

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 3(51)  
2019**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 3(51)**

Омск  
2019

**Математические структуры и моделирование.** — Омск : Омский государственный университет, 2019. — № 3(51). — 148 с.

ISSN 2222-8772 (print)

ISSN 2222-8799 (online)

#### **Редакционная коллегия**

- А. К. Гуц** — главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** — ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** — технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** — доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** — доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневарттовского государственного университета.
- А. Г. Гринь** — доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** — Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** — канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** — доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** — доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** — доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
- V. Kreinovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- В. А. Плетюхов** — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** — доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** — Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- A. Jadczyk** — Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

#### **Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».  
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

#### **Адрес редакции, издателя и типографии**

644077, Омская обл., г. Омск,  
пр-т Мира, д. 55а.

**Дата выхода в свет:** 05.11.2019.

**Тираж** 70 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

[guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru)

Электронная почта выпускающего редактора:

[lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

# СОДЕРЖАНИЕ

## Фундаментальная математика и физика

- В.В. Варламов. *Теоретико-групповое описание периодической системы элементов: III. 10-периодическое расширение* ..... 5
- А.К. Гуц, В.Н. Иванов. *Обнаружение и выделение полезных дискретных сигналов в периодических сбросах первичных частиц* ..... 21
- В.Н. Бородихин, М.М. Михайловский. *Компьютерное моделирование неравновесного критического поведения слабо неупорядоченной модели Поттса с числом спиновых состояний  $q = 3$*  ..... 45

## Прикладная математика и моделирование

- Д.Н. Горелов. *Размышления о турбулентности* ..... 54
- С.П. Баутин, И.Ю. Крутова. *Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса и её некоторые решения* ..... 59
- Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Межвидовая конкуренция в лесных фитоценозах как стратегическая биматричная игра* ..... 74
- В.А. Шовин. *Факторный анализ качественных показателей* ..... 88
- M. Beer, A. Gholamy, V. Kreinovich. *A Theoretical Explanation for the Efficiency of Generalized Harmonic Wavelets in Engineering and Seismic Spectral Analysis* ..... 97
- G. Acosta, E. Smith, V. Kreinovich. *Why Patients Do Not Always Follow Doctor's Advice: Systems Approach Explains Empirical Observation* ..... 105
- Julio C. Urenda and Vladik Kreinovich. *Why Experts Sometimes Do Not Perform Well in Unusual Situations* ..... 109
- F. Zapata, O. Kosheleva, V. Kreinovich. *How We Can Explain Simple Empirical Memory Rules* ... 114

*Продолжение на следующей странице*

# Наши публикации



## Компьютерные науки

- С.В. Лейхтер, С.Н. Чуканов. *Применение аффинной нормализации для повышения точности сравнения изображений* ..... 118
- А.А. Сеньковская. *Моделирование сроков обучения на основе анализа рабочих учебных планов* ..... 128
- Д.Н. Лавров, А.П. Лапин, М.А. Харламова, И.А. Черкащенко. *Обработка текста с фонетической и тематической разметками для отображения текстов диалектного корпуса* ..... 135

## ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ: III. 10-ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ

**В.В. Варламов**

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsui.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

**Аннотация.** Изучается 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в рамках теоретико-группового подхода. Подробно рассматривается мультиплетная структура периодов расширенной таблицы. Показывается, что длины периодов системы элементов определяются строением основного представления группы Румера–Фета. Вычисляются теоретические массы элементов 10-го и 11-го периодов. Вводится понятие гипертвистора.

**Ключевые слова:** периодический закон, таблица Менделеева, модель Бора, группа Румера–Фета.

### 1. Введение

В 2019 г. исполняется 150 лет со дня открытия Дмитрием Ивановичем Менделеевым периодического закона химических элементов. Периодическая система элементов Менделеева пролила свет на огромное число опытных фактов и позволила предсказать существование и основные свойства новых, ранее неизвестных, элементов. Однако, как отмечается в [1, с. 9]: «... Периодический закон и периодическая система химических элементов всё ещё остаются для нас загадкой. До сих пор не ясны до конца причины (точнее, первопричины) периодичности, в частности, причины периодической повторяемости сходных электронных конфигураций атомов, хотя очевидно, что феномен этот связан с непосредственной динамической симметрией атомных систем. До сих пор не очерчены границы применимости периодического закона — продолжается полемика относительно специфики ядерных и электронных свойств атомов сверхтяжёлых элементов».

Общепринятая ныне структура периодической системы, базирующаяся на модели Бора, исходит из того, что расположение элементов в системе при возрастании их атомных номеров однозначно определяется индивидуальными особенностями электронного строения атомов, описанного в рамках одноэлектронного приближения (метод Хартри), и непосредственно отражает энергетическую последовательность атомных орбиталей  $s$ -,  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -оболочек, заселяющихся электронами при увеличении их суммарного числа по мере возрастания заряда ядра атома в соответствии с принципом минимума энергии. Однако

это возможно лишь в самом простом варианте приближения Хартри, но уже в варианте приближения Хартри-Фока полная энергия атома не равна сумме орбитальных энергий, и электронная конфигурация атома определяется минимумом его полной энергии. Авторы [1] отмечают, что «... традиционная интерпретация структуры периодической системы на основе последовательности заполнения электронных атомных орбиталей в соответствии с их относительными энергиями  $\varepsilon_{nl}$  весьма и весьма приближённа, имеет, безусловно, ряд недостатков и обладает неширокими границами применимости. Универсальной последовательности орбитальных энергий  $\varepsilon_{nl}$  не существует, к тому же такая последовательность не определяет полностью порядок заселения атомных орбиталей электронами, поскольку необходим учёт конфигурационных взаимодействий (наложение конфигураций в многоконфигурационном приближении). И, безусловно, периодичность — это не только и не полностью орбитально-энергетические эффекты» [1, с. 31]. И далее: «... причина повторения сходных электронных конфигураций атомов в их основных состояниях от нас ускользает, и в рамках одноэлектронного приближения вряд ли вообще может быть выявлена. Более того, не исключено, что теорию периодичности вообще ждёт судьба, несколько напоминающую судьбу теории планетных ретроградных в системе Птолемея после создания системы Коперника. Вполне возможно, что то, что мы называем принципом периодичности, есть результат непространственных симметрий атома — перестановочной и динамической» [1, с. 31-32].

В 1971 г. академик В.А. Фок в своей работе [2] поставил главный для учения о принципе периодичности и теории периодической системы вопрос: «Вмещаются ли свойства атомов и их составных частей в рамки чисто пространственных представлений или же нужно как-то расширить понятия пространства и пространственной симметрии, чтобы вместить присущие атомам и их составным частям степени свободы?» [2, с. 108]. Как известно, модель Бора в своей первоначальной формулировке использует квантовые числа, относящиеся к электронам в поле со сферической симметрией, что позволило Бору ввести понятие замкнутых электронных оболочек и сблизить это понятие с периодами таблицы Менделеева. Несмотря на этот успех, задача объяснения периодической системы была далека от решения. Более того, при всей глубине и радикальности этих новых идей они ещё укладывались в рамки обычных пространственных представлений. Дальнейший важный шаг был связан с открытием внутренней, не пространственной, степени свободы электрона — спина, представляющего собой не механическое понятие. Открытие спина тесно связано с открытием принципа Паули, который был сформулирован ещё до квантовой механики как требование, чтобы на каждой орбите, характеризующейся определёнными квантовыми числами, находилось не более двух электронов. В конце статьи [2] Фок сам отвечает на им же поставленный вопрос: «Чисто пространственных степеней свободы электрона недостаточно для описания свойств электронной оболочки атома и нужно выйти за пределы чисто пространственных понятий, чтобы выразить те законы, которые лежат в основе периодической системы. Новая степень свободы электрона — его спин — позволяет описать чуждые классическим представлениям свойства физических систем. Эта внут-

ренная степень свободы электрона существенно необходима для формулировки свойств многоэлектронных систем, а тем самым и для теоретического обоснования периодической системы Менделеева» [2, с. 116].

В настоящей статье, являющейся продолжением работ [3, 4], рассматривается 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в рамках модели Румера–Фета. В отличие от модели Бора, в которой пространственные и внутренние (спин) симметрии объединяются на основе классической составной системы, заимствованной из небесной механики<sup>1</sup>, группа Румера–Фета  $G$  описывает непространственные симметрии<sup>2</sup>. Более того, модель Румера–Фета целиком опирается на математический аппарат квантовой механики и теории групп без привлечения каких-либо классических аналогий, таких как понятие составной системы. Понятие составной системы, непосредственно вытекающее из принципа сепарабельности (основного принципа редукционизма), имеет, как известно, ограниченное применение в квантовой механике, поскольку в микромире, в отличие от композиционной (составной) структуры макромира, преобладает суперпозиционная структура. Гейзенберг утверждал, что понятие «состоит из» не работает в физике частиц<sup>3</sup>. С другой стороны, проблема «критических» элементов модели Бора также является следствием наглядных пространственных представлений. Решение Фейнмана, представляющее атомное ядро в виде точки, приводит к парадоксу Клейна для элемента **Uts** (Унтрисептий) с атомным номером  $Z = 137$ . Другой пространственный образ, используемый в решении Грейнера–Рейнхардта, представляет атомное ядро в виде заряженного шара, что приводит к потере электронейтральности для атомов выше значения  $Z = 173$ .

Можно как угодно представлять себе электрон: в виде точки (частицы или волны) или заряженного шарика, или в виде электронного облака на атомной орбитали — все эти мысленные образы лишь затемняют существо дела, поскольку остаются в рамках наглядных пространственных представлений. Однако есть математическая структура, далёкая от наглядности, и тем не менее, точно описывающая электрон: это 2-компонентный спинор, вектор фундаментального представления двулистной накрывающей  $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$  группы Лоренца. Аналогично, отвлекаясь от каких-либо наглядных представлений об

<sup>1</sup>Очевидно, что наглядный пространственный образ, используемый в модели Бора, есть рудимент классических представлений. Так, в середине 19-го века предпринимались многочисленные попытки построения механических моделей электромагнитных явлений, даже трактат Максвелла содержит большое число механических аналогий. Как показало время, все механические модели электромагнетизма оказались не более чем вспомогательными строительными лесами, которые впоследствии были отброшены за ненужностью.

<sup>2</sup>Группа  $G$  также содержит в качестве подгруппы и группу Лоренца (группа вращений пространства-времени Минковского).

