) в точке z понимается в смысле главного значения по Коши.

С интегралом типа Коши в каждой точке контура L связаны три функции: $F_0(z)$, $F^+(z)$, $F^-(z)$. Функция $F_0(z)$ определяет предельное значение интеграла типа Коши при $\zeta \rightarrow z$. Функции $F^+(z)$, $F^-(z)$ являются предельными значениями интеграла Коши (1) при подходе к точке $z \in L$ в областях D^+ , D^- соответственно.

При переходе через контур L интеграл Коши терпит разрыв. Предельные значения интеграла Коши $F^+(z)$, $F^-(z)$ в точке $z \in L$ на гладком участке контура связаны формулами Сохоцкого–Племели [5]:

$$\begin{aligned} 3F^+(z) &= F_0(z) + \frac{1}{2} f(z), \\ F^-(z) &= F_0(z) - \frac{1}{2} f(z), \\ F_0(z) &= \frac{1}{2}[F^+(z) + F^-(z)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для исследования параметрической особенности интеграла Коши будем рассматривать узкий контур, примеры которого приведены на рис. 4. Под узким контуром понимаем замкнутый контур L , у которого два и более участков находятся в непосредственной близости друг над другом. На рис. 4 такие участки обозначены L_1 , L_2 .

Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая, когда контур L составлен из двух контуров L_1 , L_2 . Обозначим через z_1 , z_2 комплексные координаты точек на контурах L_1 , L_2 . Представим формулу (1) в виде:

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1(z) + F_2(z), \\ F_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \quad \zeta \in L_k, k = 1, 2, z \in D^+, D^-. \end{aligned} \quad (4)$$

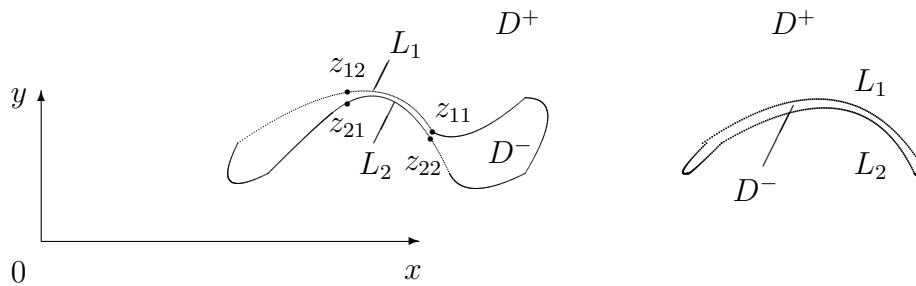


Рис. 4. Примеры узких замкнутых контуров

Из (4) следует, что в точках контура L_k

$$F(z_k) = F_1(z_k) + F_2(z_k). \quad (5)$$

Предположим, что контур L является предельно узким. В этом случае внутренняя область D^- переходит в разрез, берегами которого являются контуры L_1, L_2 .

Для рассматриваемого предельно узкого контура формулу (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F(z_1) &= F_{11}(z_1) + F_{21}(z_1), \\ F(z_2) &= F_{12}(z_2) + F_{22}(z_2). \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) функции $F_{11}(z_1), F_{22}(z_2)$ представляют собой интегралы типа Коши на контурах L_1, L_2 , а $F_{12}(z_2), F_{21}(z_1)$ являются предельными значениями интегралов Коши на тех же контурах при подходе к ним из области D^- .

Выберем на контурах L_k точки $z_k, k = 1, 2$ таким образом, что $z_2 \rightarrow z_1$ при $L_2 \rightarrow L_1$.

Тогда, с учётом формул Сохоцкого–Племели (3), выражения (5) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F_{11}(z_1) &= F_{01}(z_1), F_{22}(z_2) = F_{02}(z_2), \\ F_{21}(z_1) &= F_2^-(z_2) = F_{02}(z_2) - \frac{1}{2} f(z_2), \\ F_{12}(z_2) &= F_1^-(z_1) = F_{01}(z_1) - \frac{1}{2} f(z_1), \\ F_{0k}(z_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z_k - \zeta}, \quad \zeta, z_k \in L_k, k = 1, 2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F(z_1) &= F_{11}(z_1) + F_{21}(z_1) = F_0(z_1, z_2) - \frac{1}{2} f(z_2), \\ F(z_2) &= F_{12}(z_2) + F_{22}(z_2) = F_0(z_1, z_2) - \frac{1}{2} f(z_1), \\ F_0(z_1, z_2) &= F_{01}(z_1) + F_{02}(z_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) доказывают существование параметрической особенности интеграла Коши по замкнутому контуру. Эта особенность проявляется в трансформации интеграла Коши по мере сужения замкнутого контура. По своей структуре соотношения (7) аналогичны формулам Сохоцкого–Племели (3). Но соотношения (7) получены для значений интеграла Коши на сторонах предельно узкого замкнутого контура, тогда как формулы (3) определяют предельные значения интеграла Коши при подходе к контуру. Параметрическая особенность интеграла Коши позволила понять специфику решения краевых задач теории крыла методом интегральных уравнений [3] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М. : Наука, 1988. 232 с.
2. Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.
3. Горелов Д.Н. Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН, МЖГ, 1992. № 4. С. 173–177.
4. Горелов Д.Н. Об одной особенности сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на замкнутом контуре в задачах гидродинамики // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 64–71.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.–Л. : Гостехиздат, 1951. 619 с.

ON A SINGULARITY OF THE CAUCHY INTEGRAL OVER A CLOSED CONTOUR

D.N. Gorelov

Dr.Sc. (Eng.), Professor, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Institute of Mathematics S.L. Sobolev SB RAS

Abstract. A study is made of the parametric singularity of the Cauchy integral that arises when the sides of a closed loop come together. Formulas are obtained that relate the values of the Cauchy integral on different sides of an extremely narrow contour.

Keywords: Cauchy integral, Sokhotsky-Plemel formulas, parametric singularity of the Cauchy integral.

REFERENCES

1. Belotserkovskii S.M., Kotovskii V.N., Nisht M.I., and Fedorov R.M. Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallel'nogo otryvnogo obtekaniya tel, Moscow, Nauka Publ., 1988, 232 p. (in Russian)
2. Gorelov D.N. Metody resheniya ploskikh kraevykh zadach teorii kryla. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2000, 215 p. (in Russian)
3. Gorelov D.N. Ob integral'nykh uravneniyakh zadachi obtekaniya profilya. Izv. RAN, MZhG, 1992, no. 4, pp. 173–177. (in Russian)
4. Gorelov D.N. Ob odnoi osobennosti singulyarnykh integral'nykh uravnenii s yadrom Koshi na zamknutom konture v zadachakh gidrodinamiki. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 64–71. (in Russian)
5. Lavrent'ev M.A. and Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1951, 619 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОСОБЕННОСТЬ ТРЁХМЕРНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА КОШИ

Д.Н. Горелов

д.т.н., профессор, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Доказано существование параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши по замкнутой поверхности. Такая особенность возникает при сближении сторон замкнутой поверхности. Получены формулы, связывающие значения аналога интеграла Коши на разных сторонах предельно узкой поверхности.

Ключевые слова: интеграл Коши, параметрическая особенность интеграла Коши.

В трёхмерной безграничной области D введём декартову систему координат $Oxyz$. Рассмотрим трёхмерный аналог интеграла Коши [1] для векторной функции $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}}{r^3} dS, \quad (x, y, z) \in D. \quad (1)$$

Здесь S — поверхность, $M_s(x_s, y_s, z_s) \in S$, $\mathbf{r} = (x - x_s)\mathbf{x} + (y - y_s)\mathbf{y} + (z - z_s)\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\gamma}(x_s, y_s, z_s)$ — векторная плотность интеграла (рис. 1).

Введём в точке $M_s(x_s, y_s, z_s)$ естественный трёхгранник с ортами $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{b}$ нормали, касательной и бинормали к поверхности S . Представим вектор $\boldsymbol{\gamma}(x_s, y_s, z_s)$ в виде $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_n \mathbf{n} + \gamma_s \mathbf{s} + \gamma_b \mathbf{b}$, полагая $\gamma_n = 0$. В этом случае интеграл (1) определяет поле скорости идеальной несжимаемой жидкости, создаваемое бесконечно тонкой вихревой поверхностью S .

При переходе через поверхность S вектор $\mathbf{V}$ терпит разрыв. Предельные значения вектора $\mathbf{V}$ при подходе к поверхности S со стороны нормали $\mathbf{n}$ ($\mathbf{V}^+$) и с противоположной стороны ($\mathbf{V}^-$) определяются формулами [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^+ &= \mathbf{V}_0 - \frac{1}{2}\gamma_b \mathbf{s} + \frac{1}{2}\gamma_s \mathbf{b}, \\ \mathbf{V}^- &= \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2}\gamma_b \mathbf{s} - \frac{1}{2}\gamma_s \mathbf{b}, \\ \mathbf{V}_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдём к исследованию параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши (1). Известна особенность интеграла типа Коши, возникающая при сближении точки интегрирования и заданной точки на контуре

L в комплексной плоскости. На замкнутом контуре может возникнуть другая особенность при сужении контура. В этом случае взаимное влияние двух бесконечно больших множеств точек на разных сторонах контура может привести к существенной трансформации исходного интеграла Коши. В отличие от известной особенности интеграла Коши автор назвал новую особенность параметрической [3]. Роль параметра играет минимальное расстояние между противоположными сторонами замкнутого контура. Естественно ожидать, что такую особенность имеет и трёхмерный аналог интеграла Коши. Докажем существование параметрической особенности интеграла (1) по замкнутой поверхности S . Разделим исходную поверхность S на S_1, S_2 , полагая, что для предельно узкой поверхности $S_2 \rightarrow S_1$. Обозначим через x_k, y_k, z_k координаты точек на поверхностях S_k , $k = 1, 2$, а через γ_k — векторную плотность интеграла (1) на S_k .

Представим вектор $\mathbf{V}$ в виде:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}_1(x, y, z) + \mathbf{V}_2(x, y, z),$$

$$\mathbf{V}_k = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \frac{\gamma_k \times \mathbf{r}_k}{r_k^3} dS_k, \mathbf{r}_k = (x - x_k)\mathbf{x} + (y - y_k)\mathbf{y} + (z - z_k)\mathbf{z}, k = 1, 2. \quad (3)$$

Предположим, что поверхность S является предельно узкой. В этом случае можно полагать, что значения функций $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ в точках соседних поверхностей определяются формулами (2). Выберем на поверхностях S_k точки x_k, y_k, z_k , $k = 1, 2$ таким образом, что $x_2, y_2, z_2 \rightarrow x_1, y_1, z_1$ при $S_2 \rightarrow S_1$. Тогда $\mathbf{s}_2 \rightarrow -\mathbf{s}_1, \mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_1$,

$$\mathbf{V}_2(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{V}_2^-(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \frac{\gamma_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} dS_2 + \frac{1}{2} \gamma_{2b} \mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} \gamma_{2s} \mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{V}_1(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{V}_1^-(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\gamma_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} dS_1 + \frac{1}{2} \gamma_{1b} \mathbf{s}_1 - \frac{1}{2} \gamma_{1s} \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{r}_{k,m} = (x_m - x_k)\mathbf{x} + (y_m - y_k)\mathbf{y} + (z_m - z_k)\mathbf{z}, k, m = 1, 2. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует, что на разных сторонах предельно узкой замкнутой поверхности трёхмерный аналог интеграла Коши (1) принимает значения:

$$\mathbf{V}(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) + \frac{1}{2} \gamma_{2b} \mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} \gamma_{2s} \mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{V}(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) + \frac{1}{2} \gamma_{1b} \mathbf{s}_1 - \frac{1}{2} \gamma_{1s} \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\gamma_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} dS_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \frac{\gamma_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} dS_2. \quad (5)$$

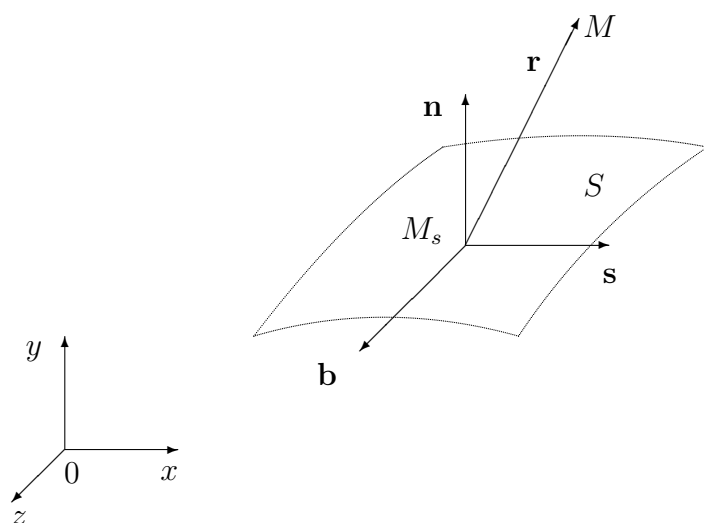


Рис. 1. Поверхность в трёхмерном пространстве

Формулы (5) доказывают существование параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши (1) по замкнутой поверхности. Параметрическая особенность проявляется в выравнивании значений интеграла (1) на разных сторонах поверхности S при её сужении. На предельно узкой поверхности эти значения имеют одинаковую интегральную составляющую.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН. Серия математическая. 1953. № 6. С. 525–538.
2. Горелов Д.Н. Пространственный аналог формул Сохоцкого–Племеля и его применение в теории крыла // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 6. С. 36–42.
3. Горелов Д.Н. Об одной особенности интегральных уравнений с ядром Коши на замкнутом контуре в задачах гидродинамики // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 64–71.

A PARAMETRIC FEATURE OF A THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF THE CAUCHY INTEGRAL

D.N. Gorelov

Dr.Sc. (Eng.), Professor, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Institute of Mathematics S.L. Sobolev SB RAS

Abstract. The existence of a parametric singularity of a three-dimensional analogue of the Cauchy integral over a closed surface is proved. This feature arises when

the sides of a closed surface approach each other. Formulas are obtained that relate the values of the analogue of the Cauchy integral on different sides of an extremely narrow surface.

