*Математические структуры и моделирование*
*2020. № 1(53). С. 82–93*

УДК 519.63 + 533.6
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.82-93

# ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЁТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА

**С.П. Баутин**
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SBautin@usurt.ru
**А.А. Бугаенко**
аспирант, e-mail: bugaenkoanya@yandex.ru
**И.Ю. Крутова**
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Снежинский физико-технический институт Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Снежинск, Россия

**Аннотация.** Для системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса проведена линеаризация в случае когда не учитывается действие силы тяжести. Найдены частные решения в виде бегущих волн.

**Ключевые слова:** система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, линеаризация, точные решения.

## Введение

Природные восходящие закрученные потоки: торнадо, тропические циклоны, огненные вихри — представляют собой сложные и ещё достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надёжное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики при учетё действия сил тяжести и Кориолиса.

В монографиях [1–5] (более подробную библиографию см. в [3,4]) с использованием этой математической модели — система уравнений газовой динамики при учетё действия сил тяжести и Кориолиса — и с применением методологии характеристической задачи Коши [6–8] проведены аналитические и численные исследования течений воздуха в природных восходящих закрученных потоках.

В силу нелинейности системы уравнений газовой динамики построение её решений является достаточно трудоёмким. Это и послужило причиной линеаризации системы уравнений газовой динамики на её точных решениях [9].

Далее в работе в случае неучёта действия силы тяжести приведена линеаризованная на точном решении линейная система уравнений с частными производными. Неучёт действия силы тяжести возможен при исследовании газодинамических течений в придонных частях природных восходящих закрученных потоков, в которых параметры газа несильно зависят от высоты. Также в работе в случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы построено несколько конкретных решений.

## 1. Линеаризация системы уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$ при учёте действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [1–5]:

$$\begin{cases} c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\left(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}\right) = 0, \\ v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_x = a v_2 - b v_3, \\ v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_y = -a v_1, \\ v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_z = b v_1 - g. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь: $p$ — давление газа; $\rho$ — плотность газа; $\gamma = \mathrm{const} > 1$ — показатель политропы идеального газа; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси $Ox$, $Oy$, $Oz$;

$$\boldsymbol{\Omega} = (\ 0;\ \Omega_2;\ \Omega_3\ );\quad \Omega_2 = \Omega\cos\psi;\ \Omega_3 = \Omega\sin\psi,$$

— вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; $\psi$ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат $(x, y, z)$, вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega_3$; $b = 2\Omega_2$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g = \mathrm{const} > 0$ — ускорение свободного падения. В данной работе $g = 0$.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния — $u_{00}$, $c_{00}$, $t_{00}$, $r_{00}$ — стандартным образом [1–5] введены безразмерные переменные:

$$f = \frac{f_*}{f_{00}},$$

где $f_*$ и $f_{00}$ — соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины $f$. При этом положено, что

$$u_{00} = c_{00};\quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}.$$

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$c = 1;\quad v_1 = v_2 = v_3 = 0. \tag{2}$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$c = 1 + \tilde{c};\quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}},$$

и эти выражения подставляются в систему (1).

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1).

Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [9]:

$$\begin{cases} c_t + \dfrac{(\gamma-1)}{2}(v_{1x}+v_{2y}+v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_x = av_2 - bv_3, \\ v_{2t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_y = -av_1, \\ v_{3t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_z = bv_1. \end{cases} \tag{3}$$

В монографии [6] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером один у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра $\varepsilon$. Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида [6], и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням $\varepsilon$ сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, даёт первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

## 2. Бегущие волны

### 2.1. Частное решение в случае зависимости от переменной $y$

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных $x$ и $z$ и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t,y) = c_n(t)\cos ny; \\ v_1(t,y) = v_{1n}(t)\sin ny; \\ v_2(t,y) = v_{2n}(t)\sin ny; \\ v_3(t,y) = v_{3n}(t)\sin ny \end{cases} \tag{4}$$

с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $v_{1n}(t)$, $v_{2n}(t)$, $v_{3n}(t)$. Здесь $n$ — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (4) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c_n'(t) + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{2n}(t) = 0; \\ v_{1n}'(t) = a v_{2n}(t) - b v_{3n}(t); \\ v_{2n}'(t) - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n(t) = -a v_{1n}(t); \\ v_{3n}'(t) = b v_{1n}(t). \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (5) будем искать в виде

$$\begin{cases} c_n(t) = c_n^0 \cos(nv^* t); \\ v_{1n}(t) = v_{1n}^0 \cos(nv^* t); \\ v_{2n}(t) = v_{2n}^0 \sin(nv^* t); \\ v_{3n}(t) = v_{3n}^0 \sin(nv^* t). \end{cases} \tag{6}$$

