Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 7–13

УДК 517.984
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.7-13

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ II. УСТОЙЧИВОСТЬ СПЕКТРОВ

В.А. Еровенко
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: erovenko@bsu.by

Белорусский государственный университет,

Минск, Республика Беларусь

Аннотация. В настоящей работе получены точные формулы для нахождения существенных спектров, возмущённых с асимптотически постоянными на бесконечности коэффициентами с использованием относительно компактных и относительно малых возмущений на бесконечности в лебеговых пространствах L^p. Эти формулы можно интерпретировать как новые аналоги классической теоремы Вейля.

Ключевые слова: теория возмущений операторов, существенные спектры, обыкновенные дифференциальные операторы.

1. Основная часть

Пусть T — замкнутый линейный оператор на комплексном банаховом пространстве X. Существенные спектры оператора T можно определить как дополнения в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ множеств, задаваемых различными фредгольмовыми свойствами семейства операторов $T - \lambda I$:

$$\sigma_{ek}(T) := \mathbf{C} \setminus \Delta_k(T), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$\sigma_{e2}^{+}(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^{+}(T) \qquad \sigma_{e2}^{-}(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^{-}(T),$$

где $\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\}$, $\Phi^{+}(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : nul(T - \lambda I) < \infty\}$, $\Phi^{-}(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : def(T - \lambda I) < \infty\}$, $\Delta_2(T) := \Phi^{+}(T) \cup \Phi^{-}(T) = s{-}\Phi(T)$, $\Delta_3(T) := \Phi^{+}(T) \cap \Phi^{-}(T) = \Phi(T)$, $\Delta_4(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T) : ind(T - \lambda I) = 0\} = \Phi_0(T)$, $\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_4(T) :$ проколотая окрестность точки λ лежит в резольвентном множестве оператора T, $\rho(T)\}$.

Каждое из множеств $\sigma_{ek}(T), k = \overline{1,5}$, и $\sigma_{e2}^{\pm}(T)$ называется *существенным спектром*, ясно, что $\sigma_{ek}(T) \subseteq \sigma_{el}(T)$ для $k \leqslant l$ и $\sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e2}^{\pm}(T) \subseteq \sigma_{e3}(T)$, причём указанные включения могут быть собственными [1].

Функциональные пространства для конкретных дифференциальных уравнений, в которых действуют операторы, соответствующие этим уравнениям, условиями задачи, как правило, однозначно не определяются. Поэтому при исследовании задачи в общей постановке целесообразно оператор рассматривать в различных пространствах. Среди работ по теории L^p-спектров дифференциальных операторов отметим только пионерские работы по существенным спектрам. В работе Рота [2] исследован спектр σ_{e1} для обыкновенных дифференциальных операторов в L^p-пространствах. В работе Балслева и Гамелина [3] рассмотрен спектр σ_{e3} некоторых классов обыкновенных дифференциальных операторов в пространствах $L^p, 1 < p < \infty$, и их возмущений, а обобщению этих результатов для спектра σ_{e1} в $L^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, посвящена глава VI монографии Голдберга [4].

Точные формулы для нахождения всех определённых выше существенных спектров возмущённых дифференциальных операторов с асимптотически постоянными на бесконечности коэффициентами, полученные в [5] с использованием техники относительно компактных возмущений в L^p, $1 \leqslant p < \infty$, обобщаются в настоящей работе на возмущающие дифференциальные «добавки» более общего вида, рассматриваемые как относительно малые возмущения на бесконечности в сочетании с теоремой о расщеплении существенных спектров дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами. Основы метода расщепления для самосопряжённых операторов предложенного И.М. Глазманом изложены в его монографии [6]. В следующей теореме идея метода расщепления обобщается на несамосопряжённые дифференциальные операторы в пространствах L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Рассмотрим формальную дифференциальную операцию вида

$$\mu \ = \ \tau + \nu, \ \tau = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k, \ \nu = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t) D^k, \tag{1}$$