<sup>3</sup>Кварковая модель, являющаяся ярким примером составной системы, утверждает, что все существующие в природе адроны построены («по правилам детского конструктора») либо из трёх кварков (барионы), либо из кварка и антикварка (мезоны). Как и всякая составная система, модель кварков имеет весьма условный и приближенный характер. Так, например, октет  $B_0$  псевдоскалярных мезонов и октет  $B_1$  векторных мезонов имеют одинаковую кварковую структуру, хотя частицы, входящие в эти октеты, различаются по массе, спину и чётности. Более того, большое число адронов (спин  $> 3/2$ ) находится вне рамок кварковой модели.

атоме, можно утверждать, что значение имеет только та математическая структура, которая непосредственно вытекает из группы симметрии периодической системы. В п.4 показывается, что такой структурой является гипертвистор, действующий в  $\mathbb{K}$ -гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_\infty$ .

Модель Бора не объясняет периодичность, а только лишь аппроксимирует её в рамках одноэлектронного приближения Хартри. По всей видимости, объяснение периодического закона лежит на пути, указанном академиком Фоком, т. е. необходимо выйти за пределы классических (пространственно-временных) представлений при описании периодической системы элементов. Очевидно, что наиболее подходящей на этом пути схемой описания является теоретико-групповой подход.

## 2. 10-периодическое расширение

На рис. 1 представлено 10-периодическое расширение таблицы Менделеева в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета  $G = \text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)'$  для базиса

$$|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle, \quad \nu = 1, 2, \dots; \quad s' = -1/2, 1/2; \quad \lambda = 0, 1, \dots, \nu - 1; \\ \iota_\lambda = \lambda - 1/2, \lambda + 1/2; \quad \kappa = -\iota_\lambda, -\iota_\lambda + 1, \dots, \iota_\lambda - 1, \iota_\lambda, \quad (1)$$

где  $\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa$  — квантовые числа группы  $G$ . Пунктирными рамками с символами **M** и **S** обозначены соответственно таблицы Менделеева и Сиборга (8-периодическое расширение, см. [4]). Первый период таблицы Менделеева, включающий в себя водород **H** и гелий **He**, соответствует простейшему мультиплету ( $\nu = 1, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) группы  $G$ . Второй период состоит из трёх мультиплетов: литий **Li** и бериллий **Be** ( $\nu = 1, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), бор **B** и углерод **C** ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), элементы **N, O, F, Ne** образуют квадруплет ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ). Третий период также состоит из трёх мультиплетов (два дублета и один квадруплет): дублет **Na** и **Mg** ( $\nu = 2, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), дублет **Al** и **Si** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплет **P, S, Cl, Ar** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ). Четвёртый период включает в себя пять мультиплетов: дублеты **K, Ca** ( $\nu = 2, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Ga, Ge** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **As, Se, Br, Kr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Sc, Ti, V, Cr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), а также секстет, образованный элементами **Mn, ..., Zn** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ). Этот секстет и квадруплет ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ) образуют первую вставную декаду (переходные элементы). Аналогичную структуру имеет пятый период: дублеты **Rb, Sr** ( $\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), **In, Sn** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплет **Sb, Te, I, Xe** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ), квадруплет **Y, Zr, Nb, Mo** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ) и секстет **Tc, ..., Cd** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) (вторая вставная декада). Шестой период состоит из семи мультиплетов: дублеты **Cs, Ba** ( $\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Tl, Pb** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bi, Po, At, Rn** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Lu, Hf, Ta, W** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ),



секстеты **Re**, ..., **Hg** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **La**, ..., **Sm** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октет **Eu**, ..., **Yb** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ). Седьмой период (последний период таблицы Менделеева) дублирует структуру шестого периода: дублеты **Fr**, **Ra** ( $\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Nh**, **Fl** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Mc**, **Lv**, **Ts**, **Og** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Lr**, **Rf**, **Db**, **Sg** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bh**, ..., **Cn** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ac**, ..., **Pu** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октет **Am**, ..., **No** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ). Восьмой период<sup>4</sup>, формирующий расширение таблицы Менделеева (таблица Сиборга), состоит из девяти мультиплетов: дублеты **Uue**, **Ubn** ( $\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Uht**, **Uhq** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Uhp**, ..., **Uho** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Upt**, ..., **Uph** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Ups**, ..., **Uhb** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ute**, ..., **Uqq** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Uqp**, ..., **Upb** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Ubu**<sup>5</sup>, ..., **Ubo** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплет **Ube**, ..., **Uto** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ). Восьмой период содержит 50 элементов. Девятый период, завершающий таблицу Сиборга, также содержит девять мультиплетов: дублеты **Uhe**, **Usn** ( $\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **But**, **Buq** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bup**, ..., **Buo** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Bnt**, ..., **Bnh** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bns**, ..., **Bub** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Uoe**, ..., **Ueq** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Uep**, ..., **Bnb** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Usu**, ..., **Uso** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплет **Use**, ..., **Uoo** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ). С десятого периода начинается построение семейства мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 5$  группы  $G$ , что соответствует в модели Бора формированию  $h$ -оболочки. Десятый период состоит из 11-ти мультиплетов: дублеты **Bue**, **Bbn** ( $\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Bop**, **Boh** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Bos**, ..., **Ben** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Bsp**, ..., **Bso** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Bse**, ..., **Boq** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Bhu**, ..., **Bhh** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Bhs**, ..., **Bsq** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Bqt**, ..., **Bpn** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплеты **Bpu**, ..., **Bhn** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ) и **Bbu**, ..., **Bth** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 9/2$ ), 12-плет **Btu**, ..., **Bqb** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 11/2$ ). Аналогичную структуру имеет 11-ый период: дублеты **Beu**, **Beb** ( $\nu = 6, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ) и **Tps**, **Tpo** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2$ ), квадруплеты **Tpe**, ..., **Thb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2$ ) и **Tqs**, ..., **Tpn** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2$ ), секстеты **Tpu**, ..., **Tph** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2$ ) и **Ttt**, ..., **Tto** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2$ ), октеты **Tte**, ..., **Tqh** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2$ ) и **Tup**, ..., **Tbb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2$ ), декуплеты

<sup>4</sup>С восьмого периода начинается область гипотетических (неоткрытых) элементов периодической системы.

<sup>5</sup>Согласно модели Бора, с элемента **Ubu** (Унбиуний) начинается заполнение  $g$ -оболочки. В модели Румера-Фета аналогом  $g$ -оболочки является семейство мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 4$  группы  $G$ .

**Tbt**, ..., **Ttb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2$ ) и **Bet**, ..., **Tnb** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 9/2$ ), 12-плет **Tnt**, ..., **Tuq** ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 5, \iota_\lambda = 11/2$ ). Десятый и одиннадцатый период каждый содержит по 72 элемента. Длины периодов образуют следующую последовательность чисел<sup>6</sup>:

$$2, 8, 8, 18, 18, 32, 32, 50, 50, 72, 72, \dots \quad (2)$$

Далее с элементов **Tht** (Тригексотритий,  $Z = 363$ ) и **Thq** (Тригексоквадий,  $Z = 364$ ), образующих дублет ( $\nu = 6, s' = 1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2$ ), начинается 12-ый период. Этот период, уже выходящий за рамки таблицы на рис. 1, содержит 13 мультиплетов и имеет длину в 98 элементов (в точном соответствии с последовательностью (2)). Начиная с 12-го периода, образуется новое семейство мультиплетов с квантовым числом  $\lambda = 6$  группы  $G$ , что соответствует в модели Бора построению  $i$ -оболочки. Аналогичную структуру имеет 13-ый период.

Очевидно, что по мере увеличения квантового числа  $\nu$  у фигуры на рис. 1 будут появляться новые «ступени» (удвоенные периоды) и соответствующие  $\lambda$ -семейства мультиплетов (оболочки).

### 3. Массы элементов

Таблица на рис. 1 соответствует следующей редукционной цепочке:

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \mapsto \text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(4) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3)_c. \quad (3)$$

Цепочка групп  $G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3$  (3) позволяет провести поэлементное расщепление масс основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета. С этой целью используем массовую формулу, введённую в [4]:

$$m = m_0 + a \left[ s'(2\nu - 3) - 5\nu + \frac{11}{2} + 2(\nu^2 - 1) \right] - b \cdot \lambda(\lambda + 1) + a' [2\kappa - 0, 1666\kappa^3 + 0, 0083\kappa^5 - 0, 0001\kappa^7] + (b'\iota_\lambda)^p - 1, \quad (4)$$

где

$$p = \begin{cases} 0, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda - 1/2; \\ 1, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda + 1/2. \end{cases}$$

Теоретические массы элементов 10-го и 11-го периодов, начиная с атомного номера  $Z = 221$  по  $Z = 364$ , вычисляются согласно массовой формуле (4) при значениях  $m_0 = 1, a = 17, b = 5, 5, a' = 2, 15, b' = 5, 3$  (см. таб. 1). Первый столбец таб. 1 содержит атомный номер элемента; во втором столбце находится

<sup>6</sup>Числа этой последовательности определяются знаменитой формулой Ридберга  $2p^2$  ( $p$  — целое число), которую Зоммерфельд в своей книге «Строение атомов и спектры» назвал «кабалистической» (см. В. Паули [5]). Ряд Ридберга  $P = 2(1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + \dots)$  содержит удвоенный первый период, что несколько не соответствует реальности, т. е. последовательности (2).

общепринятое (согласно организации IUPAC<sup>7</sup>) обозначение элемента; в третьем столбце приведены квантовые числа элемента, задающие вектор  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$  базиса (1); четвёртый столбец содержит массу элемента, вычисленную согласно формуле (4).

