Математические структуры и моделирование
2019. №4(52). С. 56–69

УДК 517.95+533.6
DOI 10.24147/2222-8772.2019.4.56-69

ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПОСЛЕ РАСПАДА СПЕЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА С АВТОМОДЕЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

С.Л. Дерябин[1]
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: SDeryabin@usurt.ru
А.С. Кирьянова[2]
м.н.с., e-mail: kiryanova@imach.uran.ru

[1]ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения» (УрГУПС)
[2]ФГБУН «Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук» (ИМАШ УрО РАН)

Аннотация. В работе рассматриваются двумерные изэнтропические течения политропного газа, возникающие после мгновенного разрушения непроницаемой стенки в начальный момент времени, отделяющей неоднородный покоящийся газ от вакуума. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики с учётом силы тяжести. С помощью начальных данных строится фоновое течение и распространяющаяся по нему звуковая характеристика. В системе уравнений газовой динамики вводится автомодельная особенность в независимую переменную x и для полученной системы ставится задача Коши с данными на звуковой характеристике. Из необходимых условий разрешимости находятся начальные условия. Далее решение начально-краевой задачи строится в виде степенного ряда. Коэффициенты ряда находятся при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Истечение газа в вакуум, распад специального разрыва, система уравнений газовой динамики, сила тяжести, автомодельные переменные, начально-краевая задача, степенные ряды.

Введение

Среди задач об истечении газа в вакуум выделяется задача о распаде специального разрыва. Впервые эту задачу решил Риман для плоско-симметричных течений. Пусть слева от непроницаемой поверхности $x = 0$ находится покоящийся газ, а справа — вакуум, в момент времени $t = 0$ непроницаемая стенка $x = 0$ мгновенно разрушается, и начинается истечение газа в вакуум. Эта задача называется задачей о распаде специального разрыва. Введя в систему уравнений газовой динамики автомодельную переменную $y = \frac{x}{t}$, Риман нашёл точное решение [1]

$$u = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}+c_0\right), \qquad c = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{x}{t}+\frac{2}{\gamma+1}c_0,$$

которое получило название центрированной волны Римана. Причём начальные значения параметров газа разрывны в точке $x = 0$. Таким образом Риману удалось построить решение задачи о распаде специального разрыва в физическом пространстве, когда из разрывных начальных данных при $t = 0$ получается течение газа непрерывное при $t > 0$.

В дальнейшем решение задачи о распаде специального разрыва для одномерных и многомерных течений удавалось построить в виде сходящихся рядов только в специальном функциональном пространстве [2]–[8]. Начально-краевая задача ставилась в пространстве, где независимая пространственная переменная и неизвестная функция плотности газа (или скорости звука газа) менялись ролями. В частности, было построено двумерное решение задачи о распаде специального разрыва при учёте силы тяжести [6]. Основным достоинством этих работ является получение закона движения границы газ-вакуум и значений параметров газа на ней. Это позволило получить граничные условия для численного моделирования течений, примыкающих к вакууму. Тем не менее применение построенных решений для численного моделирования течений в физическом пространстве представляет большие трудности. Поэтому в данной работе будет построено решение задачи о распаде специального разрыва в физическом пространстве с помощью введения автомодельной особенности в независимую переменную x.

1. Постановка задачи

Будут рассматриваться двумерные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; u, w — декартовы координаты вектора скорости газа; t, x, z — независимые переменные. Здесь: ρ — плотность газа; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа.

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ с уравнением $x = 0$ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что газ находится справа от стенки, а вакуум — слева и на газ действует сила тяжести (1). Будет предполагаться, что в начальный момент времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_\Gamma > 0$, то есть имеет место разрыв плотности газа.

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается вдоль стенки $z = 0$ истечение газа в вакуум (2). В рассматриваемой задаче сохраняется область покоящегося газа. В результате распада разрыва возникает течение, граничащее с областью покоящегося газа и называемое далее волной разрежения. Волна разрежения отделена от области покоящегося газа линией Γ_{12}, являющейся звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_{02}.

