Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 100–103

УДК 517.5
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.100-103

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОСОБЕННОСТЬ ТРЁХМЕРНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА КОШИ

Д.Н. Горелов
д.т.н., профессор, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Доказано существование параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши по замкнутой поверхности. Такая особенность возникает при сближении сторон замкнутой поверхности. Получены формулы, связывающие значения аналога интеграла Коши на разных сторонах предельно узкой поверхности.

Ключевые слова: интеграл Коши, параметрическая особенность интеграла Коши.

В трёхмерной безграничной области D введём декартову систему координат $0xyz$. Рассмотрим трёхмерный аналог интеграла Коши [1] для векторной функции $\mathbf{V}(x, y, z)$:

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}}{r^3}\, dS, \ (x,y,z) \in D. \tag{1}$$

Здесь S — поверхность, $M_s(x_s, y_s, z_s) \in S$, $\mathbf{r} = (x - x_s)\mathbf{x} + (y - y_s)\mathbf{y} + (z - z_s)\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\gamma}(x_s, y_s, z_s)$ — векторная плотность интеграла (рис. 1).

Введём в точке $M_s(x_s, y_s, z_s)$ естественный трёхгранник с ортами $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{b}$ нормали, касательной и бинормали к поверхности S. Представим вектор $\boldsymbol{\gamma}(x_s, y_s, z_s)$ в виде $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_n \mathbf{n} + \gamma_s \mathbf{s} + \gamma_b \mathbf{b}$, полагая $\gamma_n = 0$. В этом случае интеграл (1) определяет поле скорости идеальной несжимаемой жидкости, создаваемое бесконечно тонкой вихревой поверхностью S.

При переходе через поверхность S вектор $\mathbf{V}$ терпит разрыв. Предельные значения вектора $\mathbf{V}$ при подходе к поверхности S со стороны нормали $\mathbf{n}$ ($\mathbf{V}^+$) и с противоположной стороны ($\mathbf{V}^-$) определяются формулами [2]:

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}_0 - \frac{1}{2}\gamma_b \mathbf{s} + \frac{1}{2}\gamma_s \mathbf{b},$$

$$\mathbf{V}^- = \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2}\gamma_b \mathbf{s} - \frac{1}{2}\gamma_s \mathbf{b},$$

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-). \tag{2}$$

Перейдём к исследованию параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши (1). Известна особенность интеграла типа Коши, возникающая при сближении точки интегрирования и заданной точки на контуре

L в комплексной плоскости. На замкнутом контуре может возникнуть другая особенность при сужении контура. В этом случае взаимное влияние двух бесконечно больших множеств точек на разных сторонах контура может привести к существенной трансформации исходного интеграла Коши. В отличие от известной особенности интеграла Коши автор назвал новую особенность параметрической [3]. Роль параметра играет минимальное расстояние между противоположными сторонами замкнутого контура. Естественно ожидать, что такую особенность имеет и трёхмерный аналог интеграла Коши. Докажем существование параметрической особенности интеграла (1) по замкнутой поверхности S. Разделим исходную поверхность S на S_1, S_2, полагая, что для предельно узкой поверхности $S_2 \to S_1$. Обозначим через x_k, y_k, z_k координаты точек на поверхностях $S_k,\ k = 1, 2$, а через $\boldsymbol{\gamma}_k$ — векторную плотность интеграла (1) на S_k.

Представим вектор $\mathbf{V}$ в виде:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}_1(x, y, z) + \mathbf{V}_2(x, y, z),$$

$$\mathbf{V}_k = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_k} \frac{\boldsymbol{\gamma}_k \times \mathbf{r}_k}{r_k^3}\ dS_k, \mathbf{r}_k = (x - x_k)\mathbf{x} + (y - y_k)\mathbf{y} + (z - z_k)\mathbf{z},\ k = 1, 2. \quad (3)$$