**Таб. 1.** Массы элементов 10-го и 11-го периодов.

$Z$	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
221	<b>Bbu</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -9/2\rangle$	521,3949
222	<b>Bbb</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -7/2\rangle$	525,3181
223	<b>Bbt</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -5/2\rangle$	526,2352
224	<b>Bbq</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -3/2\rangle$	527,6270
225	<b>Bbp</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, -1/2\rangle$	530,8342
226	<b>Bbh</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 1/2\rangle$	535,1057
227	<b>Bbs</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 3/2\rangle$	538,3729
228	<b>Bbo</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 5/2\rangle$	539,7647
229	<b>Bbe</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 7/2\rangle$	540,6818
230	<b>Btn</b>	$ 6, -1/2, 5, 9/2, 9/2\rangle$	544,6050
231	<b>Btu</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -11/2\rangle$	545,0151
232	<b>Btb</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -9/2\rangle$	549,5449
233	<b>Btt</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -7/2\rangle$	553,4681
234	<b>Btq</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -5/2\rangle$	554,3852
235	<b>Btp</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -3/2\rangle$	555,7770
236	<b>Bth</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, -1/2\rangle$	559,0442
237	<b>Bts</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 1/2\rangle$	563,2557
238	<b>Bto</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 3/2\rangle$	566,5229
239	<b>Bte</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 5/2\rangle$	567,9147
240	<b>Bqn</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 7/2\rangle$	568,8318
241	<b>Bqu</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 9/2\rangle$	572,7556
242	<b>Bqb</b>	$ 6, -1/2, 5, 11/2, 11/2\rangle$	582,2848
243	<b>Bqt</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -7/2\rangle$	580,3181
244	<b>Bqq</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -5/2\rangle$	581,2352
245	<b>Bqp</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -3/2\rangle$	582,6270
246	<b>Bqh</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, -1/2\rangle$	585,8942
247	<b>Bqs</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 1/2\rangle$	590,1057
248	<b>Bqo</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 3/2\rangle$	593,3729
249	<b>Bqe</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 5/2\rangle$	594,7647
250	<b>Bpn</b>	$ 6, -1/2, 4, 7/2, 7/2\rangle$	595,6818
251	<b>Bpu</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -9/2\rangle$	599,2449
252	<b>Bpb</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -7/2\rangle$	603,1681
253	<b>Bpt</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -5/2\rangle$	604,0852
254	<b>Bpq</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -3/2\rangle$	605,4770
255	<b>Bpp</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, -1/2\rangle$	608,7442
256	<b>Bph</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 1/2\rangle$	612,9557
257	<b>Bps</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 3/2\rangle$	616,2229

<sup>7</sup>IUPAC — International Union of Pure and Applied Chemistry.

Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
258	<b>Bpo</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 5/2\rangle$	617,6147
259	<b>Bpe</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 7/2\rangle$	618,5318
260	<b>Bhn</b>	$ 6, -1/2, 4, 9/2, 9/2\rangle$	622,4550
261	<b>Bhu</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -5/2\rangle$	625,2352
262	<b>Bhb</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -3/2\rangle$	626,6270
263	<b>Bht</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, -1/2\rangle$	629,8942
264	<b>Bhq</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 1/2\rangle$	634,1057
265	<b>Bhp</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 3/2\rangle$	637,3729
266	<b>Bhh</b>	$ 6, -1/2, 3, 5/2, 5/2\rangle$	638,7647
267	<b>Bhs</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -7/2\rangle$	641,8681
268	<b>Bho</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -5/2\rangle$	642,7852
269	<b>Bhe</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -3/2\rangle$	644,1770
270	<b>Bsn</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, -1/2\rangle$	647,4442
271	<b>Bsu</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 1/2\rangle$	651,6557
272	<b>Bsb</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 3/2\rangle$	654,9229
273	<b>Bst</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 5/2\rangle$	656,3147
274	<b>Bsq</b>	$ 6, -1/2, 3, 7/2, 7/2\rangle$	657,2318
275	<b>Bsp</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, -3/2\rangle$	659,6270
276	<b>Bsh</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, -1/2\rangle$	662,8942
277	<b>Bss</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, 1/2\rangle$	667,1057
278	<b>Bso</b>	$ 6, -1/2, 2, 3/2, 3/2\rangle$	670,3729
279	<b>Bse</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -5/2\rangle$	670,4852
280	<b>Bon</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -3/2\rangle$	671,8770
281	<b>Bou</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, -1/2\rangle$	675,1442
282	<b>Bob</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 1/2\rangle$	679,3557
283	<b>Bot</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 3/2\rangle$	682,6229
284	<b>Boq</b>	$ 6, -1/2, 2, 5/2, 5/2\rangle$	684,0147
285	<b>Bop</b>	$ 6, -1/2, 1, 1/2, -1/2\rangle$	684,8942
286	<b>Boh</b>	$ 6, -1/2, 1, 1/2, 1/2\rangle$	689,1057
287	<b>Bos</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, -3/2\rangle$	689,5770
288	<b>Boo</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, -1/2\rangle$	691,8442
289	<b>Boe</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, 1/2\rangle$	696,0557
290	<b>Ben</b>	$ 6, -1/2, 1, 3/2, 3/2\rangle$	699,3229
291	<b>Beu</b>	$ 6, -1/2, 0, 1/2, -1/2\rangle$	699,8942
292	<b>Beb</b>	$ 6, -1/2, 0, 1/2, 1/2\rangle$	700,1037
293	<b>Bet</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -9/2\rangle$	674,3949
294	<b>Beq</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -7/2\rangle$	678,3181
295	<b>Bep</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -5/2\rangle$	679,2352
296	<b>Beh</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -3/2\rangle$	680,6270
297	<b>Bes</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, -1/2\rangle$	683,8942
298	<b>Beo</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 1/2\rangle$	688,1097
299	<b>Bee</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 3/2\rangle$	691,3729
300	<b>Tnn</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 5/2\rangle$	692,7647
301	<b>Tnu</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 7/2\rangle$	693,6818
302	<b>Tnb</b>	$ 6, 1/2, 5, 9/2, 9/2\rangle$	697,6050

Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
303	<b>Tnt</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -11/2\rangle$	693,0151
304	<b>Tnq</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -9/2\rangle$	702,5449
305	<b>Tnp</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -7/2\rangle$	706,4681
306	<b>Tnh</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -5/2\rangle$	707,3852
307	<b>Tns</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -3/2\rangle$	708,7770
308	<b>Tno</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, -1/2\rangle$	712,0442
309	<b>Tne</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 1/2\rangle$	716,2557
310	<b>Tun</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 3/2\rangle$	719,5229
311	<b>Tuu</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 5/2\rangle$	720,9147
312	<b>Tub</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 7/2\rangle$	721,8318
313	<b>Tut</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 9/2\rangle$	725,7550
314	<b>Tuq</b>	$ 6, 1/2, 5, 11/2, 11/2\rangle$	735,2848
315	<b>Tup</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -7/2\rangle$	733,3181
316	<b>Tuh</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -5/2\rangle$	734,2352
317	<b>Tus</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -3/2\rangle$	735,6270
318	<b>Tuo</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, -1/2\rangle$	738,8942
319	<b>Tue</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 1/2\rangle$	743,1057
320	<b>Tbn</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 3/2\rangle$	746,3729
321	<b>Tbu</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 5/2\rangle$	747,7647
322	<b>Tbb</b>	$ 6, 1/2, 4, 7/2, 7/2\rangle$	748,6818
323	<b>Tbt</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -9/2\rangle$	752,2449
324	<b>Tbq</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -7/2\rangle$	756,1681
325	<b>Tbp</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -5/2\rangle$	757,0852
326	<b>Tbh</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -3/2\rangle$	758,4770
327	<b>Tbs</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, -1/2\rangle$	761,7442
328	<b>Tbo</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 1/2\rangle$	765,9557
329	<b>Tbe</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 3/2\rangle$	769,2229
330	<b>Ttn</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 5/2\rangle$	770,6147
331	<b>Ttu</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 7/2\rangle$	771,5318
332	<b>Ttb</b>	$ 6, 1/2, 4, 9/2, 9/2\rangle$	775,4550
333	<b>Ttt</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -5/2\rangle$	778,2352
334	<b>Ttq</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -3/2\rangle$	779,6270
335	<b>Ttp</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, -1/2\rangle$	782,8942
336	<b>Tth</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 1/2\rangle$	787,1057
337	<b>Tts</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 3/2\rangle$	790,3729
338	<b>Tto</b>	$ 6, 1/2, 3, 5/2, 5/2\rangle$	791,7647
339	<b>Tte</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -7/2\rangle$	794,8681
340	<b>Tqn</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -5/2\rangle$	795,7852
341	<b>Tqu</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -3/2\rangle$	797,1770
342	<b>Tqb</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, -1/2\rangle$	800,4442
343	<b>Tqt</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 1/2\rangle$	804,6557
344	<b>Tqq</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 3/2\rangle$	807,9229
345	<b>Tqp</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 5/2\rangle$	809,3147
346	<b>Tqh</b>	$ 6, 1/2, 3, 7/2, 7/2\rangle$	810,2318

Z	Элемент	Вектор $ \nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$	Масса
347	<b>Tqs</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, -3/2\rangle$	812,6270
348	<b>Tqo</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, -1/2\rangle$	815,8942
349	<b>Tqe</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, 1/2\rangle$	820,1057
350	<b>Tpn</b>	$ 6, 1/2, 2, 3/2, 3/2\rangle$	823,3729
351	<b>Tpu</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -5/2\rangle$	823,4852
352	<b>Tpb</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -3/2\rangle$	824,8770
353	<b>Tpt</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, -1/2\rangle$	828,1442
354	<b>Tpq</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 1/2\rangle$	832,3557
355	<b>Tpp</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 3/2\rangle$	835,6224
356	<b>Tph</b>	$ 6, 1/2, 2, 5/2, 5/2\rangle$	837,0147
357	<b>Tps</b>	$ 6, 1/2, 1, 1/2, -1/2\rangle$	837,8942
358	<b>Tpo</b>	$ 6, 1/2, 1, 1/2, 1/2\rangle$	842,1057
359	<b>Tpe</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, -3/2\rangle$	841,5770
360	<b>Thn</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, -1/2\rangle$	844,8442
361	<b>Thu</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, 1/2\rangle$	849,0557
362	<b>Thb</b>	$ 6, 1/2, 1, 3/2, 3/2\rangle$	852,3229
363	<b>Tht</b>	$ 6, 1/2, 0, 1/2, -1/2\rangle$	848,8942
364	<b>Thq</b>	$ 6, 1/2, 0, 1/2, 1/2\rangle$	853,1057

#### 4. Гипертвисторы

Представление об атоме как о «бесструктурном» состоянии, введённое Румером и Фетом в пионерской работе [6], вызывает вполне понятное недоумение. Так уж устроено человеческое сознание, что для анализа необходимо наличие некоторой структуры или наглядного образа<sup>8</sup>. Попытаемся определить, к какой структуре атома приводит теоретико-групповое описание. Ясно, что эта структура не может иметь ничего общего с наглядными представлениями классической физики. Группа Румера–Фета во многом построена по аналогии с группами внутренних (динамических) симметрий, таких как SU(3) и SU(6). Продолжим эту аналогию, используя кварковую модель и SU(3)-симметрию. Как известно, кварк — это вектор фундаментального представления группы SU(3)<sup>9</sup>. Определим вектор «фундаментального» представления группы Румера–

<sup>8</sup>Так, в модели Резерфорда–Бора эксплуатируется наглядный образ, заимствованный из небесной механики: атом как система крутящихся друг возле друга шариков (атомных ядер и электронов).

