*Математические структуры и моделирование*
*2020. № 1(53). С. 25–36*

УДК 512.81 + 514.12
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.25-36

# АВТОИЗОМЕТРИИ И АВТОПОДОБИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$

**М.Н. Подоксенов**
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
**В.В. Черных**
студентка, e-mail: chernykh_valeriya@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,

Витебск, Республика Беларусь

**Аннотация.** Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$, снабжённая лоренцевым скалярным произведением. Находятся все однопараметрические группы изометрий и подобий, являющиеся одновременно автоморфизмами алгебры Ли, а также условия существования таких однопараметрических групп. Условия существования связаны с расположением идеалов алгебры Ли относительно конуса изотропных векторов.

**Ключевые слова:** алгебра Ли, лоренцева метрика, автоморфизм, подобие, изометрия.

## 1. Постановка задачи

Линейное преобразование алгебры Ли $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[FX, FY] = F[X, Y]\ \forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Преобразование $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется подобием с коэффициентом $e^{\mu}$, если $\langle FX, FY \rangle = e^{2\mu}\langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование $F$ называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием или гомотетическим автоморфизмом. Преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, будем называть автоизометрией.

Риманово или лоренцево многообразие $(M, g)$ называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть рассматриваемое многообразие $G$ представляет односвязную экспоненциальную группу Ли, и пусть $\mathcal{G}$ — соответствующая ей алгебра Ли. Тогда задача поиска левоинвариантных лоренцевых метрик на группе Ли $G$, при которых она является самоподобным многообразием, сводится к следующей задаче: необходимо найти все однопараметрические группы автоподобий $F(t) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (см. [1]).

В работе [2] были найдены все способы задания лоренцева скалярного произведения на четырёхмерной алгебре Ли $\mathcal{H}\int \oplus \mathcal{R}$, при которых эта алгебра

Ли допускает однопараметрическую группу автоподобий или автоизометрий. Цель данной работы: найти все автоподобия и автоизометрии четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$, относящейся к VI типу Бианки (подтип $\text{VI}_1$), при условии задания на ней лоренцева скалярного произведения. Для случая евклидова скалярного произведения эта задача решена в работе [3].

Задача нахождения однопараметрических групп автоизометрий рассматриваемой алгебры Ли и условий на скалярное произведение, при выполнении которых такие группы существуют, представляет интерес по следующей причине. Её решение позволит в дальнейшем выяснить размерность группы движений однородного лоренцева многообразия соответствующей связной группы Ли.

## 2. Основные результаты

В подходящем базисе $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ задаются одним равенством: $[E_1, E_2] = E_2$. Будем называть такой базис каноническим. Эта алгебра Ли содержит трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, являющийся линейной оболочкой векторов $E_2, E_3, E_4$, а также двумерный центр $\mathcal{Z}$, являющийся линейной оболочкой векторов $E_3, E_4$. Одномерное подпространство $\mathbf{R}E_2$ является производной алгеброй Ли: $\mathbf{R}E_2 = \mathcal{G}_4^{(2)} = [\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$.

Все указанные выше векторные подпространства должны быть инвариантными относительно автоморфизмов алгебры Ли. Поэтому любой автоморфизм алгебры Ли $F : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ в каноническом базисе задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \varepsilon & \mu \\ \delta & 0 & \lambda & \nu \end{pmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$, $\begin{vmatrix} \varepsilon & \mu \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} \neq 0$, а все остальные коэффициенты могут принимать любые значения. Итак, полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ восьмимерная.

В дальнейшем обозначаем $E_i' = F(E_i), i = 1, 2, 3, 4$, где $F : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ — преобразование алгебры Ли $\mathcal{G}_4$; скалярное произведение будем называть метрикой и обозначать $X \cdot Y$, а обозначение $\langle X, Y \rangle$ будем использовать для линейной оболочки векторов $X, Y$. Вектор, скалярный квадрат которого равен 1 или $-1$, будем называть единичным.

