Математические структуры и моделирование
2019. №4(52). С. 5–16

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2019.4.5-16

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе приводятся условия на класс функций и условие слабой зависимости, которые обеспечивают выполнение полученных ранее автором условий для применимости центральной предельной теоремы для симметрических функций от зависимых величин.

Ключевые слова: Симметрические функции, условие равномерно сильного перемешивания, центральная предельная теорема.

Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393].

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x. Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \overset{d}{=} \xi_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Пусть $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, $a_n = \mathbb{E}X_n$, $n = 1, 2, ...$, $b_n^2 = \mathbb{D}X_n \to \to \infty$, а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\widehat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n + m \to \infty, \tag{$\mathrm{R_f}$}$$

где символ $n+m \to \infty$ означает, что $n \to \infty$, а $m = m(n)$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Если b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(a_n + a_m - a_{n+m}) \to 0,\ n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

В работе [3] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n, n = 1,2,...\}$ — стационарная последовательность и пусть $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Для того, чтобы к последовательности $\{X_n\}$ была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\mathrm{R_f})$ и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ была равномерно интегрируема.*

Там же отмечалось, что условие $(\mathrm{R_f})$ не только является некоторым условием слабой зависимости, но и накладывает существенные ограничения на функцию f. В настоящей работе приводится класс функций и «общеупотребительное» условие слабой зависимости, которые обеспечивают выполнение условия $(\mathrm{R_f})$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

f1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

f2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

f3. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| + |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})| \to +\infty$, (то есть хотя бы одно из слагаемых в $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ стремится к бесконечности). Эквивалентность в f_3 понимается следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > N$, то

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|. \tag{1}$$

Если f — правильно меняющаяся функция порядка 1 на $+\infty$, то

$$f(x+y) \sim f(x) + f(y),\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \to +\infty$$

(см., например, лемму 2). Свойство f3 является аналогом этого соотношения. Простым переобозначением переменных из f3 легко получить $f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$, если $|\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \to +\infty$. Из f2 и f3 выводится

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) \sim f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_{n+1}, ..., x_{n+m}), \tag{2}$$

если $|f(x_1, x_2, ..., x_{n+m})| \to \infty$.

Если функция $g(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям f1–f3, а h — конечная нечётная функция, являющаяся правильно меняющейся порядка 1 на $+\infty$, то $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h(g(x_1, x_2, ..x_n))$ также удовлетворяет условиям f1–f3. В частности, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h(x_1 + x_2 + .. + x_n)$ удовлетворяет условиям f1–f3.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1,2,...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n} - \sigma$ — алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, ξ измерима относительно $\mathcal{F}_{\leqslant 0}$, η — относительно $\mathcal{F}_{\geqslant n}$, $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, $\mathbb{E}|\eta|^q < \infty$, $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, то

$$|\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{p}}(n)\mathbb{E}^{\frac{1}{p}}|\xi|^p\mathbb{E}^{\frac{1}{q}}|\eta|^q \tag{3}$$

[4, с. 392].

В работе [5] Магда Пелиград получила следующий широко известный результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания и пусть $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\mathbb{E}\xi_k = 0$, $\mathbb{E}\xi_k^2 < \infty$, $\sigma_n^2 = \mathbb{D}S_n$, $n = 1, 2, ...$, $\sigma_n \to \infty$, и*

$$n\sigma_n^{-2}\mathbb{E}\{\xi_1^2, \xi_1^2 > \varepsilon\sigma_n^2\} \to 0,\ n \to \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть $\sigma_n^{-1}X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, $n \to \infty$.

(Здесь и далее $\mathbb{E}\{\xi, A\} = \int\limits_A \xi\, \mathbb{P}(d\omega)$.)

Пусть, как и выше, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $n = 1, 2, ...$, но функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$.