<sup>9</sup>Т. е. изначально чисто математический объект, которому впоследствии было приписано некое «реальное» существование (в рамках так называемого конфайнмента). Согласно «кварковому конструктору», все наблюдаемые адроны (за исключением недавно открытых пентакварковых барионов и адронов спина выше 3/2) являются связанными состояниями либо трёх кварков (барионы), либо кварка и антикварка (мезоны). Румер и Фет пишут: «Формулы кваркового состава являются лишь перефразировкой на "кварковый" язык результатов теории представлений группы SU(3)» [7, с. 230]. «Реальный» статус кварки приобрели после включения в теоретико-групповую схему SU(3)-симметрии концепции близкодействия. Что касается тетракварков и пентакварков, то в статье «Развитие понятий в истории квантовой механики» Гейзенберг, критикуя гипотезу кварков, «предвосхитил» открытие экзотических барионов: «Думаю, что это за-

Фета.

Группа Румера–Фета

$$\mathrm{SO}(2, 4) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)'$$

эквивалентна группе

$$\widetilde{\mathrm{SO}}(2, 4) \otimes \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SU}(2, 2) \otimes \mathrm{SU}(2),$$

где  $\mathrm{SU}(2, 2)$  — двулистная накрывающая конформной группы (группа псевдоунитарных унимодулярных  $4 \times 4$  матриц). Далее, в силу изоморфизма

$$\mathrm{SU}(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4 : \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \right\} \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4),$$

который следует из алгебраического определения группы Клиффорда–Липшица  $\Gamma_{p,q}$  (см. [9, 10]):

$$\mathbf{Spin}_+(2, 4) = \left\{ s \in \left[ \begin{array}{cc} \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^0 - i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^3 & -\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^2 \\ \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^2 & \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^0 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{1,1}^3 \end{array} \right] \middle| N(s) = 1 \right\},$$

где  $\mathbb{C}_4$  — алгебра Дирака,  $\mathcal{O}_{1,1}$  — алгебра антикватернионов, будем рассматривать двулистную накрывающую  $\mathrm{SU}(2, 2)$  как *спинорную группу*<sup>10</sup>. Спинтензорные представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  образуют субстрат конечномерных представлений  $\tau_{k/2,r/2}$ ,  $\bar{\tau}_{k/2,r/2}$  конформной группы, реализуемых в пространствах  $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$  и  $\overline{\mathrm{Sym}}_{(k,r)} \subset \overline{\mathbb{S}}_{2^{k+r}}$ , где  $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$  — спинпространство. Твистор  $\mathbf{Z}^\alpha = (\mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}_{\dot{\alpha}})^\top$  является вектором фундаментального представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$ , где  $\alpha, \dot{\alpha} = 0, 1$ ,  $\mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}_{\dot{\alpha}}$  — двухкомпонентные взаимносопряжённые спиноры. Тогда вектором фундаментального представления группы  $\mathrm{SU}(2, 2) \otimes \mathrm{SU}(2)$  будет удвоенный твистор

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_+ \\ \mathbf{z}_- \end{bmatrix}, \quad (5)$$

или *гипертвистор*. Далее, вектором общего спинтензорного представления группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  является  $\mathbf{Z} = [\mathbf{S}, \overline{\mathbf{S}}]^\top$ , где  $\mathbf{S}$  — спинтензор вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_r}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \sum \mathbf{s}^{\alpha_1} \otimes \mathbf{s}^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}^{\alpha_k} \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_1} \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}_{\dot{\alpha}_r}, \quad \alpha_i, \dot{\alpha}_i = 0, 1;$$

блуждение. Заблуждение потому, что, даже если кварки окажутся реальностью, мы не сможем сказать, что протон состоит из трёх кварков. Нам придётся говорить, что иногда он, пожалуй, и состоит из трёх кварков, но в другие моменты он может состоять из четырёх кварков и одного антикварка или из пяти кварков и двух антикварков и т. д.» [8, с. 105]. Модель кварков в своё время (60-ые годы прошлого столетия) сыграла важную роль, позволив частично упорядочить адронные спектры (восьмеричный путь Гелл–Манна), однако на данный момент, эта модель не обладает достаточной степенью общности, чтобы охватить всё множество состояний спектра материи.

<sup>10</sup>Элементами группы  $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$  являются 15 бивекторов  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$ , где  $i, j = 1, \dots, 6$ . Явный вид всех пятнадцати генераторов приводит через разложение Картана для группы  $\mathrm{SU}(2, 2)$  к бикватернионным углам, т. е. к обобщению комплексных и кватернионных углов для групп  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  и  $\mathrm{Sp}(1, 1)$ , где  $\mathrm{Sp}(1, 1)$  — двулистная накрывающая группы де Ситтера [11, 12].

т. е. вектор спинпространства  $\mathbb{S}_{2k+r} = \mathbb{S}_{2k} \otimes \dot{\mathbb{S}}_{2r}$ , где  $\dot{\mathbb{S}}_{2r}$  — дуальное спинпространство.  $\bar{\mathbf{S}}$  — спинтензор из сопряженного пространства  $\bar{\mathbb{S}}_{2k+r}$ . Следовательно, общий гипертвистор определяется выражением вида (5), где  $\mathbf{Z}_+ = [\mathbf{S}, \bar{\mathbf{S}}]^\top$ ,  $\mathbf{Z}_- = [\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{S}]^\top$ .

Применяя ГНС-конструкцию, получим векторные состояния

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi | \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} = \frac{\langle \Phi | F_{ss'}^+(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle},$$

где  $H$  — оператор энергии,  $|\Phi\rangle$  — циклический вектор гильбертова пространства  $\mathbf{H}_\infty$ . Множество всех чистых состояний  $\omega_\Phi(H)$  образует *физическое гильбертово пространство*  $\mathbf{H}_{\text{phys}} = \mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_\infty$ <sup>11</sup> и, соответственно, *пространство лучей*  $\hat{H} = \mathbf{H}_{\text{phys}}/S^1$ .

Далее в целях соблюдения условия электронейтральности и включения дискретных симметрий необходимо расширить двулистную накрывающую  $SU(2, 2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4)$  до *универсальной накрывающей*  $\mathbf{Pin}(2, 4)$ . В общем виде (для произвольных ортогональных групп) такое расширение было проведено в работах [10, 13–15]. При этом центральную роль играет введённый Рашевским [16] псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  комплексной алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_n$ , где  $\mathcal{A}$  — произвольный элемент алгебры  $\mathbb{C}_n$ . Как известно, спинпространство является минимальным левым идеалом алгебры Клиффорда  $\mathcal{C}_{p,q}$ , т. е. существует изоморфизм  $\mathbb{S}_{2m}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = \mathcal{C}_{p,q}f$ , где  $f$  — примитивный идемпотент алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$ ,  $\mathbb{K} = f\mathcal{C}_{p,q}f$  — кольцо деления для  $\mathcal{C}_{p,q}$ ,  $m = (p + q)/2$ . Комплексное спинпространство  $\mathbb{S}_{2m}(\mathbb{C})$  является комплексификацией  $\mathbb{C} \otimes I_{p,q}$  минимального левого идеала  $I_{p,q}$  вещественной подалгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$ . Следовательно,  $\mathbb{S}_{2k+r}$  является минимальным левым идеалом комплексной алгебры  $\mathbb{C}_{2k} \otimes \dot{\mathbb{C}}_{2r} \simeq \mathbb{C}_{2(k+r)}$ . Поскольку вещественная спинорная структура появляется в результате редукции  $\mathbb{C}_{2(k+r)} \rightarrow \mathcal{C}_{p,q}$ , то, как следствие, *зарядовое сопряжение*  $\mathcal{C}$  (псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ ) для алгебр  $\mathcal{C}_{p,q}$  над вещественным числовым полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  и кватернионным кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  (типы  $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$ ) редуцируется к *обмену частица-античастица*  $\mathcal{C}'^{12}$  (см. [15]). Как известно, существуют два класса нейтральных частиц: 1) частицы, имеющие античастицы, такие как

<sup>11</sup>При ограничении группы  $G$  на подгруппу Лоренца  $SO_0(1, 3)$  в рамках двулистной накрывающей  $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$  после применения ГНС-конструкции получим спинор (вектор фундаментального представления группы  $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ ), действующий в удвоенном гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_\infty$  (пространство Паули). Спинор является частным случаем гипертвистора.

<sup>12</sup>Здесь приходится вынужденно пользоваться такими рудиментами классических представлений, как частица и античастица. Гейзенберг в статье «Язык и реальность в современной физике» отмечает, что «при описании процессов, протекающих в области мельчайших размеров, при описании взаимосвязей, проанализированных и математически выраженных квантовой теорией, обыденный язык и язык классической физики столь явно обнаружили свою непригодность, что даже физики эйнштейновского ранга до конца жизни не в состоянии были примириться с новой ситуацией» [8, с. 216]. И далее: «В зависимости от характера конкретного эксперимента определяется, целесообразно ли в данном случае говорить о волне или о частице, о траекториях электрона или о стационарных состояниях. При этом, однако, мы всегда ясно сознаем, что подобные образы — лишь неточные аналогии, что мы имеем дело всего лишь с условными событиями и пытаемся с их помощью приблизиться к реальному событию. Если

нейтроны, нейтрино и т. д.; 2) частицы, совпадающие со своими античастицами (например фотоны,  $\pi^0$ -мезоны и т. д.), т. е. так называемые *истинно нейтральные частицы*. Первый класс описывается нейтральными состояниями  $\omega_{\mathbb{F}}^r(H)$  с алгебрами  $\mathcal{C}_{p,q}$  над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  с кольцами  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  (типы  $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$  и  $p - q \equiv 5 \pmod{8}$ ). Для описания второго класса нейтральных частиц введём *истинно нейтральные состояния*  $\omega_{\mathbb{F}}^{r_0}(H)$  с алгебрами  $\mathcal{C}_{p,q}$  над числовым полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  и вещественными кольцами деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  (типы  $p - q \equiv 0, 2 \pmod{8}$  и  $p - q \equiv 1 \pmod{8}$ ). В случае состояний  $\omega_{\mathbb{F}}^{r_0}(H)$  псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$  редуцируется к тождественному преобразованию (частица совпадает со своей античастицей).