Keywords: Cauchy integral, parametric singularity of the Cauchy integral.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. Prostranstvennyi analog integrala tipa Koshi i nekotorye ego prilozheniya. Izv. AN., Seriya matematicheskaya, 1953, no. 6, pp. 525–538. (in Russian)
2. Gorelov D.N. Prostranstvennyi analog formul Sokhotskogo–Plemelya i ego primeneniye v teorii kryla. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 36–42. (in Russian)
3. Gorelov D.N. Ob odnoi osobennosti integral'nykh uravnenii s yadrom Koshi na zamknutom konture v zadachakh gidrodinamiki. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 64–71. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019

HOW TO EXPLAIN THAT CHANGES IN ELDERLIES DEPRESSION LEVEL ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED

Griselda Acosta

Doctoral Student, e-mail: gvacosta@miners.utep.edu

Eric D. Smith

Ph.D. (Systems & Industrial Engineering), Associate Professor, e-mail: esmith2@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Changes in the elderlies depression level result from a large number of small independent factors. Such situations are ubiquitous in applications. In most such cases, due to the Central Limit Theorem, the corresponding distribution is close to Gaussian. For the changes in the elderlies depression level, however, the empirical distribution is far from Gaussian: it is uniform. In this paper, we provide a possible explanation for the emergence of the uniform distribution.

Keywords: elderlies depression, uniform distribution, changes in depression level.

1. Formulation of the Problem

Elderly depression is a serious problem. Many elderly people suffer from loneliness. In general, loneliness increases the chances of depression, and depression negatively affects the person's health. As a result, many elderly people suffer from depression; it affects every seventh elderly person – a much larger proportion than in the population in general; see, e.g., [1,4].

It is therefore desirable to monitor the changes in depression level of elderly people, especially elderly people in an at-risk category. Such monitoring has indeed been undertaken; see, e.g., [2].

Changes in depression level are uniformly distributed. Depression level is usually gauged by a number on the Geriatric Depression Scale (GDS); see, e.g., [2,4]. The changes usually range from -8 to $+8$ units.

Interestingly, for any two moments of time, the corresponding changes are, in effect, uniformly distributed on the interval $[-d_0, d_0]$, where $d_0 \approx 8$.

Why this is interesting. The uniform distribution rarely occurs in nature. The most typical probability distribution is a normal one. Its ubiquity comes from the fact that most real-life phenomena result from the joint effect of many independent small factors. In probability theory, it is known that, under reasonable conditions,

the probability distribution of the sum of a large number of small independent random variables is close to Gaussian – the corresponding result is known as the Central Limit Theorem; see, e.g., [6]. Normal distribution is what we almost always encounter – and so the emergence of the uniform distribution is highly unusual.

The fact that we have the same uniform distribution for shorter- and longer-time periods is also unusual. Indeed, as mentioned in [2], it is difficult to predict the change in one short-term period based on the observed change in another such period. With this in mind, it seems reasonable to conclude that the changes corresponding to different short-term periods are independent. The long-term difference can be represented as the sum of several such short-term differences. If all these short-term differences are uniformly distributed, the distribution of long-term differences should correspond to the sum of several independent uniform distributions. However, it is well known that the distribution of such a sum is *not* uniform: e.g., the distribution of the sum of two identical independent uniform distribution has a triangular probability density function. In contrast, the probability distribution of long-term differences *is* uniform.

How can we explain all this?

Why? In this paper, we provide a possible explanation for the emergence of this unexpected uniform distribution.

2. Our Explanation

Main idea. The fact that we cannot predict the change in one period based on the change in another period implies that the changes corresponding to adjacent time periods are kind of independent. On the other hand, they cannot be fully independent: if they were, then there would be a possibility that by combining almost d_0 unit changes in both periods, we would get a $2d_0$ units change in the long-term period – and in the long-term period, we only observe changes from $-d_0$ to d_0 units.

To describe the corresponding probability distributions, we therefore need to take into account two facts:

- that these distributions are almost independent, but
- that the distribution of the sum of these two random variables is bounded by the same interval $[-d_0, d_0]$ as each of the short-term changes.

Resulting formalization. The only limitation to independence is the observed range of the values of the sum of the two random variables. It is therefore reasonable to describe the situation as maximally independent – with the restriction on the sum as the only available restriction.

In precise terms, we conclude that the probability distributions corresponding to two adjacent time intervals are not fully independent – the distribution of their sum corresponds to the distribution of the sum of two independent random variables,

but limited to the range $[-d_0, d_0]$. In other words, the distribution for the sum can be obtained if we:

- first consider the distribution of the sum of two independent random variables each of which is distributed on the interval $[-d_0, d_0]$ and
- then we restrict this distribution to the interval $[-d_0, d_0]$, i.e., consider the conditional distribution – under the condition that the sum is located in the interval $[-d_0, d_0]$.

This formalization explains the seeming contradiction. The above formalization explains the above-mentioned seeming contradiction between:

- the fact that the long-term difference is the sum of practically independent uniformly distributed short-term differences, and
- the fact that the observed probability distribution of the long-term differences is very different from the distribution of the sum of several independent uniformly distributed random variables.

This formalization also explains the emergence of the uniform distribution.

It turns out that the same formalization can explain why the distributions are uniform in the first place.

Indeed, each difference $d(t+T) - d(t)$ between depression levels at moments t and $t+T$ is the sum of the large number of very-short-term differences:

$$\begin{aligned} d(t+T) - d(t) &= (d(t+\Delta t) - d(t)) + (d(t+2\Delta t) - d(t+\Delta t)) + \dots \\ &+ d(t+(k+1)\cdot\Delta t) - d(t+k\cdot\Delta t) + \dots + (d(t+T) - d(t+T-\Delta t)). \end{aligned}$$

According to our formalization, the distribution of this sum should be obtained by first taking the distribution of the sum of several independent random variables $d(t+(k+1)\cdot\Delta t) - d(t+k\cdot\Delta t)$ and then limiting this distribution to the original interval $[-d_0, d_0]$.

According to the Central Limit Theorem, the distribution of the sum is close to Gaussian – and since the variance of the sum of several independent random variables is equal to the sum of the variances, this variance σ^2 grows with the number of variables in the sum. Thus, in our case, we select restrict to the interval $[-d_0, d_0]$ a Gaussian distribution corresponding to a very large value of σ^2 – and, thus, to the very large value of the standard deviation σ . On this interval, the probability density function changes from $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$ to

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{d_0^2}{2\sigma^2}\right).$$

The ratio of these two values – which is preserved when we consider conditional distributions – is thus equal to $\exp\left(-\frac{d_0^2}{2\sigma^2}\right)$ which is, for large σ , very close to 1.

Thus, under our assumption of “almost independence”, the resulting probability distribution is very close to the uniform one – which is exactly what we observe.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. Anderson D. Treating depression in old age: the reasons to be positive. *Age and Ageing*, 2001, vol. 30, pp. 13–17.
2. Ou J., Liang H., and Tan H.X. Identifying elderies at risk of becoming more depressed with Internet-of-Things. In: Zhou J. and Salvendy G. (eds.), *Proceedings of the 4th International Conference on Human Aspects of IT for the Aged Population ITAP'2018*, Las Vegas, Nevada, July 15–20, 2018, Springer Lecture Notes in Computer Science, vol. 10927, pp. 348–361.
3. Sheskin D.J. *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2011.
4. Yesavage J.A., Brink T.L., Rose T.L., Lum O., Huang V., Adey M., and Leirer V.O. Development and validation of a geriatric depression screening scale: a preliminary report. *Journal of Psychiatric Research*, 1983, vol. 17, pp. 37–49.

КАК ОБЪЯСНИТЬ, ЧТО ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ДЕПРЕССИИ У ПОЖИЛЫХ ЛЮДЕЙ РАСПРЕДЕЛЯЮТСЯ РАВНОМЕРНО

Г. Акоста

докторант, e-mail: gvacosta@miners.utep.edu

Э.Д. Смит

к.т.н., доцент, e-mail: esmith2@utep.edu

В. Крейнович

к.ф-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Изменения в уровне депрессии у пожилых людей обусловлены большим количеством мелких независимых факторов. Такие ситуации широко распространены в приложениях. В большинстве таких случаев по центральной предельной теореме соответствующее распределение близко к гауссовскому. Однако, для изменений уровня депрессии у пожилых людей эмпирическое распределение далеко от гауссовского - оно однородно. В этой статье мы даем возможное объяснение появления равномерного распределения.

Ключевые слова: депрессия пожилых людей, равномерное распределение, изменения уровня депрессии.

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019

РАЗРАБОТКА СЕРВЕРНОЙ ЧАСТИ ПРОГРАММНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УДАЛЕННОГО ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

Д.В. Козырев

студент, e-mail: kozyrev.danil@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В этой статье представлен разработанный программный интерфейс (API) серверной части облачного хранилища данных.

Ключевые слова: облачное хранилище, серверная часть, программный интерфейс.

Введение

За последние десятилетия Интернет стал неотъемлемой частью жизни любого современного человека. С развитием Всемирной паутины, появлением переносных компьютеров и мобильных телефонов возникла и потребность в доступе к файлам в любое время и из любой точки Земного шара. Облачные хранилища призваны решить эту проблему. Они представляют собой сервис для хранения данных, с помощью которого пользователь может загрузить свои файлы на сервер, а затем скачивать и просматривать их с телефона, компьютера или другого устройства, имеющего доступ к сети Интернет.

В отличие от классического способа хранения файлов на собственных компьютерах, переносных устройствах или выделенных серверах, которые арендуются или приобретаются специально для подобных целей, структура облачных хранилищ клиенту не видна. С его точки зрения, данные хранятся и обрабатываются в так называемом «облаке», которое представляет собой один большой виртуальный сервер, физически же таких серверов может быть несколько, они могут располагаться удалённо друг от друга, возможно, даже на разных континентах [1].

Несмотря на все описанные достоинства, современные сервисы хранения данных пока ещё не способны полностью заменить привычные нам жёсткие диски, поскольку для работы с ними необходимо подключение к сети Интернет, что существенно ограничивает скорость передачи данных. Тем не менее, они незаменимы для синхронизации файлов между компьютерами, организации совместной работы с данным и резервного копирования. А благодаря своей гибкости и масштабируемости они могут использоваться не только индивидуальными пользователями, но и крупными предприятиями.

Цель этой статьи — описание разработки программного интерфейса (API) серверной части такого хранилища данных. В качестве целевой аудитории итогового приложения рассматриваются индивидуальные пользователи, которые смогут использовать приложение для хранения личных файлов и обмена ими друг с другом. Сформулируем следующие основные задачи, поставленные в данной работе:

- 1) определить требования к системе и разработать архитектуру приложения в соответствии с этими требованиями;
- 2) выбрать и описать программные средства реализации разработанной архитектуры;
- 3) на основе вышеперечисленных пунктов реализовать программный интерфейс серверной части приложения, сопроводить его интерактивной документацией;
- 4) провести автоматизированное тестирование разработанного программного обеспечения.

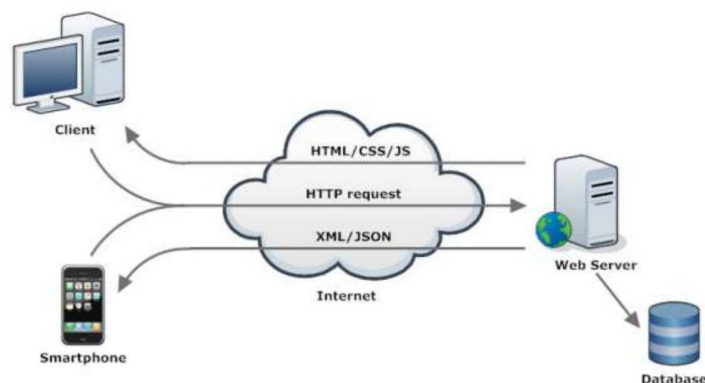


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов в архитектуре REST

1. Проектирование архитектуры

1.1. Анализ требований

Перед непосредственным проектированием архитектуры серверной части приложения должны быть проанализированы и сформулированы требования, которым эта архитектура должна отвечать. Требования к системе делятся на функциональные и нефункциональные. Функциональные описывают возможности программного интерфейса приложения, т.е. сценарии взаимодействия пользователя с системой, тогда как нефункциональные накладывают дополнительные ограничения на систему, не относящиеся к её поведению [3].

Изучив предметную область и существующие решения, мы сформулировали функциональные требования к API приложения (таблица 1).

К системе был также определён ряд нефункциональных требований. Их описание приведено в таблице 2.

Таблица 1. Функциональные требования к системе

№	Требование	Описание
1	Регистрация и авторизация пользователей	Для использования приложения необходимо наличие учётной записи. Это позволит разграничить дисковое пространство и обеспечит контроль доступа к хранимым данным
2	Группировка файлов в папки	Пользователь должен иметь возможность создавать папки и сохранять в них загруженные файлы или другие папки. Такая древовидная структура привычна и удобна
3	Просмотр и изменение метаданных	Метаданные о всех файлах и папках должны храниться на сервере, пользователь должен иметь возможность просматривать, изменять и добавлять собственные метаданные
4	Удаление файлов и папок	Пользователь должен иметь возможность удалять как отдельные файлы, так и папки целиком со всем их содержимым
5	Организация корзины	Корзина служит временным хранилищем для удалённых файлов и папок, обеспечивая возможность их последующего восстановления
6	Поиск данных	Пользователь должен иметь возможность искать файлы и папки по одному или нескольким параметрам
7	Обмен файлами	Пользователь должен иметь возможность поделиться своими файлами с другими пользователями

Таблица 2. Нефункциональные требования к системе

№	Требование	Описание
1	Удобство использования	API приложения должен отвечать современным требованиям к проектированию программного обеспечения, быть унифицированным и интуитивно понятным. Разработанный Программный интерфейс должен быть подробно задокументирован, что также упростит его использование
2	Разграничение доступа	Каждой учётной записи должна быть присвоена одна или несколько ролей в системе, с помощью которых разграничивается доступ к информации. Пользователь должен иметь доступ только к собственным данным
3	Ограничение на объем хранимых и передаваемых файлов	Система должна накладывать ограничения на размер загружаемых файлов и на максимальный объем дискового пространства, доступного пользователю
4	Шифрование данных при их передаче	Все взаимодействия клиента с сервером должны происходить по протоколу HTTPS, что обеспечивает конфиденциальность данных при их передаче
5	Надёжность	Система должна быть надёжной. Приложение должно продолжать функционировать при возникновении внештатных ситуаций
6	Простота тестирования	Архитектура должна обеспечивать простоту тестирования компонентов системы
7	Открытый программный код	Само приложение, а также используемое при его разработке программное обеспечение должно иметь открытый исходный код, что позволит убедиться в отсутствии уязвимостей и неприемлемого функционала

Определив требования к системе, можно приступить непосредственно к проектированию архитектуры.