В настоящей работе из теоремы 1 выводится следующее обобщение теоремы Пелиград.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$, и пусть*

$$b_n \to \infty, \quad nb_n^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 > \varepsilon b_n^2\} \to 0,\ n \to \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Лемма 1. *Если $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность — удовлетворяет условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$, $b_n \to \infty$, $n \to \infty$, и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема, то к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.*

Доказательство. Будем обозначать $X_{k,n} = f(\xi_k, ..., \xi_n)$, $k \leqslant n$. Введём симметризованные величины $X^*_{k,n} = X_{k,n} - X'_{k,n}$, $k \leqslant n$, где $X'_{k,n} = f(\xi'_k, ..., \xi'_n)$, а векторы $(\xi_k, ..., \xi_n)$ и $(\xi'_k, ..., \xi'_n)$ независимы и одинаково распределены. Ясно, что $X'_{k,n} \stackrel{d}{=} X_{k,n}$, $\mathbb{E}(X^*_n)^2 = 2b_n^2$, последовательность $\{X^*_n\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания с коэффициентом $\varphi^*(n) \leqslant 2\varphi(n)$ (см., например, [6, с. 174]).

Из слабых неравенств симметризации [1, с. 259] следует

$$\mathbb{P}\{|X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant 2\mathbb{P}\{|X^*_n| \geqslant x\} \leqslant 4\mathbb{P}\{|X_n - a_n| \geqslant x/2\},\ x \geqslant 0,$$

где μ_n — медиана X_n и $|\mu_n - a_n| \leqslant \sqrt{2}b_n$. Отсюда легко выводится

$$\mathbb{E}\{(X_n - \mu_n)^2,\ |X_n - \mu_n| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbb{E}\{(X^*_n)^2,\ |X^*_n| \geqslant x\} \leqslant 16\mathbb{E}\left\{(X_n - a_n)^2,\ |X_n - a_n| \geqslant x/2\right\}. \tag{4}$$

Пусть выполняется условие (1). Если $\tau_{n+m} = |X^*_{n+m}| + |X^*_n| + |X^*_{n+1,n+m}| < N$, то $b^{-1}_{n+m}|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+1,n+m}| = 0$, при достаточно больших n, а если $\tau_{n+m} \geqslant N$, то

$$|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+1,n+m}| \leqslant \varepsilon|X^*_{n+m}|. \tag{5}$$

Отсюда следует, что при любом $\delta > 0$ и при достаточно больших n

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+1,n+m}|}{b_{n+m}} > \delta\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon|X^*_{n+m}|}{b_{n+m}} > \delta,\ \tau_{n+m} \geqslant N\right\} \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{\delta^2},$$

что можно сделать сколь угодно малым выбором ε, так что $b^{-1}_{n+m}|X^*_{n+m} - X^*_n - X^*_{n+1,n+m}| \to 0$ по вероятности и

$$\frac{X^*_{n+m}}{b_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{X^*_n}{b_{n+m}} + \frac{X^*_{n+1,n+m}}{b_{n+m}}. \tag{6}$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\frac{X^*_{n+1,n+m}}{b_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{X^*_{n+1,n+r}}{b_{n+m}} + \frac{X^*_{n+r+1,n+m+r}}{b_{n+m}} - \frac{X^*_{n+m+1,n+m+r}}{b_{n+m}}. \tag{7}$$

В (7) $r = r(n) \to \infty$ можно выбрать столь медленно растущей, что

$$b^{-1}_{n+m}X^*_{n+1,n+r} \to 0,\ b^{-1}_{n+m}X^*_{n+m+1,n+m+r} \to 0$$

по вероятности, и тогда из (5), (6) и (7) следует

$$\frac{X^*_{n+m}}{b_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{X^*_n}{b_{n+m}} + \frac{X^*_{n+r+1,n+m+r}}{b_{n+m}}. \tag{8}$$

В силу (3)

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_n + X^*_{n+r+1,n+m+r}}{b_{n+m}}\right\} - \mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_n}{b_{n+m}}\right\}\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X^*_{n+r+1,n+m+r}}{b_{n+m}}\right\}\right| \leqslant$$

$\leqslant 4\varphi^{\frac{1}{2}}(r) \to 0$, $n \to \infty$, и из (8) и того, что $X^*_{n+r+1,n+m+r} \stackrel{d}{=} X^*_m$, получаем теперь условие (R_f) для последовательности $\{X^*_n\}$. В силу (4) из равномерной интегрируемости последовательности $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ следует равномерная интегрируемость $\{b_n^{-2}(X^*_n)^2\}$, и из теоремы 1 выводим, что к последовательности $\{X^*_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть $(\sqrt{2}b_n)^{-1}X^*_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, $n \to \infty$.