Следуя [17], определим  $\mathbf{H}_{\text{phys}} = \mathbf{H}_8 \otimes \mathbf{H}_{\infty}$  как  $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство, т. е. как пространство, наделённое структурой  $*$ -кольца, где  $*$ -кольцо изоморфно кольцу деления  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Таким образом, гипертвистор обладает тензорной структурой (энергия, масса) и  $\mathbb{K}$ -линейной структурой (заряд), причём соединение этих двух структур приводит к динамическому изменению заряда и массы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кораблева Т.П., Корольков Д.В. Теория периодической системы. СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 2005.
2. Фок В.А. Вмещаются ли химические свойства атомов в рамки чисто пространственных представлений? // Периодический закон и строение атома. М. : Атомиздат, 1971. С. 107–117.
3. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
4. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов II.: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1(49). С. 5–21.
5. Паули В. Ридберг и периодическая система элементов // Физические очерки. М. : Наука, 1975. С. 233–238.
6. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 203–209.
7. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970.
8. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
9. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001.
10. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168;

же требуется точная формулировка, чаще всего приходится ограничиваться искусственным языком математики» [8, с. 217–218]. Атомы суть дискретные стационарные состояния спектра материи. Представляя квантовый микробиъект как частицу или волну, мы остаёмся в рамках априорной формы созерцания и обыденного языка, которые имеют к реальности микромира весьма отдалённое отношение. Отсюда следует, что и так называемый корпускулярно-волновой «дуализм» есть также рудимент классических представлений. Единственно твёрдой и надёжной опорой в области микромира является язык математики.

11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 163–201.
13. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805.
14. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191.
15. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
16. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. 1955. Т. 10, С. 3–110.
17. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics // Found. Phys. 2012. V. 42. P. 819–855.

### GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS: III. 10-PERIODIC EXTENSION

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

**Abstract.** 10-periodic extension of Mendeleev table is studied within group theoretical approach. A multiplet structure is considered in detail for periods of the extended table. It is shown that period lengths are defined by a structure of basic representation of the Rumer-Fet group. Theoretical masses of elements are calculated for 10-th and 11-th periods. A notion of hypertwistor is introduced.

**Keywords:** periodic law, Mendeleev table, Bohr model, Rumer-Fet group.

### REFERENCES

1. Korableva T.P., Korol'kov D.V. Teoriya periodicheskoi sistemy. SPb., Izdatel'stvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2005. (in Russian)
2. Fok V.A. Vmeshchayutsya li khimicheskie svoystva atomov v ramki chisto prostanstvennykh predstavlenii? Periodicheskii zakon i stroenie atoma, Moscow, Atomizdat Publ., 1971, pp. 107–117. (in Russian)
3. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
4. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov II.: Tablitsa Siborga. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 1(49), pp. 5–21. (in Russian)
5. Pauli V. Ridberg i periodicheskaya sistema elementov. Fizicheskie ocherki, Moscow, Nauka Publ., 1975, pp. 233–238. (in Russian)

6. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Gruppya Spin(4) i tablitsa Mendeleeva. TMF, 1971, vol. 9, pp. 203–209. (in Russian)
7. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Teoriya unitarnoi simmetrii. Moscow, Nauka Publ., 1970. (in Russian)
8. Geizenberg V. Shagi za gorizont. Moscow, Progress Publ., 1987. (in Russian)
9. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001.
10. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. Adv. Appl. Clifford Algebras, 2004, vol. 14, pp. 81–168;
11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group. J. Phys. A: Math. Gen., 2006, vol. 39, pp. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spherical functions on the de Sitter group. J. Phys. A: Math. Theor., 2007, vol. 40, pp. 163–201.
13. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras. Int. J. Theor. Phys., 2001, vol. 40, pp. 769–805.
14. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space. Phys. Lett. B., 2005, vol. 631, pp. 187–191.
15. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. Adv. Appl. Clifford Algebras., 2015, vol. 25, pp. 487–516.
16. Rashevskii P.K. Teoriya spinorov. UMN, 1955, vol. 10, pp. 3–110. (in Russian)
17. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics. Found. Phys., 2012, vol. 42, pp. 819–855.

*Дата поступления в редакцию: 15.08.2019*

## ОБНАРУЖЕНИЕ И ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СБРОСАХ ПЕРВИЧНЫХ ЧАСТИЦ

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

**В.Н. Иванов**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Изучается проблема передачи сигналов с помощью сбросов потоков первичных частиц. Подсчитывается вероятность регистрации таких сигналов, а также выделения их на фоне пуассоновских шумов. Обсуждается моделирование подобных полезных сигналов и шумов с помощью ЭВМ.

**Ключевые слова:** сбросы первичных частиц, передача сигналов, пуассоновские сигналы и шумы, регистрация полезных сигналов.

### Введение

Пусть дан генератор<sup>1</sup> импульсов первичных частиц. Каждый импульс порождает один или несколько дискретных полезных сигналов и длится время  $\tau$ . Совокупность дискретных сигналов, поданных на отрезке времени длительностью  $\tau$ , будем называть *посылкой*. Генератор работает периодически с периодом  $T_0 \gg \tau$ , производя *сбросы* импульсов первичных частиц. Каждый *сброс* состоит из  $m$  посылок и длится время  $T$ . Отрезок времени между посылками один и тот же и равен  $d$ .

Итак, генератор порождает дискретные сигналы, представленные на рис. 1.

Каждая посылка состоит из нескольких дискретных сигналов, подаваемых в моменты времени  $\{\tau_k\}_{k=1}^n$  разной мощности (рис. 2). Эти сигналы могут быть использованы для передачи вполне определённой информации.

Будем предполагать, что моменты времени  $\{\tau_k\}$  образуют *пуассоновский поток* событий.

Пуассоновский поток событий характеризуется среди всех иных потоков событий (геометрически представляемых случайными наборами точек на оси времени) свойствами ординарности и отсутствия последствия [1].

Поток событий называется ординарным, если вероятность осуществления на бесконечно малом отрезке времени  $\Delta t$  двух, трёх и более событий  $P_{t,\Delta t}(i)$

---

<sup>1</sup>Генератором может быть ускоритель элементарных частиц.

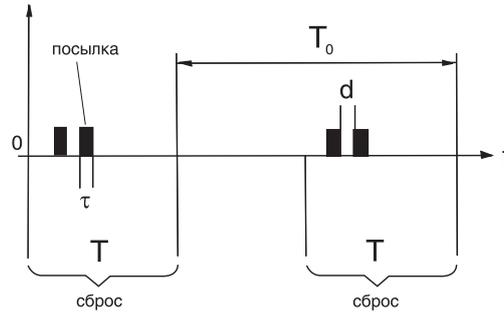


Рис. 1. Сбросы посылок генератором

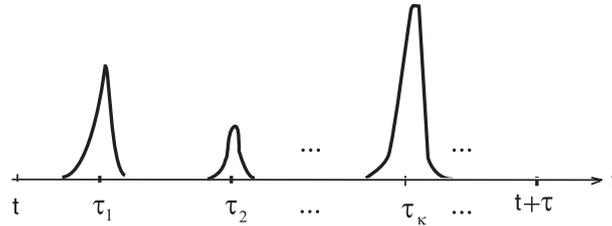


Рис. 2. Посылка

( $i = 1, 2, \dots$ ) пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью  $P_{t,\Delta t}(1)$  одного события, т. е.

$$P_{t,\Delta t}(1) \gg P_{t,\Delta t}(i), \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Физически условие (1) означает, что ординарный поток — это поток относительно редких событий. Так как для интервала событий  $(t, t + \tau)$  справедливо соотношение

$$P_{t,\tau}(0) + P_{t,\tau}(1) + \sum_{i=2}^{\infty} P_{t,\tau}(i) = 1, \quad (2)$$

где  $P_{t,\tau}(0)$  — вероятность того, что на участке не произойдёт ни одного события.

С учётом (1) из (2) при  $T = \Delta t$  находим

$$P_{t,\tau}(0) + P_{t,\tau}(1) \approx 1.$$

Свойство отсутствия последствия означает, что для любых неперекрывающихся участков длиной  $\tau_1$  и  $\tau_2$  число событий, случившихся на одном из них, не зависит от того, сколько событий произошло на другом. По существу это свойство говорит о том, что пуассоновский поток событий — это процесс Маркова.

Используя эти свойства, можно показать, что число событий, попадающих на интервал  $(t, t + \tau)$ , распределено по закону Пуассона

$$P_{t,\tau}(m) = \frac{[\Lambda(t, \tau)]^m}{m!} e^{-\Lambda(t, \tau)},$$

где  $\Lambda(t, \tau)$  — среднее число событий, наступающих на интервале  $(t, t + \tau)$ .

Для так называемого стационарного потока

$$\Lambda(t, \tau) = \lambda\tau, \quad \lambda = \text{const.}$$

Число  $\lambda$  называется интенсивностью потока.

Если  $\chi$  — интервал времени между двумя соседними событиями в стационарном пуассоновском потоке, то  $\chi$  — случайная величина с функцией распределения

$$F_\chi(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Кроме полезных сигналов предполагается наличие шумов, которые представляют собой сигналы, происходящие в моменты времени  $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$ , принадлежащие другому стационарному пуассоновскому потоку событий с интенсивностью  $\mu$ . Такой шум называется пуассоновским.

Задачи, которые предстоит решить, заключаются в следующем:

А) при заданных числах  $\tau, T, T_0, \mu, \lambda$  оценить вероятность регистрации некоторым детектором полезного сигнала (отличив его от шума с ошибкой, не превышающей  $10^{-4}$ ) за время одной посылки, сброса, нескольких сбросов, производимых генератором;

В) построить математические модели полезных сигналов и шумов в виде случайных процессов  $\theta(t)$  и  $\Delta(t)$ , и на их основе решить задачу фильтрации, то есть оценки  $\hat{\theta}(t)$  и полезного сигнала, используя при этом только измеряемые детектором сигналы вида  $\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t)$ ;

С) смоделировать на ЭВМ полезный сигнал, шум, регистрируемый сигнал с вычислением вероятности выделения полезного сигнала.

В дальнейшем предполагается, что благодаря решённой задаче С) будут на основе моделей из задачи В) проведены машинные эксперименты по решению задачи фильтрации и определена статистическая вероятность выделения полезного сигнала.

## 1. Оценки вероятности выделения полезного дискретного сигнала на фоне пуассоновского шума

### 1.1. Некоторые общие сведения о распределении Пуассона

Пусть необходимо узнать, какова вероятность  $P_k(t)$  того, что за промежуток времени  $t$  произойдёт  $k$  событий. При этом известно, что выполняется ряд условий:

1) произойдёт или не произойдёт событие в момент времени  $t$ : не зависит от событий, предшествующих моменту  $t$ ;

2) вероятность отдельного события за малый интервал времён  $\delta t$  возрастёт пропорционально длительности этого интервала. Иными словами, вероятность отдельного события за промежуток времени  $(t, t + \delta t)$  равна  $\mu\delta t + o(\delta t)$ , где  $\mu$  — константа, а  $o(\delta t)$  — величина более высокого порядка малости по сравнению с  $\delta t$ ;

3) вероятность двух или большего числа событий за тот же промежуток времени  $(t, t + \delta t)$  равна нулю:  $0 + o(\delta t)$ .

Исходная вероятность подчиняется распределению Пуассона, которое легко вычислить.