1.2. Клиент-серверное взаимодействие в стиле REST

Взаимодействие клиента с программным интерфейсом приложения основано на использовании архитектурного стиля Representational State Transfer (сокращённо REST). Фактически REST API — это всего лишь набор конечных точек (веб-адресов), обращаясь к которым с помощью HTTP-запросов, клиент получает в ответ информацию с сервера в формате JSON, XML, HTML и т. д. Вся информация на сервере представлена в виде ресурсов и подресурсов: пользователи приложения, загруженные файлы, папки и т. д. У каждого ресурса есть свой уникальный идентификатор, ресурс имеет состояние, и клиент может получать или изменять состояние ресурса при помощи представлений (как уже упоминалось ранее, под представлением можно понимать JSON, XML, текст в определённом формате или что угодно, что позволяет нам понимать текущее состояние ресурса). При этом серверная часть никак не зависит от клиентской, клиентом веб-сервиса может выступать браузер пользователя, мобильное приложение, другой сервер и т. д.

Ниже представлено схематичное изображение взаимодействия компонентов в REST-архитектуре.

В программном интерфейсе REST для манипулирования ресурсами используются стандартные HTTP-методы в соответствии со спецификацией протокола [4]:

- 1) GET используется для получения текущего представления ресурсов;
- 2) POST используется для создания новых ресурсов;
- 3) PATCH используется для полного или частичного обновления существующих ресурсов;
- 4) PUT используется для создания нового ресурса или обновления существующего. Если ресурс с заданным идентификатором найден, информация о нём должна быть обновлена, в ином случае будет создан новый ресурс;
- 5) DELETE используется для удаления существующих ресурсов.

Запросы в такой архитектуре являются самодостаточными, серверу при их обработке нет необходимости извлекать контекст приложения, поскольку клиент включает в запрос все необходимые данные, используя для этого заголовки и тело запроса [4]. Такой подход повышает производительность, упрощает дизайн и реализацию серверных компонентов системы.

Обобщая вышесказанное, можно выделить несколько основных принципов, которым должна следовать разрабатываемая архитектура:

- 1) использование клиент-серверной модели;
- 2) использование стандартных методов протокола HTTP;
- 3) использование уникальных идентификаторов ресурсов;
- 4) манипуляция данными через представления в формате JSON;
- 5) отсутствие состояния на стороне сервера.

Соблюдение перечисленных принципов повышает надёжность и производительность приложения. Разработанное программное обеспечение обладает такими преимуществами, как простота и единообразие интерфейсов, портативность программных компонентов, лёгкость внесения изменений, а также способность

эволюционировать и приспосабливаться к новым требованиям.

1.3. Схема авторизации

Авторизация в системе осуществляется с использованием протокола OAuth 2.0. Этот протокол даёт возможность сторонним приложениям получать доступ к защищённым ресурсам сервера от имени владельца этих ресурсов, при этом приложение не имеет доступа к регистрационным данным пользователя.

В протоколе OAuth 2.0 существуют четыре участника процесса авторизации [5]:

1) владелец ресурса. Под владельцем подразумевается пользователь, которому принадлежат данные на сервере. Он авторизует приложение, тем самым разрешая ему доступ к своим данным;

2) клиент. Клиент — это приложение, которое хочет получить доступ к данным пользователя;

3) сервер ресурсов. Все данные пользователя, имеющие отношение к функционалу приложения, хранятся на сервере ресурсов, а клиент может взаимодействовать с ним, используя API сервиса;

4) сервер авторизации. Используется для хранения и проверки регистрационных данных клиента, а также выдачи токенов (ключей доступа). Токен передаётся серверу ресурсов с каждым запросом и необходим для идентификации клиента.

Для использования протокола OAuth клиенту необходимо иметь собственную учётную запись на сервере. При регистрации каждому клиенту присваивается уникальный идентификатор и секрет, у него также могут быть указаны адрес перенаправления (redirect URI) и области видимости (scopes). Когда приложение отправляет запрос на получение нового токена, в параметрах запроса указываются области видимости, определяющие, какой тип доступа ему нужно получить (чтение, запись, полный доступ и т. д.). А на указанный адрес приложение будет перенаправлено сервером авторизации после того, как данные клиента были проверены, и пользователь разрешил доступ к запрошенным областям видимости.

На рис. 2 представлена абстрактная схема авторизации клиента в протоколе OAuth 2.0.

Для получения токенов в протоколе определены четыре возможных сценария, причём выбор конкретного способа зависит от типа приложения и поддержки этого сценария сервером авторизации [5]:

1) неявный доступ (implicit grant). Сначала клиент переходит на сервер авторизации, предоставляя при этом свой идентификатор и redirect URI (секрет при этом не используется). После проверки данных и получения от пользователя разрешения, сервер перенаправляет клиента по указанному адресу и передаёт ему токен в виде фрагмента адреса. Этот сценарий подходит для мобильных и веб-приложений, которые не могут хранить секрет в тайне;

2) код авторизации (authorization code grant). Используется преимущественно серверными приложениями, поскольку их исходный код недоступен третьим



Рис. 2. Абстрактная схема авторизации клиента в протоколе OAuth

лицам. Аналогичен сценарию неявного доступа, за исключением необходимости предоставления секрета, а также наличия дополнительного шага для получения кода авторизации и последующего запроса с его помощью токена доступа;

3) учётные данные владельца (resource owner password credentials grant). Заключается в передаче клиенту имени и пароля пользователя напрямую и в последующем получении с их помощью токена доступа. Подходит для надёжных приложений, которым разрешено иметь прямой доступ к регистрационным данным пользователя;

4) учётные данные клиента (client credentials grant). Необходимы в том случае, если клиент хочет получить доступ к собственной учётной записи, чтобы изменить адрес перенаправления или секрет.

Хотя протокол OAuth выглядит достаточно громоздким и сложным, он фактически стал стандартным в индустрии программного обеспечения. Все рассмотренные в первой главе сервисы хранения используют именно этот способ авторизации.

В разрабатываемой системе будет реализован как сервер ресурсов, так и сервер авторизации. Это даст возможность другим разработчикам использовать программный интерфейс сервиса для создания собственных клиентских приложений.

2. Трёхуровневая архитектура

В предыдущих параграфах мы рассмотрели взаимодействие приложения с внешним миром, а в этом будет описана его внутренняя структура.

Перечислим основные обязанности, которые должны выполнять компоненты программы:

1) обработка запросов и проверка введённых пользователем данных, а также

последующий возврат ему корректного ответа;

2) обработка исключений с предоставлением пользователю подробной информации об ошибке;

3) управление транзакциями базы данных;

4) авторизация пользователей;

5) реализация основной логики приложения;

6) взаимодействие с базой данных.

Реализация всех этих обязанностей возможна с использованием всего трёх архитектурных уровней, каждый из которых может взаимодействовать только с компонентами своего или нижележащего уровня:

1) уровень представления (web layer). Самый верхний уровень приложения. Он отвечает за обработку запросов и возврат корректного ответа. Уровень представления также должен обрабатывать все исключения, возникающие в нижележащих уровнях. Поскольку этот уровень — входная точка приложения, он должен отвечать за аутентификацию и выступать первой линией защиты от неавторизованных пользователей;

2) уровень логики (service layer). Находится на один уровень ниже слоя представления. Этот уровень определяет границы транзакций базы данных и содержит все логические операции на данными. Уровень логики также отвечает за контроль доступа на уровне вызова методов, определяя, есть ли у пользователей право читать или изменять данные;

3) уровень данных (repository layer). Самый нижний слой приложения. Отвечает за взаимодействие с базой данных.

В архитектуре используются два типа объектов, которые непосредственно хранят данные, но не содержат логики:

1) сущности базы данных (domain models). Сущности представляют собой проекции таблиц в базе данных на классы в программе. Каждый объект такого класса соответствует записи в таблице и хранит отношения с другими объектами;

2) объекты передачи данных (data transfer objects или DTO). Простой контейнер информации, которая передаётся по сети. Такие объекты используются, когда необходимо скрыть часть данных и/или изменить их структуру.

Рассмотрим схему движения данных между уровнями приложения. Сначала уровень представления получает от клиента данные в формате JSON и создаёт на их основе объекты передачи данных. Затем он вызывает уровень логики, передавая ему DTO. Логический слой преобразует полученные DTO в сущности базы данных, выполняет необходимые операции над сущностями и передаёт их уровню данных, который сохраняет значения полей этих объектов непосредственно в таблицы базы данных. Описанное взаимодействие изображено на рис. 3.

Такой подход к построению архитектуры изолирует компоненты системы друг от друга, упрощает повторное использование уже существующих модулей и их тестирование, обеспечивает целостность данных за счёт объединения нескольких логических действий в одну транзакцию и, наконец, повышает безопасность приложения, поскольку каждый компонент контролирует доступ к

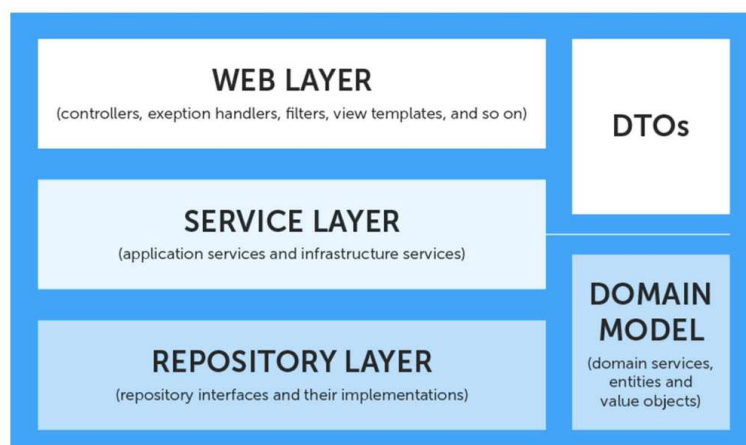


Рис. 3. Трёхуровневая архитектура

данным своего уровня.

2.1. Схема базы данных

В проектируемой системе используется реляционная модель данных. Для соответствия функционала приложения функциональным требованиям, определённым в начале этой главы, были выделены пять классов-сущностей базы данных:

1) User (пользователь). Хранит регистрационные данные всех пользователей приложения (адрес электронной почты, хеш пароля в формате bcrypt, имя и т. д.). У каждого пользователя есть набор принадлежащих ему файлов и папок;

2) Role (роль). Определяет роли, назначаемые пользователям, причём один пользователь может иметь несколько ролей;

3) Folder (папка). Хранит метаданные пользовательских папок. Каждая папка принадлежит одному владельцу, имеет одну родительскую папку и может содержать несколько вложенных папок и файлов, образуя тем самым древовидную структуру;

4) File (файл). Хранит метаданные пользовательских файлов и расположение файла на жёстком диске. Каждый файл принадлежит одному владельцу, имеет одну родительскую папку и может иметь несколько дополнительных свойств;

5) Property (свойство). Свойства файла — это дополнительные метаданные, которые были самостоятельно добавлены пользователем. Каждое свойство имеет поле key (ключ) и value (значение). У файла может быть только одно свойство с заданным ключом. Для отображения сущностей на таблицы базы данных используется технология объектно-реляционного отображения (Object-Relational Mapping), которая будет рассмотрена в следующих главах.

Ниже представлены таблицы 3–8 базы данных и схема отношений между

ними.

Таблица 3. Отношение «пользователи»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	id	bigint	Идентификатор пользователя
2	version	bigint	Версия
3	date_created	timestamp	Дата регистрации
4	date_modified	timestamp	Дата последнего изменения
5	email	varchar	Адрес электронной почты
6	password	varchar	Хеш пароля
7	first_name	varchar	Имя
8	last_name	varchar	Фамилия

Таблица 4. Отношение «роли»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	id	bigint	Идентификатор роли
2	name	varchar	Имя роли

Таблица 5. Отношение «пользователи — роли»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	user_id	bigint	Идентификатор пользователя
2	role_id	bigint	Идентификатор роли

Таблица 6. Отношение «папки»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	id	bigint	Идентификатор папки
2	version	bigint	Версия
3	date_created	timestamp	Дата создания
4	date_modified	timestamp	Дата последнего изменения
5	name	varchar	Имя
6	root	boolean	Флаг, указывающий на корневую папку
7	parent_id	bigint	Идентификатор родительской папки
8	owner_id	bigint	Идентификатор владельца

2.2. Организация корзины

При удалении файлы и папки не исчезают безвозвратно, а попадают в корзину. Корзина служит временным хранилищем удалённых объектов, позволяя восстановить или удалить их окончательно. В разрабатываемой архитектуре корзины как отдельной сущности не существует, она является всего лишь абстракцией. При создании учётной записи пользователя создаётся его корневая

Таблица 7. Отношение «файлы»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	id	bigint	Идентификатор файла
2	version	bigint	Версия
3	date_created	timestamp	Дата загрузки
4	date_modified	timestamp	Дата последнего изменения
5	name	varchar	Имя
6	size	bigint	Размер в байтах
7	mime_type	varchar	МIME-тип файла
8	location	varchar	Путь к файлу
9	parent_id	bigint	Идентификатор родительской папки
10	owner_id	bigint	Идентификатор владельца

Таблица 8. Отношение «свойства»

№	Наименование атрибута	Тип данных	Описание
1	id	bigint	Идентификатор свойства
2	version	bigint	Версия
3	date_created	timestamp	Дата загрузки
4	date_modified	timestamp	Дата последнего изменения
5	key	varchar	Ключ
6	value	varchar	Значение
7	file_id	bigint	Идентификатор файла



Рис. 4. Схема базы данных

папка с установленным флагом root. Корневые папки не имеют родителя, и

у каждого пользователя может быть только одна такая папка. Если у папки или файла нет родителя, они исключаются из основного дерева и считаются удалёнными в корзину (включая потомков). Таким образом, пользователь, перемещаясь по своему дереву папок, начиная от корня, видит только неудалённые объекты. Чтобы просмотреть содержимое корзины, необходимо всего лишь найти все некорневые папки и файлы, не имеющие родителя и принадлежащие данному пользователю. А чтобы восстановить удалённые данные, нужно вернуть их в основное дерево, присвоив нового родителя.