Предположим, что поверхность S является предельно узкой. В этом случае можно полагать, что значения функций $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ в точках соседних поверхностей определяются формулами (2). Выберем на поверхностях S_k точки x_k, y_k, z_k, $k = 1, 2$ таким образом, что $x_2, y_2, z_2 \to x_1, y_1, z_1$ при $S_2 \to S_1$. Тогда $\mathbf{s_2} \to -\mathbf{s_1}, \mathbf{b_2} \to \mathbf{b_1}$,

$$\mathbf{V}_2(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{V}_2^-(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_2} \frac{\boldsymbol{\gamma}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}\ dS_2 + \frac{1}{2}\gamma_{2b}\mathbf{s}_2 - \frac{1}{2}\gamma_{2s}\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{V}_1(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{V}_1^-(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1} \frac{\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\ dS_1 + \frac{1}{2}\gamma_{1b}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{2}\gamma_{1s}\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{r}_{k,m} = (x_m - x_k)\mathbf{x} + (y_m - y_k)\mathbf{y} + (z_m - z_k)\mathbf{z},\ k, m = 1, 2. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует, что на разных сторонах предельно узкой замкнутой поверхности трёхмерный аналог интеграла Коши (1) принимает значения:

$$\mathbf{V}(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) + \frac{1}{2}\gamma_{2b}\mathbf{s}_2 - \frac{1}{2}\gamma_{2s}\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{V}(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) + \frac{1}{2}\gamma_{1b}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{2}\gamma_{1s}\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{V}_0(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1} \frac{\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\ dS_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_2} \frac{\boldsymbol{\gamma}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}\ dS_2. \quad (5)$$

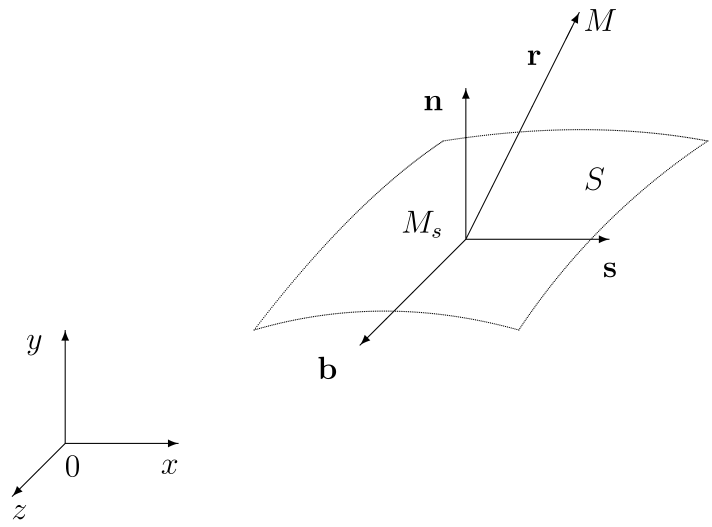

Рис. 1. Поверхность в трёхмерном пространстве

Формулы (5) доказывают существование параметрической особенности трёхмерного аналога интеграла Коши (1) по замкнутой поверхности. Параметрическая особенность проявляется в выравнивании значений интеграла (1) на разных сторонах поверхности S при её сужении. На предельно узкой поверхности эти значения имеют одинаковую интегральную составляющую.

Литература

1. Бицадзе А.В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН. Серия математическая. 1953. № 6. С. 525–538.
2. Горелов Д.Н. Пространственный аналог формул Сохоцкого–Племеля и его применение в теории крыла // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 6. С. 36–42.
3. Горелов Д.Н. Об одной особенности интегральных уравнений с ядром Коши на замкнутом контуре в задачах гидродинамики // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 64–71.

A PARAMETRIC FEATURE OF A THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF THE CAUCHY INTEGRAL

D.N. Gorelov
Dr.Sc. (Eng.), Professor, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Institute of Mathematics S.L. Sobolev SB RAS

Abstract. The existence of a parametric singularity of a three-dimensional analogue of the Cauchy integral over a closed surface is proved. This feature arises when the sides of a closed surface approach each other. Formulas are obtained that relate the values of the analogue of the Cauchy integral on different sides of an extremely narrow surface.

Keywords: Cauchy integral, parametric singularity of the Cauchy integral.

References

1. Bitsadze A.V. Prostranstvennyi analog integrala tipa Koshi i nekotorye ego prilozheniya. Izv. AN., Seriya matematicheskaya, 1953, no. 6, pp. 525–538. (in Russian)
2. Gorelov D.N. Prostranstvennyi analog formul Sokhotskogo–Plemelya i ego primenenie v teorii kryla. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 36–42. (in Russian)
3. Gorelov D.N. Ob odnoi osobennosti integral'nykh uravnenii s yadrom Koshi na zamknutom konture v zadachakh gidrodinamiki. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 64–71. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019