Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 14–24

УДК 514.84
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.14-24

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА, ДОПУСКАЮЩИХ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОНГА

М.Н. Болдырева
аспирант, e-mail: b_oldyrev_a@mail.ru
А.А. Магазев
д.ф.-м.н., e-mail: magazev@omgtu.ru
И.В. Широков
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: iv_shirokov@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. В статье исследуются калибровочные поля, характеризующиеся существованием нетривиальных интегралов движения уравнений Вонга. Для калибровочной группы $SU(2)$ детально описан класс полей, допускающих только изоспиновые первые интегралы. Получена классификация всех калибровочно неэквивалентных полей Янга–Миллса в трехмерном пространстве, допускающих линейный интеграл движения уравнений Вонга.

Ключевые слова: поле Янга–Миллса, уравнения Вонга, интеграл движения, калибровочное преобразование.

Введение

Уравнения Вонга [1], полученные им в 1970 г., до сих пор привлекают внимание специалистов по теории калибровочных полей и квантовой хромодинамике (см., например, [2,3]). Полученные как результат классического приближения уравнения Дирака, эти уравнения описывают движение классической частицы с изоспином в неабелевом калибровочном поле. Так как масштабы квантовой хромодинамики ограничены размером порядка нуклона, подобные частицы, конечно же, не могут быть полностью описаны классическими уравнениями. Однако во многих квантовых задачах важную роль играют именно классические решения уравнений движения (квазиклассическое приближение, интеграл по траекториям), что делает задачу их нахождения актуальной. Кроме того, особенности движения классических частиц часто помогают понять и определённые квантовые закономерности.

При нахождении решений уравнений Вонга первостепенное значение имеют интегралы движения, то есть величины, постоянные на фазовых траекториях изоспиновой частицы. В общем случае задача их нахождения по сложности сопоставима с самой задачей интегрирования уравнений движения, поэтому обычно их поиск осуществляется в заранее предопределённом классе функций. Например, для интегралов движения, являющихся полиномами от импульсных переменных, имеется общая ковариантная процедура их построения, предложенная ван Холтеном [4]. В настоящей статье мы исследуем вопрос существования интегралов движения, линейных по импульсным и изоспиновым координатам. Оказывается, что пуассонова алгебра подобных интегралов имеет весьма прозрачную алгебраическую структуру, что позволяет сформулировать содержательную задачу о классификации калибровочных полей с такими интегралами движения.

Структура нашей статьи следующая. В первом разделе мы напоминаем некоторые известные факты, касающиеся уравнений Вонга. Здесь же мы приводим определяющие уравнения для линейных интегралов движения, полученные одним из авторов ранее в работе [5]. Во втором разделе мы подробно исследуем класс полей Янга–Миллса, допускающих чисто изоспиновый интеграл движения. В третьем разделе мы получаем полную классификацию полей Янга–Миллса в трёхмерном евклидовом пространстве, для которых уравнения Вонга имеют нетривиальный линейный интеграл движения.

1. Интегралы движения уравнений Вонга

Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие. Классическая динамика изоспиновой частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле A_i^α на M, может быть описана *уравнениями Вонга* [1]:

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad \dot{p}_i = F_{ij}^\alpha\, g^{jk} p_k \tau_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\, p_j p_k, \quad \dot{\tau}_\alpha = -f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma A_i^\beta g^{ij} p_j. \tag{1}$$

Здесь g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора, (x^i, p_i) и τ_α — фазовые и изоспиновые координаты частицы соответственно, $f_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры Ли $\mathcal{K}$ калибровочной группы K, F_{ij}^α — компоненты тензора напряжённости калибровочного поля, определяемые как

$$F_{ij}^\gamma = \frac{\partial A_j^\gamma}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i^\gamma}{\partial x^j} + f_{\alpha\beta}^\gamma A_i^\alpha A_j^\beta. \tag{2}$$

Точкой обозначена производная по собственному времени частицы. Константу связи мы полагаем равной единице. Если не оговорено противное, по повторяющимся индексам мы подразумеваем суммирование.