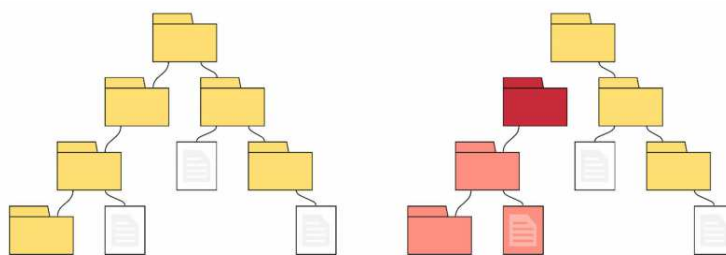


Рис. 5. Схема удаления папки и её потомков в корзину

2.3. Хранение файлов

Папки, создаваемые пользователями, существуют только в базе данных, это всего лишь строки в таблице. Файлы на сервере хранятся в собственной иерархии папок файловой системы.

Когда файл загружается на сервер, ему присваивается идентификатор UUID — это уникальный 128-битный номер, причём вероятность сгенерировать один и тот же UUID дважды так мала, что её можно считать нулевой. На основе этого идентификатора генерируется уникальный путь к файлу. Из UUID извлекаются три первые пары символов и используются в качестве имён папок, каждая последующая из которых вложена в предыдущую. Сам идентификатор становится именем файла. Содержимое файла копируется на жёсткий диск по этому пути, а все метаданные, включая его настоящее имя и путь к файлу, сохраняются в базу данных.

Базовая папка	70	49	e6	7049e624-f09d-4129-9e2a-11d652ff863e
---------------	----	----	----	--------------------------------------

Рис. 6. Пример сгенерированного пути к файлу

Такой способ хранения помогает снизить нагрузку на файловую систему, поскольку большое количество файлов в одной папке сильно ухудшает производительность при работе с ними. Используемый алгоритм решает эту проблему, распределяя файлы равномерно. Кроме того, оригинальные имена файлов могут содержать запрещённые символы, и операционная система не позволит

сохранить файлы с такими именами. В UUID же используются только символ «-» и цифры шестнадцатеричной системы, любая комбинация из которых всегда является корректным именем файла.

2.4. Обмен файлами

Для обмена файлами между пользователями был использован механизм создания временных ссылок. Такая ссылка позволяет скачать файл любому пользователю и активна в течение нескольких часов после её создания.

Для генерации временных ссылок используются токены JSON Web Tokens. JWT — это стандарт для создания токенов доступа, которые состоят из трех частей в формате JSON: заголовка (header), полезной нагрузки (payload) и цифровой подписи (signature). Заголовок содержит метаданные, описывающие токен, в полезной нагрузке содержатся непосредственно данные, а подпись — это хеш-сумма, которая вычисляется на основании заголовка, полезной нагрузки и секретного ключа и необходима для подтверждения достоверности токена [8].

Стандартным способом подписи токена является использование алгоритма HMAC-SHA256. Для генерирования хеш-суммы этот алгоритм, помимо данных исходного сообщения, использует также секретный ключ. Любое изменение данных или значения хеша вызовет несовпадение подписи. А поскольку секрет для подписи известен только серверу, такой токен невозможно подделать.

После того, как все три элемента токена определены, его можно преобразовать в компактный формат. Для этого заголовок и полезная нагрузка кодируются с использованием схемы кодирования Base64, к ним добавляется хеш-сумма, и все составные части разделяются точками [8].



Рис. 7. Структура JWT

Когда пользователь запрашивает ссылку на файл, сервер генерирует новый токен, в качестве полезной нагрузки которого используются идентификатор файла и поле exp, обозначающее время, когда токен станет невалидным. К полезной нагрузке добавляется заголовок и подпись, после чего токен преобразуется в компактное представление. Клиенту возвращается ссылка вида

<https://www.example.com/links/token>, где переменная `token` — это сгенерированный компактный JWT. Если пользователь перейдёт по такой ссылке, сервер извлечёт токен, проверит его подпись, не истек ли его срок действия, а затем найдёт файл по идентификатору и вернёт содержимое.

У такого подхода есть как свои плюсы, так и минусы. С одной стороны, нет необходимости хранить созданные ссылки в базе данных, поскольку JWT несут в себе всю необходимую информацию. С другой стороны, такие ссылки нельзя отозвать. Пока срок действия токена не истёк, и файл, на идентификатор которого ссылается токен, не удалён, ссылка на скачивание будет активна.

3. Описание используемых программных средств

3.1. Язык программирования Java

Java — это строго типизированный объектно-ориентированный язык программирования высокого уровня. Он был разработан компанией Sun, а позднее приобретён корпорацией Oracle, которой и принадлежит до сих пор. Несмотря на свой почётный возраст, Java продолжает развиваться, оставаясь одним из самых популярных языков программирования.

Одним из главных преимуществ этого языка является его кроссплатформенность. Программы на Java компилируются в байт-код, который затем выполняется виртуальной машиной JVM (Java Virtual Machine). Преимущество такого подхода в том, что байт-код не зависит от операционной системы, таким образом, программы могут выполняться на любой платформе, для которой существует виртуальная машина Java.

Другое важное преимущество Java — наличие огромного количества библиотек с открытым исходным кодом, которые подходят для решения задачи любой сложности. В частности, в работе будут использованы фреймворки и библиотеки для создания веб-сервисов REST, контроля доступа, авторизации пользователей по протоколу OAuth, взаимодействия с базой данных посредством технологии Object-Relational Mapping, внедрения зависимостей, аспектно-ориентированного программирования, генерации и валидации токенов JWT, работы с JSON и мн. др.

Кроме того, этот язык достаточно прост в использовании. В нем присутствует автоматическое управление памятью за счёт использования механизма сборки мусора, а также строгая типизация, которая делает Java удобным средством для написания крупных проектов. Нельзя не отметить и богатый инструментарий. Интегрированные среды разработки (IDE), написанные на Java, такие, как Eclipse, NetBeans и продукты компании JetBrains, давно вышли за пределы экосистемы языка, став стандартным средством разработки программ на многих современных языках.

3.2. Spring Framework

Разрабатываемый проект основан на использовании фреймворка с открытым исходным кодом Spring. Функционал фреймворка сгруппирован в несколько

модулей: Core Container, AOP and Instrumentation, Messaging, Data Access, Web, Test. В следующих параграфах будут кратко рассмотрены использованные в проекте модули.

3.2.1. Spring Container

Spring Container — это модуль, использующийся для внедрения зависимостей. Контейнер Spring управляет жизненным циклом объектов и связывает их друг с другом. Объекты, которые он контролирует, называются бинами (от слова Bean). Классы бинов могут зависеть друг от друга, и задача контейнера Spring состоит в создании экземпляров этих классов и внедрении их в другие зависимые от них бины. Такой механизм обеспечивает слабую связанность классов, что улучшает структуру кода, упрощает их взаимозаменяемость и тестирование;

3.2.2. Spring AOP

Aspect-oriented Programming (AOP) — это парадигма программирования, основанная на выделении «сквозной функциональности» (cross-cutting concerns) в отдельные объекты. Такая функциональность затрагивает многие компоненты системы, но при этом не относится непосредственно к логике приложения. Примерами сквозной функциональности можно назвать логирование информации и управление транзакциями базы данных.

3.2.3. Spring MVC

Spring MVC — это фреймворк, в основе которого лежит технология Java Servlets. Spring MVC предназначен для разработки веб-приложений, и именно с его помощью разрабатывается REST API сервиса. Этот модуль предоставляет возможность обработки пользовательских запросов, их валидации, генерации HTML-страниц и т. д. Иначе говоря, Spring MVC отвечает за всё, что связано с сетевой частью приложения.

3.2.4. Spring Security

Как нетрудно догадаться, главная задача Spring Security заключается в аутентификации и авторизации клиентов приложения. Контроль доступа осуществляется как на уровне HTTP-запросов, так и на уровне вызова отдельных методов. Spring Security также реализует поддержку протокола OAuth, позволяя развернуть и гибко настроить собственный сервер авторизации и сервер ресурсов.

3.2.5. Spring Data Access

Spring Data отвечает за взаимодействие приложения с базой данных. Этот модуль поддерживает интеграцию с другими технологиями работы с базами

данных на Java, такими как JDBC и JPA, а также даёт возможность работать с нереляционными хранилищами. Кроме того, Spring Data позволяет декларативно управлять транзакциями за счёт использования приёмов аспектно-ориентированного программирования. Но одним из главных преимуществ этого модуля является возможность динамически генерировать классы доступа к базе данных на основе интерфейсов, определённых разработчиком.

3.2.6. Spring Boot

Spring Boot — это проект, направленный на упрощение разработки приложений с помощью фреймворка Spring. Он позволяет в максимально короткие сроки создать полностью функциональное приложение, требуя при этом минимум усилий от разработчика. Особенности Spring Boot:

- 1) встроенный веб-сервер (Tomcat, Jetty или Undertow), который автоматически запускается вместе с приложением;
- 2) набор готовых пакетов зависимостей (starter dependencies);
- 3) автоматическая конфигурация как самого Spring, так и некоторых сторонних библиотек;
- 4) возможность следить за состоянием приложения в реальном времени с помощью Spring Boot Actuator;
- 5) полностью избавляет разработчика от необходимости использовать XML-конфигурацию.

3.3. Java Persistence API

Для работы с базой данных в проекте используется технология объектно-реляционного отображения (Object-Relational Mapping или ORM). ORM отображает таблицы базы данных на объектную модель языка программирования. Класс соответствует таблице, а объект этого класса — записи в таблице. Выделим основные плюсы использования данной технологии:

- 1) возможность описать и создать схему базы данных, используя классы и граф отношений между ними;
- 2) возможность прозрачно манипулировать данными как объектами, автоматически генерируя тем самым SQL-запросы;
- 3) возможность лёгкой замены системы управления базами данных (СУБД), поскольку ORM-фреймворк использует платформу-независимый язык запросов, напоминающий SQL;
- 4) кеширование уже загруженных данных;
- 5) возможность использования механизма оптимистичных блокировок, управляемых фреймворком автоматически.

В экосистеме Java существует спецификация Java Persistence API (JPA), цель которой — стандартизация технологии объектно-реляционного отображения. JPA, кроме самого программного интерфейса, описывает требования, предъявляемые к сущностям, платформу-независимый язык запросов JPQL и

много другое. В разрабатываемом проекте в качестве провайдера, реализующего эту спецификацию, используется фреймворк Hibernate, а в качестве СУБД — PostgreSQL.

3.4. MapStruct

Как уже объяснялось во второй главе, в трёхуровневой архитектуре есть две иерархии объектов: сущности базы данных и объекты передачи данных (DTO). DTO используются, когда передача непосредственно сущностей клиенту не подходит по тем или иным причинам, например, когда необходимо разорвать циклические связи между объектами или скрыть некоторые данные. Эти объекты могут иметь много схожих полей, и трансформация DTO в сущность и обратно требует написания большого объёма однообразного кода, подверженного ошибкам.

MapStruct — это генератор кода, который значительно упрощает написание классов отображения, трансформирующих один тип объектов в другой. Такие классы генерируются на основе интерфейсов и аннотаций, применяемых к ним. Генерация происходит при компиляции и использует обычные вызовы методов, практически не отличаясь от кода, который написал бы программист вручную, благодаря этому использование MapStruct не сказывается на производительности приложения, а сгенерированный код легко поддаётся отладке [9].

3.5. Swagger

REST — это один из самых популярных на сегодня способов взаимодействия между клиентом и сервером в веб-приложениях. Но проблема в том, что REST — это не стандарт или протокол, а всего лишь архитектурный стиль, набор требований к программному интерфейсу. Клиенту же необходимо точно знать, какие данные ожидает получить сервер, в каком формате должны быть эти данные, значение каждого возможного кода состояния и т. д. Таким образом, разрабатываемый API приложения должен быть подробно задокументирован.

Swagger — это проект с открытым исходным кодом, предназначенный для документирования программного интерфейса REST. Он даёт возможность сгенерировать документацию и визуализировать её, используя Swagger UI. Кроме того, с помощью Swagger UI также можно отправлять запросы для проверки и тестирования разработанного API.

Спецификация Swagger, также известная как OpenAPI, имеет несколько реализаций. Одной из них является библиотека SpringFox, позволяющая интегрировать Swagger с приложениями, разработанными с помощью Spring Framework.