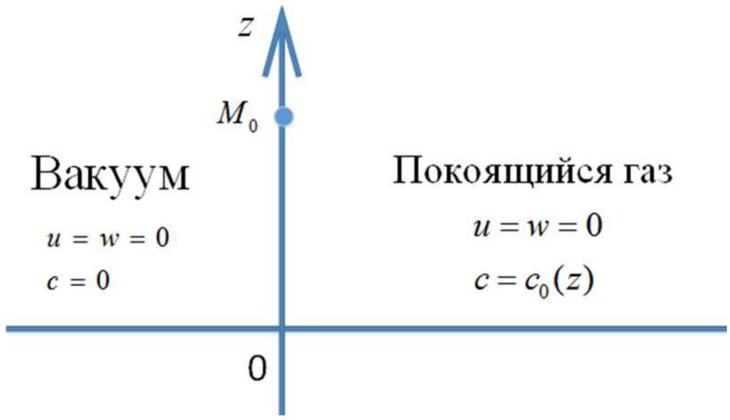

Рис. 1. *Области покоя и вакуума*

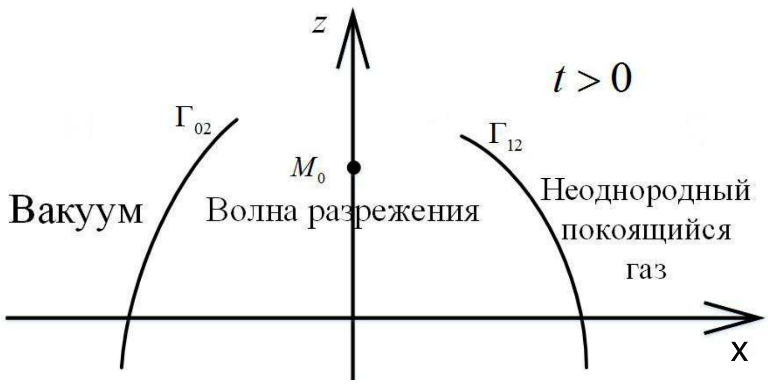

Рис. 2. *Области покоя, вакуума и волны разрежения*

В данной работе будут строиться закон движения звуковой характеристики Γ_{12} и волна разрежения.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия силы тяжести, имеет вид [2]:

$$\begin{gathered}
c_t + c_x u + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + w_z) = 0, \\
u_t + u_x u + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x = 0, \\
w_t + w_x u + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z = -g,
\end{gathered} \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения.

В [6] неоднородный покоящийся газ определялся следующими формулами: $u = w = 0, \quad c = c^0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$.

Закон движения характеристики $\Gamma_{12}: \quad x = x_0(t, z)$ определяется из решения дифференциальной задачи [1]

$$x_{0t} = c^0(z)\sqrt{1 + x_{0z}^2}, \qquad x_0(0, z) = 0. \tag{2}$$

По теореме Ковалевской, задача (2) имеет единственное аналитическое решение. Представим это решение в виде ряда по степеням t

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{0k}(z)\frac{t^k}{k!}. \tag{3}$$

Из уравнения (2) имеем

$$x_{00}(z) = 0, \qquad x_{01}(z) = c^0(z).$$

Продифференцируем уравнение (2), получим

$$x_{0tt} = c^0(z)\frac{x_{0z}x_{0tz}}{\sqrt{1+x_{0z}^2}}, \qquad x_{02}(z) = 0.$$

Продифференцируем уравнение (2) два раза, будем иметь

$$x_{0ttt} = c^0(z)\left[\frac{x_{0z}^2 x_{0tz}^2}{\sqrt{(1+x_{0z}^2)^3}} + \frac{x_{0tz}^2 + x_{0z}x_{0ttz}}{\sqrt{1+x_{0z}^2}}\right], \qquad x_{03}(z) = c^0(z)c_z^{02}(z).$$

Поскольку $c_z^0(z) = \dfrac{-(\gamma-1)g}{2\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma-1)gz}} = \dfrac{-(\gamma-1)g}{2c^0(z)}$, то $x_{03}(z) = \dfrac{(\gamma-1)^2g^2}{4c^0(z)}$.