Как показали Стернберг [6] и Вейнстейн [7], уравнения Вонга могут быть представлены в гамильтоновой форме. Введём обобщённые импульсы $P_i \equiv p_i + A_i^\alpha \tau_\alpha$ и определим в пространстве функций от переменных x^i, P_i и τ_α скобку Пуассона

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial P_i}\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial P_i} - f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\beta}, \tag{3}$$

являющуюся, как легко видеть, прямой суммой обычной канонической скобки и скобки Ли–Пуассона на дуальном пространстве $\mathcal{K}^*$. Тогда уравнения (1) можно записать в виде гамильтоновой системы

$$\dot{x}^i = \{H, x^i\}, \quad \dot{P}_i = \{H, P_i\}, \quad \dot{\tau}_\alpha = \{H, \tau_\alpha\}, \tag{4}$$

где гамильтониан частицы $H = H(x, P, \tau)$ задается равенством

$$H = \frac{1}{2}\, g^{ij}(P_i - A_i^\alpha \tau_\alpha)(P_j - A_j^\beta \tau_\beta).$$

Напомним, что *интегралы движения* гамильтоновых систем — это функции, имеющие с гамильтонианом тождественно нулевую скобку Пуассона. Очевидные интегралы движения системы уравнений (4) — это сам гамильтониан H и функции Казимира калибровочной алгебры $\mathcal{K}$, являющиеся инвариантами announcement коприсоединённого представления соответствующей калибровочной группы K. Таким образом, истинная динамика частицы происходит не во всем пространстве $T^*M \times \mathcal{K}^*$, а на его подмногообразии $T^*M \times \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — некоторая орбита коприсоединённого представления в $\mathcal{K}^*$.

Как правило, упомянутых интегралов не хватает для осуществления процедуры интегрирования гамильтоновой системы (4), в связи с чем актуальной становится проблема поиска дополнительных интегралов движения. Так как данная задача по сложности сопоставима с самой задачей интегрирования, целесообразно ограничить область поиска некоторым заданным классом функций, для которых задача построения интегралов движения стала бы содержательной. В простейшем случае это может быть класс функций, линейных по переменным P_i и τ_α:

$$X(x, P, \tau) = \xi^i(x) P_i + \chi_i^\alpha(x) \tau_\alpha. \tag{5}$$

Можно показать [5], что условие $\{H, X\} = 0$ для функции (5) будет эквивалентно системе равенств

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\, g_{kj} - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\, g_{ik} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi^\gamma}{\partial x^i} + f^\gamma_{\alpha\beta} A_i^\alpha \chi^\gamma + \xi^j\, \frac{\partial A_i^\gamma}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\, A_j^\gamma = 0,$$

первое из которых есть не что иное, как условие *киллинговости* векторного поля $\xi = \xi^i(x)\partial_i$, а второе может быть переписано более компактно как

$$d\chi + [A, \chi] = -\mathcal{L}_\xi A. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли в направлении векторного поля ξ, $A = (A_i^\alpha dx^i)\, e_\alpha$, $\chi = \chi^\alpha e_\alpha$, где $\{e_\alpha\}$ — базис в калибровочной алгебре $\mathcal{K}$, выбранный так, что $[e_\alpha, e_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$.

Важно отметить, что уравнение (6) калибровочно инвариантно в следующем смысле: если $\mathcal{K}$-значная функция χ удовлетворяет ему для заданного потенциала A, тогда функция

$$\tilde{\chi} = g\chi g^{-1} - (\xi g)\, g^{-1} \tag{7}$$

будет удовлетворять уравнению (6) для калибровочно эквивалентного потенциала

$$\tilde{A} = gAg^{-1} - dgg^{-1}. \tag{8}$$

Здесь $g : M \to K$ — произвольная гладкая K-значная функция на M.

В работе [5] показано, что векторы Киллинга ξ, для которых система (6) совместна, образуют подалгебру в алгебре всех киллинговых векторных полей на M. Обозначим эту подалгебру символом $\mathcal{G}$ и выберем в ней некоторый базис, образованный векторными полями $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$, $a = 1, \ldots, n \equiv \dim \mathcal{G}$. Тогда мы имеем набор n интегралов движения уравнений Вонга

$$X_a = \xi_a^i(x)P_i + \chi_a^\alpha(x)\tau_\alpha, \quad a = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $\chi_a^\alpha(x)$ — функции, удовлетворяющие равенствам (6) для заданного векторного поля ξ_a. В дополнение к интегралам (9) могут существовать также *изоспиновые* интегралы движения, порождаемые решениями однородного уравнения

$$d\vartheta + [A, \vartheta] = 0, \tag{10}$$

получаемого из (6) приравниванием к нулю правой части. Если $\{\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_r(x)\}$ — базис соответствующего пространства решений, то изоспиновые интегралы имеют вид

$$Y_\mu = \vartheta_\mu^\alpha(x)\tau_\alpha, \quad \mu = 1, \ldots, r, \tag{11}$$

где число r не превышает размерность алгебры $\mathcal{K}$. Легко показать, что этот набор функций замкнут относительно скобки Пуассона (3) и образует некоторую алгебру Ли, которую мы будем обозначать символом $\mathcal{N}$.

