Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 94–99

УДК 517.54
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.94-99

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРАЛА КОШИ ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ

Д.Н. Горелов
д.т.н., профессор, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Проведено исследование параметрической особенности интеграла Коши, возникающей при сближении сторон замкнутого контура. Получены формулы, связывающие значения интеграла Коши на разных сторонах предельно узкого контура.

Ключевые слова: интеграл Коши, формулы Сохоцкого–Племели, параметрическая особенность интеграла Коши.

1. В конце XX века создатели вычислительных технологий столкнулись с загадочным численным феноменом. При аэродинамическом расчёте крыловых профилей было обнаружено, что с уменьшением толщины профилей неудержимо возрастает погрешность расчётов [1]. Для иллюстрации серьёзности обсуждаемой проблемы на рис. 1, 2 приведены результаты аэродинамического расчёта симметричных профилей Жуковского, для которых известны точные решения методом конформных отображений [3]. Точки определяют результаты численного решения интегральных уравнений с ядром Коши первого (1) и второго (2) рода. Сплошная линия соответствует точному решению. Интегральные уравнения решались методом дискретных вихрей. Численное решение задачи обтекания окружности (рис. 1) практически совпадает с точным. Но по мере сужения контура точность расчёта начинает падать. Для 10 % профиля (рис. 2) результаты расчёта оказываются уже практически неприемлемыми. Что является причиной такого численного феномена? Попытки объяснить происходящее сходимостью методов численного решения не увенчались успехом [1]. Нужно было найти другую причину. К поиску её автор возвращался время от времени в течение многих лет.

Было установлено, что рассматриваемый вычислительный феномен вызван параметрической особенностью интегральных уравнений с ядром Коши [3, 4] (этот новый термин введён в работе [3]). Такая особенность возникает при сближении двух бесконечных множеств точек на разных сторонах замкнутого контура. Взаимодействие сближающихся сторон контура приводит к трансформации интегральных уравнений. В предельном случае бесконечно узкого контура интегральные уравнения становятся одинаковыми на сторонах этого контура, что делает невозможным их решение.

Интегральные уравнения с ядром Коши основаны на свойствах интеграла Коши. Поэтому можно ожидать, что интеграл Коши по замкнутому контуру

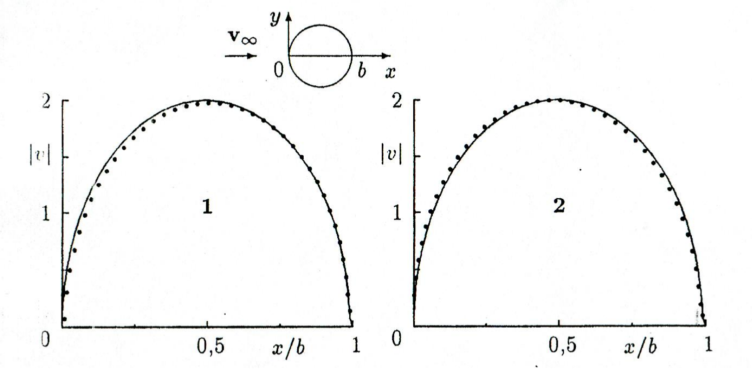

Рис. 1. Расчёт распределения модуля скорости по окружности

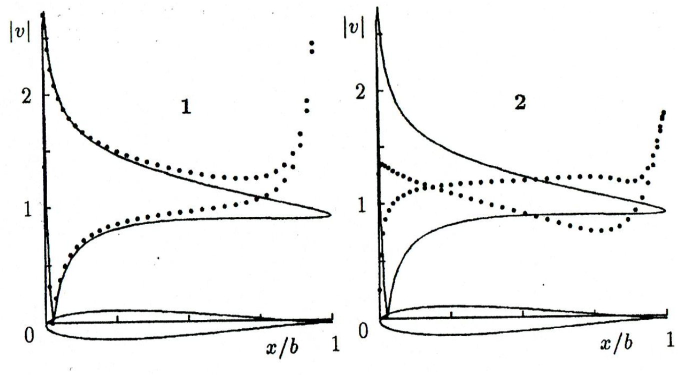

Рис. 2. Расчёт распределения модуля скорости по 10 % профилю Жуковского

имеет параметрическую особенность. Доказательству этого утверждения посвящена настоящая работа.