В следующей теореме сигнатура характеризует метрику, которая индуцируется на указанном идеале, матрица Грама и матрица группы преобразований указаны в каноническом базисе; во всех случаях $\varepsilon > 0, \nu \neq 0, \mu \neq 0$ и $t \in R$. Например, запись $E_2 : (+)$ означает, что вектор $E_2$ является пространственноподобным, а запись $E_2 : (0)$ означает, что вектор $E_2$ является изотропным. Если для группы автоподобий положить $\mu = 0$, то получим группу автоизометрий.

**Теорема 1.** *Пусть на алгебре Ли* $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* $(+,+,+,-)$. *Тогда эта алгебра Ли допускает однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий только в следующих случаях, указанных в таблицах 1 и 2.*

Таблица 1. Автоизометрии

| Условие | Матрица Грама | Матрица, задающая однопараметрическую группу преобразований |
|---|---|---|
| $\mathcal{L}:(+,+,+)$, $E_2 \in Z^{\perp}$ | $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L}:(+,+,-)$, $E_2:\ (-)$, $E_2 \in Z^{\perp}$ | $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L}:(+,+,-)$, $E_2:(+)$, $E_2 \in Z^{\perp}$ | $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L}:(+,+,-)$, $\mathcal{Z}:(+,+)$, $E_2:(0)$ | $\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_4(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

Для доказательства теоремы нам понадобится одна лемма. Пусть $L$ — трёхмерное пространство, на котором заданы евклидова, лоренцева или вырожденная метрики сигнатуры $(+,+,0)$, $H$ — его двумерное подпространство, на котором индуцируется невырожденная метрика. Тогда, как показано в [3], в $L$ можно выбрать базис $(E_1, E_2, E_3)$, состоящий из единичных векторов, такой что $E_1 \notin H, E_1 \notin H^{\perp}, E_3 \in H, E_3 \cdot E_1 = E_3 \cdot E_2 = 0$, при этом $E_2$ сонаправлен ортогональной проекции вектора $E_1$ на двумерное подпространство $H$. Важно отметить, что такой базис можно выбрать даже в случае, когда метрика является вырожденной. Там же доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть линейное преобразование* $F: L \to L$ *сохраняет скалярное произведение. Если вектор* $E_1$ *является собственным вектором этого преобразования, а подпространство* $H$ *инвариантно относительно этого* *преобразования, то $F$ действует по формулам:*

$$F(E_1) = \theta E_1, F(E_2) = \theta E_2, F(E_3) = \pm E_3, \theta = \pm 1.$$

Таблица 2. Автоподобия

| Условие | Матрица Грама | Матрица, задающая однопараметрическую группу преобразований |
|---|---|---|
| $\mathcal{L} : (+,+,0)$, $\mathcal{Z} : (+,0)$, $E_2 : (+)$ $E_2 \in Z^{\perp}$ | $\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_5(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L} : (+,+,0)$, $\mathcal{Z} : (+,0)$, $E_2 : (+)$ $E_2 \in Z^{\perp}$ | $\Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_6(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 0 & 1 & t \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L} : (+,+,0)$, $\mathcal{Z} : (+,0)$, $E_2 : (+)$ $E_2 \notin Z^{\perp}$ | $\Gamma_7 =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ | $F_7(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 0 & 1 & t \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\mathcal{L} : (+,+,0)$, $\mathcal{Z} : (+,+)$, $E_2 : (0)$ | $\Gamma_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $F_8(t) =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t}\cos t & -e^{\mu t}\sin t \\ 0 & 0 & e^{\mu t}\sin t & e^{\mu t}\cos t \end{pmatrix}$ |

**Замечание 1.** Матрица Грама выбранного базиса имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & 0 \\ g_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если скалярное произведение является вырожденным, то её определитель должен быть равен нулю. Следовательно, $g_{12} = \pm 1$. Изменив, при необходимости, направление одного из векторов $E_1$ или $E_2$, получим $g_{12} = 1$. Тогда вектор $E_1 - E_2$ является изотропным. Для пространства с невырожденной метрикой $g_{12}$ может быть произвольным, отличным от $\pm 1$.

Лемма верна и в случае, когда вектор $E_1$ является изотропным, только в матрице Грама будет $g_{11} = 0$.