Воспользуемся теперь известным результатом Н.А. Сапогова [7]. Пусть U_n и V_n — независимые случайные величины, функции распределения величин U_n, $U_n + V_n$ и $\mathcal{N}(0,1)$ будем обозначать соответственно F_n, G_n и Φ. Если $\sup\limits_x |G_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \varepsilon_n$, $\mathbb{E}\{U_n, |U_n| \leqslant N_n\} = \alpha_n, \mathbb{E}\{U_n^2, |U_n| \leqslant N_n\} - \alpha_n^2 = \beta_n^2$, $N_n = \sqrt{-2\ln\varepsilon_n} + 1$, $F_n(0) = 1/2$, то из [7] следует

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{U_n - \alpha_n}{\beta_n} < x \right\} - \Phi(x) \right| \leqslant C\beta_n^{-3}(-\ln\varepsilon_n)^{-\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

где $C > 0$ — абсолютная константа.

Пусть μ_n — медиана X_n такая, что $\mathbb{P}\{X_n < \mu_n\} = 1/2$. (Без ограничения общности можем считать, что такая медиана существует, в противном случае мы можем вместо $\{X_n\}$ рассматривать последовательность $\{X_n + \eta_n\}$, где η_b — непрерывная величина, не зависящая от X_n и $\eta_n \to 0$ по вероятности. В этом случае «добавка» η_n не повлияет на предельное распределение $b_n^{-1}(X_n - a_n)$.) Положим $U_n = \dfrac{X_n - \mu_n}{\sqrt{2}b_n}$, $V_n = -\dfrac{X'_n - \mu_n}{\sqrt{2}b_n}$, тогда $U_n + V_n = \dfrac{X^*_n}{\sqrt{2}b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, так что $\sup\limits_x |G_n(x) - \Phi(x)| = \varepsilon_n \to 0$, $N_n = \sqrt{-2\ln\varepsilon_n} + 1 \to \infty$, $n \to \infty$. В силу (4) из равномерной интегрируемости $\{b_n^{-2}(X^*_n)^2\}$ следует равномерная интегрируемость $\{b_n^{-2}(X_n - \mu_n)^2\}$, так что $b_n^{-2}\mathbb{E}\left\{(X_n - \mu_n)^2, |X_n - \mu_n| > N_n b_n\right\} \to 0$, $n \to \infty$, и

$$\alpha_n = \mathbb{E}\left\{ \frac{X_n - \mu_n}{\sqrt{2}b_n}, |X_n - \mu_n| \leqslant N_n\sqrt{2}b_n \right\} = \frac{a_n - \mu_n}{\sqrt{2}b_n} + o_n(1),$$

$$\beta_n^2 = \mathbb{E}\left\{ \frac{(X_n - \mu_n)^2}{2b_n^2}, |X_n - \mu_n| \leqslant N_n\sqrt{2}b_n \right\} - \alpha_n^2 = \frac{\mathbb{E}(X_n - \mu_n)^2}{2b_n^2} - \frac{(a_n - \mu_n)^2}{2b_n^2} +$$

$+o_n(1) = 1/2 + o_n(1)$. Из (9) выводим теперь

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{U_n - \alpha_n}{\beta_n} < x \right\} - \Phi(x) \right| = \sup_x \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{X_n - a_n}{b_n} < x(1 + o_n(1)) \right\} - \Phi(x) \right| \to 0,$$

откуда следует $b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, $n \to \infty$. Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Последовательность $\{a_n^\rho\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а a_n — правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$, $\rho > 0$), тогда и только тогда, когда*

$$a_{n+m}^\rho \sim a_n^\rho + a_m^\rho, \quad n + m \to \infty.$$

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [8].
Обозначим

$$\overline{X}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k|,\ Y_k = f(\xi_k), \quad k,m,n \in \mathbb{N}\,.$$

Из (1) при достаточно больших $|X_k|$ и $i+m \leqslant k$ следует

$$(1+\varepsilon)|X_k| \geqslant |X_i| - |Y_{i+1}| - ... - |Y_{i+m-1}| - |X_{i+m,k}|. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $k \leqslant n$, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$, а $c_n \to \infty$. Если n таково, что при $|X_k| \geqslant \dfrac{c_n}{1+\varepsilon}$ выполняется (10) и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_j| \geqslant c_n\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_k \geqslant 3c_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i = \{\overline{X}_{i-1} < 3c_n \leqslant |X_i|\}$, $i = 1,...,n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = \{\overline{X}_k \geqslant 3c_n\}$. В силу (10) при $i \leqslant k-m$

$$\left\{|X_i| \geqslant 3c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m},\ |X_{i+m,k}| < c_n\right\} \subseteq \left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\},$$