В статье [5] исследована структура пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, порождаемой интегралами движения (9) и (11): алгебра $\mathcal{N}$ образует в $\mathcal{P}$ идеал, причём соответствующая фактор-алгебра $\mathcal{P}/\mathcal{N}$ является изоморфной алгебре $\mathcal{G}$. Это означает, что алгебра $\mathcal{P}$ представляет собой некоторое *расширение* алгебры $\mathcal{G}$ с помощью алгебры $\mathcal{N}$.

2. Поле Янга–Миллса: случай $\mathcal{N} \neq 0$

Рассмотрим в качестве калибровочной группы K трёхмерную простую группу $SU(2)$. Калибровочное поле в этом случае называют *полем Янга–Миллса*. Для дальнейших целей в алгебре Ли $su(2)$ этой группы мы зафиксируем базис $\{e_\alpha\}$, коммутационные соотношения в котором имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2. \tag{12}$$

Проанализируем возможную структуру идеала $\mathcal{N}$, образованного изоспиновыми интегралами движения в случае поля Янга–Миллса. Предварительно отметим, что однородное уравнение (10) является калибровочно-инвариантным: если ϑ — его решение для потенциала A, тогда функция

$$\tilde{\vartheta} = g\vartheta g^{-1}$$

будет являться решением (10) для калибровочно-эквивалентного потенциала (8).

Ясно, что для калибровочных полей «общего положения» уравнение (10) будет иметь только нулевое решение, что означает $\mathcal{N} = \{0\}$. Тем не менее, допустим, что это не так и существует некоторое решение $\vartheta \neq 0$. Очевидно, что с помощью локального калибровочного преобразования мы можем добиться $\vartheta = \kappa(x)e_1$, где $\kappa(x)$ — ненулевая скалярная функция на M. Подставляя эту функцию в уравнение (10), мы получаем $d\kappa = A^2 = A^3 = 0$, то есть κ является ненулевой константой, а потенциал поля имеет вид

$$A = a(x)e_1 \quad \text{или} \quad A_i^\alpha = a_i(x)\delta_1^\alpha, \tag{13}$$

где $a(x) = a_i(x)dx^i$ — скалярная дифференциальная 1-форма на M.

Подставляя потенциал (13) в уравнение (10), получаем систему уравнений на неизвестные функции ϑ^α:

$$d\vartheta^1 = 0, \quad d\vartheta^2 = a(x)\vartheta^3, \quad d\vartheta^3 = -a(x)\vartheta^2. \tag{14}$$

Так как должно быть $d^2\vartheta^2 = d^2\vartheta^3 = 0$, в качестве необходимого условия разрешимости этой системы имеем

$$\vartheta^2 da = \vartheta^3 da = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Если $da \neq 0$, то из (15) следует $\vartheta^2 = \vartheta^3 = 0$, в то время как из первого уравнения системы (14) получаем $\vartheta^1 = \mathrm{const}$. Таким образом, в калибровочном поле вида (13), где $da \neq 0$, идеал $\mathcal{N}$ одномерен и порождается функцией $Y = \tau_1$ (см. формулу (11)).

2. Если $da = 0$, потенциал (13) калибровочно тривиален, так как в этом случае $F = (da)\,e_1 = 0$. Как известно, для такого поля существует калибровка, в которой потенциал будет равен нулю: $\tilde{A} = 0$. Но это значит, что в этой калибровке общее решение (10) имеет вид $\tilde{\vartheta}^\alpha = \mathrm{const}$, откуда следует, что идеал $\mathcal{N}$ трёхмерен и изоморфен алгебре $su(2)$.