Для этого сравним вероятности  $P(t)$  и  $P(t + \delta t)$   $k$  событий в промежутки времени  $(0, t)$  и  $(0, t + \delta t)$ , соответственно.

За промежуток времени  $(0, t + \delta t)$  не произойдёт ни одного события, если не будет событий в интервалах  $(0, t)$  и  $(t, t + \delta t)$ , т. е.

$$P_0(t + \delta t) = P_0(t)(1 - \mu\delta t + o(\delta t)). \quad (1.1)$$

(Индекс у  $P(t)$  указывает на число событий.)

Устремив  $\delta t$  к нулю, получим дифференциальное уравнение:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \delta t) - P_0(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( -\mu P_0(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t} \right) \quad (1.2)$$

или

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\mu P_0(t). \quad (1.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\ln P_0(t) = -\mu t + const \quad (1.4)$$

или

$$P_0(t) = A \exp(-\mu t). \quad (1.5)$$

При  $t \rightarrow 0$  вероятность того, что ни одно событие не успеет произойти, стремится к единице ( $P_0(0) = 1$ ). Поэтому имеем  $A = 1$ . Окончательно

$$P_0(t) = \exp(-\mu t). \quad (1.6)$$

Это вероятность того, что за время  $t$  не будет ни одного события.

Рассмотрим теперь вероятность того, что в промежутке времени  $(0, t + \delta t)$  произойдёт одно событие.

Здесь имеются две возможности: либо событие произошло в интервале  $(0, t)$ , либо в интервале  $(t, t + \delta t)$ . Отсюда

$$P_1(t + \delta t) = P_1(t)[1 - \mu\delta t + o(\delta t)] + P_0(t)[\mu\delta t + o(\delta t)], \quad (1.7)$$

$$\frac{P_1(t + \delta t) - P_1(t)}{\delta t} = -\mu P_1(t) + \mu P_0(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}. \quad (1.8)$$

Откуда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \mu \exp(-\mu t). \quad (1.9)$$

Решением этого уравнения является выражение

$$P_1(t) = \mu t \exp(-\mu t). \quad (1.10)$$

Соотношения (1.1)–(1.10) позволяют написать общее дифференциальное уравнение для вероятности  $P_k(t)$ .

Нетрудно видеть, что

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\mu P_k(t) + \mu P_{k-1}(t). \quad (1.11)$$

Откуда имеем

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} \exp(-\mu t). \quad (1.12)$$

Распределение (1.12) даёт вероятность того, что за время  $t$  произойдёт  $k$  событий.

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = \exp(-\mu t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} = 1, \quad (1.13)$$

что и следовало ожидать.

Полученное выше соотношение (1.12) называется *распределением Пуассона*.

Отметим, что распределение Пуассона может быть получено и как предельная форма так называемого *биномиального распределения*.

## 1.2. Генерация дискретного сигнала

Дискретный сигнал, который необходимо выделить на фоне шума, распределение вероятности которого описывается законом Пуассона, также должен подчиняться некоторым статистическим закономерностям.

Отметим их:

1) дискретный сигнал (будем также называть его полезным сигналом) представляет собой случайный процесс;

2) в силу условий генерации: полезный сигнал возбуждается П-образным, длительностью  $\tau$ , импульсом первичных частиц (посылкой). Среднее число полезных дискретных сигналов в единицу времени равно  $\lambda$  — интенсивности, входящей в качестве параметра в закон Пуассона. Если  $n$  — среднее число полезных сигналов за время  $\tau$ , то  $n = \lambda\tau$ ;

3) в принципе, за время  $\tau$  может возникать от 0 до  $\infty$  полезных сигналов;

4) поскольку посылки (первичные импульсы) повторяются, то при наблюдении за системой в режиме «сжатого времени», т. е. только во время, когда идёт первичное излучение, формально можно рассматривать полезный сигнал как случайный процесс с пуассоновским распределением вероятности.

## 1.3. Детектирование сигнала

1. Будем полагать, что детектирующее устройство может быть синхронизировано с генератором полезного сигнала, т. е. детектор включается во время П-образного импульса и отключается во время пауз между импульсами.

2. Детектор реагирует в течение времени  $\tau$  на первый дискретный сигнал, независимо от того, является ли этот сигнал полезным или случайным шумом. Все остальные дискретные импульсы детектор «не замечает», т. к. они попадают в «мёртвое время» счётчика.

#### 1.4. Идентификация полезного сигнала

В силу сделанных предположений о характере сигнала, его детектировании наиболее естественным представляется следующий способ идентификации полезного сигнала. Генератор работает в режиме «сжатого времени», т. е. только тогда, когда включён генератор полезных сигналов. Под регистрацией сигнала за время  $t$  понимается работа детектора в двоичном режиме. Нет срабатывания — тогда имеем «0»; есть хотя бы одно срабатывание — «1» (при этом число срабатываний сверху не ограничивается). Заметим, что срабатывание детектора может происходить при этом и от помех.

Будет считаться, что сигнал принят, если с заданной вероятностью  $P_1$  детектор срабатывает за время  $T$  хотя бы 1 раз.

Будет считаться, что принятый сигнал полезный, если вероятность срабатывания детектора от помех  $P_2$  меньше вероятности срабатывания от полезного сигнала в заданное число раз.

В силу свойств распределения Пуассона вероятность того, что за время  $T$  детектор не срабатывает при наличии полезного сигнала, определяется формулой (1.6):

$$(P_0)_{\Pi} = \exp(-\lambda T). \quad (1.6')$$

Следовательно, вероятность того, что детектор при наличии полезного сигнала срабатывает хотя бы один раз, определяется, согласно (1.13), соотношением:

$$P_{\Pi} = 1 - \exp(-\lambda T). \quad (1.14)$$

В то же время, если рассматривать другой случайный процесс — срабатывание детектора за счёт пуассоновского шума с математическим ожиданием  $\mu$ , — то вероятность срабатывания может быть представлена формулой

$$P_{\text{ш}} = 1 - \exp(-\mu T). \quad (1.15)$$

Однако пользоваться формулами (1.14) и (1.15) для целей идентификации полезного сигнала можно лишь как оценочными. Дело в том, что они получены в предположении существования только одного случайного процесса и не учитывают, что оба они — генерация полученного сигнала и шум — существуют одновременно. Поэтому, пользуясь статистическим определением вероятности, несколько модернизируем их.

Пусть можно наблюдать за некоторой системой, где протекают два независимых случайных процесса пуассоновского типа. Выведем аналогичные (1.1)–(1.15) формулы срабатывания генератора.

Вероятность срабатывания детектора от полезного сигнала за время  $\delta t$  ( $\delta t \rightarrow 0$ ) можно оценить как

$$P_{\Pi} \sim \lambda \delta t + o(\delta t). \quad (1.16)$$

Вероятность срабатывания детектора от действия случайного шума за то же время определяется соотношением:

$$P_{\text{ш}} \sim \mu \delta t + o(\delta t). \quad (1.17)$$

Полная вероятность срабатывания детектора, следовательно, равна

$$P = P_{\text{п}} + P_{\text{ш}} \sim (\lambda + \mu) \delta t + o(\delta t). \quad (1.18)$$

Выведем уравнение, аналогичное уравнению (1.3). Пусть  $P_0(t + \delta t)$  — вероятность того, что за время  $t + \delta t$  не пройдёт ни одного события. Тогда

$$P_0(t + \delta t) = P_0(t)(1 - \mu_0 \delta t + o(\delta t)), \quad (1.19)$$

где  $\mu_0 = \lambda + \mu$ . Отсюда получаем, что  $P_0(t)$  подчиняется уравнению

$$\frac{dP_0}{dt} = -\mu_0 P_0. \quad (1.3')$$

Решением этого уравнения является соотношение (1.6). Таким образом, вероятность того, что за время  $T$  детектор срабатывает, определяется формулой

$$P(t) = 1 - \exp[-(\lambda + \mu)T], \quad (1.20)$$

которая по структуре совпадает с (1.14), (1.15), но не разделяет причины такого срабатывания.

Преобразуем формулу (1.20), сделав разумные допущения о том, что  $\mu \ll \lambda$ , (идеальным был бы случай  $\mu = 0$ , но шум определяется естественными причинами и принципиально не устраним).

Время наблюдения  $T$  таково, что  $P(T) \rightarrow 1$ ;  $\mu T \ll 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P(T) &\approx 1 - \exp(-\lambda T)(1 - \mu T) = 1 - \exp(-\lambda T) + \mu T \exp(-\lambda T) = \\ &= P_{\text{п}} + (1 + \mu T - 1) \exp(-\lambda T) \approx P_{\text{п}} + \exp(-\lambda T)(1 - \exp(-\mu T)) = \\ &= P_{\text{п}} + P_{\text{ш}} \exp(-\lambda T) = P_{\text{п}} + P_{\text{ш}} - P_{\text{п}} P_{\text{ш}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Пользуясь формулами (1.20), (1.21) можно определить, чему должно равняться время  $T$  (или, что практически то же самое, сколько П-образных импульсов должно произойти ( $T = m\tau$ ), чтобы с заданной вероятностью  $P_1$  детектор сработал хотя бы один раз (верхняя граница срабатываний, как уже указывалось, не ограничена):

$$P_1 = P(m\tau) = 1 - \exp[-(\lambda + \mu)m\tau], \quad (1.22)$$

$$-(\lambda + \mu)m\tau = \ln(1 - P_1),$$

$$m = -\frac{\ln(1 - P_1)}{(\lambda + \mu)\tau}. \quad (*)$$

Формула (\*) даёт оценку для числа посылок в сбросе. Посылка в сбросе может быть и больше, чем то, на которое указывает число справа в формуле (\*). Поэтому вместо формулы (\*) можно работать с формулой

$$m \geq -\frac{\ln(1 - P_1)}{(\lambda + \mu)\tau}. \quad (1.23)$$

Из этой формулы, с учётом того, что  $\lambda > \mu$  окончательно, записываем

$$m > -\frac{\ln(1 - P_1)}{\lambda\tau(1 + \frac{\mu}{\lambda})} \approx -\frac{\ln(1 - P_1)}{n}, \quad (1.24)$$

где  $n$  — среднее число полезных сигналов за время одного первичного импульса.

Полученная формула даёт нижнюю границу числа первичных импульсов, необходимых для того, чтобы с заданной вероятностью детектор сработал.

Однако, как это следует из вышеизложенного, среди причин срабатывания детектора может быть и помеха. Причём, очевидно, вероятность срабатывания детектора за счёт шума увеличивается с ростом  $T$ . Поэтому число импульсов должно быть ограничено сверху числом  $k$ . Сделаем соответствующую оценку числа  $k$ .