Лемма 1. *Коэффициенты ряда (3) имеют следующий вид* $x_{02k} = 0$.

Лемма доказывается индукцией по k. База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (3). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование уравнения (2) приводит к нулевой правой части соответствующего коэффициента.

Единственное аналитическое решение задачи (2), что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12}:

$$u|_{\Gamma_{12}} = 0, \qquad w|_{\Gamma_{12}} = 0, \qquad c|_{\Gamma_{12}} = c^0(z). \tag{4}$$

В системе (1) сделаем следующую замену переменных

$$t = t', \qquad z = z', \qquad y = \frac{x - x_0(t,z)}{t}.$$

Тогда производные пересчитаются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \left(\frac{y}{t} + \frac{x_{0t}}{t}\right)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{x_{0z}}{t}\frac{\partial}{\partial y}.$$

В дальнейшем штрих опускается. В новых переменных характеристика Γ_{12} задаётся уравнением $y = 0$.

В результате такой замены вместо системы (1) получается система:

$$
\begin{aligned}
&t(c_t + c_z w) + (u - y - x_{0t} - x_{0z} w) c_y + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_y - x_{0z} w_y + t w_z) = 0,\\
&t(u_t + u_z w) + (u - y - x_{0t} - x_{0z} w) u_y + \frac{2}{\gamma - 1} c c_y = 0,\\
&t(w_t + w_z w) + (u - y - x_{0t} - x_{0z} w) w_y + \frac{2}{\gamma - 1} c(t c_z - x_{0z} c_y) = -gt.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Заметим также, что поверхность $t = 0$ является характеристикой кратности три. Это значит, начальные условия для системы (5) нельзя задать произвольным образом. Они получаются из необходимых условий разрешимости, которые должны быть согласованы с условиями (4).

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем систему (5). Второе уравнение системы умножим на $\frac{\gamma-1}{2}$ и прибавим к первому уравнению, после преобразований получим

$$
\begin{aligned}
&(u + c - y - x_{0t} - x_{0z} w)\left(c_y + \frac{\gamma - 1}{2} u_y\right) - \frac{\gamma - 1}{2} x_{0z} c w_y +\\
&+ t\left[(c_t + c_z w) + \frac{\gamma - 1}{2}(u_t + u_z w) + \frac{\gamma - 1}{2} c w_z\right] = 0,\\
&\frac{2}{\gamma - 1} c c_y + (u - y - x_{0t} - x_{0z} w) u_y + t(u_t + u_z w) = 0,\\
&- \frac{2}{\gamma - 1} x_{0z} c c_y + \left(u - y - x_{0t} - x_{0z} w) w_y + t(w_t + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z + g\right) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

В системе (6) положим $t = 0$, получим уравнения для определения начальных условий:

$$
\begin{aligned}
&(u_0 + c_0 - y - c^0(z))\left(c_{0y} + \frac{\gamma - 1}{2} u_{0y}\right) = 0,\\
&\frac{2}{\gamma - 1} c_0 c_{0y} + (u_0 - y - c^0(z)) u_{0y} = 0,\\
&(u_0 - y - c^0(z)) w_{0y} = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Учитывая условия (4), из третьего уравнения системы (7) получаем

$$w_{0y} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$w_0 = w_{00}(z).$$

Учитывая, что начальные условия при $t = 0$ и условия (4) должны быть согласованы, имеем