Резюмируем полученные результаты в виде следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{N}$ — идеал, образованный изоспиновыми интегралами движения уравнений Вонга. Тогда $\mathcal{N} \neq 0$, если и только если поле Янга–Миллса с точностью до калибровочного преобразования имеет вид* (13). *При этом:*
1) если $da \neq 0$, то $\dim \mathcal{N} = 1$;
2) если $da = 0$, то $\mathcal{N} \simeq su(2)$.

В заключение этого раздела, обсудим некоторые особенности полей Янга–Миллса вида (13). Во-первых, отметим, что тензор этого калибровочного поля имеет достаточно простой вид

$$F_{ij}^\alpha = b_{ij}\delta_1^\alpha, \quad \text{где} \quad b_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}.$$

Во-вторых, выше мы уже отмечали, что изоспиновая переменная τ_1 для таких полей является интегралом движения. Это также непосредственно следует из уравнений Вонга (1), так как $\dot{\tau}_1 = -f^{\gamma}_{1\beta}\tau_\gamma A^\beta_i g^{ij} p_j = 0$ в силу того, что $A^\beta_i = a_i \delta^\beta_1$. Вводя обозначение $\tau_1 \equiv e$, из (1) получаем следующие уравнения на фазовые координаты (x^i, p_i):

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad \dot{p}_i = e b_{ij} g^{jk} p_k - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\, p_j p_k. \tag{16}$$

Так как данные уравнения не содержат изоспиновых переменных, последние никак не влияют на поведение фазовых траекторий частицы: фазовое поведение частицы не «чувствует» динамику в изоспиновом пространстве. Существенно также, что уравнения (16) по форме совпадают с уравнениями движения обычной скалярной частицы с зарядом e во внешнем электромагнитном поле с напряжённостью b_{ij}. Таким образом, с точки зрения уравнений Вонга поля Янга–Миллса вида (13) фактически эквивалентны электромагнитным полям с абелевой калибровочной группой $U(1)$.

3. Классификация полей Янга–Миллса, допускающих алгебру $\mathcal{P} \neq 0$

В настоящем разделе мы собираемся дать классификацию полей Янга–Миллса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, допускающих нетривиальную пуассонову алгебру $\mathcal{P}$. Так как случай $\mathcal{N} \neq 0$ фактически сводится к случаю электромагнитного поля, нам нет нужды его здесь рассматривать, поскольку все электромагнитные поля, допускающие нетривиальный линейный по импульсам интеграл движения уравнений Лоренца, перечислены в работе [8].

В случае $\mathcal{N} = 0$ пуассонова алгебра $\mathcal{P}$ изоморфна алгебре $\mathcal{G}$ (напомним, что последняя определяется как подалгебра векторов Киллинга, для которых уравнение (6) является совместным). Это означает, что интегралы движения $X_a = \xi^i_a(x) P_i + \chi^\alpha_a(x)\tau_\alpha$, образующие базис пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, должны удовлетворять соотношениям

$$\{X_a, X_b\} = c^c_{ab} X_c,$$

где c^c_{ab} — структурные константы алгебры $\mathcal{G} = \{\xi_a\}$: $[\xi_a, \xi_b] = c^c_{ab}\xi_c$. С использованием выражения (3) для скобки Пуассона данные соотношения могут быть записаны в виде

$$\xi_a \chi^\gamma_b - \xi_b \chi^\gamma_a + f^\gamma_{\alpha\beta}\chi^\alpha_a \chi^\beta_b = c^c_{ab}\chi^\gamma_c. \tag{17}$$

Отметим, что полученная система уравнений не зависит явно от потенциалов поля Янга–Миллса и для заданной алгебры $\mathcal{G}$ представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка на неизвестные $su(2)$-значные функции $\chi_a = \chi^\alpha_a(x) e_\alpha$.

Допустим, что мы нашли общее решение системы уравнений (17). Выберем из полученного множества решений те из них, которые являются неэквивалентными относительно преобразований вида (7). Подставляя эти решения в выражение (6), получаем систему уравнений на неизвестные потенциалы $A = A_i^\alpha(x)dx^i e_\alpha$, которая в общем случае может быть неинтегрируемой. Добавляя соответствующие условия совместности и интегрируя полученную расширенную систему, мы найдём явный вид потенциалов поля Янга–Миллса, которые допускают нетривиальную алгебру интегралов движения уравнений Вонга. Подчеркнём, что заодно мы находим и базис самой пуассоновой алгебры $\mathcal{P}$, задаваемый набором функций (9).