Пусть известно, что на  $N$  регистраций сигнала детектором имеем  $N_1$  полезных, а  $N_2$  — за счёт шума (паразитные сигналы). Причём задано, что

$$\frac{N_2}{N_1} \leq \eta \quad (\eta \rightarrow 0). \quad (1.25)$$

Встаёт вопрос, как обеспечить соотношение (1.25)? Перейдём на «язык вероятностей». Имеем

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1 + N_2 - N_2} &= \frac{N_2}{N - N_2} = \frac{N_2}{N(1 - \frac{N_2}{N})} = \frac{P_{\text{ш}}}{1 - P_{\text{ш}}} \approx \\ &\approx \frac{1 - e^{-k\mu\tau}}{e^{-k\mu\tau}} = e^{k\mu\tau} - 1 < \eta, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где  $k$  — максимальное число посылок в сбросе,  $T = k\tau$ .

Откуда

$$\begin{aligned} e^{k\mu\tau} &\leq 1 + \eta, \\ k\mu\tau &\leq \ln(1 + \eta) \approx \eta, \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Получаем

$$k \leq \frac{\eta}{\mu\tau}. \quad (1.28)$$

Учитывая, что  $\mu = n_{\text{ш}}/\tau$ , где  $n_{\text{ш}}$  — среднее число случайных импульсов за время  $\tau$ , запишем

$$k \leq \frac{\eta}{n_{\text{ш}}}. \quad (1.29)$$

Сравнивая (1.24) и (1.29), окончательно имеем:

$$-\frac{\ln(1 - P_1)}{n} < m < \frac{\eta}{n_{\text{ш}}}. \quad (1.30)$$

Формула (1.30) даёт возможность оценить необходимую мощность источника полезных сигналов:

$$n > n_{\text{ш}} \ln(1 - P_1)^{-(1/\eta)}. \quad (1.31)$$

Полученные формулы дают оценки для числа импульсов и интенсивности источника, необходимых для идентификации полезного сигнала. Однако возможны случаи, когда соотношения (1.24) и (1.29) несовместимы. И здесь появляется необходимость в проведении дополнительных мероприятий по повышению надёжности идентификации полезного сигнала.

Рассмотрим один из возможных путей повышения надёжности.

Поскольку допустимы различные случаи, необходимо их обговорить:

1) первый и наиболее простой заключается в том, что число П-образных импульсов в единичной посылке недостаточно для обеспечения неравенства (1.24). Тогда для его выполнения достаточно повторить необходимое число раз посылку первичных импульсов, работая по-прежнему в режиме «сжатого времени».

2) более сложный случай, когда условие (1.24) выполняется, но при этом число П-образных импульсов превосходит оценку (1.29).

В этом случае  $P_2 = N_2/N$  — вероятность ошибки (срабатывание детектора за счёт шума) при одной серии. Если повторить серию, то при дублировании сигнала вероятность ошибки уменьшится:

$$P = P_2^2. \quad (1.32)$$

Если повторять сигнал (серию первичных П-образных импульсов)  $l$  раз, то вероятность ошибки будет определяться формулой

$$P = P_2^l, \quad (1.33)$$

и при росте  $l$  вероятность  $P \rightarrow 0$ , т. е. можно подойти к необходимой достоверности сигнала.

### 1.5. Оценки и выводы

Воспользуемся полученными выше формулами для численной оценки необходимого числа посылок.

Сначала вспомним о нижней границе

$$m > -\frac{\ln(1 - P_1)}{n}, \quad (1.24)$$

где  $n$  — среднее число сигналов, генерируемых за одну посылку.

Возьмём для оценки число  $n = 4$ . Вероятность  $P_1$  также задана  $P_1 = 0,9999$ . Подстановкой этих констант в (1.24) получаем

$$m > -\frac{\ln 10^{-4}}{4} = \ln 10 > 2. \quad (1.34)$$

Таким образом, если  $m \geq 3$ , то с вероятностью 0,9999 детектор зарегистрирует сигнал. Следовательно, если число посылок в сбросе более 2, то для регистрации сигнала достаточно одного сброса генератора первичных частиц.

Оценим теперь верхнюю границу допустимого числа посылок в одном сбросе генератора, чтобы детектор «ошибался» (срабатывал от случайных причин) не чаще 1 раза на 10 000 «полезных» срабатываний.

Согласно формулам (1.25) и (1.29), имеем

$$k \leq \eta/n_{\text{ш}},$$

где  $\eta = 10^{-4}$ , а  $n_{\text{ш}} \approx 0,5 \cdot 10^{-5}$ . Известно, что (космический) фон состоит из 10 частиц за 1 сек, а длительность одной посылки  $\sim 0,5 \cdot 10^{-6}$  сек (данные по ускорителю элементарных частиц).

Тогда

$$k < \frac{10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-5}} = 20. \quad (1.35)$$

Таким образом, для уверенной регистрации сигнала (при условии, что числа  $n, n_{\text{ш}}$  и  $P_1$  соответствуют необходимым) достаточно одного сброса генератора. При этом число посылок в нём должно быть больше 2, но меньше 20.

## 2. Математическое моделирование полезных дискретных сигналов и пуассоновского шума. Фильтрация и прогноз

### 2.1. Полезный сигнал как случайный процесс. Модели полезного сигнала и шума

Примем, что в каждый момент времени  $t \in [0+\infty)$  полезный сигнал является случайной величиной, то есть является случайным процессом  $\theta(t)$ .

Импульс первичных частиц, порождающий полезный дискретный сигнал, математически можно представить как случайную функцию вида

$$\alpha_k \delta(t - \tau_k), \quad (2.1)$$

где  $\alpha_k$  — случайная величина, характеризующая мощность (энергию) импульса первичных частиц,  $\delta(t)$  — функция Дирака,  $\tau_k$  — момент времени, входящий в пуассоновский поток событий.

Если  $(t_i, t_i + \tau)$  — интервал времени ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $t_0 = 0$ , отвечающий  $i$ -й посылке генератора, то совокупность импульсов первичных частиц, порождаю-

щих эту посылку, представляет процесс вида

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i(t) = \sum_{t_i \leq \tau_k^i \leq t_i + \tau} \alpha_k^i \delta(t - \tau_k^i), & t \in [t_i, t_i + \tau], \\ \dot{\eta}_i(t) = 0, & t \notin [t_i, t_i + \tau], \end{cases} \quad (2.2)$$

и, следовательно, сбросу отвечает процесс

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{\eta}_i(t). \quad (2.3)$$

Каждый импульс (2.1) порождает дискретный сигнал

$$\alpha_k w(t - \tau_k), \quad (2.4)$$

где  $w(t)$  — некоторая функция, моделирующая полезный дискретный сигнал,  $w(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Таким образом, дискретные сигналы, входящие в один сброс в соответствии с (2.2), (2.3), описываются случайным процессом вида

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{t_i \leq \tau_k^i \leq t_i + \tau} \alpha_k^i \delta(t - \tau_k^i). \quad (2.5)$$

В условиях предположения о работе детектора в режиме «сжатого времени» (см. §§ 1.3, 1.4) можно считать, что временные промежутки между посылками равны нулю, объединить пуассоновские потоки событий  $\{\tau_k^i\}_{k=1}^{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в общий стационарный пуассоновский поток событий  $\{\tau_k\}$  с интенсивностью  $\lambda$  и принять, что полезный сигнал, отвечающий сбросу, имеет вид

$$\theta(t) = \sum_{0 \leq \tau_k \leq t} \alpha_k w(t - \tau_k). \quad (2.6)$$

По существу режим «сжатого времени» следует распространить и на промежутки между сбросами и без ограничения общности считать, что (2.6) описывает излучаемый полезный дискретный сигнал, регистрируемый детектором.

Так как шум — это дискретный сигнал, устроенный аналогично полезному сигналу, то для шума следует принять описание в виде случайного процесса

$$\Delta(t) = \sum_{0 \leq \sigma_k \leq t} \beta_k w(t - \sigma_k), \quad (2.7)$$

где  $\{\sigma_k\}$  — пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\mu$ .

Будем далее предполагать, что случайные величины  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (и  $\beta_k$  соответственно) непрерывны и имеют одинаковую плотность распределения. Это вполне соответствует картине зарождения импульсов первичных частиц, испускаемых генератором.

Случайные процессы вида (2.6) называются *процессами дробового эффекта* [2, с. 205].

Импульсы вида (2.1), входящие в сброс (2.3), воздействуя на некоторую среду, порождают сигналы вида (2.6). Суммарное воздействие на среду всего сброса (2.3) описывается случайным процессом вида

$$\eta(t) = \int_0^t \dot{\eta}(s) ds = \sum_{0 \leq \tau_k \leq t} \alpha_k, \quad (2.8)$$

называемым *обобщённым пуассоновским процессом*.

Известно [2, с. 211], что сигнал (2.6) можно представить в виде *стохастического интеграла*

$$\theta(t) = \int_0^t w(t-s) d\eta(s), \quad (2.9)$$

где  $\eta(t)$  — процесс (2.8).

Если

$$\int_0^{+\infty} |w(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{+\infty} |w(t)|^2 dt < \infty,$$

то случайный процесс (2.9) при  $t \rightarrow \infty$  сходится в среднеквадратичном [2, с. 208] к стационарному процессу

$$\theta^*(t) = \int_{-\infty}^t w(t-s) d\eta(s) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t w(t-s) d\eta(s),$$

который устанавливается с течением времени на выходе вследствие воздействия на среду однородных случайных импульсов  $\dot{\eta}(t)$  (см. (2.3)).

Поэтому будем считать для простоты, что имеем дело со стационарным случайным процессом вида

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t w(t-s) d\eta(s), \quad (2.10)$$

описывающим полезные дискретные сигналы.

В соответствии с теорией [2, с. 223] имеет место представление

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega), \quad (2.11)$$

где

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \phi(i\omega) d\Psi(\omega) \equiv l.i.m. \int_{\omega_0}^{\omega} \phi(i\omega) d\Psi(\omega), \quad (2.12)$$

где случайный процесс  $\Psi(\omega)$  определён при  $\omega \geq \omega_0$  как

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}}{-it} d\eta(t). \quad (2.13)$$

Наконец, спектральная плотность для  $\theta(t)$

$$k_\theta(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\phi(i\omega)|^2, \quad (2.14)$$

где  $\sigma$  — структурная плотность обобщённого пуассоновского процесса  $\eta(t)$ :

$$\sigma \equiv \lambda \cdot \mathbf{M}\alpha^2, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{D}[\eta(t) - \eta(s)] \equiv \sigma \cdot (t - s) = \lambda \cdot \mathbf{M}\alpha^2 \cdot (t - s).$$

(см. [2, с. 210]).