$$w_0 = 0.$$

Из первого уравнения системы (7) имеем

$$u_0 - y - c^0(z) = -c_0. \tag{8}$$

Подставляя $u_0 - y - c^0(z)$ во второе уравнение системы (7), получим

$$u_{0y} = \frac{2}{(\gamma-1)} c_{0y}.$$

Интегрируя, имеем

$$u_0 = \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 + u_{00}(z).$$

Учитывая условия (4), имеем

$$u_0 = \frac{2}{(\gamma-1)} [c_0 - c^0(z)].$$

Тогда из соотношения (8) имеем

$$u_0 = \frac{2}{(\gamma-1)} [-u_0 + y + c^0(z) - c^0(z)].$$

Из этого равенства выражаем u_0

$$u_0 = \frac{2}{\gamma+1} y.$$

Из соотношения (8) получаем

$$c_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} y + c^0(z).$$

В результате имеем начальные условия для системы (6):

$$\begin{aligned} &c(t,y,z)|_{t=0} = c_0(y,z) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}[y + 2\alpha c^0(z)], \\ &u(t,y,z)|_{t=0} = u_0(y,z) = \frac{2}{\gamma+1} y, \\ &w(t,y,z)|_{t=0} = w_0(y,z) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, и справедливы соотношения

$$c_{0y} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1},\ u_{0y} = \frac{2}{\gamma+1},\ c_{0z} = c^0_z(z),\ u_{0z} = 0. \tag{10}$$

2. Построение волны разрежения

Решение задачи (4), (6), (9) будем строить в виде ряда по степеням t

$$\mathbf{f}(t,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{f}_k(y,z)\frac{t^k}{k!}\ , \quad \mathbf{f}=\{c,u,w\}. \tag{11}$$

Нулевые коэффициенты ряда (11) определяются из начальных условий (9). Систему (6) продифференцируем по t, положим $t=0$, с учётом (9) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}(u_1+c_1)+c_1+\frac{\gamma-1}{2}u_1=0,\\
&u_1+(u_0-y-c^0(z))u_{1y}+u_1u_{0y}+\frac{2}{\gamma-1}c_0c_{1y}+\frac{2}{\gamma-1}c_1c_{0y}=0,\\
&w_1+(u_0-y-c^0(z))w_{1y}+\frac{2}{\gamma-1}c_0(c_{0z}-c^0_zc_{0y})=-g.
\end{aligned} \tag{12}$$

После преобразований третье уравнение системы (12) будет иметь вид

$$[y+2\alpha c^0(z)]w_{1y}-2\alpha w_1=2\alpha g+\frac{4}{\gamma^2-1}[y+2\alpha c^0(z)]c^0_z.$$

Выпишем решение третьего уравнения системы (12) в квадратурах

$$w_1=[y+2\alpha c^0(z)]^{2\alpha}(w_{10}(z)+$$

$$+\int\left(2\alpha g+\frac{4}{(\gamma^2-1)}c^0_z(z)[y+2\alpha c^0(z)]\right)[y+2\alpha c^0(z)]^{-2\alpha-1}dy).$$

Вычисляя интеграл, имеем

$$w_1=w_{10}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^{2\alpha}-\frac{2}{\gamma+1}c^0_z(z)[y+2\alpha c^0(z)]-g.$$

Поскольку $\dfrac{2}{\gamma-1}c^0(z)c^0_z(z)=-g$, имеем

$$w_1=w_{10}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^{2\alpha}-\frac{2}{\gamma+1}c^0_z(z)y.$$

Используя условия (4), найдём $w_{10}(z)$, для этого положим $w_1=0$ и $y=0$, получим

$$[2\alpha c^0(z)]^{2\alpha}w_{10}(z)=0, \qquad w_{10}(z)=0.$$

Окончательно имеем

$$w_1=-\frac{2}{\gamma+1}c^0_z(z)y.$$

Из первого уравнения системы (12) получаем

$$\frac{(\gamma+5)(\gamma-1)}{2(\gamma+1)}u_1+\frac{3\gamma-1}{(\gamma+1)}c_1=0.$$

Из соотношения находим u_1

$$u_1 = -\frac{6\gamma - 2}{(\gamma-1)(\gamma+5)} c_1.$$

Тогда второе уравнение системы (12) перепишется в виде

$$c_0 \left(1 + \frac{3\gamma - 1}{(\gamma+5)}\right) c_{1y} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1 - \frac{(\gamma+3)(3\gamma-1)}{(\gamma-1)(\gamma+5)}\right) c_1 = 0$$