Необходимо отметить некоторые свойства трёхмерного пространства $L$ с вырожденной метрикой. Пусть метрика имеет сигнатуру $(+, +, 0)$, и относительно базиса $(E_1, E_2, E_3)$ скалярное произведение векторов $X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3)$ задаётся формулой $X \cdot Y = x_2y_2 + x_3y_3$. Если двумерное подпространство $P$ не содержит вектор $E_1$, то на нём индуцируется положительно определённая метрика и $P^\perp = \mathbf{R}E_1$. Если двумерное подпространство $P$ содержит вектор $E_1$, то на нём индуцируется вырожденная метрика и $P^\perp$ есть двумерное подпространство, которое тоже содержит $E_1$.

## 3. Доказательство теоремы

*Доказательство.* Рассмотрим несколько случаев расположения идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ относительно конуса изотропных векторов. Идеалы $\mathcal{L}, \mathcal{Z}, \mathbf{R}E_2 = \mathcal{G}_4^{(2)}$ должны быть инвариантны относительно любого автоподобия или автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{G}_4$. Согласно лемме автоизометрии сводятся только к симметриям, в тех случаях, когда $E_2$ не ортогонален $\mathcal{Z}$ и при этом на $\mathcal{Z}$ индуцируется невырожденная метрика. Поэтому мы такие случаи из рассмотрения исключаем. Базис, который мы выбираем, всегда предполагается каноническим, если не оговорено противное.

**Случай 1.** На идеале $L$ индуцируется положительно определённое скалярное произведение. Мы можем выбрать базис так, что $E_1 \perp \mathcal{L}, E_2^2 = 1$ (см. рис. 1 а)). Любое автоподобие $F : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ должно оставлять инвариантным идеал $\mathcal{L}$. Поэтому сохраняет направление вектора $E_1$, а, значит, выполнено $E_1' = E_1$. Поэтому автоподобий при таком способе задания метрики быть не может.

Пусть $E_2 \perp \mathcal{Z}$. Тогда можем дополнить $E_2$ до ортонормированного базиса $(E_2, E_3, E_4)$ в $\mathcal{L}$. Тогда матрица Грама базиса $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ имеет вид $\Gamma_1$ (см. табл. 1), а алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ допускает автоизометрии, действие которых задаётся с помощью одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$t \in R$. Однопараметрическую группу образуют только изометрии, действие которых описывается матрицей (1) со знаком «+» во второй строке, т. е. матрицей $F_1(t)$ (см. табл. 1).

**Случай 2.** На идеале $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределённое скалярное произведение. Мы можем выбрать канонический базис так, что $E_1 \perp \mathcal{L}$. Так же, как и в случае 1, для любого автоподобия выполнено $E_1' = E_1$.