Представление (6) подставляется в систему (5), и получается однородная система линейных алгебраических уравнений для констант $c_n^0, v_{1n}^0, v_{2n}^0, v_{3n}^0$

$$\begin{cases} -v^* n c_n^0 + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{2n}^0 = 0; \\ -v^* n v_{1n}^0 - a v_{2n}^0 + b v_{3n}^0 = 0; \\ v^* n v_{2n}^0 - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n^0 + a v_{1n}^0 = 0; \\ v^* n v_{3n}^0 - b v_{1n}^0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -v^* n & 0 & \dfrac{(\gamma-1)}{2} n & 0 \\ 0 & -v^* n & -a & b \\ -\dfrac{2}{(\gamma-1)} n & a & v^* n & 0 \\ 0 & -b & 0 & v^* n \end{vmatrix}.$$

Раскрытие этого определителя по третьей строке приводит к биквадратному уравнению:

$$n^4 (v^*)^4 - n^2 (v^*)^2 \left(a^2 + b^2 + n^2\right) + n^2 b^2 = 0.$$

Делаем замену $V^* = (v^*)^2$

$$n^2 (V^*)^2 - V^* \left(a^2 + b^2 + n^2\right) + b^2 = 0,$$

находим дискриминант

$$D = \left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 - 4n^2 b^2 = a^4 + 2a^2 b^2 + 2n^2 a^2 + (b^2 - n^2)^2 > 0,$$

получаем следующие корни квадратного уравнения

$$V^*_{1,2} = \frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}.$$

Значение $V^*_{1,2} > 0$, т. к.

$$a^2+b^2+n^2 \ > \ \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2};$$

$$\left(a^2+b^2+n^2\right)^2 \ > \ \left(a^2+b^2+n^2\right)^2 - 4n^2b^2.$$

Получили 4 действительных попарно-сопряжённых корня

$$v^*_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{V^*_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}}.$$

Возвращаемся к системе (7). Из первого уравнения:

$$c^0_n = \frac{(\gamma-1)}{2v^*} v^0_{2n}. \tag{8}$$

Из четвёртого уравнения:

$$v^0_{3n} = \frac{b}{v^* n} v^0_{1n}. \tag{9}$$

Из второго уравнения:

$$v^0_{1n} = v^0_{2n} \frac{a v^* n}{b^2 - (v^*)^2 n^2}. \tag{10}$$

Подставляем все в третье уравнение:

$$n v^0_{2n} \left[ v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{a^2 v^*}{b^2 - (v^*)^2 n^2} \right] = 0.$$

Рассмотрим отдельно

$$v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{a^2 v^*}{b^2 - (v^*)^2 n^2} = \frac{(v^*)^2 \left(b^2 - (v^*)^2 n^2\right) - b^2 + (v^*)^2 n^2 + a^2 (v^*)^2}{v^* \left(b^2 - (v^*)^2 n^2\right)}.$$

В числителе получили исходное уравнение, корень которого есть $v^*$

$$-(v^*)^4 n^2 + (v^*)^2 \left[a^2+b^2+n^2\right] - b^2 = -\left[(v^*)^4 n^2 - (v^*)^2 \left[a^2+b^2+n^2\right] + b^2\right] = 0.$$

Таким образом уравнение для $v^0_{2n}$ является таким:

$$v^0_{2n} \cdot 0 = 0,$$

т. е. в качестве значения $v^0_{2n}$ можно брать любое число.

В результате искомое частное решение системы (3) задаётся формулами:

$$\begin{cases} c(t,y) = c_n^0 \cos(nv^* t)\cos ny; \\ v_1(t,y) = v_{1n}^0 \cos(nv^* t)\sin ny; \\ v_2(t,y) = v_{2n}^0 \sin(nv^* t)\sin ny; \\ v_3(t,y) = v_{3n}^0 \sin(nv^* t)\sin ny, \end{cases} \tag{11}$$

где $v_{2n}^0$ — произвольная константа, а остальные коэффициенты задаются формулами (8), (9), (10).