то есть при $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\left\{|X_k| < \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} \subseteq \{X_i < 3c_n\} \cup \{|X_{i+m,k}| \geqslant c_n\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\},$$

откуда

$$\left\{|X_k| < \frac{c_n}{1+\varepsilon}, E_i\right\} \subseteq \{|X_{i+m,k}| \geqslant c_n, E_i\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}, E_i\right\}. \tag{11}$$

С помощью (11) и условия φ-перемешивания получаем

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_k \geqslant 3c_n\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left\{|X_k| < \frac{c_n}{1+\varepsilon},\ E_i\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{|X_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\{|X_{i+m,k}| \geqslant c_n, E_i\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{X_k \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \left(\max_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbb{P}\{|X_i| \geqslant c_n\} + \varphi(m)\right) \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\{E_i\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\} \leqslant \mathbb{P}\{X_k \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\} + \gamma\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant 3c_n\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Пусть $\varepsilon > 0$. Аналогично (10) из (1) при достаточно больших $|X_n|$ выводится

$$(1-\varepsilon)|X_n| \leqslant |X_{k-1}| + \sum_{j=k}^{k+m-1} |Y_j| + |X_{k+m,n}|. \tag{12}$$

Следующее предложение — это аналог неравенства М. Пелиград (леммы 3.1 из [5]).

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon > 0$, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$, а $c_n \to \infty$. Если n таково, что при $|X_n| \geqslant \dfrac{5c_n}{1-\varepsilon}$ выполняется (12) и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_j| \geqslant c_n\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant c_n\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1} < 3c_n \leqslant |X_k|\}$, $k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \{\overline{X}_n \geqslant 3c_n\}$. В силу (12)

$$\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon},\ E_k,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} \subseteq \{E_k,\ |X_{k+m,n}| \geqslant c_n\}. \tag{13}$$

Аналогично выводится

$$\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon},\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} \subseteq \left\{\overline{X}_{n-m} \geqslant 3c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\},$$

следовательно

$$\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon},\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} =$$
$$= \left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon},\ \overline{X}_{n-m} \geqslant 3c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\}. \tag{14}$$

С помощью (13) и (14) получаем

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}, \overline{X}_{n-m} \geqslant 3c_n,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}, E_k, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| < \frac{c_n}{m}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\}. \tag{15}$$

Из соотношений (13), (15) и условия φ-перемешивания следует

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{5c_n}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k,\ |X_{k+m,n}| \geqslant c_n\} + \mathbb{P}\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\} + \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_k| \geqslant c_n\} + \varphi(m)\right) \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k\} =$$

$$\leqslant \lambda \mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant 3c_n\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m}\right\}.$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 3 выводим утверждение леммы. ■

Лемма 5. *Пусть функция f, последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ удовлетворяют условиям леммы 4, где*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X_k| \geqslant c_n\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \tau = \frac{25\gamma}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} < 1.$$

Тогда если последовательность $\left\{c_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2\right\}$ равномерно интегрируема, то равномерно интегрируемой будет и последовательность $\{c_n^{-2}X_n^2\}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{E}\{\xi^2, |\xi| \geqslant N\} = -\int_N^\infty x^2\, d\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\} = N^2 \mathbb{P}\{|\xi| \geqslant N\} + 2\int_N^\infty x\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\}\, dx.$$

В силу леммы 4 при $N \geqslant 1$ и достаточно больших n

$$\mathbb{E}\left\{X_n^2,\ |X_n| \geqslant \frac{5Nc_n}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant \frac{25\gamma N^2 c_n^2}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} \mathbb{P}\{|X_n| \geqslant Nc_n\} +$$

$$+ \frac{50\gamma}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} \int_{Nc_n}^\infty x\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant x\}\, dx + \frac{25N^2c_n^2}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant \frac{Nc_n}{m}\right\} +$$

$$+ \frac{50}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} \int_{Nc_n}^\infty x\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant x\right\} dx = \tau \mathbb{E}\{X_n^2, |X_n| \geqslant Nc_n\} +$$

$$+ \frac{25}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2} \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant \frac{Nc_n}{m}\right\}. \qquad (16)$$