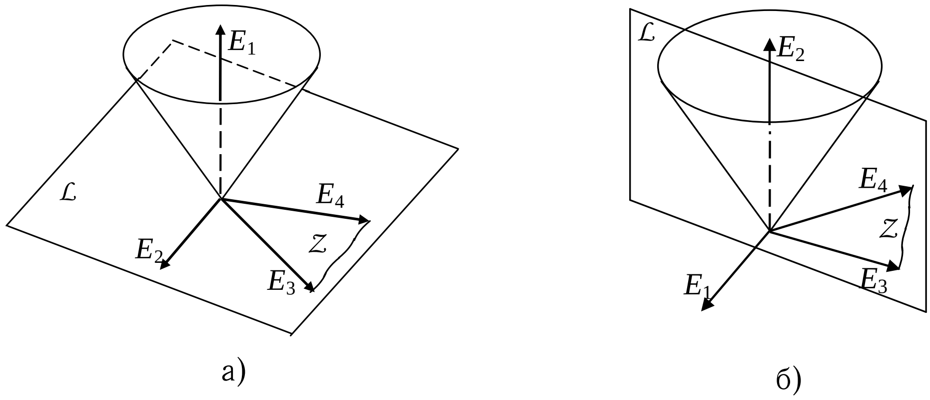



Рис. 1. Расположение базисных векторов

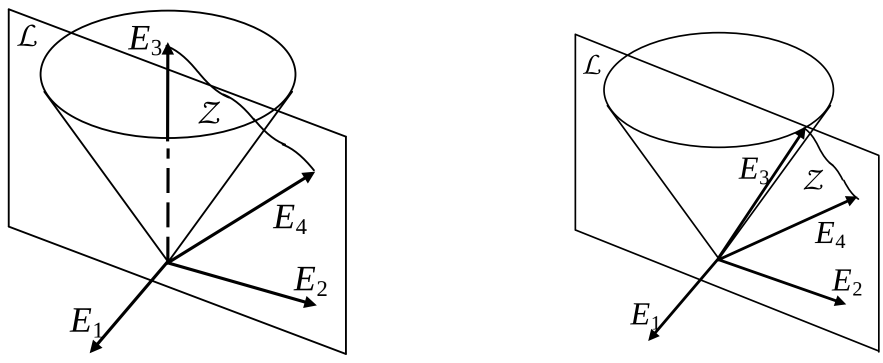
**2.1.** Пусть вектор $E_2$ времениподобный и $E_2 \perp \mathcal{Z}$ (см. рис. 1 б)). Точно также, как и в случае 1, алгебра Ли допускает автоизометрии, действие которых описывается с помощью одной из матриц (1) или (2). Однопараметрическую группу образуют только изометрии, действие которых описывается матрицей (1) со знаком «+» во второй строке. Это значит, мы имеем матрицу $F_2(t)$; матрица Грама имеет вид $\Gamma_2$ (см. табл. 1).

**2.2.** Пусть вектор $E_2$ пространственноподобный и $E_2 \perp \mathcal{Z}$ (см. рис. 2 а)). Точно также, как и в случае 1, алгебра Ли допускает только автоизометрии, действие которых описывается с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \operatorname{ch} t & \tau \operatorname{sh} t \\ 0 & 0 & \theta \operatorname{sh} t & \tau \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \theta = \pm 1, \tau = \pm 1, t \in R.$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования при $\theta = \tau = 1$. Таким образом, мы имеем матрицу $F_3(t)$; матрица Грама имеет вид $\Gamma_3$ (см. табл. 1).

**2.3.** Пусть вектор $E_2$ не изотропный, и на $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденная метрика (см. рис. 2 б)). Тогда в $\mathcal{Z}$ существует единственное изотропное направление, которое равно $\mathcal{Z}^{\perp} \cap \mathcal{L}$. Поэтому $E_2 \notin \mathcal{Z}^{\perp}$. Выберем $E_3$ принадлежащим этому направлению, а $E_4 \perp E_2$, причём можем сделать $E_4$ и $E_2$ единичными.




а) б)

Рис. 2. Расположение базисных векторов

Матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $g_{23} = E_2 \cdot E_3 \neq 0$. Любая автоизометрия сохраняет направления $\mathbf{R}E_2, \mathbf{R}E_3, \mathbf{R}E_4$, и поскольку $g_{23} \neq 0$, она действует по формулам $E_1' = E_1, E_2' = \theta E_2, E_3' = \theta E_3, E_4' = \pm E_4, \theta = \pm 1$. Следовательно, однопараметрические группы автоизометрий отсутствуют.