2. Пусть в комплексной плоскости $z = x + iy$ находится достаточно гладкий замкнутый контур L. Обозначим через D^+, D^- внешнюю и внутреннюю области к контуру L (рис. 3). Рассмотрим интеграл Коши по контуру L, задавая его в виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f\zeta)d\zeta}{z-\zeta}, \ \ \zeta \in L, z \in D^+, D^-. \tag{1}$$

Здесь функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера. Обход контура L совершается против часовой стрелки.

Функция $F(z)$ является аналитической в областях D^+, D^-.

В точках контура интеграл Коши (1) становится интегралом типа Коши $F_0(z)$. По определению

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f\zeta)d\zeta}{z-\zeta}, \ \ \zeta, z \in L. \tag{2}$$

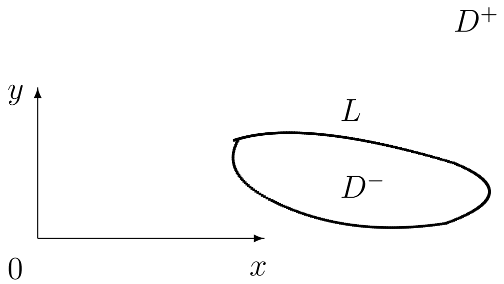

Рис. 3. Замкнутый контур

В точке $z \in L$ интеграл (2) имеет особенность, которая возникает при приближении точки интегрирования ζ к рассматриваемой точке z. Интеграл (2) в точке z понимается в смысле главного значения по Коши.

С интегралом типа Коши в каждой точке контура L связаны три функции: $F_0(z), F^+(z), F^-(z)$. Функция $F_0(z)$ определяет предельное значение интеграла типа Коши при $\zeta \to z$. Функции $F^+(z), F^-(z)$ являются предельными значениями интеграла Коши (1) при подходе к точке $z \in L$ в областях D^+, D^- соответственно.

При переходе через контур L интеграл Коши терпит разрыв. Предельные значения интеграла Коши $F^+(z), F^-(z)$ в точке $z \in L$ на гладком участке контура связаны формулами Сохоцкого–Племели [5]:

$$\begin{aligned} 3F^+(z) &= F_0(z) + \frac{1}{2}\, f(z), \\ F^-(z) &= F_0(z) - \frac{1}{2}\, f(z), \\ F_0(z) &= \frac{1}{2}[F^+(z) + F^-(z)]. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для исследования параметрической особенности интеграла Коши будем рассматривать узкий контур, примеры которого приведены на рис. 4. Под узким контуром понимаем замкнутый контур L, у которого два и более участков находятся в непосредственной близости друг над другом. На рис. 4 такие участки обозначены L_1, L_2.

Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая, когда контур L составлен из двух контуров L_1, L_2. Обозначим через z_1, z_2 комплексные координаты точек на контурах L_1, L_2. Представим формулу (1) в виде:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \ \zeta \in L_k, k = 1, 2, z \in D^+, D^-. \qquad (4)$$

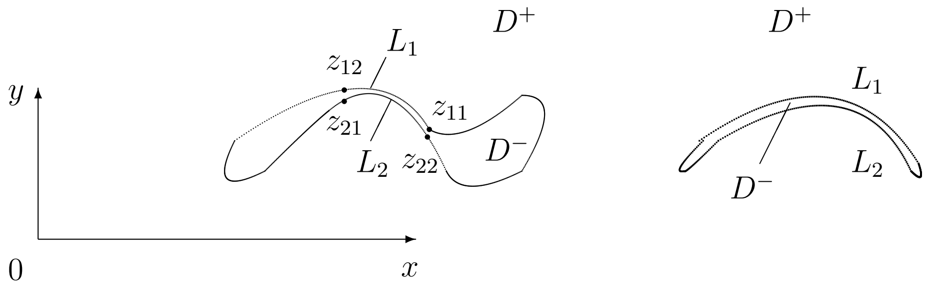

Рис. 4. Примеры узких замкнутых контуров

Из (4) следует, что в точках контура L_k

$$F(z_k) = F_1(z_k) + F_2(z_k). \tag{5}$$

Предположим, что контур L является предельно узким. В этом случае внутренняя область D^- переходит в разрез, берегами которого являются контуры L_1, L_2.