Пусть последовательность $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_n^{-2} Y_k^2\right\}$ равномерно интегрируема, то есть

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} c_n^{-2} \mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant Nc_n\right\} = 0$$

и пусть

$$R = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} c_n^{-2}\mathbb{E}\left\{X_n^2, |X_n| \geqslant Nc_n\right\}.$$

Из равномерной интегрируемости $\left\{c_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k|^2\right\}$ следует

$$A = \sup_{n\geqslant 1} c_n^{-2}\mathbb{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k|^2 < \infty,$$

и из (16) выводим

$$R_n = c_n^{-2}\mathbb{E}|X_n|^2 \leqslant \frac{25N^2}{(1-\varepsilon)^2} + \mathbb{E}\left\{X_n^2,\ |X_n| \geqslant \frac{5Nc_n}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \tau R_n + \frac{25}{(1-\gamma)(1-\varepsilon)^2}A,\ 0<\tau<1,$$

так что $\sup\limits_{n\geqslant 1} R_n < \infty,\ 0 \leqslant R < \infty$, а из (16) вытекает $R \leqslant \tau R$, следовательно, $R = 0$ и последовательность $\{c_n^{-2}X_n^2\}$ равномерно интегрируема. ■

Доказательство теоремы 3. Пусть $\bar{b}_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k$. В леммах 3–5, вместо $X_{k,n}$ подставим $X^*_{k,n}$ и положим $c_n = N\bar{b}_n$. Тогда

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\{|X^*_k| \geqslant c_n\} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2b_k^2}{N^2\bar{b}_n^2} = \frac{2}{N^2},$$

и, выбрав $N > 0$ и $m > 0$ достаточно большими, мы обеспечим выполнение условий лемм 3 - 5. Из (4) и леммы 5 следует, что из равномерной интегрируемости $\left\{\bar{b}_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2\right\}$ следует равномерная интегрируемость $\left\{\bar{b}_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (Y_k^*)^2\right\}$ и $\left\{\bar{b}_n^{-2}(X_n^*)^2\right\}$. Далее

$$\mathbb{E}\{(X_n-a_n)^2,\ |X_n-a_n| \geqslant N\bar{b}_n\} \leqslant 2\mathbb{E}\{(X_n-\mu_n)^2,\ |X_n-\mu_n| \geqslant N\bar{b}_n - |a_n-\mu_n|\} +$$

$$+2(a_n-\mu_n)^2\mathbb{P}\{|X_n-a_n| \geqslant N\bar{b}_n\} \leqslant \mathbb{E}\{(X_n-\mu_n)^2,\ |X_n-\mu_n| \geqslant N\bar{b}_n - \sqrt{2}b_n\} + 4\frac{b_n^2}{N^2},$$

и из (4) следует теперь, что вместе с $\left\{\bar{b}_n^{-2}(X_n^*)^2\right\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\left\{\bar{b}_n^{-2}(X_n-a_n)^2\right\}$.

Далее, в силу (1) при $r < m$

$$(1+\varepsilon)|X^*_{n+m}| \geqslant |X^*_n - X^*_{n+1,n+r} - X^*_{n+r+1,n+m}|$$

если $\tau = \max\{|X^*_{n+m}|, |X^*_n|, |X^*_{n+1,r}|, |X^*_{n+r+1,n+m}|\} \geqslant N = N(\varepsilon) > 0$. Отсюда

$$2(1+\varepsilon)b_{n+m}^2 \geqslant (1+\varepsilon)\mathbb{E}\{(X^*_{n+m})^2, \tau \geqslant N\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathbb{E}(X_n^* - X_{n+1,n+r}^* - X_{n+r+1,n+m}^*)^2 - 9N^2. \tag{17}$$

Имеем

$$\mathbb{E}(X_n^* - X_{n+1,n+r}^* - X_{n+r+1,n+m}^*)^2 = 2b_n^2 + 2b_r^2 + 2b_{m-r}^2 - 2\mathbb{E}X_n^* X_{n+1,n+r}^* -$$

$$-2\mathbb{E}X_n^* X_{n+r+1,n+m}^* - 2\mathbb{E}X_{n+1,n+r}^* X_{n+r+1,n+m}^* \tag{18}$$