где a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, — постоянные комплексные коэффициенты, а $b_k(t), 0 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant n-1$, — комплекснозначные функции такие, что $b_k \in C^k(a,\infty)$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $b_k(t)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, в дифференциальной операции μ (1) удовлетворяют интегральным условиям*

$$\sup_{m \leqslant s < \infty} \int_s^{s+1} \mid b_k(t) \mid^p dt \ \to \ 0 \ \ \text{при} \ \ m \to \infty, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{2}$$

Тогда для существенных спектров минимального $T_0(\mu, p, [a,\infty))$, максимального $T(\mu, p, [a,\infty))$ операторов и оператора $S(\mu, p, [a,\infty))$, порождённых дифференциальной операцией μ (1) в банаховых пространствах $L^p(a,\infty)$, $-\infty < a < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, справедливы равенства, являющиеся обобщением теоремы Вейля, следующего вида:

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a,\infty))] \ = \ \sigma_{ek}[T_0(\tau, p, [a,\infty))], \ k = \overline{1,4}, 2^{\pm}$$

$$\sigma_{ek}[T(\mu, p, [a,\infty))] \ = \ \sigma_{ek}[T(\tau, p, [a,\infty))], \ k = \overline{1,4}, 2^{\pm}.$$

Доказательство. Обозначим через $T(\mu) := T(\mu, p, [a,\infty))$,
$T_0(\mu) := T_0(\mu, p, [a,\infty))$, а через $T(\tau+\nu)$, $T_0(\tau+\nu)$, $T(\tau)$, $T_0(\tau)$, $B(\nu)$, $B_0(\nu)$ операторы, определённые в доказательстве теоремы 2 из статьи [1].

Заметим, что неравенство (12) из работы [1] для норм производных выполняется и для дифференциальной операции $\tau - \lambda, \lambda \in \mathbf{C}$. Поэтому для функций $f \in D(T(\tau)) = D(T(\tau + \nu))$ в соответствующих лебеговых пространствах $L^p(a,\infty), 1 \leqslant p < \infty$, из неравенств (13) и (14), полученных в работе [1], следует, что найдётся такое $a \in (0,\infty)$ и, в силу условий (2) на коэффициенты b_k, такое достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(a), 0 < \varepsilon < 1$, для которых справедливы неравенства вида

$$\parallel \nu f \parallel_p \leqslant \varepsilon\big(\parallel (\tau - \lambda) f \parallel_p + \parallel f \parallel_p\big), \quad \parallel \nu f \parallel_p \leqslant \varepsilon\big(\parallel (\tau + \nu - \lambda) f \parallel_p + \parallel f \parallel_p\big).$$

Из этих оценок, а также следующих равенств для максимальных операторов $T(\tau+\nu) - \lambda I = (T(\tau) - \lambda I) + B(\nu)$ (см. формулу (8) из [1]) и $T(\tau) - \lambda I = (T(\tau) + B(\nu) - \lambda I) - B(\nu) = (T(\tau+\nu) - \lambda I) - B(\nu)$ вытекает, что оператор $T(\tau+\nu) - \lambda I$ можно рассматривать как относительно малое возмущение оператора $T(\tau) - \lambda I$, а оператор $T(\tau) - \lambda I$ — как относительно малое возмущение оператора $T(\tau+\nu) - \lambda I$. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса замкнутых полуфредгольмовых операторов при относительно малых возмущениях следует, что $\lambda \in \Phi^+(T(\tau))$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Phi^+(T(\tau) + B(\nu))$, и для индексов операторов выполняется равенство $ind(T(\tau) - \lambda I) = ind(T(\tau) + B(\nu) - \lambda I) = ind(T(\tau+\nu) - \lambda I)$. Поэтому для существенных спектров максимального оператора $T(\tau+\nu)$ справедливы равенства:

$$\sigma_{ek}[T(\tau+\nu)] \;=\; \sigma_{ek}[T(\tau)],\; k = \overline{1,4}, \quad \sigma^{\pm}_{e2}[T(\tau+\nu)] \;=\; \sigma^{\pm}_{e2}[T(\tau)]. \tag{3}$$