3.6. JUnit и Mockito

Есть множество видов тестирования программного обеспечения: функциональное, интеграционное, нагрузочное и т. д. Одним из них является модульное, или юнит-тестирование, которое обычно выполняется программиста-

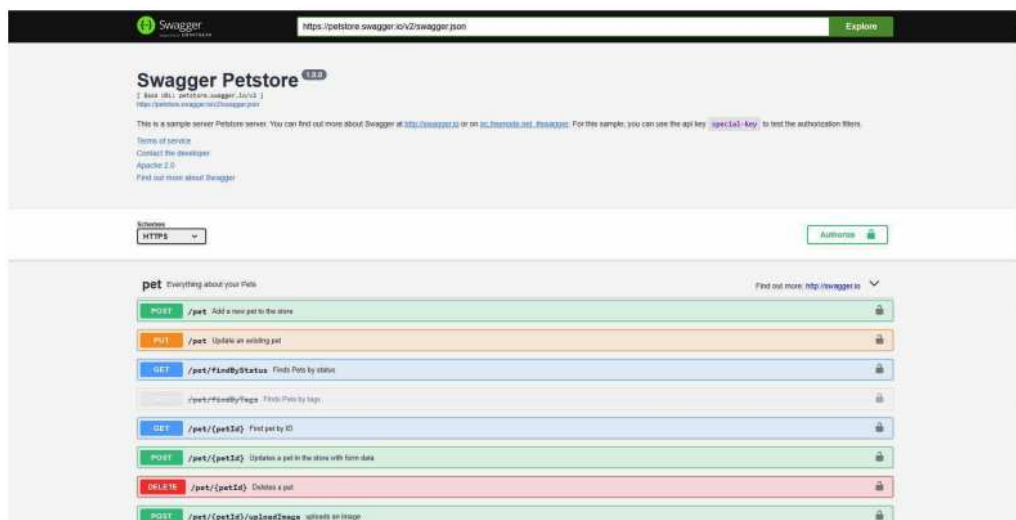


Рис. 8. Пример интерфейса Swagger UI

ми. Цель такого тестирования — проверка на корректность работы отдельных компонентов приложения (модулей) в изоляции друг от друга.

В проекте для написания юнит-тестов используются фреймворки JUnit и Mockito, которые чаще всего используются в связке друг с другом. JUnit является стандартным фреймворком для автоматизированного модульного тестирования приложений, написанных на Java. Он позволяет запускать тестовые методы, группировать их для выполнения, проверять соответствие результатов теста ожидаемым и многое другое. Mockito же необходим для создания объектов-заглушек, которые позволяют тестировать модули изолированно. Они имитируют другие классы, и их поведение предопределено программистом. Кроме того, заглушки позволяют убедиться, что тестируемый объект выполнил требуемые от него действия.

3.7. Project Lombok

Программисты зачастую вынуждены писать большое количество однообразного кода. Описанные выше классы отображения являются одним из примеров такого кода. Но если необходимость писать подобные классы возникает не так часто, то писать стандартные методы доступа (getters и setters), сравнения (equals), вычисления хеш-кода (hashCode), преобразования объекта в строку (toString) и др. приходится в каждом Java-проекте без исключения. Project Lombok помогает упростить работу программиста, автоматизировав этот процесс.

Lombok — это проект для генерации исходного кода, добавляющий дополнительную функциональность в язык Java. Кроме описанных выше стандартных методов объектов, Lombok также позволяет:

- 1) использовать неявные типы переменных (var и val);

- 2) проверять аргументы методов на равенство null;
- 3) создавать конструкторы классов с разным набором параметров;
- 4) создавать классы-строители;
- 5) создавать неизменяемые классы;
- 6) автоматически освобождать ресурсы.

Всё, что нужно, чтобы использовать этот функционал, — это добавить аннотацию к классу или методу, и Lombok автоматически сгенерирует необходимый код при компиляции программы.

3.8. Maven

Maven — это фреймворк с открытым исходным кодом, который существенно упрощает и автоматизирует процесс сборки проектов. Maven позволяет добавлять внешние зависимости в проект, используя для этого центральный репозиторий, предоставляет богатый набор плагинов, расширяющих функционал, позволяет создавать дистрибутивы программ в виде архивов jar/war и многое другое. Кроме того, эта система сборки поддерживается всеми популярными средами разработки, которые позволяют импортировать проект Maven без необходимости его дополнительной конфигурации.

Центральным компонентом Maven является специальный XML-файл Project Object Model (pom.xml). POM используется для описания проекта и конфигурирования процесса сборки. Этот файл содержит информацию об имени и версии проекта, его авторе, используемой версии Java, внешних зависимостях, плагинах и т. д.

Все проекты, использующие Maven, имеют единую унифицированную структуру каталогов:

- 1) /src/main/java содержит исходный код программы;
- 2) /src/main/resources содержит дополнительные ресурсы приложения (SQL-скрипты, файлы конфигурации и т. д.);
- 3) /src/test/java содержит исходный код тестовых классов;
- 4) /src/test/resources содержит дополнительные ресурсы приложения, необходимые для тестирования;
- 5) /target содержит результаты сборки, которые включают в себя дистрибутив программы, скомпилированные классы, результаты тестирования и т. д.

4. Программная реализация

Файлы приложения распределены по каталогам согласно структуре проекта Maven: основные классы находятся в /src/main/java, тестовые классы — в /src/test/java, а каталог /src/main/resources содержит файлы, необходимые для запуска и настройки приложения. Все классы принадлежат к базовому пакету com.github.danilkozyrev.filestorageapi и сгруппированы по функционалу. Для запуска приложения используется метод main из класса Application.

Далее будет рассмотрена реализация основных компонентов программы, описаны их структура и задачи.

4.1. Конфигурация

Для конфигурирования приложения используются классы из пакета `config` и файлы из директории `/src/main/resources`.

Директория `resources` содержит следующие файлы:

1) `application.properties`. Spring Boot позволяет настраивать большинство компонентов приложения, используя для этого свойства Java, которые хранятся в этом файле в виде пар ключ-значение;

2) `import.sql`. SQL-скрипт для загрузки исходных данных. Добавляет роли пользователя и администратора, учётные записи тестовых пользователей, их корневые папки;

3) `keystore.p12`. Хранилище ключей и сертификатов, необходимых для установки защищённого соединения по протоколу HTTPS.

Пакет `config` содержит конфигурационные классы, каждый из которых, за исключением `ApplicationProperties`, отмечен аннотацией `@Configuration`:

1) `ApplicationProperties`. Класс для чтения некоторых свойств из файла `application.properties` (максимальный объем хранилища, базовая папка, параметры генерации JWT). Используется сервисом `FileService`;

2) `GlobalMethodSecurityConfig`. Позволяет использовать аннотации `@PreAuthorize` и `@PostAuthorize`, контролирующие доступ к данным на уровне вызова методов;

3) `OAuth2AuthorizationServerConfig`. Необходим для включения и настройки сервера авторизации OAuth, также добавляет в приложение несколько тестовых клиентов;

4) `OAuth2ResourceServerConfig`. Необходим для включения сервера ресурсов OAuth и настройки контроля доступа к нему на уровне HTTP-запросов. К серверу ресурсов относятся все адреса, начинающиеся с префикса `«api»`;

5) `SwaggerConfig`. Необходим для включения и настройки Swagger. Позволяет авторизовать Swagger UI для доступа к защищенным ресурсам пользователя по протоколу OAuth;

6) `WebConfig`. Конфигурация веб-элементов. Содержит единственный бин, удаляющий имя класса исключения из сообщений об ошибках, передаваемых клиенту;

7) `WebSecurityConfig`. Позволяет настроить доступ к ресурсам, которые не относятся к серверу ресурсов, но должны быть защищены на уровне HTTP-запросов без использования протокола OAuth.

4.2. Сущности базы данных

Сущности базы данных находятся в пакете `domain` и отмечаются аннотацией `@Entity`. Базовым суперклассом для них является класс `BaseEntity`, который содержит единственное поле `id`, являющееся общим для всех сущностей. Значения идентификатора генерируются фреймворком последовательно, начиная с 1000.

У `BaseEntity` есть подкласс `AuditableEntity`, который содержит поля `version`,

Листинг 1. Класс BaseEntity

```

@MappedSuperclass
@Data
public abstract class BaseEntity implements Serializable {

    @Id
    @Column(updatable = false)
    @SequenceGenerator(name = "id_sequence_generator", initialValue = 1000)
    @GeneratedValue(
        strategy = GenerationType.SEQUENCE,
        generator = "id_sequence_generator")
    @ToString.Include
    private Long id;

```

dateCreated и dateModified. Значение поля version используется при оптимистичных блокировках и устанавливается фреймворком. Поля dateCreated и dateModified — это время создания и последнего изменения сущности, которые также устанавливаются автоматически в методах prePersist и preUpdate.

Листинг 2. Класс AuditableEntity

```

@MappedSuperclass
@Getter
@Setter
public abstract class AuditableEntity extends BaseEntity {

    @Version
    @Column(nullable = false)
    private Long version;

    @Column(nullable = false, columnDefinition = "TIMESTAMP WITH TIME ZONE")
    private Instant dateCreated;

    @Column(nullable = false, columnDefinition = "TIMESTAMP WITH TIME ZONE")
    private Instant dateModified;

    @PrePersist
    public void prePersist() {
        dateCreated = Instant.now().truncatedTo(ChronoUnit.MILLIS);
        dateModified = dateCreated;
    }

    @PreUpdate
    public void preUpdate() {
        dateModified = Instant.now().truncatedTo(ChronoUnit.MILLIS);
    }
}

```

Все классы сущностей также содержат аннотации для генерации схемы базы данных и конфигурирования фреймворка: имена таблиц, ограничения, индексы, каскадные операции, стратегии загрузки отношений и т. д.

4.3. Объекты передачи данных

Объекты передачи данных разделены на два пакета: в dto.forms находятся объекты, передаваемые от клиента к серверу, а в dto.projections — передаваемые от сервера к клиенту. Все эти классы можно условно объединить в четыре группы:

- 1) `MetadataForm` и `Metadata`. Используются для изменения и получения метаданных файла или папки;
- 2) `UserForm` и `UserInfo`. Используются для изменения и получения информации о пользователе;
- 3) `PropertyForm` и `PropertyInfo`. Используются для изменения и получения информации о свойствах файла;
- 4) `SearchParameters`. Контейнер для параметров поиска.

Все DTO-классы представляют из себя простой набор значений, но в объектах-формах также содержатся аннотации, используемые для проверки синтаксиса полученного запроса. Каждая подобная аннотация относится к одной из трех групп: `Create`, `Update` или `Default`, причём `Create` и `Update` являются подгруппами `Default`. Аннотации без параметра `groups` относятся к группе `Default`. Контроллер при получении запроса должен указать желаемую группу, тем самым определяя, какие аннотации будут использоваться при проверке полей объекта. Аннотации валидации и их группы определены в пакете `validation`.

4.4. Исключения

Рассматриваемые здесь исключения определены в пакете `exception` и генерируются исключительно классами логического уровня (сервисами). В пакете представлены шесть классов исключений:

- 1) `CircularFolderStructureException`. Информировывает о возникновении циклической зависимости в дереве папок;
- 2) `EmailAlreadyExistsException`. Информировывает о том, что предоставленный клиентом адрес электронной почты уже используется;
- 3) `ExpiredFileTokenException`. Информировывает о том, что у предоставленного токена для скачивания файла истёк срок действия;
- 4) `FileSystemException`. Информировывает о возникновении непредвиденной ошибки при чтении или записи файла;
- 5) `RecordNotFoundException`. Информировывает о том, что запрашиваемый ресурс не был найден;
- 6) `StorageLimitExceededException`. Информировывает о том, что клиент превысил ограничение на объём хранимых файлов.

Каждый из этих классов отмечен аннотацией `@ResponseStatus`, содержащей код состояния, и имеет поле `message`, содержащее сообщение об ошибке. При возникновении одного из этих исключений Spring автоматически сгенерирует и отправит клиенту ответ с заданным кодом и сообщением.

4.5. Интерфейсы классов отображения

Классы отображения трансформируют сущности в объекты передачи данных и используются сервисами. Сами классы генерируются библиотекой `MapStruct`, а в пакете `mapper` находятся только их интерфейсы.

На основе сигнатур методов MapStruct сгенерирует код, копирующий значения полей, причем все поля с одинаковыми именами распознаются автоматически. Если имена не совпадают, они указываются в параметрах source и target аннотации @Mapping. Если имена полей совпадают, а типы нет, то необходимо создать в интерфейсе метод, трансформирующий один тип в другой, MapStruct автоматически найдет и использует этот метод при генерации кода. Примером служит метод roleToString из интерфейса UserInfoMapper, трансформирующий роль в строку.

4.6. Репозитории

Репозитории относятся к уровню данных приложения и представляют из себя набор интерфейсов, с помощью которых сервисы манипулируют данными, абстрагируясь от механизма их хранения. В проекте реализовано по одному репозиторию для каждой используемой сущности.

При запуске приложения Spring Data создает прокси-объекты для всех интерфейсов, которые являются наследниками org.springframework.data.repository.Repository или его производных, таких как JpaRepository [10]. Кроме стандартных методов из JpaRepository в интерфейсы были добавлены и собственные методы, причём Spring автоматически преобразует имена методов в запросы к БД. Альтернативой именам служит аннотация @Query, которую удобно использовать, если имя получается слишком длинным. @Query также позволяет написать запрос на чистом SQL.

В качестве примера в следующем листинге приведены три способа создать запрос для поиска файлов больше заданного размера: с помощью имени метода, с помощью языка JPQL и с помощью SQL.

Листинг 3. Способы создания запросов в Spring Data

```
List<File> findFilesBySizeGreaterThan(Long size);

@Query("SELECT f FROM File f WHERE f.size > :size")
List<File> findFilesJPQL(@Param("size") Long size);

@Query(value = "SELECT * FROM files WHERE size > :size", nativeQuery = true)
List<File> findFilesSQL(@Param("size") Long size);
```

Кроме того, Spring Data-репозитории позволяют создавать динамические запросы «по примеру», которые используется в приложении для поиска файлов и папок. Такие методы используют объект-образец с любой комбинацией полей и выполняют поиск по этому образцу, игнорируя при этом null-значения.

4.7. Сервисы

Сервисы можно назвать центральными компонентами приложения, поскольку именно эти классы содержат логику управления данными. Каждый сервис представлен интерфейсом из пакета service и снабжён подробными комментариями JavaDoc, описывающими его назначение, функционал методов, параметры и возвращаемые значения (см. [11]). Исключением является класс

DefaultUserDetailsService, который возвращает объект `UserPrincipal` из пакета `security`, представляющий текущего пользователя, и используется фреймворком Spring при аутентификации учётной записи.