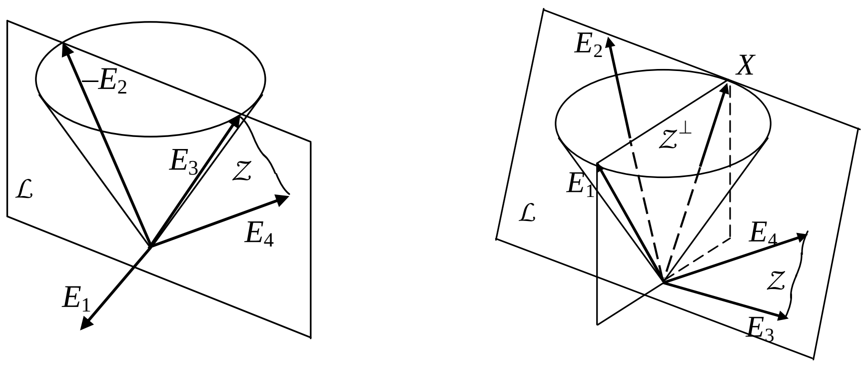
**2.4.** Пусть вектор $E_2$ изотропный, и на $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденная метрика. Выберем $E_3$ и $E_4$ так же, как и в случае 2.3 (см. рис. 3 а)). В этом случае, любая изометрия имеет два инвариантных изотропных собственных вектора, лежащих в идеале $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что преобразование, действующее на двумерном подпространстве $\langle E_2, E_3 \rangle$ по формулам $E_2' = e^{\nu t} E_2, E_3' = e^{-\nu t} E_3$, является изометрией. В итоге мы имеем полную группу изометрий, которая задаётся матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta e^{\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta e^{-\nu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \nu \neq 0, \theta = \pm 1.$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, для которых $\theta = 1$ и $E_4' = E_4$, т. е. задающиеся матрицей $F_4(t)$.

За счёт умножения векторов $E_2$ и $E_3$ на числа, отличные от нуля, мы можем добиться, что $E_2 \cdot E_3 = 1$. Заметим, что на рисунке 3 а) изображён для удобства вектор $-E_2$. В итоге матрица Грама принимает вид $\Gamma_4$ (таблица 1).

**Случай 3.** На идеале $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение.




а) б)

Рис. 3. Расположение базисных векторов

**3.1.** Вектор $E_2$ не изотропен, и на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется евклидово скалярное произведение (см. рис. 3 б)). Тогда $E_2 \notin Z^{\perp}$.

Подпространство $\mathcal{Z}^{\perp}$ двумерно, и на нём индуцируется лоренцево скалярное произведение. Это подпространство инвариантно относительно действия любых автоподобий и автоизометрий, а значит, два его изотропных направления тоже должны быть инвариантны. Выберем $E_1 \in \mathcal{Z}^{\perp}, E_1 \notin \mathcal{L}, E_1^2 = 0$ так, чтобы сохранялась операция скобки Ли, и пусть вектор $X$ принадлежит второму изотропному направлению в $\mathcal{Z}^{\perp}$. Подпространство $E_1^{\perp}$ содержит $E_1$ и $\mathcal{Z}$, причём $E_1^{\perp} \cap \mathcal{L} = \mathcal{Z}$. Поэтому $E_1^{\perp}$ не может содержать $E_2$. Значит, $g_{12} = E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Дополним $E_2$ до базиса во всём $\mathcal{L}$ так, чтобы $E_3, E_4$ образовывали ортонормированный базис в $\mathcal{Z}$ и $E_3$ был коллинеарен ортогональной проекции единичного вектора $E_2$ на $\mathcal{Z}$. Согласно замечанию, матрица Грама примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{12} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме любое автоподобие должно действовать по формулам

$$E_1' = E_1, E_2' = k\theta E_2, E_3' = k\theta E_3, E_4' = \pm k E_4, \theta = \pm 1, k > 0.$$

Такое преобразование будет подобием, только если $X' = k^2 X$. С другой стороны, $X' = k\theta X$, поскольку $X$ коллинеарен $E_2 - E_3$. Следовательно, $k = 1$; тем самым алгебра Ли допускает только автоизометрии типа симметрий, т. е. однопараметрические группы автоизометрий отсутствуют.

**3.2.** Вектор $E_2$ не изотропен, на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Тогда в $\mathcal{Z}$ существует только одно изотропное направление, и оно ортогонально $E_2$. Выбираем $E_3$, принадлежащим этому направлению (см. рис. 4 а)). При любой изометрии или подобии вектор $E_3$ является собственным.