Аналогичными рассуждениями, пользуясь равенством (9) из [1], для минимальных операторов $T_0(\tau)$ и $B_0(\nu)$ можно показать, что для существенных спектров минимального оператора $T_0(\tau+\nu)$ выполняются соответствующие равенства

$$\sigma_{ek}[T_0(\tau+\nu)] \;=\; \sigma_{ek}[T_0(\tau)],\; k = \overline{1,4}, \quad \sigma^{\pm}_{e2}[T_0(\tau+\nu)] \;=\; \sigma^{\pm}_{e2}[T_0(\tau)]. \tag{4}$$

Теорема доказана. ■

Обозначим через $S(\mu, p, [a,\infty))$ замкнутый дифференциальный оператор, являющийся расширением минимального и сужением максимального операторов, порождённых дифференциальной операцией μ (1).

Следствие 1. *Существенные спектры дифференциальных операторов, порождённых операцией* μ(15)*, можно вычислить по формулам:*

$$\sigma_{ek}[S(\mu,p,[a,\infty))] = \sigma^{\pm}_{e2}[S(\mu,p,[a,\infty))] = \{P(\lambda):\; Re\lambda = 0\},\; k = \overline{1,3},$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu,p,[a,\infty))] = \sigma[T_0(\mu,p,[a,\infty))] = \{P(\lambda):\; Re\lambda \geqslant 0\},\; k = 4,5,$$

$$\sigma_{ek}[T(\mu,p,[a,\infty))] = \sigma[T(\mu,p,[a,\infty))] = \{P(\lambda):\; Re\lambda \leqslant 0\},\; k = 4,5,$$

где P *— соответствующий дифференциальной операции с постоянными коэффициентами* τ *полином*

$$P(t) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Заметим, что в теореме 2 из работы [8] получены точные формулы для нахождения всех существенных спектров максимальных и минимальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Поэтому из равенств (3), (4) следуют соответствующие утверждения в случае формальной дифференциальной операцией $\mu = \tau + \nu$ (1) для существенных спектров $\sigma_{ek}, k = \overline{1,5}$ и $\sigma_{e2}^{\pm}$ минимального $T_0(\mu)$ и максимального $T(\mu)$ возмущённых дифференциальных операторов в лебеговых пространствах $L^p(a,\infty)$ при достаточно большом a. Оставшиеся равенства для промежуточных дифференциальных операторов $S(\mu, p, [a,\infty)$ вытекают из теоремы 1 работы [7]. Наконец, из теоремы 1 статьи [1] следует справедливость полученных формул всех существенных спектров рассмотренных дифференциальных операторов в лебеговых пространствах $L^p(a,\infty), 1 \leqslant p < \infty$, для любого $a \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим дифференциальную операцию μ более общего вида как возмущение дифференциальной операции с постоянными коэффициентами дифференциальной операцией с переменными коэффициентами такого же порядка, т. е.

$$\mu \;=\; \tau + \nu,\; \tau = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k,\; \nu = \sum_{k=0}^{n} b_k(t) D^k, \tag{5}$$

где $a_k,\; 0 \leqslant k \leqslant n,$ — постоянные комплексные коэффициенты, а $b_k(t), 0 \leqslant k \leqslant n,$ — комплекснозначные функции такие, что $b_k \in C^k(a,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов дифференциальной операции μ (5) выполняются условия $b_n, 1/(a_n + b_n) \in L^\infty$ и коэффициенты $b_k(t),\; k = \overline{0,n}$, удовлетворяют условиям (2). Тогда для минимального $T_0(\mu, p, [a,\infty))$, максимального $T(\mu, p, [a,\infty))$ и промежуточного $S(\mu, p, [a,\infty))$ дифференциальных операторов, порождённых в $L^p(a,\infty),\; -\infty < a < \infty,\; 1 \leqslant p < \infty$, дифференциальной операцией μ (5) справедливо следующее обобщение теоремы Вейля:*