В проекте реализованы следующие сервисы:

- 1) `FileService`. Предоставляет методы для работы с файлами, включая создание токенов JWT для генерации временных ссылок;
- 2) `FolderService`. Предоставляет методы для работы с папками;
- 3) `PropertyService`. Позволяет добавлять, просматривать и удалять свойства файлов;
- 4) `SearchService`. Позволяет производить поиск файлов и папок по определённым параметрам, а также просматривать недавно изменённые файлы и папки;
- 5) `TrashService`. Позволяет просматривать и очищать содержимое корзины;
- 6) `UserService`. Предоставляет методы для работы с учётными записями пользователей приложения.

В каждом интерфейсе сервиса используется аннотация `@PreAuthorize`, которая служит механизмом контроля доступа на уровне вызываемых методов. Проверка выполняется перед вызовом метода на основании значения аннотации. Если значение выражения равно `true`, то метод выполняется, в противном случае Spring возбудит исключение `AccessDeniedException`.

Листинг 4. Способы контроля доступа на уровне вызываемых методов

```
List<File> findFilesBySizeGreaterThan(Long size);

@Query("SELECT f FROM File f WHERE f.size > :size")
List<File> findFilesJPQL(@Param("size") Long size);

@Query(value = "SELECT * FROM files WHERE size > :size", nativeQuery = true)
List<File> findFilesSQL(@Param("size") Long size);
```

Рассмотрим пример из листинга 4, в котором представлены два метода: получение содержимого корневой папки по id владельца и получение содержимого папки по id папки. В первом случае проверка доступа тривиальна. Необходимо лишь проверить, что id текущего пользователя совпадает с параметром, переданным методу. Но для аналогичной проверки во втором примере нам необходимо знать владельца папки с заданным id. В таких случаях в аннотации `@PreAuthorize` используется выражение `hasPermission`, которое делегирует проверку классу `StorageItemPermissionEvaluator` из пакета `security`. Этот класс находит объекты с заданным id и проверяет условия доступа к ним.

Каждый метод в реализации сервиса отмечен аннотацией `@Transactional`. Эта аннотация означает, что при вызове метода будет автоматически создана новая транзакция, а при успешном возврате из него эта транзакция будет зафиксирована. В случае возникновения в методе непроверяемого исключения произойдёт откат транзакции.

Классы сервисов также используют механизм публикации событий, что даёт возможность выполнить некоторые действия, такие как удаление файла с жёсткого диска, только после успешного завершения или отмены транзакции,

обеспечивая тем самым целостность данных. События из пакета `event` являются наследниками класса `ApplicationEvent` и содержат информацию о созданных или удалённых сущностях. Для публикации событий используется класс `ApplicationEventPublisher`, а методы из сервиса `DefaultFileService`, отмеченные аннотацией `@TransactionalEventListener`, обрабатывают эти события.

5. Контроллеры

Контроллеры относятся к уровню представления и отмечаются аннотациями `@Controller` или `@RestController`. Каждый из них привязан к определённому веб-адресу и HTTP-методу, используя аннотацию `@RequestMapping` или её производные (`@GetMapping`, `@PostMapping` и т. д.).

Задача контроллеров заключается в преобразовании объектов передачи данных в формат JSON и обратно с помощью аннотаций `@RequestBody` и `@ResponseBody`, валидации синтаксиса запроса с помощью аннотации `@Validated`, извлечении параметров запроса с помощью аннотаций `@RequestParam` и `@PathParam`, работе с заголовками и установке статуса ответа. Кроме того, в методах контроллеров используется аннотация `@AuthenticationPrincipal`, позволяющая получить объект `UserPrincipal`, который представляет текущего пользователя.

Контроллеры также могут обрабатывать исключения, возникающие на нижележащих уровнях, и возвращать клиенту сообщения об ошибках. Примером такого контроллера служит класс `ExceptionHandlerController`. Он отмечен аннотацией `@RestControllerAdvice`, а его методы — аннотацией `@ExceptionHandler`, описывающей, какой тип исключения этот метод обрабатывает. Этот способ генерации сообщений об ошибках аналогичен использованию аннотации `@ResponseStatus`, которая была рассмотрена ранее при описании исключений.

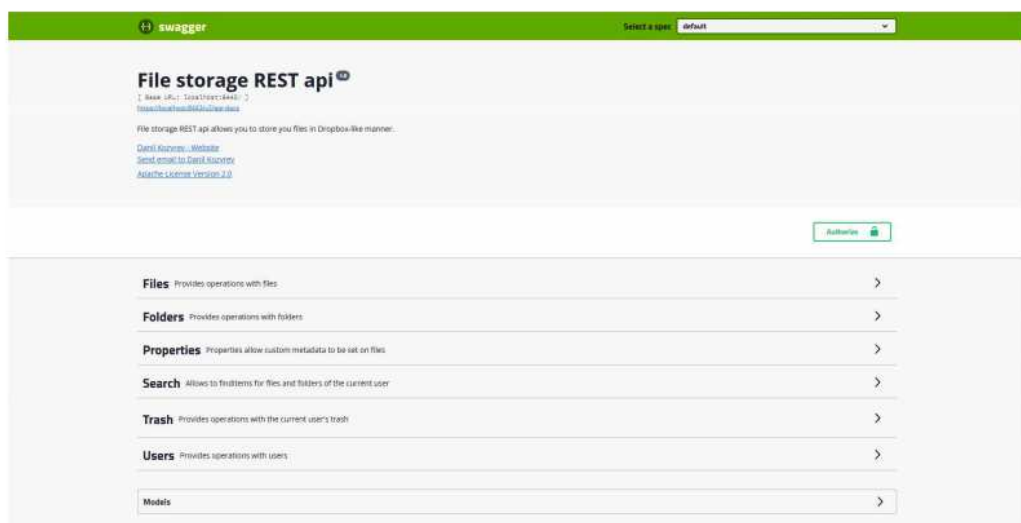


Рис. 9. Список ресурсов

5.1. Документация

Swagger автоматически генерирует документацию к программному интерфейсу на основе используемых контроллеров и аннотаций `@Api`, `@ApiOperation`, `@ApiResponse`. Документация используется в качестве домашней страницы сервера и доступна по адресу: <https://localhost:8443>.

Ресурсы в документации группируются согласно параметру `tags` аннотации `@Api`. Для каждой конечной точки приведены её адрес и HTTP-метод, параметры, которые необходимо передать серверу, а также пример успешного ответа и возможные сообщения об ошибках. Кнопка «try it out» позволяет отправить запрос на сервер, но для этого необходимо авторизоваться, нажав кнопку «Authorize» и введя данные учетной записи.

Секция `Models` содержит информацию об используемых в API структурах данных. Как можно заметить, эти модели соответствуют объектам передачи данных, поскольку именно их возвращают и принимают контроллеры.

6. Тестирование

В работе было проведено модульное тестирование классов логического уровня, поскольку именно они содержат основную логику приложения, а значит, и наиболее подвержены ошибкам.

6.1. Генерация тестовых данных

Для генерации тестовых данных приложения используются классы-строители (`builders`), которые генерируются с помощью библиотеки `Lombok`. Строители значительно улучшают читаемость кода, поскольку позволяют создавать множество объектов с заранее установленными значениями полей и перезаписывать необходимые поля в тестовых методах, используя «текущий интерфейс».

Строители в проекте — это внутренние классы, которые сгруппированы по типу генерируемых объектов в три класса-обёртки из пакета `util`: `FormBuilders`, `ProjectionBuilders` и `EntityBuilders`. Рассмотрим в качестве примера сгенерированный класс-строитель `UserFormBuilder` (см. Листинг 5).

Как можно заметить, этот класс имеет поля с заданными значениями по умолчанию, а также предоставляет возможность установить новые значения, вызвав соответствующие методы. Метод `build` создаёт экземпляр класса `UserForm`, а сам экземпляр строителя можно создать, вызвав метод `defaultUserForm`.

Все классы-строители однотипны, и использование библиотеки `Lombok` значительно упрощает написание кода.

6.2. Методика тестирования

Модульное тестирование предполагает тестирование каждого компонента системы в изоляции. Для достижения этой цели используются объекты-

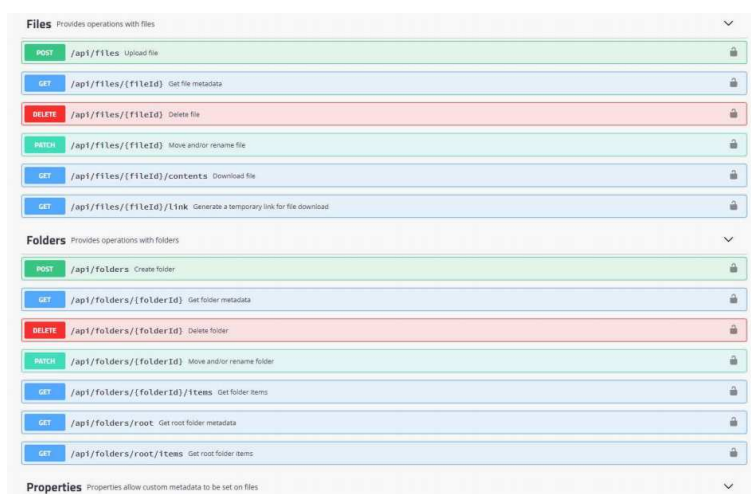


Рис. 10. Список конечных точек

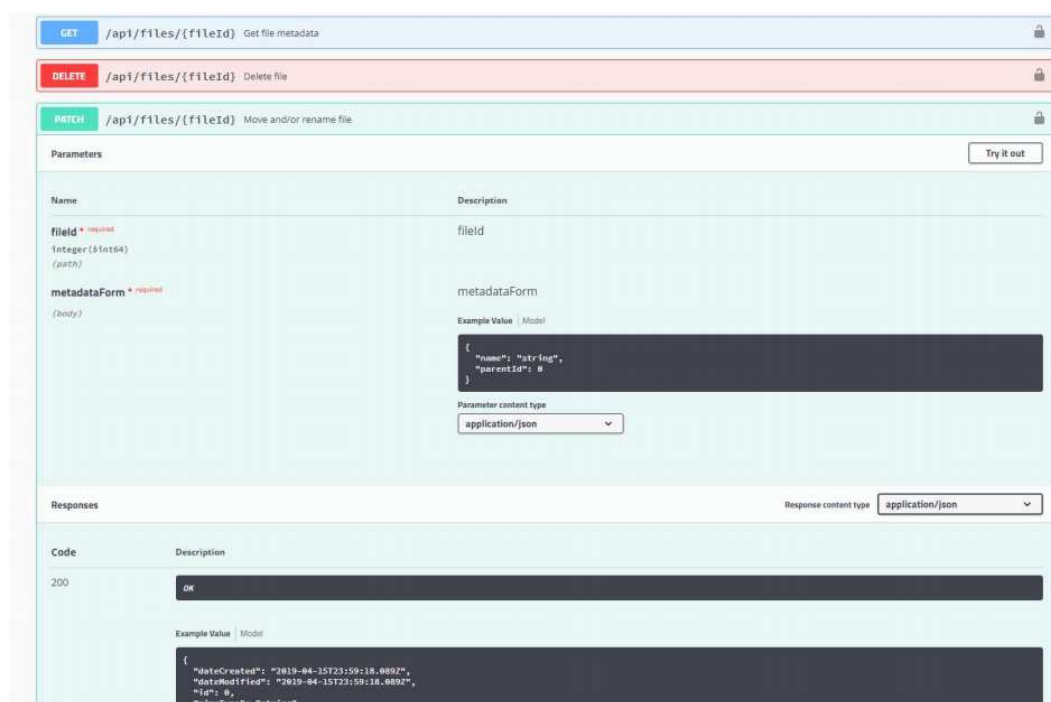


Рис. 11. Информация о конечной точке

заглушки, создаваемые библиотекой Mockito с помощью аннотации @Mock. Поля тестируемого класса заполняются этими объектами с помощью аннотации @InjectMocks. Кроме того, при необходимости можно «захватить» аргументы, переданные методам заглушек, используя объекты класса ArgumentCaptor.

Рассмотрим примерный алгоритм тестирования метода:

- 1) создаётся тестовый метод, отмеченный аннотацией @Test;
- 2) с помощью классов-строителей создаются тестовые объекты;

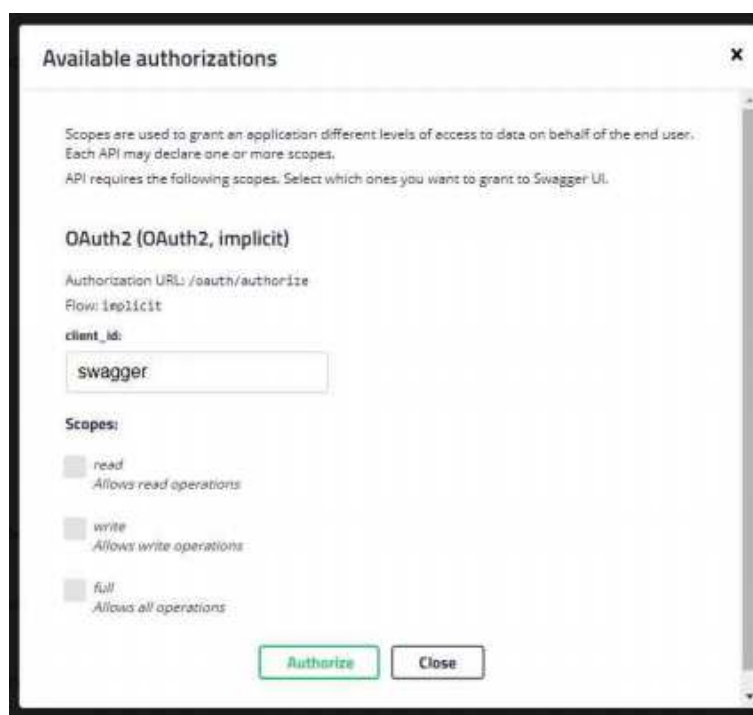


Рис. 12. Окно авторизации

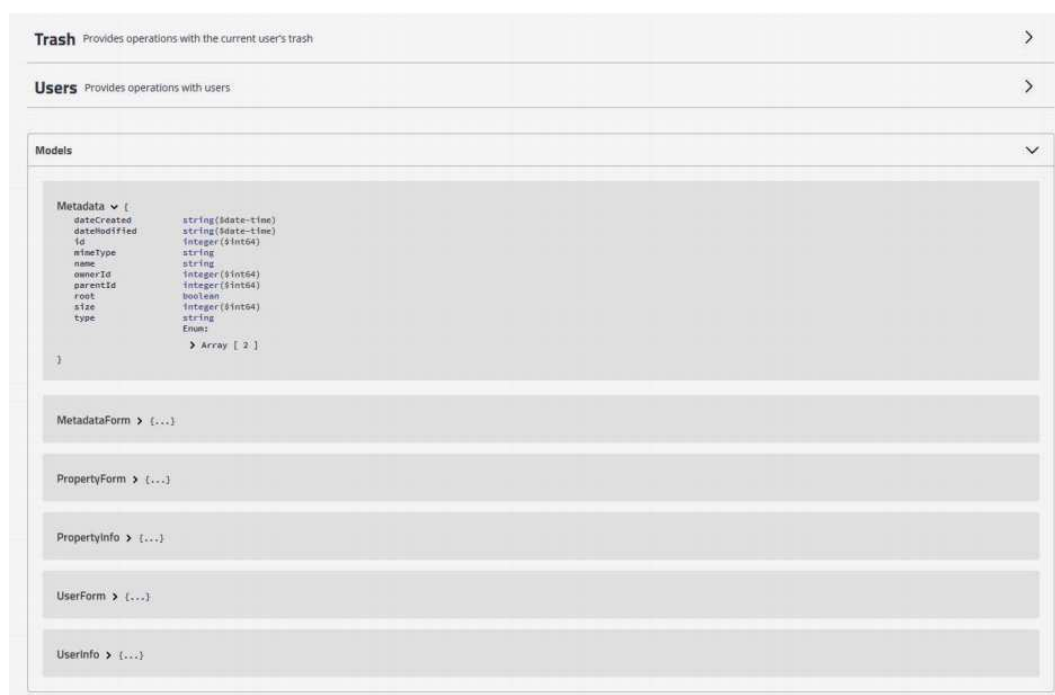


Рис. 13. Секция Models

3) используя методы `when` и `thenReturn`, устанавливаются значения, которые должны возвращать заглушки при вызове их методов;