При разбиении полей Янга–Миллса на классы эквивалентности, помимо калибровочных преобразований вида (8) удобно также учитывать преобразования, порождаемые группой изометрий $E(3)$ евклидового пространства $\mathbb{R}^3$. Иначе говоря, мы будем считать два поля Янга–Миллса *эквивалентными*, если их $su(2)$-значные 1-формы A и $\tilde{A}$ с точностью до локального калибровочного преобразования связаны преобразованием из $E(3)$:

$$\phi^* \tilde{A} = gAg^{-1} - dgg^{-1}, \quad \phi \in E(3), \quad g : \mathbb{R}^3 \to SU(2).$$

Нетрудно показать, что подалгебры $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}} \subset e(3)$, соответствующие эквивалентным полям A и $\tilde{A}$, будут $E(3)$-сопряжены в $e(3)$, поэтому при перечислении неэквивалентных полей Янга–Миллса нам будет достаточно ограничиться подалгебрами, неэквивалентными относительно внутренних автоморфизмов.

Классификация всех собственных подалгебр алгебры $e(3)$ с точностью до $E(3)$-сопряжений хорошо известна [9]; соответствующий список приведён в таблице 1. Для обозначения подалгебр мы используем нотацию $\mathcal{G}_{n,k}$, где n — размерность подалгебры, а k — её порядковый номер в списке подалгебр с данной размерностью. Для обозначения семейства неэквивалентных подалгебр, непрерывно параметризованных параметром λ, мы используем обозначение $\mathcal{G}_{n,k}^\lambda$. Подалгебры задаются явным указанием базисных векторных полей $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$ в прямоугольных декартовых координатах $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. В третьей колонке указываются подгруппы $E(3)$, генерируемые соответствующими алгебрами Ли.

Таблица 1. Подалгебры алгебры $e(3)$ с точностью до $E(3)$-сопряжений

Подалгебра	Базисные векторные поля ξ_a	Подгруппа
$\mathcal{G}_{1,1}$	$\xi_1 = \partial_z$	$\mathbb{R}$
$\mathcal{G}_{1,2}$	$\xi_1 = y\partial_x - x\partial_y$	$SO(2)$
$\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$	$\xi_1 = y\partial_x - x\partial_y + \lambda^{-1}\partial_z$, $\lambda > 0$	$\overline{SO(2)}$
$\mathcal{G}_{2,1}$	$\xi_1 = \partial_x$, $\xi_2 = \partial_y$	$\mathbb{R}^2$
$\mathcal{G}_{2,2}$	$\xi_1 = \partial_z$, $\xi_2 = y\partial_x - x\partial_y$	$\mathbb{R} \times SO(2)$
$\mathcal{G}_{3,1}$	$\xi_1 = \partial_x$, $\xi_2 = \partial_y$, $\xi_3 = \partial_z$	$\mathbb{R}^3$
$\mathcal{G}_{3,2}^\lambda$	$\xi_1 = \partial_x$, $\xi_2 = \partial$, $\xi_3 = y\partial_x - x\partial_y + \lambda^{-1}\partial_z$, $\lambda > 0$	$\overline{E(2)}$
$\mathcal{G}_{3,3}$	$\xi_1 = \partial_x$, $\xi_2 = \partial_y$, $\xi_3 = y\partial_x - x\partial_y$	$E(2)$
$\mathcal{G}_{3,4}$	$\xi_1 = z\partial_y - y\partial_z$, $\xi_3 = x\partial_z - z\partial_x$, $\xi_3 = y\partial_x - x\partial_y$	$SO(3)$
$\mathcal{G}_{4,1}$	$\xi_1 = \partial_x$, $\xi_2 = \partial_y$, $\xi_3 = \partial_z$, $\xi_4 = y\partial_x - x\partial_y$	$E(2) \times \mathbb{R}$

Сформулируем теперь алгоритм классификации полей Янга–Миллса, допускающих нетривиальные алгебры $\mathcal{P}$ (с нулевым идеалом $\mathcal{N}$).

1. Фиксируем подалгебру $\mathcal{G}_{n,k}$ из таблицы 1 и находим для неё все решения системы уравнений (17) с точностью до калибровочных преобразований (7).
2. Для тех решений системы уравнений (17), для которых выполнено условие интегрируемости, находим общее решение уравнения (6).
3. Выписываем полученные потенциалы A_i^α калибровочного поля и соответствующие им интегралы движения уравнений Вонга в соответствии с формулой (9).