или

$$\frac{4(\gamma+1)}{(\gamma+5)} c_0 c_{1y} - 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+5)} c_1 = 0.$$

Сокращая, будем иметь

$$2c_0 c_{1y} - c_1 = 0.$$

Окончательно получим

$$[y + 2\alpha c^0(z)] c_{1y} = \alpha c_1.$$

Интегрируя, имеем

$$lc_1 = c_{10}(z)[y + 2\alpha c^0(z)]^\alpha,$$
$$u_1 = -\frac{6\gamma - 2}{(\gamma-1)(\gamma+5)} c_{10}(z)[y + 2\alpha c^0(z)]^\alpha.$$

Учитывая условия (4), из второго соотношения получаем $c_{10}(z) = 0$. Следовательно

$$u_1 = c_1 = 0. \tag{13}$$

Систему (6) продифференцируем по t дважды, положим $t = 0$, с учётом (8), (13) получим

$$\begin{gathered}
\left(2 + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\right) c_2 + \frac{\gamma-1}{2}\left(2 + \frac{4}{\gamma+1}\right) u_2 = 2\frac{\gamma-1}{2} c_0 \left(c_z^0(z) w_{1y} - w_{1z}\right) + \\
+ \left(\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1} c^0(z) - 2c_z^0(z)\right) w_1 + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} c_z^{02}(z) c^0(z), \\
2u_2 - c_0 u_{2y} + u_{0y} u_2 - 2u_{0y} c_z^0(z) w_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_0 c_{2y} + \frac{2}{\gamma-1} c_{0y} c_2 - \\
- u_{0y} c_z^{02}(z) c^0(z) = 0, \\
2w_2 - c_0 w_{2y} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Интегрируя третье уравнение системы (14), имеем

$$w_2 = w_{20}(z)[y + 2\alpha c^0(z)]^{4\alpha}.$$

Учитывая условия (4), получим

$$w_2 = 0.$$

Из первого уравнения системы (14) находим u_2

$$lu_2 = -\frac{4\gamma}{(\gamma+3)(\gamma-1)}c_2 + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma+3)}c_0(c_z^0(z)w_{1y} - w_{1z}) + \\ + \frac{2(\gamma-3)}{(\gamma-1)(\gamma+3)}c_z^0(z)w_1 + \frac{2}{\gamma+3}c_z^{02}(z)c^0(z)$$

и

$$lu_{2y} = -\frac{4\gamma}{(\gamma+3)(\gamma-1)}c_{2y} + \frac{(\gamma+1)}{(\gamma+3)}c_0(c_z^0(z)w_{1yy} - w_{1zy}) + \\ + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+3)}(c_z^0(z)w_{1y} - w_{1z}) + \frac{2(\gamma-3)}{(\gamma-1)(\gamma+3)}c_z^0(z)w_{1y}.$$

Подставляя u_2 и u_{2y} во второе уравнение системы (14), имеем

$$\frac{2}{\gamma-1}c_0\left(\frac{2\gamma}{(\gamma+3)}+1\right)c_{2y} + \frac{2}{\gamma+1}\left(1 - \frac{(\gamma+2)4\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+3)}\right)c_2 = F_2(y,z),$$

после преобразований имеем

$$l\frac{6}{\gamma-1}c_0\frac{\gamma+1}{(\gamma+3)}c_{2y} - \quad \frac{6}{\gamma+1}\frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+3)}c_2 = F_2(y,z).$$

В результате окончательно получаем

$$[y + 2\alpha c^0(z)]c_{2y} - 2\alpha c_2 = \frac{(\gamma+3)}{6}F_2(y,z),$$

где

$$lF_2(y,z) = -\frac{\gamma+1}{\gamma+3}(w_{1yz} - c_z^0(z)w_{1yy})c_0^2 + \frac{\gamma+5}{(\gamma+3)}w_{1z}c_0 - \\ - \frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma+3)(\gamma-1)}c_z^0(z)w_{1y}c_0 + \frac{4(3\gamma+2)}{(\gamma^2-1)(\gamma+3)}c_z^0 w_1 - \frac{2}{\gamma+3}c_z^{02}(z)c^0(z).$$