$$\sigma_{ek}[S(\mu, p, [a,\infty))] \;=\; \sigma_{ek}[S(\tau, p, [a,\infty))],\; k = 1, 2, 2^{\pm}, 3,$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a,\infty))] \;=\; \sigma_{ek}[T_0(\tau, p, [a,\infty))],$$

$$\sigma_{ek}[T(\mu, p, [a,\infty))] \;=\; \sigma_{ek}[T(\tau, p, [a,\infty))],\; k = 4, 5.$$

Доказательство. Поскольку теорема 2 из работы [1] об относительно малых возмущениях дифференциального оператора в общем виде справедлива для дифференциальной операции τ (1) с переменными коэффициентами, то в виду условий (2) стабилизируемости на бесконечности для коэффициентов $b_k(t),\; 0 \leqslant k \leqslant n$, для доказательства теоремы достаточно исследовать частный случай дифференциальной операции μ (5) для $b_k(t) = 0,\; 0 \leqslant k \leqslant n-1$, вида

$$\mu \;=\; \tau \;+\; b_n(t) D^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \;+\; b_n(t) D^n. \tag{6}$$

Запишем для дифференциальной операции $\mu - \lambda$, где μ определено по формуле (6), представление в виде

$$\mu - \lambda \;=\; \Big(1 + \frac{b_n(t)}{a_n}\Big)(\tau - \lambda) \;- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n(t)}{a_n} a_k D^k \;+\; \frac{b_n(t)}{a_n}\lambda.$$

В силу условия (2) на коэффициент $b_n(t)$ максимальный $T(\mu) - \lambda I$ и минимальный $T_0(\mu) - \lambda I$ дифференциальные операторы, порождённые μ (6), можно рассматривать как относительно малые возмущения максимального и минимального дифференциальных операторов, порождённых дифференциальной операцией $(1 + (b_n/a_n))(\tau - \lambda)$ в банаховом пространстве $L^p(a, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, для подходящего достаточно большого a соответствующими дифференциальными операторами, порождёнными дифференциальной операцией $\eta \;:=\; -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n(t)}{a_n} a_k D^k \;+\; \frac{b_n(t)}{a_n}\lambda$.

Оператор, задаваемый умножением на функцию $0 < 1 + (b_n(t)/a_n) < \infty$, обратим, и, следовательно, существенные спектры и спектр максимального $T(\mu)$ и минимального $T_0(\mu)$ операторов, порождённых операцией μ (6), совпадают с существенными спектрами и спектром максимального $T(\tau)$ и минимального $T_0(\tau)$ дифференциальных операторов, порождённых дифференциальной операцией τ с постоянными коэффициентами. Пользуясь теоремой 1 из [1], теоремой об устойчивости индекса полуфредгольмовых операторов, теоремой 1 из [7] и теоремой 2 из [8] и повторяя рассуждения для относительно малого на бесконечности возмущения, проведённые выше для операции ν (1), получим утверждение теоремы для дифференциальной операции μ, определённой по формуле (6). Теорема доказана. ∎

Следствие 2. *При условиях теоремы 2 для существенных спектров дифференциальных операторов, задаваемых операцией μ (5), справедливы формулы из следствия 1.*

Замечание. *При дополнительных условиях типа (2) на производные коэффициентов $b_k(t)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, порядка $1 \leqslant i \leqslant k$ в пространстве L^1 можно доказать справедливость формул из следствия 1 для нахождения существенных спектров дифференциальных операторов, рассмотренных в теореме 2, в пространстве $L^\infty(a, \infty)$, $a \in (-\infty, \infty)$.*