Листинг 5. Сгенерированный класс-строитель UserFormBuilder

```
public static class UserFormBuilder {  
  
    private String firstName = "Fred";  
    private String lastName = "Bloggs";  
    private String email = "fred.bloggs@example.com";  
    private String password = "fred.bloggs";  
  
    UserFormBuilder() {  
    }  
  
    public FormBuilders.UserFormBuilder firstName(final String firstName) {  
        this.firstName = firstName;  
        return this;  
    }  
  
    public FormBuilders.UserFormBuilder lastName(final String lastName) {  
        this.lastName = lastName;  
        return this;  
    }  
  
    public FormBuilders.UserFormBuilder email(final String email) {  
        this.email = email;  
        return this;  
    }  
  
    public FormBuilders.UserFormBuilder password(final String password) {  
        this.password = password;  
        return this;  
    }  
  
    public UserForm build() {  
        return FormBuilders.createUserForm(  
            this.firstName, this.lastName, this.email, this.password);  
    }  
}  
  
public static FormBuilders.UserFormBuilder defaultUserForm() {  
    return new FormBuilders.UserFormBuilder();  
}
```

- 4) вызывается тестируемый метод сервиса;
- 5) используя метод `verify`, проверяется, что ожидаемые методы заглушек были вызваны тестируемым классом;
- 6) используя метод `assert`, проверяется, что значения полей объектов соответствуют ожидаемым.

В следующем листинге приведен пример тестирования метода `getUserInfo` из класса `UserService`.

Тестирование разбито на две части. Сначала тестируется сценарий, когда пользователь найден, а затем проверяется обратный вариант. Названия тестовых методов состоят из трёх частей, разделённых подчёркиванием: имя тестируемого метода, условие, ожидаемый результат. Если в первом варианте тестируется успешный вызов метода, и порядок действий аналогичен алгоритму, то во втором аннотация `@Test` имеет параметр `expected`, который говорит о том, что тест будет считаться успешным только в случае возникновения исключения `RecordNotFoundException`. Для этого методы `when/thenReturn` устанавливают, что репозиторий при запросе к нему должен вернуть пустой объект.

Листинг 6. Тестирование метода getUserInfo

```
@Test
public void getUserInfo_whenUserFound_shouldReturnUserInfo() {
    var userId = 0L;
    var user = defaultUser().id(userId).build();
    var userInfo = defaultUserInfo().build();

    when(userRepository.findById(userId)).thenReturn(Optional.of(user));
    when(userInfoMapper.mapUser(user)).thenReturn(userInfo);

    var returnedUserInfo = userService.getUserInfo(userId);

    assertThat(returnedUserInfo, equalTo(userInfo));
}

@Test(expected = RecordNotFoundException.class)
public void getUserInfo_whenUserNotFound_shouldThrowException() {
    var userId = 0L;
    when(userRepository.findById(userId)).thenReturn(Optional.empty());
    userService.getUserInfo(userId);
}
```

Тестирование всех остальных методов в приложении производится аналогично рассмотренному примеру.

Заключение

В результате нами разработан программный интерфейс серверной части приложения для удалённого хранения данных. В ходе работы был произведён анализ предметной области, рассмотрены существующие решения, изучены достоинства и недостатки систем облачного хранения. Разработана и детально описана архитектура системы, которая отвечает заявленным функциональным и нефункциональным требованиям. Выбраны и изучены программные средства реализации разработанной архитектуры. И, наконец, система реализована и протестирована. Кроме того, программный интерфейс приложения был снабжен подробной документацией в виде интерактивной веб-страницы.

Благодаря применению современных программных средств и подходов к разработке реализованная система легко расширяема и может быть использована с любым клиентом без внесения изменений в серверный код. Таким образом, дальнейшее приоритетное направление развития проекта — это разработка клиентской части приложения. Поскольку сервис ориентирован на индивидуальных пользователей, необходимо предоставить им удобный интерфейс для работы с данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Облачное хранилище данных // Википедия: свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Облачное_хранилище_данных (дата обращения: 01.04.2019).
2. Ковалык В., Томичева Т. Возможности облачных хранилищ для бизнеса и образования // Интерактивная наука. 2017. № 11. С. 185–187.

3. Анализ требований // Википедия: свободная энциклопедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Анализ\\$_{-}\\$требований](https://ru.wikipedia.org/wiki/Анализ$_{-}$требований) (дата обращения: 05.04.2019).
4. Веб-сервисы RESTful: основы // IBM Developer Россия. URL: <https://www.ibm.com/developerworks/ru/library/ws-restfu/index.html> (дата обращения: 08.04.2019).
5. Введение в OAuth 2 // DigitalOcean, Inc. URL: <https://www.digitalocean.com/community/tutorials/oauth-2-ru> (дата обращения: 10.04.2019).
6. Reinsel D., Gantz J., Rydning J. The Digitization of the World – From Edge to Core // An IDC White Paper. URL: <https://www.seagate.com/files/wwwcontent/our-story/trends/files/idc-seagate-dataage-whitepaper.pdf> (дата обращения: 03.04.2019).
7. What are public, private and hybrid clouds? // Microsoft Azure. URL: <https://azure.microsoft.com/en-us/overview/what-are-private-public-hybridclouds/> (дата обращения: 04.04.2019).
8. Introduction to JSON Web Tokens // JWT.io by Auth0. URL: <https://jwt.io/introduction/> (дата обращения: 12.04.2019).
9. MapStruct 1.3.0. Final Reference Guide // MapStruct. URL: <http://mapstruct.org/documentation/dev/reference/html/> (дата обращения: 15.04.2019).
10. Spring Data JPA – Reference Documentation // Spring Framework 5. URL: <https://docs.spring.io/spring-data/jpa/docs/current/reference/html/> (дата обращения: 17.04.2019).
11. Козырев Д.В. Разработка серверной части приложения для удалённого хранения данных. Выпускная квалификационная работа. Омск : ОмГУ, 2019. 57 с.

CREATION OF THE SERVER SIDE OF THE PROGRAMM FOR REMOTE DATA STORAGE

L.A. Volodchenkova

PhD. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

D.V. Kozirev

Student, e-mail: kozyrev.danil@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In this article the programm interface (API) of the server side of the cloud data storage is created.

Keywords: cloud storage, server side, software interface.

REFERENCES

1. Oblachnoe khranilishche dannykh, Vikipediya: svobodnaya entsiklopediya. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Oblachnoe\\$_{-}\\$khranilishche\\$_{-}\\$dannykh](https://ru.wikipedia.org/wiki/Oblachnoe$_{-}$khranilishche$_{-}$dannykh) (01.04.2019). (in Russian)

2. Kovalyk V. and Tomicheva T. Vozmozhnosti oblachnykh khranilishch dlya biznesa i obrazovaniya. Interaktivnaya nauka, 2017, no. 11, pp. 185–187. (in Russian)
3. Analiz trebovaniy, Vikipediya: svobodnaya entsiklopediya. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Analiz\\$_{-}\\$trebovaniy](https://ru.wikipedia.org/wiki/Analiz$_{-}$trebovaniy) (05.04.2019). (in Russian)
4. Veb-servisy RESTful: osnovy. IBM Developer Rossiya. URL: <https://www.ibm.com/developerworks/ru/library/ws-restfu/index.html> (08.04.2019). (in Russian)
5. Vvedenie v OAuth 2. DigitalOcean, Inc. URL: <https://www.digitalocean.com/community/tutorials/oauth-2-ru> (10.04.2019). (in Russian)
6. Reinsel D., Gantz J., and Rydning J. The Digitization of the World – From Edge to Core. An IDC White Paper. URL: <https://www.seagate.com/files/wwwcontent/our-story/trends/files/idc-seagate-dataage-whitepaper.pdf> (03.04.2019).
7. What are public, private and hybrid clouds? Microsoft Azure. URL: <https://azure.microsoft.com/en-us/overview/what-are-private-public-hybridclouds/> (04.04.2019).
8. Introduction to JSON Web Tokens. JWT.io by Auth0. URL: <https://jwt.io/introduction/> (12.04.2019). (in Russian)
9. MapStruct 1.3.0. Final Reference Guide. MapStruct. URL: <http://mapstruct.org/documentation/dev/reference/html/> (15.04.2019). (in Russian)
10. Spring Data JPA – Reference Documentation. Spring Framework 5. URL: <https://docs.spring.io/spring-data/jpa/docs/current/reference/html/> (17.04.2019).
11. Kozыrev D.V. Razrabotka servernoi chasti prilozheniya dlya udalennogo khraneniya dannykh. Vypusknaya kvalifikatsionnaya rabota, Omsk, OmGU, 2019, 57 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 30.03.2020

О ПРИМЕНИМОСТИ СУЩЕСТВУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ К BIG DATA

А.И. Горев

к.ю.н., доцент, e-mail: gorev_a@inbox.ru

Е.Г. Горева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: gorev_a@inbox.ru

Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского, г. Омск, Россия

Аннотация. Определены процессы получения BIG DATA при функционировании компьютерных технологий, целью которых не является создание массивов данных. Однако использование полученных данных может принести большой положительный эффект.

Ключевые слова: big data, автоматизированные информационные системы, структурированные данные.

Современное состояние информационного общества характеризуется повсеместным использованием компьютерных технологий сбора, фиксации и обработки информации. При этом надо обратить внимание, что указанные операции могут быть «побочным продуктом» функционирования автоматизированных информационных систем (далее — АИС). Так, сотовые операторы, предоставляя услуги телефонной связи и передачи данных, формируют биллинговые базы данных (далее — БД), банки при предоставлении услуг расчётных и кредитных карт, ведут БД расходов абонентов в формате кассового чека и пр.

Применение компьютерных технологий во всех сферах жизни общества привело к появлению доселе невозможного процесса формирования Big Data. И если ранее сбор данных для исследования общественного поведения ограничивался тысячами, то современные технологии предоставляют возможность сбора данных о миллионах, что недавно было просто физически невозможно. Причём эти данные, являясь «побочным» продуктом технологий, часто не востребованы. Более того, всё чаще выдвигается утверждение о том, что сначала надо собрать как можно больше данных, на основе которых потом можно будет строить теорию [1].

Складывается парадоксальная ситуация: практики с пренебрежением относятся к научным теориям, выдвигаемым учёными, а учёные, получив возможности Data Science, увлеклись сбором данных, оставив исследования «на потом». Для оправдания бездействия выдвигается проблема плохой структурированности данных («на то они и большие данные, что плохо структурированы») и невозможности их восприятия. При этом единственным способом восприятия определяется визуализация данных [2]. Однако визуализация данных применима только для последующей ручной обработки, что существенно ограничивает

возможное применение результатов исследований. А ведь именно своевременное исследование Big Data может позволить государству и обществу произвести процесс принятия решений в режиме реального времени и в правильном направлении.

Ссылка на плохую структурированность данных также не выдерживает критики. Современные компьютерные системы сбора информации хранят собранные данные в базах данных, что однозначно предопределяет их структурированность. Обязательными параметрами являются дата / время и идентификатор пользователя / клиента системы. Остальные фиксируемые факторы зависят от направленности действия АИС. Более того, структуры данных могут быть изменены (перекодированы) по желанию исследователя без потери самих данных.

На практике возникают нелепые ситуации: не понимая особенностей компьютерного формата хранения данных и возможностей их перекодировки в зависимости от потребностей заказчика, специалисты в области социологии, юриспруденции, экономики и пр. без консультаций с IT-специалистами выбирают те программы обработки данных, которые работают со знакомыми им форматами. Так, при выборе для тестирования с последующей закупкой программно-аппаратных комплексов контроля автотрасс заказчик руководствовался не качеством распознавания объектов, а применяемыми форматами хранения изображений, совпадавшими с накопленной базой данных.

Таким образом, задачи обработки Big Data сводятся к пониманию целей их обработки и построению алгоритма. Конечно, реализация программы тоже является непростой задачей, однако можно отметить, что задачи подобного класса уже были неоднократно реализованы в интересах различных заказчиков.