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (11) системы (3) является бегущей волной

$$\begin{cases} c(t,y) = 0{,}5c_n^o(\cos[n(y+v^*t)] + \cos[n(y-v^*t)]); \\ v_1(t,y) = 0{,}5v_{1n}^0(\sin[n(y+v^*t)] + \sin[n(y-v^*t)]); \\ v_2(t,y) = 0{,}5v_{2n}^0(\cos[n(y+v^*t)] - \cos[n(y-v^*t)]); \\ v_3(t,y) = 0{,}5v_{3n}^0(\cos[n(y+v^*t)] - \cos[n(y-v^*t)]), \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных:

$$y \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью

$$v_{1,2}^* = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}}.$$

Сделаем оценку $v_{1,2}^*$. Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2\psi + 4\Omega^2\cos^2\psi = 4\Omega^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2b^2 = n^4 + (a^2+b^2)^2 + 2n^2(a^2-b^2) = \\ = n^4 + 16\Omega^4 + 8\Omega^2 n^2(\sin^2\psi - \cos^2\psi). \end{aligned}$$

Последнее выражение заведомо будет больше $n^4$, если

$$\sin^2\psi - \cos^2\psi \geqslant 0, \tag{12}$$

то есть, для случая Северного полушария при

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В случае Южного полушария для выполнения неравенства (12) требуется выполнение неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant -\frac{\pi}{4}.$$

Значит
$$\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2} > n^2,$$
$$\left(a^2+b^2+n^2\right)+\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2} > 2n^2.$$

Таким образом,
$$v_1^* = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+n^2\right)+\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2}}{2n^2}} > 1$$
и
$$v_2^* = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+n^2\right)-\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2}}{2n^2}} < 1,$$
если выполнено неравенство (12), причём $v_2^* < 1 < v_1^*$.

Естественно, что для системы (3) можно строить и другие частные решения с использованием гармоник и по другим пространственным переменным, как в случае зависимости только от какой-то одной пространственной переменной, так и в случае одновременной зависимости решений от многих пространственных переменных.

Т. к. дальше будет рассматриваться зависимость от переменной $z$ — для найденных $v_1^*$ и $v_2^*$ будем использовать обозначение $v_{1y,2y}^*$.

### 2.2. Частное решение в случае зависимости от переменной $z$

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных $x$ и $y$ и имеют следующий вид
$$\begin{cases} c(t,z) = c_n(t)\cos nz; \\ v_1(t,z) = v_{1n}(t)\sin nz; \\ v_2(t,z) = v_{2n}(t)\sin nz; \\ v_3(t,z) = v_{3n}(t)\sin nz \end{cases} \tag{13}$$
с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $v_{1n}(t)$, $v_{2n}(t)$, $v_{3n}(t)$. Здесь $n$ — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (13) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} c_n'(t) + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{3n}(t) = 0, \\ v_{1n}'(t) = a v_{2n}(t) - b v_{3n}(t), \\ v_{2n}'(t) = -a v_{1n}(t), \\ v_{3n}'(t) - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n(t) = b v_{1n}(t). \end{cases} \tag{14}$$

Решение системы (14) будем искать в виде

$$
\begin{cases}
c_n(t) = c_n^0 \cos(nv^* t);\\
v_{1n}(t) = v_{1n}^0 \cos(nv^* t);\\
v_{2n}(t) = v_{2n}^0 \sin(nv^* t);\\
v_{3n}(t) = v_{3n}^0 \sin(nv^* t).
\end{cases} \tag{15}
$$

Представление (15) подставляется в систему (14), и получается однородная система линейных алгебраических уравнений для констант $c_n^0$, $v_{1n}^0$, $v_{2n}^0$, $v_{3n}^0$

$$
\begin{cases}
-nv^* c_n^0 + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{3n}^0 = 0;\\
-nv^* v_{1n}^0 - a v_{2n}^0 + b v_{3n}^0 = 0;\\
nv^* v_{2n}^0 + a v_{1n}^0 = 0;\\
nv^* v_{3n}^0 - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n^0 - b v_{1n}^0 = 0.
\end{cases} \tag{16}
$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю.