Перепишем w_1 в виде

$$w_1 = -\frac{2}{\gamma-1}c_z^0(z)c_0 - g,$$

соответствующие производные для w_1 вычисляются по следующим формулам

$$w_{1y} = -\frac{2}{\gamma+1}c_z^0(z), \qquad w_{1yy} = 0,$$

$$w_{1z} = -\frac{2}{\gamma-1}c_{zz}^0(z)c_0 - \frac{2}{\gamma-1}c_z^{02}(z), \qquad w_{1yz} = -\frac{2}{\gamma+1}c_{zz}^0(z).$$

$F_2(y,z)$ перепишется в виде

$$lF_2(y,z) = \frac{16}{(\gamma+3)(\gamma-1)}c_{zz}^0(z)c_0^2 - \frac{8(\gamma+2)}{(\gamma-1)^2(\gamma+3)}c_z^{02}(z)c_0 - \\ - \frac{4(3\gamma+2)}{(\gamma^2-1)(\gamma+3)}c_z^0 g - \frac{2}{\gamma+3}c_z^{02}(z)c^0(z).$$

Подставляя c_0, имеем

$$l\frac{(\gamma+3)}{6}F_2(y,z)=\frac{8(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2}c^0_{zz}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^2+\frac{4(\gamma+2)}{3(\gamma^2-1)}c^{02}_z(z)[y+2\alpha c^0(z)]-$$
$$-\frac{2(3\gamma+2)}{3(\gamma^2-1)}c^0_z(z)g-\frac{1}{3}c^{02}_z(z)c^0(z).$$

Тогда решения дифференциальных уравнений (14) запишутся в виде

$$c_2=c_{20}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^{2\alpha}-\frac{8(\gamma-1)^2}{3(3-\gamma)(\gamma+1)^2}c^0_{zz}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^2-$$
$$-\frac{2(\gamma+2)}{3(\gamma+1)}c^{02}_z(z)[y+2\alpha c^0(z)]+\frac{2(3\gamma+2)}{3(\gamma+1)^2}c^0_z(z)g-\frac{\gamma-1}{3(\gamma+1)}c^{02}_z(z)c^0(z),$$
$$u_2=-\frac{4\gamma}{(\gamma+3)(\gamma-1)}c_2+\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)(\gamma+3)}c^0_{zz}(z)[y+2\alpha c^0(z)]^2+ \tag{15}$$
$$+\frac{8}{(\gamma^2-1)(\gamma+3)}c^{02}_z(z)[y+2\alpha c^0(z)]-\frac{2(\gamma-3)}{(\gamma-1)(\gamma+3)}c^0_z(z)g+\frac{2}{(\gamma+3)}c^{02}_z(z)c^0(z).$$

Определим $c_{20}(z)$, подставив в левую часть равенства (15) $c_2=0$, а в правую — часть равенства $y=0$,

$$lc_{20}(z)=[2\alpha c^0(z)]^{-2\alpha}\left[\frac{8}{3(3-\gamma)}c^0_{zz}(z)c^{02}(z)-\frac{2(\gamma+2)}{3(\gamma-1)}c^{02}_z(z)c^0(z)-\right.$$
$$\left.-\frac{2(3\gamma+2)}{3(\gamma+1)^2}c^0_z(z)g+\frac{\gamma-1}{3(\gamma+1)}c^{02}_z(z)c^0(z)\right].$$

Систему (6) продифференцируем k раз по t, положим $t=0$, с учётом (7), (9) получим

$$\begin{aligned}&\left(k+\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\right)c_k+\frac{\gamma-1}{2}\left(k+\frac{4}{\gamma+1}\right)u_k=F_{1k}(y,z),\\&\frac{2}{\gamma-1}c_0c_{ky}-c_0u_{ky}+\frac{2}{\gamma+1}c_k+\left(k+\frac{2}{\gamma+1}\right)u_k=F_{2k}(y,z),\\&kw_k-c_0w_{ky}=F_{3k}(y,z).\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь функции F_{1k}, F_{2k}, F_{3k} — известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (11).