Примером могут служить специализированные операторские системы класса Fraud Management System (далее — FMS), созданные в качестве мер технической защиты от фрода (от англ. Fraud, — вид мошенничества в области информационных технологий, в частности несанкционированные действия и неправомерное пользование ресурсами и услугами), способные обнаруживать проявления мошенничества в телекоммуникационных системах в режиме реального времени. Работа FMS заключается в мониторинге событий, происходящих в сети, т. е. в обнаружении активности по заранее заданным признакам и последующем анализе. Критерии, по которым система вычленяет неоднозначные действия, разнообразны. Учитываются не только типичные параметры вроде длительности вызова или географии вызова / приёма, но и, например, возраст абонента или период, в течение которого он пользуется услугами компании. Наблюдения используются для формирования групп по аналогии. Для получения максимально широкого информационного охвата FMS интегрируют с другими операторскими системами [3]. Существуют как зарубежные, так и отечественные программы данного класса.

Аналогичные системы давно и успешно функционируют в банковской сфере, проводя анализ активности клиентов банков по тем же критериям географии, времени и типа услуги. Банковские системы ориентированы на выявление противоправных действий с платёжными картами, счетов «салями» и иных мошенничеств. Изучив профиль клиента (регулярность поступления и величину

денежных сумм, кредитную историю, операции по счету и пр.), система способна оценить его платежеспособность при кредитовании. Указанные АИС не являются системами искусственного интеллекта, хотя и способны к самообучению.

Однако указанные системы, начало разработки которых относится к 90-м гг. XX века, действуют в интересах специализированных предприятий и организаций и направлены, как правило, на выявление нестандартных действий с противоправной направленностью. Тем не менее, именно эти алгоритмы могут быть взяты за основу при обработке Big Data. Сдерживающим фактором обработки Big Data является ограниченное распространение пакетов прикладных программ для анализа миллионов записей. Однако рассмотренные выше системы типа FMS, собирая миллионы записей, строили статистически значимый портрет для групп. Такой подход применим и в настоящее время. Имея на входе миллионы данных, программа обработки производит их сортировку по группам характеризующих признаков. Дальнейшая обработка ведётся по выделенным группам. Такой подход, с одной стороны, обезличивает возможные персональные данные, с другой — значительно сокращает объём обработки. После этапа сортировки обработка групп может вестись традиционными методами. Несомненно, могут возникать ошибки, однако при непрерывном анализе и группировке входящих данных с последующим изменением характеризующих признаков групп они будут на уровне статистической погрешности.

Сфера сбора данных с каждым днем становится шире. Примером такой нерешённой задачи являются городские пассажиропотоки, не совпадающие с городской транспортной схемой. Повышение эффективности городского транспорта решает не только вопрос рентабельности, но и экологическую проблему любого мегаполиса, поскольку именно городской транспорт является основным источником загрязнений. В 80-е гг. XX века изучение пассажиропотоков проводилось в ручном режиме статистиками в салонах городского транспорта. Такое трудоёмкое решение всё равно не позволяло точно оценить пассажиропотоки из-за ограниченного времени наблюдения и «человеческого фактора», связанного со статистиками. В современном городе с переходом на безналичные системы оплаты проезда данная задача перешла в разряд вычислительных. Конечно, построение такой модели является непростой задачей, однако она выполнима и может быть реализована.

В качестве элементов наблюдения и анализа данная система может рассматривать транспортные и банковские карты оплаты, предъявляемые пассажирами. Используемые карты оплаты изначально обезличены и не составляют проблему оборота персональных данных. Фиксация их в кассовом аппарате с указанием времени позволяет с высокой точностью определить место посадки клиента. При возвращении пассажира в вечернее время в БД будет зафиксировано место обратной посадки. Ежедневные сотни тысяч записей позволяют с высокой достоверностью собрать статистические данные о пассажиропотоках в течение дня в разные дни недели в любой период года.

Транспортная схема, разработанная с учётом пассажиропотоков, может подстраиваться под изменения интенсивности и направленности движения. Посто-

янное обновление БД позволит системе реагировать на изменения и перенаправлять транспорт. Ещё больший эффект может быть получен при взаимодействии данной системы с картой дорожной обстановки, пробок и местоположения подвижного состава.

В отдельности многие из названных задач уже существуют: карта дорожной обстановки, пробки, местоположение подвижного состава, БД оплаты проезда. Но максимальный эффект может быть получен только при построении интегрированной системы. И таких задач с Big Data с каждым днем становится всё больше. Необходимо решать парадоксальную ситуацию, в которой оказалось современное информационное общество — много современной техники, ещё больше фиксируемых данных и полное отсутствие тенденций улучшения в прикладных сферах жизни общества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сафронов П. Методы науки о данных в социальных исследованиях. URL: <https://postnauka.ru/talks/82202> (дата обращения: 15.09.2019).
2. Новиков А. Проблема больших данных в городских исследованиях. URL: <https://postnauka.ru/video/83423> (дата обращения: 15.09.2019).
3. Семенов Г.В., Бирюков П.Н. Ответственность за «мошенничество» в сетях сотовой связи: учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 2002. С. 41.

Дата поступления в редакцию: 30.11.2019

ABOUT THE APPLICABILITY OF EXISTING DATA PROCESSING ALGORITHMS TO BIG DATA

E.G. Gorev

Ph.D. (Phys-Math.), Associate Professor, e-mail: gorev_a@inbox.ru

Abstract. The processes of obtaining BIG DATA during operation of computer technologies, the purpose of which is not to create data arrays, are defined. However, the use of the obtained data can have a great positive effect.

Keywords: big data, structured data, automated information systems.

REFERENCES

1. Takie mysli vydvinul v 2008 g. Kris Anderson, redaktor Wired, v stat'e «The End of Theory». Tsit. po Safronov P. Metody nauki o dannykh v sotsial'nykh issledovaniyakh Safronov P. Metody nauki o dannykh v sotsial'nykh issledovaniyakh. URL: <https://postnauka.ru/talks/82202> (15.09.2019). (in Russian)
2. Novikov A. Problema bol'shikh dannykh v gorodskikh issledovaniyakh. URL: <https://postnauka.ru/video/83423> (15.09.2019). (in Russian)

3. Semenov G.V., Biryukov P.N. Otvetstvennost' za «moshennichestvo» v setyakh sotovoi svyazi: uchebnoe posobie. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo gos. un-ta, 2002. pp. 41. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 30.11.2019

CONFIRMATION BIAS IN SYSTEMS ENGINEERING: A PEDAGOGICAL EXAMPLE

Griselda Acosta

Doctoral Student, e-mail: gvacosta@miners.utep.edu

Eric D. Smith

Ph.D. (Systems & Industrial Engineering), Associate Professor, e-mail: esmith2@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. One of the biases potentially affecting systems engineers is the confirmation bias, when instead of selecting the best hypothesis based on the data, people stick to the previously-selected hypothesis until it is disproved. In this paper, on a simple example, we show how important it is to take care of this bias: namely, that because of this bias, we need twice as many experiments to switch to a better hypothesis.

Keywords: confirmation bias, systems engineering, hypothesis testing.

1. Formulation of the Problem

Confirmation bias. It is known that our intuitive reasoning shows a lot of unexpected biases; see, e.g., [2]. One of such biases is a *confirmation bias*, when, instead of selecting the best hypothesis based on the data, people stick to the previously-selected hypothesis until it is disproved. This bias is ubiquitous in systems engineering; see, e.g., [1, 4, 5, 8].

How important is it to take the confirmation bias into account? Taking care of the confirmation bias requires some extra effort; see, e.g., [3, 7–9] and references therein. A natural question is: is the resulting improvement worth this extra effort? How better the result will we get?

In this paper, on a simple example, we show that the result is drastically better: namely, that if we properly take this bias into account, then we will need half as many experiments to switch to a more adequate hypothesis.

2. Analysis of the Problem

Description of the simple example. Let us consider the simplest possible case when we have a parameter a that may be 0 and may be non-zero, and we directly observe this parameter. We will also make the usual assumption that the observation inaccuracy is normally distributed, with 0 mean and known standard deviation σ .

In this case, what we observe are the values $x_1, \dots, x_n$ which are related to the actual (unknown) value a by a relation $x_i = a + \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, n$), where ε_i are independent normally distributed random variables with 0 means and standard deviation σ .

Two approaches. In the ideal approach, we select one of the two models – the null-hypothesis $a = 0$ or the alternative hypothesis $a \neq 0$ – by using the usual Akaike Information Criterion (AIC); see, e.g., [6].

In the confirmation-bias approach, we estimate the value a based on the observations $x_1, \dots, x_n$, and we select the alternative hypothesis only if the resulting estimate is statistically significantly different from 0 – i.e., e.g., that the 95% confidence interval for the value a does not contain 0.

What if we use AIC. In the AIC, we select a model for which the difference $\text{AIC} \stackrel{\text{def}}{=} 2k - 2 \ln(\hat{L})$ is the smallest, where k is the number of parameters in a model and $\hat{L}$ is the largest value of the likelihood function L corresponding to this model.

The null-model $a = 0$ has no parameters at all, so for this model, we have $k = 0$. For n independent measurement results, the likelihood function is equal to the product of the values

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

of the Gaussian probability density function corresponding to these measurement results x_i . Thus,

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

and so, for this model,

$$\text{AIC}_0 = -2 \ln(L) = 2n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

We assume that $x_i = a + \varepsilon_i$, where the mean value of ε_i is 0 and the standard deviation is σ . Thus, the expected value of x_i^2 is equal to $a^2 + \sigma^2$. For large values n , due to the Law of Large Numbers (see, e.g., [6]), the average $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$ is approximately equal to the expected value $E[x_i^2] = a^2 + \sigma^2$. Thus, $\sum_{i=1}^n x_i^2 \approx n \cdot (a^2 + \sigma^2)$ and hence,

$$\text{AIC}_0 = 2n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \cdot n \cdot (a^2 + \sigma^2). \quad (1)$$

The alternative model $a \neq 0$ has one parameter a , so here $k = 1$. The corresponding likelihood function is then equal to

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - \hat{a})^2}{2\sigma^2}\right).$$

We select the parameter a that maximizes the value of this likelihood function. Maximal likelihood is the usual way of estimating the parameters, which in this case leads to $\hat{a} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. For large n , this estimate is close to the actual value a , so we have

$$\hat{L} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

For this model, $x_i - a = \varepsilon_i$, thus,

$$\text{AIC}_1 = 2 - 2 \ln(\hat{L}) = 2 + 2n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2.$$

For large n , we have $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \approx n \cdot \sigma^2$, hence

$$\text{AIC}_1 = 2 + 2n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \cdot n \cdot \sigma^2. \quad (2)$$

The second model is preferable if $\text{AIC}_1 < \text{AIC}_0$. By deleting common terms in these two values AIC_i , we conclude that the desired inequality reduces to $2 < \frac{n \cdot a^2}{\sigma^2}$, i.e., equivalently, to

$$n > \frac{2\sigma^2}{a^2}. \quad (3)$$

What if we use a confirmation-bias approach. In the confirmation-bias approach, we estimate a – and we have already mentioned that the optimal estimate is $a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. It is known (see, e.g., [6]) that the standard deviation of this estimate is equal to $\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Thus, the corresponding 95% confidence interval has the form $[a - 2\sigma_e, a + 2\sigma_e]$. The condition that this interval does not contain 0 is equivalent to $|a| > 2\sigma_e$, i.e., equivalently, to $a^2 > 4\sigma_e^2$. Substituting the above expression for σ_e into this inequality, we conclude that $a^2 > 4 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$, i.e., equivalently, that

$$n > \frac{4\sigma^2}{a^2}. \quad (4)$$

Conclusion. By comparing the expressions (3) and (4) corresponding to the two approaches, we can indeed see that the confirmation-bias approach requires twice as many measurements than the approach in which we select the best model based on the data.

Thus indeed, avoiding confirmation bias can lead to a drastic improvement in our estimates and thus, in our decisions.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. Bohlman J. and Bahill A.T. Examples of mental mistakes made by systems engineers while creating tradeoff studies. *Studies in Engineering and Technology*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 22–43.
2. Kahneman D. *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus, and Giroux, New York, 2011.
3. Koriat R.M., Lichtenstein S., and Fischhoff B. Reasons for confidence. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 1980, vol. 6, pp. 107–118.
4. Nickerson R.S. Confirmation bias: A ubiquitous phenomenon in many guises. *Review of General Psychology*, 1998, vol. 2, pp. 175–220.
5. Petroski H. Framing hypotheses: A cautionary tale. *American Scientist*, 2003, vol. 91, no. 1, pp. 18–22.
6. Sheskin D.J. *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2011.
7. Slovic P. and Fischhoff B. On the psychology of experimental surprises. *Journal of Experimental Psychology: Human Perceptions and Performance*, 1977, vol. 3, pp. 544–551.
8. Smith E.D. and Bahill A.T. Attribute substitution in systems engineering. *Systems Engineering*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 130–148.
9. Wickelgren W.A. *How to Solve Problems: Elements of a Theory of Problems and Problem Solving*. Freeman, San Francisco, 1974.

СКЛОННОСТЬ К ПОДТВЕРЖДЕНИЮ В СИСТЕМНОЙ ИНЖЕНЕРИИ: ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Г. Акоста

докторант, e-mail: gvacosta@miners.utep.edu

Э.Д. Смит

к.т.н., доцент, e-mail: esmith2@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Одним из предубеждений, потенциально влияющих на системных инженеров, является склонность к подтверждению, когда вместо того, чтобы выбрать лучшую гипотезу на основе данных, люди придерживаются ранее выбранной гипотезы до тех пор, пока она не будет опровергнута. В данной работе на простом

примере мы показываем, как важно обращать внимание на это предубеждение — а именно, что из-за этого предубеждения нам нужно в два раза больше экспериментов, чтобы перейти к лучшей гипотезе.

Ключевые слова: склонность к подтверждению, системная инженерия, проверка гипотез.

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета $\text{\LaTeX}$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор $\text{\LaTeX}$, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры и моделирование

№1(53)

Главный редактор

А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор

Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:

А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 25.05.2020. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 17,67. Тираж 60 экз. Заказ № 63.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005

20053 >