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
-nv^* & 0 & 0 & \dfrac{(\gamma-1)}{2} n\\
0 & -nv^* & -a & b\\
0 & a & nv^* & 0\\
-\dfrac{2}{(\gamma-1)} n & -b & 0 & nv^*
\end{vmatrix}.
$$

Раскрытие определителя по четвёртой строке приводит к биквадратному уравнению:

$$
n^4 (v^*)^4 - n^2 (v^*)^2 \left(a^2 + b^2 + n^2\right) + n^2 a^2 = 0.
$$

Делаем замену $V^* = (v^*)^2$

$$
n^2 (V^*)^2 - V^* \left(a^2 + b^2 + n^2\right) + a^2 = 0,
$$

находим дискриминант

$$
D = \left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 - 4n^2 a^2 = b^4 + 2a^2 b^2 + 2n^2 b^2 + (a^2 - n^2)^2 > 0,
$$

получаем следующие корни квадратного уравнения

$$
V_{1,2}^* = \frac{(a^2 + b^2 + n^2) \pm \sqrt{\left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 - 4n^2 a^2}}{2n^2}.
$$

Значение $V_{1,2}^* > 0$, т.к.

$$
a^2 + b^2 + n^2 \ > \ \sqrt{\left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 - 4n^2 a^2};
$$

$$
\left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 \ > \ \left(a^2 + b^2 + n^2\right)^2 - 4n^2 a^2.
$$

Получили 4 действительных попарно-сопряжённых корня

$$v^*_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{V^*_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}}.$$

Возвращаемся к системе (16). Из первого уравнения:

$$c_n^0 = \frac{(\gamma-1)}{2v^*} v_{3n}^0. \tag{17}$$

Из третьего уравнения:

$$v_{2n}^0 = -\frac{a}{nv^*} v_{1n}^0. \tag{18}$$

Из второго уравнения:

$$v_{1n}^0 = -v_{3n}^0 \frac{bnv^*}{a^2 - n^2(v^*)^2}. \tag{19}$$

Подставляем все в четвёртое уравнение:

$$nv_{3n}^0 \left[ v^* - \frac{1}{v^*} + \frac{b^2 v^*}{a^2 - n^2(v^*)^2} \right] = 0.$$

Рассмотрим отдельно

$$v^* - \frac{1}{v^*} - \frac{b^2 v^*}{a^2 - n^2(v^*)^2} = \frac{(v^*)^2\,(a^2 - n^2(v^*)^2) - a^2 + n^2(v^*)^2 + b^2(v^*)^2}{(v^*)^2\,(a^2 - n^2(v^*)^2)}.$$

В числителе получили исходное уравнение, корень которого есть $v^*$

$$-n^2(v^*)^4 + (v^*)^2\left[a^2+b^2+n^2\right] - a^2 = -\left[n^2(v^*)^4 - (v^*)^2\left[a^2+b^2+n^2\right] + a^2\right] = 0.$$

Таким образом, уравнение для $v_{3n}^0$ является таким:

$$v_{3n}^0 \cdot 0 = 0,$$

т. е. в качестве значения $v_{3n}^0$ можно брать любое число.

В результате искомое частное решение системы (3) задаётся формулами:

$$\begin{cases} c(t,z) = c_n^0 \cos(nv^*t)\cos nz; \\ v_1(t,z) = v_{1n}^0 \cos(nv^*t)\sin nz; \\ v_2(t,z) = v_{2n}^0 \sin(nv^*t)\sin nz; \\ v_3(t,z) = v_{3n}^0 \sin(nv^*t)\sin nz, \end{cases} \tag{20}$$

где $v_{3n}^0$ — произвольная константа, а остальные коэффициенты задаются формулами (17), (18), (19).

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (20) системы (3) является бегущей волной

$$\begin{cases} c(t,z) = 0{,}5c_n^o(\cos[n(z+v^*t)] + \cos[n(z-v^*t)]); \\ v_1(t,z) = 0{,}5v_{1n}^0(\sin[n(z+v^*t)] + \sin[n(z-v^*t)]); \\ v_2(t,z) = 0{,}5v_{2n}^0(\cos[n(z+v^*t)] - \cos[n(z-v^*t)]); \\ v_3(t,z) = 0{,}5v_{3n}^0(\cos[n(z+v^*t)] - \cos[n(z-v^*t)]), \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных

$$z \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью:

$$v^*_{1z,2z} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}}.$$

Данное обозначение введено, чтобы отличать случай зависимости от $y$.