Интегрируя третье уравнение системы (16), имеем

$$w_k=[y+2\alpha c^0(z)]^{2\alpha k}[w_{k0}(z)-\int F_{3k}(y,z)[y+2\alpha c^0(z)]^{-2\alpha k-1}dy].$$

Из первого уравнения системы (16) находим u_k и u_{ky}

$$lu_k=-\frac{(2k+4)\gamma+2k-4}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}c_k+\frac{2\gamma+2}{k\gamma+k+4}F_{1k}$$
$$u_{ky}=-\frac{(2k+4)\gamma+2k-4}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}c_{ky}+\frac{2\gamma+2}{k\gamma+k+4}F_{1ky}.$$

Подставляя u_k и u_{ky} во второе уравнение системы (16), имеем

$$l\frac{2}{\gamma-1}c_0\left(\frac{(k+2)\gamma+k-2}{(k\gamma+k+4)}+1\right)c_{ky}+$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}\left(1-\frac{(k\gamma+k+2)((k+2)\gamma+k-2)}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}\right)c_k=$$
$$=F_{2k}+\frac{2(\gamma+1)}{k(\gamma+1)+4}c_0F_{1ky}-\frac{2(k(\gamma+1)+2)}{k(\gamma+1)+4}F_{1k}=F_k^+$$

или

$$l\frac{4(k+1)(\gamma+1)}{(\gamma-1)(k\gamma+k+4)}c_0c_{ky}-\frac{2}{\gamma+1}\frac{k(k+1)(\gamma+1)^2}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}c_k=F_k^+,$$

после преобразований имеем

$$l2c_0c_{ky}-kc_k=\frac{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}{2(k+1)(\gamma+1)}F_k^+.$$

Подставляя c_0 окончательно, получаем

$$[y+2\alpha c^0(z)]c_{ky}-\alpha kc_k=F_k(y,z),$$

здесь $F_k(y,z)=\dfrac{(k\gamma+k+4)}{4(k+1)}F_k^+$.

Тогда решения дифференциальных уравнений (16) запишутся в виде

$$c_k=[y+2\alpha c^0(z)]^{\alpha k}\left[c_{k0}(z)+\int F_k(y,z)[y+2\alpha c^0(z)]^{-\alpha k-1}dy\right],$$

$$u_k=-\frac{(2k+4)\gamma+2k-4}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}\left[y+2\alpha c^0(z)]^{\alpha k}\left[c_{k0}(z)+\right.\right.$$
$$\left.+\int F_k(y,z)[y+2\alpha c^0(z)]^{-\alpha k-1}dy\right]+\frac{2\gamma+2}{k\gamma+k+4}F_{1k}(y,z).$$

Произвольные функции $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$ определяются из условий (4). Для этого в левую часть рядов (11) для u, w подставляется ноль, в правую часть — $y=0$, в результате имеем

$$0=u(t,0,z),\qquad 0=w(t,0,z).$$

Дифференцируя эти соотношения по t, подставляя $t=0$, получим алгебраические уравнения для определения $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$, имеющие вид

$$l\left[2\alpha c^0(z)\right]^{\alpha k}c_{k0}(z)=Q_{1k}(z),$$
$$\left[2\alpha c^0(z)\right]^{2\alpha k}w_{k0}(z)=Q_{2k}(z).$$

Здесь $Q_{1k}(z)$, $Q_{2k}(z)$ — функции известным образом зависящие от $c^0(z)$.

Поскольку $c^0(z)\neq 0$, то функции $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$ определяются единственным образом.