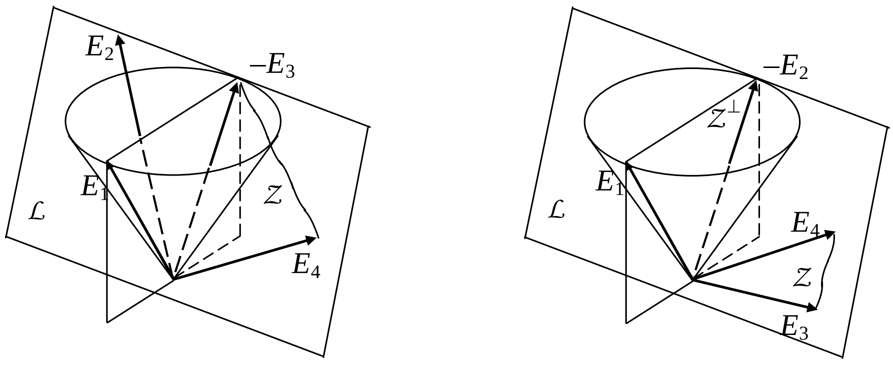



Рис. 4. Расположение базисных векторов

Следует рассмотреть два варианта: автоподобие имеет два изотропных собственных направления или оно имеет только одно такое направление.

Пусть автоподобие $F$ имеет ещё одно изотропное собственное направление $J$. Выберем $E_1$, принадлежащим этому направлению, а $E_4 \perp E_1$. Согласно [4] относительно некоторого базиса $(e_1, e_2, e_3, e_4)$, $F$ задаётся матрицей вида

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & * \\ 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & * \end{pmatrix}, \nu \neq 0, \mu \neq 0, \theta = \pm 1, t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

где звёздочками обозначена ортогональная матрица $Q$; матрица Грама данного базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае можем считать, что $E_1 = \lambda_1 e_1, E_3 = \lambda_2 e_2$, и, учитывая общий вид автоморфизмов, имеем $\mu = -\nu$, т. е. $E_1' = E_1$. Если отбросить тривиальный случай $\mu = \nu = 0$, преобразование вида (3) имеет собственный вектор, не принадлежащий подпространству $\mathcal{P} = \langle E_1, E_3 \rangle$, только если матрица $Q$ пропорциональна единичной матрице и $E_2 \in \mathcal{P}^{\perp}$.

Поскольку $g_{13} = E_1 \cdot E_3 \neq 0$, то направление вектора $E_3$ не может меняться на противоположное. В результате общий вид матриц всех автоподобий в выбранном базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta e^{\mu t} \end{pmatrix}, \mu \neq 0, \theta = \pm 1, t \in \mathbf{R}.$$

Однопараметрическую группу образуют преобразования с $\theta = 1$, т. е. задающиеся матрицей $F_5(t)$. Умножая $E_3$ на число, можем добиться, что $g_{13} = 1$; так же нормируем $E_2$ и $E_4$, причём можем выбрать $E_4 \in E_2^{\perp}$. Матрица Грама принимает вид $\Gamma_5$ (см. табл. 2).

Пусть автоподобие $F$ имеет только одно изотропное собственное направление $\mathbf{R}E_3$. Тогда, согласно [4], существует базис $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ в $\mathcal{G}_4$, в котором матрица однопараметрической группы гомотетий и матрица Грама имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что переход к базису $(\alpha e_1, e_2, \beta e_3, e_4), \alpha\beta = 1$, не меняет ни матрицу Грама, ни общий вид матрицы преобразования.

Единственное изотропное инвариантное направление $\mathbf{R}e_1$ должно совпадать с $\mathbf{R}E_3$. Неизотропное инвариантное направление $\mathbf{R}e_4$ должно совпадать с $\mathbf{R}E_2$. Очевидно, мы имеем два двумерных инвариантных подпространства с вырожденной метрикой: $\langle e_1, e_2\rangle$ и $\langle e_1, e_4\rangle$. Однако можно убедиться, что инвариантными являются все подпространства $\langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4\rangle, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и любое из них может выступать в качестве $\mathcal{Z}$, кроме $\langle e_1, e_4\rangle$.

Сначала предположим, что $\mathcal{Z} = \langle e_1, e_2\rangle$. Выберем $E_1 \in \mathbf{R}e_3, E_2 = e_4, e_3 \in \mathbf{R}e_1, E_4 = e_2$. За счёт умножения вектора $E_3$ на число добьёмся, чтобы $E_1 \cdot E_3 = -1$. В новом каноническом базисе получим ту же матрицу Грама, а матрица однопараметрической группы преобразований примет вид $F_6(t)$ (см. табл. 2). Расположение базисных векторов отличается от рисунка 4 а) только направлением вектора $E_3$.