Сделаем оценку $v^*_{1z,2z}$. Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2\psi + 4\Omega^2 \cos^2\psi = 4\Omega^2.$$

Тогда

$$(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2 = n^4 + (a^2+b^2)^2 + 2n^2(b^2 - a^2) =$$

$$= n^4 + 16\Omega^4 + 8\Omega^2 n^2(\cos^2\psi - \sin^2\psi).$$

Последнее выражение заведомо будет больше $n^4$, если

$$\cos^2\psi - \sin^2\psi \geqslant 0, \qquad (21)$$

то есть для случая Северного полушария, если

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

В случае Южного полушария для выполнения неравенства (21) требуется выполнение неравенства

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant 0.$$

Значит,

$$\sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2} > n^2,$$

$$\left(a^2+b^2+n^2\right) + \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2} > 2n^2.$$

Таким образом,

$$v^*_{1z} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) + \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} > 1$$

и

$$v^*_{2z} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+n^2) - \sqrt{(a^2+b^2+n^2)^2 - 4n^2a^2}}{2n^2}} < 1,$$

если выполнено неравенство (21), причём $v^*_{2z} < 1 < v^*_{1z}$.

## Заключение

В работе в случае неучёта силы тяжести проведена линеаризация линейной системы уравнений с частными производными на точном решении — однородном покое. В случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы построено несколько конкретных решений, являющихся бегущими волнами. Для случая каждой из независимых переменных $y$ и $z$ получено по две скорости распространения бегущих волн. Причём для конкретных широт и в случае независимой переменной $y$, и в случае независимой переменной $z$ одна из скоростей больше единицы.

Наличие для системы уравнений газовой динамики нескольких скоростей распространения бегущих волн является достаточно неожиданным фактом. Подобное происходит только в случае многокомпонентных сред [10]. Очевидно, этот факт связан с тем, что в системе уравнений газовой динамики учитывается действие силы Кориолиса, когда $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

## Литература


1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / Баутин С.П. [и др.]. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / Баутин С.П. [и др.]. Екатеринбург : УрГУПС. 2017. 216 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
7. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Сборник «Численные методы механики сплошной среды». ВЦ СО АН СССР. 1973, Т. 4, № 1. С. 3–15.
8. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
9. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса: препринт. Снежинск : СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019. 52 с.
10. Баутин С.П. Скорость звука в многокомпонентной покоящейся среде // Прикладная механика и техническая физика, 2008. Т. 49, № 3. С. 35–44.

**PARTICULAR SOLUTIONS OF A LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS EQUATIONS IN THE ABSENCE OF GRAVITY TAKING INTO ACCOUNT THE ACTIONS OF THE CORIOLIS FORCE**

**Bautin S. P.**
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: SBautin@usurt.ru
**Bugaenko A. A.**
Post Graduate Student, e-mail: bugaenkoanya@yandex.ru
**Krutova I. Yu.**
Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI", Snezhinsk, Russia

**Abstract.** For the system of gas dynamics equations, taking into account the action of the Coriolis force, linearization is carried out in case when the effect of gravity is not taken into account. Particular solutions in the form of running waves are found.

**Keywords:** system of equations of gas dynamics, Coriolis force, linearization, exact solutions.

## References

1. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
2. Razrushitel'nye atmosfernye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty. Bautin S.P. [i dr.], Novosibirsk, Nauka Publ.; Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2013, 216 p. (in Russian)
3. Razrushitel'nye atmosfernye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug osi. Bautin S.P. [i dr.], Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017, 216 p. (in Russian)
4. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenii gaza pri uchete deistviya sily Koriolisa. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019, 181 p. (in Russian)
5. Bautin S.P. and Obukhov A.G. Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosfernykh vikhrei. Novosibirsk, Nauka Publ, 2012, 152 p. (in Russian)
6. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)
7. Bautin S.P. Analiticheskie resheniya zadachi o dvizhenii porshnya. Sbornik "Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy", VTs SO AN SSSR, 1973, vol. 4, no. 1, pp. 3–15. (in Russian)
8. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya kvazilineinoi analiticheskoi sistemy. Differentsial'nye uravneniya, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 2052–2063. (in Russian)
9. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Linearizovannaya sistema uravnenii gazovoi dinamiki pri uchete deistviya sily Koriolisa: preprint. Snezhinsk, SFTI NIYaU MIFI, 2019, 52 p. (in Russian)
10. Bautin S.P. Skorost' zvuka v mnogokomponentnoi pokoyashcheisya srede. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2008, vol. 49, no. 3, pp. 35–44. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 18.12.2019*