Анализ структуры коэффициентов ряда (11) приводит к

Лемма 2. *Коэффициенты ряда (11) при $k \geqslant 1$ имеют следующий вид* $u_{2k-1} = c_{2k-1} = 0, \quad w_{2k} = 0.$

Лемма доказывается индукцией по k. База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (11). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование системы (6) приводит к нулевой правой части соответствующего уравнения. В силу условий (4) это гарантирует нулевые значения соответствующих коэффициентов ряда (11).

Таким образом в виде ряда (11) построено решение задачи о распаде специального разрыва.

Литература

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
2. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, 2015. 191 с.
4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 5. С. 51–71.
5. Bautin S.P., Deryabin S.L. Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. V. 26, No. 4. P. 353–377.
6. Дерябин С.Л., Кирьянова А.С. Обобщение центрированной волны Римана при учёте силы тяжести // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 44–53.
7. Bautin S.P., Deryabin S.L. Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighbourhood of a shore line boundary // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 79, Issue 4. P. 358–366.
8. Дерябин С.Л., Кирьянова А.С. Математическое моделирование при учёте силы тяжести течений жидкости, возникающих в результате разрушения плотины // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4(44). С. 73–85.
9. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.

CONSTRUCTIONS OF TWO-DIMENSIONAL FLOWS ARISING AFTER THE DECAY OF A SPECIAL DISCONTINUITY WITH A SELF-SIMILAR SINGULARITY IN AN INDEPENDENT VARIABLE

S.L. Deryabin[1]
Dr.Sc., Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru
A.S. Kiryanova[2]
Junior Scientist Researcher, e-mail: ASKiryanova@imach.uran.ru

[1]Ural State University of Railway Transport (USURT)
[2]Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Abstract. The paper considers two-dimensional isentropic flows of polytropic gas, arising after the instantaneous destruction of the impermeable wall in the initial point in time separating a non-uniform resting gas from the vacuum. As a mathematical model, the system of equations of gas dynamics taking into account gravity is used. Using the initial data, the background flow and the sound characteristic propagating along it are built. In the system of equations of gas dynamics, a self-similar singularity is introduced into the independent variable x and the Cauchy problem with data on a sound characteristic is posed for the resulting system. From the necessary solvability conditions, the initial conditions are found. Next, the solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of a power series. The coefficients of the series are found when integrating ordinary differential equations.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary, initial-boundary value problem, Riemann problem, centered wave.

References

1. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki. Moscow, Izhevsk, In-t komp'yuternykh issledovanii Publ., 2003, 336 p. (in Russian)
2. Bautin S.P. and Deryabin S.L. Matematicheskoe modelirovanie istecheniya ideal'nogo gaza v vakuum. Novosibirsk, Nauka Publ., 2005. 390 p. (in Russian)
3. Bautin S.P., Deryabin S.L., Mezentsev A.V., and Chuev N.P. Nachal'no-kraevye zadachi dlya modelirovaniya dvizheniya sploshnoi sredy s osobennostyami na svobodnoi granitse. Novosibirsk, Nauka Publ., 2015, 191 p. (in Russian)
4. Deryabin S.L. and Mezentsev A.V. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie gazovykh techenii, primykayushchikh k vakuumu v usloviyakh deistviya sil tyagoteniya i Koriolisa. Vychislitel'nye tekhnologii, 2010, vol. 15, no. 5. pp. 51–71. (in Russian)
5. Bautin S.P., Deryabin S.L. Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., and Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling, 2011, vol. 26, no. 4, pp. 353–377.
6. Deryabin S.L. and Kir'yanova A.S. Obobshchenie tsentrirovannoi volny Rimana pri uchete sily tyazhesti. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 1(41), pp. 44–53. (in Russian)

7. Bautin S.P. and Deryabin S.L. Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighbourhood of a shore line boundary. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2015, vol. 79, issue 4, pp. 358–366.
8. Deryabin S.L. and Kir'yanova A.S. Matematicheskoe modelirovanie pri uchete sily tyazhesti techenii zhidkosti, voznikayushchikh v rezul'tate razrusheniya plotiny. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 4(44), pp. 73–85. (in Russian)
9. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 23.09.2019