Для рассматриваемого предельно узкого контура формулу (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F(z_1) &= F_{11}(z_1) + F_{21}(z_1), \\ F(z_2) &= F_{12}(z_2) + F_{22}(z_2). \end{aligned} \tag{5}$$

В (5) функции $F_{11}(z_1), F_{22}(z_2)$ представляют собой интегралы типа Коши на контурах L_1, L_2, а $F_{12}(z_2), F_{21}(z_1)$ являются предельными значениями интегралов Коши на тех же контурах при подходе к ним из области D^-.

Выберем на контурах L_k точки $z_k, k = 1, 2$ таким образом, что $z_2 \to z_1$ при $L_2 \to L_1$.

Тогда, с учётом формул Сохоцкого–Племели (3), выражения (5) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} F_{11}(z_1) = F_{01}(z_1), F_{22}(z_2) = F_{02}(z_2), \\ F_{21}(z_1) = F_2^-(z_2) = F_{02}(z_2) - \frac{1}{2}\, f(z_2), \\ F_{12}(z_2) = F_1^-(z_1) = F_{01}(z_1) - \frac{1}{2}\, f(z_1), \\ F_{0k}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{f\zeta)d\zeta}{z_k - \zeta}, \ \ \zeta, z_k \in L_k, k = 1, 2; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} F(z_1) = F_{11}(z_1) + F_{21}(z_1) = F_0(z_1, z_2) - \frac{1}{2}\, f(z_2), \\ F(z_2) = F_{12}(z_2) + F_{22}(z_2) = F_0(z_1, z_2) - \frac{1}{2}\, f(z_1), \\ F_0(z_1, z_2) = F_{01}(z_1) + F_{02}(z_2). \end{gathered} \tag{7}$$

Соотношения (6), (7) доказывают существование параметрической особенности интеграла Коши по замкнутому контуру. Эта особенность проявляется в трансформации интеграла Коши по мере сужения замкнутого контура. По своей структуре соотношения (7) аналогичны формулам Сохоцкого–Племели (3). Но соотношения (7) получены для значений интеграла Коши на сторонах предельно узкого замкнутого контура, тогда как формулы (3) определяют предельные значения интеграла Коши при подходе к контуру. Параметрическая особенность интеграла Коши позволила понять специфику решения краевых задач теории крыла методом интегральных уравнений [3] .

Литература

1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М. : Наука, 1988. 232 с.
2. Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.
3. Горелов Д.Н. Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН, МЖГ, 1992. № 4. С. 173–177.
4. Горелов Д.Н. Об одной особенности сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на замкнутом контуре в задачах гидродинамики // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 64–71.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.–Л. : Гостехиздат, 1951. 619 с.

ON A SINGULARITY OF THE CAUCHY INTEGRAL OVER A CLOSED CONTOUR

D.N. Gorelov
Dr.Sc. (Eng.), Professor, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Institute of Mathematics S.L. Sobolev SB RAS

Abstract. A study is made of the parametric singularity of the Cauchy integral that arises when the sides of a closed loop come together. Formulas are obtained that relate the values of the Cauchy integral on different sides of an extremely narrow contour.

Keywords: Cauchy integral, Sokhotsky-Plemel formulas, parametric singularity of the Cauchy integral.

References

1. Belotserkovskii S.M., Kotovskii V.N., Nisht M.I., and Fedorov R.M. Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallel'nogo otryvnogo obtekaniya tel, Moscow, Nauka Publ., 1988, 232 p. (in Russian)
2. Gorelov D.N. Metody resheniya ploskikh kraevykh zadach teorii kryla. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2000, 215 p. (in Russian)
3. Gorelov D.N. Ob integral'nykh uravneniyakh zadachi obtekaniya profilya. Izv. RAN, MZhG, 1992, no. 4, pp. 173–177. (in Russian)
4. Gorelov D.N. Ob odnoi osobennosti singulyarnykh integral'nykh uravnenii s yadrom Koshi na zamknutom konture v zadachakh gidrodinamiki. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 64–71. (in Russian)
5. Lavrent'ev M.A. and Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1951, 619 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 06.12.2019