Ниже приведен список найденных с помощью предложенного алгоритма полей Янга–Миллса. Подалгебры из таблицы 1 мы дополнили двумя несобственными подалгебрами: нулевой подалгеброй $\mathcal{G}_0 = \{0\}$ и самой алгеброй $e(3)$, обозначаемой как $\mathcal{G}_6$. В записях мы придерживаемся следующей нотации: f_α, g_α и h_α — произвольные функции своих аргументов, μ_α — произвольные постоянные, $\varepsilon = \pm 1$. Кроме того, мы используем различные типы координат в $\mathbb{R}^3$:

1) полярные в случае подалгебр $\mathcal{G}_{1,2}$ и $\mathcal{G}_{2,2}$: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$;
2) спиральные в случае подалгебры $\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = \zeta - \varphi/\lambda$;
3) сферические для подалгебры $\mathcal{G}_{3,4}$: $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\varphi$;
4) декартовы x, y и z — в остальных случаях.

Подалгебра $\mathcal{G}_0$ (поле общего положения):

$$A^\alpha = f_\alpha(x,y,z)dx + g_\alpha(x,y,z)dy + h_\alpha(x,y,z)dz, \quad \alpha = 1,2,3.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,1}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(x,y)dx + g_\alpha(x,y)dy + h_\alpha(x,y)dz, \quad \alpha = 1,2,3;$$

$$X_1 = P_z.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,2}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho,z)d\rho + g_\alpha(\rho,z)d\varphi + h_\alpha(\rho,z)dz, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$X_1 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{1,3}^\lambda$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho,\zeta)d\rho + g_\alpha(\rho,\zeta)d\varphi + h_\alpha(\rho,\zeta)d\zeta, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$X_1 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{2,1}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(z)dx + g_\alpha(z)dy + h_\alpha(z)dz, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{2,2}$:

$$A^\alpha = f_\alpha(\rho)d\rho + g_\alpha(\rho)d\varphi + h_\alpha(\rho)dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = P_z, \quad X_2 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,1}$:

$$A^\alpha = a_\alpha dx + b_\alpha dy + c_\alpha dz, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,2}^\lambda$:

$$A^\alpha = [a_\alpha \sin(\lambda z) + b_\alpha \cos(\lambda z)]\, dx + [a_\alpha \cos(\lambda z) - b_\alpha \sin(\lambda z)]\, dy + \mu_\alpha dz, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = yP_x - xP_y + \frac{P_z}{\lambda}.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,3}$:

$$A^1 = f_1(z)dz, \quad A^2 = f_2(z)dx + \varepsilon f_3(z)dy, \quad A^3 = f_3(z)dx - \varepsilon f_2(z)dy,$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = yP_x - xP_y + \varepsilon\tau_1.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{3,4}$:

$$A^1 = f_1(r)dr + \varepsilon \cos\vartheta d\varphi,$$

$$A^2 = -\varepsilon f_2(r) \sin\vartheta d\varphi + f_3(r)d\vartheta, \quad A^3 = \varepsilon f_3(r) \sin\vartheta d\varphi + f_2(r)d\vartheta;$$

$$X_1 = \cos\varphi \operatorname{ctg}\vartheta\, P_\varphi + \sin\varphi\, P_\vartheta - \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\varepsilon\tau_1, \quad X_2 = \sin\varphi \operatorname{ctg}\vartheta\, P_\varphi - \cos\varphi\, P_\vartheta - \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\varepsilon\tau_1,$$

$$X_3 = -P_\varphi.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_{4,1}$:

$$A^1 = \mu_1 dx, \quad A^2 = \mu_2 dx + \varepsilon\mu_3 dy, \quad A^3 = \mu_3 dx - \varepsilon\mu_2 dy;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z, \quad X_4 = yP_x - xP_y + \varepsilon\tau_1.$$

Подалгебра $\mathcal{G}_6 \simeq e(3)$:

$$A^1 = A^2 = A^3 = 0;$$

$$X_1 = P_x, \quad X_2 = P_y, \quad X_3 = P_z,$$

$$X_4 = zP_y - yP_z + \tau_1, \quad X_5 = xP_z - zP_x + \tau_2, \quad X_6 = yP_x - xP_y + \tau_3.$$