Предположим теперь, что $\mathcal{Z} = \langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4\rangle, \alpha \neq 0$ (поскольку $E_2 \notin \mathcal{Z}$). Выберем $E_1, E_2, E_3, E_4$ так же, как и выше. Временно наш базис не является каноническим, и $\mathcal{Z} = \langle e_1, \beta E_2 + \alpha E_4\rangle$. Сначала мы заменим $E_4$ на $E_{4,0} = \beta/\alpha E_4$. Тогда в матрице Грама изменится только $g_{44} = \varepsilon > 0$, а матрица $F_6(t)$ не изменится. Теперь окончательно выберем новый вектор $E_4 = E_2 + E_{4,0}$. Пересчитаем матрицу Грама и матрицу $F_6(t)$ для нового базиса. Получим матрицы $\Gamma_7$ и $F_7(t)$ (см. табл. 2).

**3.3.** Вектор $E_2$ изотропен, на центре $\mathcal{Z}$ индуцируется невырожденное скалярное произведение. Тогда $E_2 \in \mathcal{Z}^{\perp}$. Выберем канонический базис, как показано на рисунке 4 б), причём $E_3$ и $E_4$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{Z}$ и $g_{12} = 1$.

Матрица Грама принимает вид $\Gamma_8$ (см. табл. 2). Общий вид матрицы автоподобий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm e^{2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t}\cos t & -e^{\mu t}\sin t \\ 0 & 0 & e^{\mu t}\sin t & e^{\mu t}\cos t \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, которые задаются матрицей (4) со знаком «+» во второй строке, т. е. имеем матрицу $F_8(t)$ (см. табл. 2). ■

## Заключение

В данной работе мы нашли полную группу автоморфизмов четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus R^2$, определили канонический вид лоренцевых метрик в этой алгебре Ли, при которых она допускает однопараметрическую группу автоизометрий или автоподобий, и указали матрицы, которые задают эти группы преобразований. Полученные результаты будут использованы при построении самоподобных однородных лоренцевых многообразий группы Ли $A^+(1) \times (\mathbf{R}^+)^2$.

## Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Віцебского гос. ун-та. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н., Гаджиева Ф.С. Автоподобия и автоизометрии одной четырёхмерной алгебры Ли VI типа Бианки // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. 2019. № 4. С. 124–130.
3. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2020. С. 27–29.
4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann. of Global Anal. Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.

**AUTOISOMETRIES AND AUTOSIMILARITIES OF LIE ALGEBRA $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$**

**M.N. Podoksenov**
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department "Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
**V.V. Chernykh**
Student, e-mail: chernykh_valeriya@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

**Abstract.** We consider four-dimensional Lie algebra $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ endowed with Lorentzian scalar product. We find all the one-parameter groups of isometries and similarities, which are simultaneously automorphisms of Lie algebra, and also we find the conditions of existence of such one-parameter group. Conditions of existence are associated with the location of ideals with respect to isotropic cone.

**Keywords:** Lie algebra, Lorentzian metrics, automorphism, similarity, isometry.

## References

1. Podoksenov M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geizenberga, snabzhennoi levoinvariantnoi lorentsevoi metrikoi. Vestnik Vitsebskogo gos. un-ta, 2011, no. 5, pp. 10-15. (in Russian)
2. Podoksenov M.N. and Gadzhieva F.S. Avtopodobiya i avtoizometrii odnoi chetyrekhmernoi algebry Li VI tipa Bianki. Vestnik Polotskogo gos. un-ta, Seriya S, 2019, no. 4, pp. 124–130. (in Russian)
3. Podoksenov M.N. and Guts A.K. Avtoizometrii algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$. Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 72-i Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 20 fevralya 2020 g., Vitebsk, VGU im. P.M. Masherova Publ., 2020, pp. 27-29. (in Russian)
4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann. of Global Anal. Geom., 1985, vol. 3, no. 1, pp. 59–84.

*Дата поступления в редакцию: 08.03.2020*