Далее, $r = r(n) \to \infty$ будем считать растущей столь медленно, что $b_r = o(b_n)$. Тогда

$$|\mathbb{E}X_n^* X_{n+1,n+r}^*| \leqslant 2b_n b_r = o(b_n^2),\ \ |\mathbb{E}X_{n+1,n+r}^* X_{n+r+1,n+m}^*| \leqslant 2b_{m-r} b_r = o(b_{m-r}^2 + b_n^2),$$

а в силу (3)

$$|\mathbb{E}X_n^* X_{n+r+1,n+m}^*| \leqslant 4\,(\varphi^*(r))^{\frac{1}{2}}\, b_n b_{m-r} = o(b_n^2 + b_{m-r}^2).$$

Из (17) и (18) при достаточно больших n следует теперь

$$b_{n+m}^{-2} b_n^2 + b_{n+m}^{-2} b_{m-r}^2 \leqslant 3(1+\varepsilon)^2,$$

откуда $b_n^2 \leqslant 3(1+\varepsilon)^2 b_{n+m}^2$ при достаточно больших n и любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$. Это означает, что $\overline{b}_n = O(b_n)$ и из равномерной интегрируемости последовательности $\left\{\overline{b}_n^{-2}(X_n - a_n)^2\right\}$ следует теперь равномерная интегрируемость $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$. Из леммы 1 выводим, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема. Для завершения доказательства теоремы 3 осталось показать, что из условия

$$n b_n^{-2} \mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 > \varepsilon b_n^2\} \to 0,\ \ n \to \infty \tag{19}$$

следует равномерная интегрируемость последовательности $\left\{b_n^{-2} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2\right\}$. Так как $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^2$ и $Y_k \overset{d}{=} X_1$, то

$$\sup_{n\geqslant 1} b_n^{-2}\mathbb{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k^2, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k| \geqslant N b_n\right\} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant M} n b_n^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, |X_1| \geqslant N b_n\} +$$

$$+ \sup_{n\geqslant M} n b_n^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, |X_1| \geqslant N b_n\}.$$

В силу (19) второе слагаемое в правой части последнего неравенства можно сделать сколь угодно малым выбором $M > 0$, а при фиксированном M первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым выбором $N > 0$. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_3$, и пусть $b_n^2 \geqslant Cn,\ C > 0$. Тогда к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.*

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука. 1985.
3. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 5–11.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
5. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, No. 4. P. 1304–1313.
6. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions // Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics). Boston – Basel – Stuttgart : Birkhäuser, 1986. V.11. P. 165–192.
7. Сапогов Н.А. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределённой приближённо нормально // Вестник Ленинградского университета. 1959. Вып. 19. С. 78–105.
8. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и её применения. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.

ON ASYMPTOTICALLY NORMAL FUNCTIONS OF THE DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The paper gives conditions on the class of functions and the condition of weak dependence, that ensure the fulfillment of the conditions obtained earlier by the author for the applicability of the central limit theorem for symmetric functions of the dependent variables.

Keywords: symmetric functions, uniformly strong mixing condition, central limit theorem.

References

1. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL Publ., 1962, 719 p. (in Russian)
2. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1985. (in Russian)
3. Grin' A.G. O tsentral'noi predel'noi teoreme dlya simmetricheskikh funktsii ot zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 1(41), pp. 5–11. (in Russian)

4. Ibragimov I.A. and Linnik Yu.V. Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p. (in Russian)
5. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences. Ann. Probab., 1985, vol. 13, no. 4, pp. 1304–1313.
6. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions, Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics). Boston – Basel – Stuttgart, Birkhäuser, 1986, vol.11, pp. 165–192.
7. Sapogov N.A. O nezavisimykh slagaemykh summy sluchainykh velichin, raspredelennoi priblizhenno normal'no. Vestnik Leningradskogo universiteta, 1959, issue 19, pp. 78–105. (in Russian)
8. Grin' A.G. O minimal'nom uslovii slaboi zavisimosti v tsentral'noi predel'noi teoreme dlya statsionarnykh posledovatel'nostei. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 2002, vol. 47, no. 3, pp. 554–558. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.10.2019