Теоремы 1 и 2 обобщают результаты работ [3, 4] для существенных спектров Фредгольма и Голдберга максимальных операторов в пространстве $L^p(0, \infty)$ для $1 < p < \infty$ и результаты работы [9] для различных существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Отметим также работы [10, 11] по локализации существенного спектра самосопряжённых дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

Литература

1. Еровенко В.А. Существенные спектры обыкновенных дифференциальных операторов I. Возмущение операторов // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1. С. 30–37.
2. Rota G.C. Extension theory of differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, No. 1. P. 23–65.
3. Balslev E., Gamelin T.W. The essential spectrum of a class of ordinary differential operators // Pacific J. Math. 1964. Vol. 14, No. 3. P. 755–776.
4. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y. : McGraw-Hill, 1966.
5. Еровенко В.А. Применение абстрактной теории возмущений к исследованию существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов в L^p // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 7. С. 867–875.
6. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М. : Физматгиз, 1963.
7. Еровенко В.А. О L^p–существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов I. Операторы с достаточно гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1024–1034.
8. Еровенко В.А. О L^p–существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов II. Операторы с постоянными коэффициентами и операторы Эйлера // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1162–1170.
9. Evans W.D., Lewis R.T., Zettl A. Non-self-adjoint operators and their essential spectra // Lect. Notes Math. 1983. No. 32. P. 123–160.
10. Race D. On the essential spectra of linear 2nth order differential operators with complex coefficients // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. Vol. 92A, No. 1. P. 65–75.
11. Müller-Rfeiffer E. Spectral theory of ordinary differential operators. N.Y. : John Wiley & Sons, 1981.

ESSENTIAL SPECTRA OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS II. STABILITY OF SPECTRA

V.A. Erovenko

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: erovenko@bsu.by

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Abstract. The article contains precise formulas for finding of the essential spectra that are revolted with asymptotically constants on infinity in coefficients with use of rather compact and rather small indignations on infinity in Lebesgue spaces of L^p. These formulas are new analogs of the classical theorem of Weyl.

Keywords: perturbation theory of operators, essential spectra, ordinary differential operators.

References

1. Erovenko V.A. Sushchestvennye spektry obyknovennykh differentsial'nykh operatorov I. Vozmushchenie operatorov. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 1, pp. 30–37. (in Russian)
2. Rota G.C. Extension theory of differential operators. Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, no. 1, pp. 23–65.
3. Balslev E. and Gamelin T.W. The essential spectrum of a class of ordinary differential operators. Pacific J. Math., 1964, vol. 14, no. 3, pp. 755–776.
4. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y., McGraw-Hill Publ., 1966.
5. Erovenko V.A. Primenenie abstraktnoi teorii vozmushchenii k issledovaniyu sushchestvennykh spektrov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov v L^p. Differents. uravneniya, 1997, vol. 33, no. 7, pp. 867–875. (in Russian)
6. Glazman I.M. Pryamye metody kachestvennogo spektral'nogo analiza singulyarnykh differentsial'nykh operatorov. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. (in Russian)
7. Erovenko V.A. O L^p–sushchestvennykh spektrakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov I. Operatory s dostatochno gladkimi koeffitsientami. Differents. uravneniya, 1996, vol. 32, no. 8, pp. 1024–1034. (in Russian)
8. Erovenko V.A. O L^p–sushchestvennykh spektrakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov II. Operatory s postoyannymi koeffitsientami i operatory Eilera. Differents. uravneniya, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1162–1170. (in Russian)
9. Evans W.D., Lewis R.T., and Zettl A. Non-self-adjoint operators and their essential spectra, Lect. Notes Math., 1983, no. 32, pp. 123–160.
10. Race D. On the essential spectra of linear 2nth order differential operators with complex coefficients. Proc. Roy. Soc., Edinburgh, 1982, vol. 92A, no. 1. pp. 65–75.
11. Müller-Rfeiffer E. Spectral theory of ordinary differential operators. N.Y., John Wiley & Sons, 1981.

Дата поступления в редакцию: 25.11.2019