Заключение

Как показало наше исследование, в случае калибровочной группы $SU(2)$ чисто изоспиновый интеграл движения допускают только $U(1)$-значные поля, подобные электромагнитному. Кроме того, мы получили исчерпывающую классификацию калибровочно-неэквивалентных полей Янга–Миллса, допускающих нетривиальный линейный по импульсам интеграл движения уравнений Вонга. Полученные нами классы полей Янга–Миллса могут служить в качестве анзацев для различных калибровочных теорий с $SU(2)$-симметрией, например, в задачах, связанных с поиском точных решений уравнения Янга–Миллса.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90200.

Литература

1. Wong S.K. Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin // Il Nuovo Cimento A. 1970. V. 65, No. 4. P. 689–694.
2. Goldberger W.D., Ridgway A.K. Radiation and the classical double copy for color charges // Physical Review D. 2017. V. 95, No. 12. P. 125010.
3. Kajantie K., McLerran L.D., Paatelainen R. Gluon radiation from a classical point particle. II. Dense gluon fields // Physical Review D. 2020. V. 101, No. 5. P. 054012.
4. Van Holten J.W. Covariant hamiltonian dynamics // Physical Review D. 2007. V. 75, No. 2. P. 025027.
5. Магазев А.А. Об интегрируемости уравнений Вонга в классе линейных интегралов движения // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 133–140.
6. Sternberg S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1977. V. 74, No. 12. P. 5253–5254.
7. Weinstein A. A universal phase space for particles in Yang-Mills fields // Letters in Mathematical Physics. 1978. V. 2, No. 5. P. 417–420.
8. Болдырева М.Н., Магазев А.А. Об алгебрах Ли симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59, No. 10. С. 132–139.
9. Beckers J. [et. al.] Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics // Journal of Mathematical Physics. 1977. V. 18, No. 1. P. 72–83.

CLASSIFICATION OF YANG–MILLS FIELDS ADMITTING INTEGRALS OF MOTION FOR THE WONG EQUATIONS

M.N. Boldyreva
Post Graduate Student, e-mail: b_oldyrev_a@mail.ru
A.A. Magazev
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: magazev@omgtu.ru
I.V. Shirokov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: iv_shirokov@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. In the paper, we investigate the gauge fields that are characterized by the existence of non-trivial integrals of motion for the Wong equations. For the gauge group $SU(2)$, the class of fields admitting only the isospin first integrals is described in detail. All gauge non-equivalent Yang–Mills fields admitting a linear integral of motion for the Wong equations are classified in the three-dimensional Euclidean space.

Keywords: Yang–Mills field, the Wong equations, integral of motion, gauge transformation.

References

1. Wong S.K. Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin. II Nuovo Cimento A., 1970, vol. 65, no. 4., pp. 689–694.
2. Goldberger W.D. and Ridgway A.K. Radiation and the classical double copy for color charges. Physical Review D., 2017, vol. 95, no. 12, pp. 125010.
3. Kajantie K., McLerran L.D., and Paatelainen R. Gluon radiation from a classical point particle. II. Dense gluon fields. Physical Review D., 2020, vol. 101, no. 5, pp. 054012.
4. Van Holten J.W. Covariant hamiltonian dynamics. Physical Review D., 2007, vol. 75, no. 2, pp. 025027.
5. Magazev A.A. Ob integruruemosti uravneniy Vonga v klasse lineynih integralov dvizheniya. Izvestiya visshih ucebnih zavedeniy. Fizika, 2015, vol. 58, no. 12, pp. 133–140. (in Russia)
6. Sternberg S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1977, vol. 74, no. 12, pp. 5253–5254.
7. Weinstein A. A universal phase space for particles in Yang-Mills fields. Letters in Mathematical Physics, 1978, vol. 2, no. 5, pp. 417–420.
8. Boldireva M.N., Magazev A.A. Ob algebrah Li simmetrii stacionarnih uravneniy Shredingera i Pauli. Izvestiya visshih ucebnih zavedeniy. Fizika, 2016, vol. 59, no. 10, pp. 132–139. (in Russian)
9. Beckers J. [et. al.] Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in non-relativistic quantum mechanics. Journal of Mathematical Physics, 1977, vol. 18, no. 1, pp. 72-83.

Дата поступления в редакцию: 30.03.2020