Таким образом, можно считать, что полезный сигнал моделируется в виде стационарного случайного процесса, допускающего представление в виде (2.11).

Аналогичный процесс

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^t v(t-s) d\pi(s) \quad (2.16)$$

описывает шум, и для него верны формулы, подобные (2.11) – (2.15).

Сумма

$$\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t) \quad (2.17)$$

стационарных процессов есть процесс стационарный.

Следовательно, для того, чтобы по результату наблюдения процесса  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , т. е. по реализации смешанного сигнала, состоящего из полезного и шума, оценить полезный (отфильтровать), можно применить *методы фильтрации*, разработанные для стационарных случайных процессов [3, 4].

Далее под *оптимальным фильтром* полезного сигнала  $\theta(t)$  понимаем процесс  $\hat{\theta}(t)$  такой, что минимальна средняя квадратичная погрешность

$$\mathbf{M}[\hat{\theta}(t) - \theta(t)]^2. \quad (2.18)$$

Процесс  $\hat{\theta}(t)$  называем *оценкой сигнала*  $\theta(t)$ .

Теоремы *теории фильтрации* дают общие формулы, позволяющие в конкретных случаях провести оценку полезного сигнала.

## 2.2. Метод Яглома фильтрации и прогноза полезного скачкообразного сигнала

Пусть полезный сигнал  $\theta(t)$  является *скачкообразным*, то есть для пуассоновского потока событий  $\{\tau_k\}$  функция  $\theta(t)$  меняет скачком своё значение, принимая, независимо от предыстории процесса, случайное значение  $\alpha$  и сохраняя его до момента появления следующего события.

Пусть случайная величина  $\alpha$  непрерывна и имеет плотность распределения  $f$ .

Реализация сигнала  $\theta(t)$  изображена на рис. 3

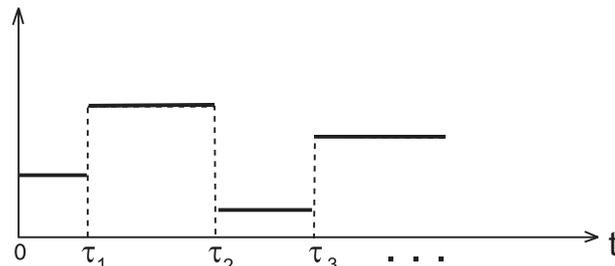


Рис. 3. Реализация скачкообразного сигнала  $\theta(t)$

Имеем для математического ожидания и дисперсии

$$\mathbf{M}\theta(t) = \mathbf{M}\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \text{const},$$

$$\mathbf{D}\theta(t) = \mathbf{D}\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}\alpha)^2 f(x) dx.$$

Корреляционная функция для  $\theta(t)$  имеет вид [5, с. 284-285]

$$K_{\theta}(t) = \mathbf{D}\alpha \cdot e^{-\lambda|t|}, \quad (2.19)$$

где  $\lambda$  — интенсивность пуассоновского потока. Имеет место *спектральное представление* в виде

$$K_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} k(\omega) d\omega.$$

Функция

$$k(\omega) = \frac{\mathbf{D}\alpha}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

называется *спектральной плотностью процесса  $\theta(t)$*  (см. [4, с. 170, пример 4.1]).

Аналогично для шума  $\Delta(t)$  имеем скачкообразный процесс, заданный пуассоновским потоком событий  $\{\sigma_k\}$ , случайной величиной  $\beta$  с плотностью распределения вероятностей  $g$  и корреляционной функцией

$$K_{\Delta}(t) = \mathbf{D}\beta \cdot e^{-\mu|t|}, \tag{2.20}$$

где  $\mu$  — интенсивность пуассоновского потока. Также имеем *спектральное представление* в виде

$$K_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} h(\omega) d\omega,$$

где

$$h(\omega) = \frac{\mathbf{D}\beta}{\pi} \frac{\mu}{\mu^2 + \omega^2}$$

– спектральная плотность процесса  $\Delta(t)$ .

Предположим, что наблюдается процесс (2.17) при  $t \in (-\infty, T)$ , то есть достаточно долго. Примем, что  $\theta(t), \Delta(t)$  характеризуется тем, что

$$\mathbf{M}\theta(t) = 0, \quad \mathbf{M}\Delta(t) = 0.$$

Этого можно добиться, так как по условиям поставленной задачи нам известны характеристики сигнала и шума. И если  $\mathbf{M}\theta(t) \neq 0$ , то можно перейти к задаче с процессами

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= \xi(t) - \mathbf{M}\theta(t) - \mathbf{M}\Delta(t), \\ \theta'(t) &= \theta(t) - \mathbf{M}\theta(t), \\ \Delta'(t) &= \Delta(t) - \mathbf{M}\Delta(t) \end{aligned}$$

и рассматривать задачу фильтрации для

$$\xi'(t) = \theta'(t) + \Delta'(t),$$

решив которую, мы, возвращаясь к исходной задаче для (2.17), найдём и её решение.

Рассматриваемый процесс  $\theta(t)$  является стационарным ( $\mathbf{M}\theta(t) = const$ ), и корреляционная функция зависит от одной переменной.

Так как корреляционная функция  $K_{\theta}(t)$  непрерывна, то имеет место представление

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} d\Phi(\omega), \tag{2.21}$$

[3, с. 264, следствие 1 на с. 238], где  $\Phi(\omega)$  – некоторый случайный процесс с ортогональными приращениями [3, с. 253–254].

В соответствии с [3, с. 310–313] *оптимальный фильтр Яглома* даёт оценку  $\widehat{\theta}_{\delta}(T)$  такую, что минимально

$$\mathbf{M}[\widehat{\theta}_{\delta}(T) - \theta(T - \delta)]^2, \quad \delta > 0,$$

и имеющую вид стохастического интеграла

$$\widehat{\theta}_\delta(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega T} c(i\omega) d\Phi(\omega), \quad (2.22)$$

где

$$c(i\omega) = \frac{\lambda \mathbf{D}\alpha}{\lambda \mathbf{D}\alpha + \mu \mathbf{D}\beta} \frac{(\lambda - \gamma)(\omega^2 + \mu^2)e^{i\omega\delta} - e^{\gamma\delta}(\gamma + \mu)(i\omega + \lambda)(i\omega + \mu)}{(\lambda - \gamma)(\omega^2 + \gamma^2)},$$

$$\gamma^2 = \frac{\lambda^3 \mathbf{D}\alpha + \mu^3 \mathbf{D}\beta}{\lambda \mathbf{D}\alpha + \mu \mathbf{D}\beta}$$

и  $\Phi(\omega)$  — случайный процесс (2.12).

Вычисление интеграла (2.22) представляет значительную трудность. Гораздо легче решается задача прогноза, когда по реализации процесса  $\xi(t)$  при  $t \in (-\infty, T]$  требуется предсказать значение  $\theta(T + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , т. е. найти оценку  $\widehat{\theta}_\delta(T)$  так, что минимально

$$\mathbf{M}[\widehat{\theta}_\delta(T) - \theta(T + \delta)]^2.$$

Эта задача имеет решение вида

$$\widehat{\theta}_\delta(T) = \frac{\lambda \mathbf{D}\alpha}{\lambda \mathbf{D}\alpha + \mu \mathbf{D}\beta} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\gamma + \lambda} e^{-\lambda\delta} \left\{ \xi(T) - (\mu - \gamma) \int_{-\infty}^T e^{-\gamma(T-s)} \xi(s) ds \right\}. \quad (2.23)$$

Таким образом, при решении задачи оценки вероятности выделения полезного сигнала с помощью машинных экспериментов формула (2.23) вполне пригодна для того, чтобы проделывать соответствующие вычисления. В машинном эксперименте в момент  $T + \delta$  нам известны  $\theta(T + \delta)$  и  $\xi(t)$  при  $t \leq T$ . Следовательно, можно сравнить  $\theta(T + \delta)$  и (2.23) и сделать вывод о степени приемлемости оценки (2.23) в реальной ситуации.

### 2.3. Фильтр Винера для скачкообразного сигнала и шума

Пусть наблюдается случайный процесс

$$\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t),$$

где  $\theta(t)$  и  $\Delta(t)$  — скачкообразные процессы, описанные в § 2.2.

Без ограничения общности примем, что

$$\mathbf{M}\theta(t) = 0, \quad \mathbf{M}\Delta(t) = 0.$$

Предположим, что процесс  $\xi(t)$  наблюдается при  $t \in [0, T]$ .

Под *фильтром Винера* понимается процесс

$$\widehat{\theta}(t) = \int_0^t h(s)\xi(t-s)ds, \tag{2.24}$$

минимизирующий среднюю квадратичную погрешность

$$\mathbf{M}[\widehat{\theta}(t) - \theta(t)]^2.$$

Фильтр Винера  $h(s)$  находится как решение интегрального уравнения [6, § 7.2]

$$\int_0^t h(s)[K_\theta(t-s) + K_\Delta(t-s)]ds = K_\theta(t). \tag{2.25}$$

Подставляя (2.19), (2.20) в (2.25), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}v \left\{ \int_0^t h(s)e^{\lambda s} ds + e^{2\lambda t} \int_t^T h(s)e^{-\lambda s} ds \right\} + \\ & + \mathbf{D}w \left\{ e^{-(\mu-\lambda)t} \int_0^t h(s)e^{\mu s} ds + e^{(\lambda+\mu)t} \int_t^T h(s)e^{-\mu s} ds \right\} = \mathbf{D}v. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Дифференцируя дважды по  $t$  получим уравнение

$$h'' - [\mu^2 + \beta^2(\lambda^2 - \mu^2)]h = 0, \tag{2.27}$$

где

$$\beta^2 = \frac{2\mu\mathbf{D}w}{2\lambda\mathbf{D}v + 2\mu\mathbf{D}w}.$$

Уравнение (2.27) получено в предположение, что фильтр  $h(s)$  дважды дифференцируем. Однако такого оптимального фильтра Винера не существует.

Поэтому заменим непрерывно наблюдаемый процесс  $\xi(t-s)$  дискретными отсчётами  $\xi(t-t_i)$ . Тогда имеем дискретный аналог уравнения Винера–Хопфа (2.25):

$$\sum_{i=0}^n h_i K_\theta(t_i - t_j) + K_\Delta(t_i - t_j) = K_\theta(t_j), \tag{2.28}$$

$$j = 0, 1, \dots, n.$$

Для оценки  $\widehat{\theta}$  имеем

$$\widehat{\theta}(t) = \sum_{i=0}^n h_i \xi(t-t_i) \tag{2.29}$$

и минимальное значение для среднеквадратичной погрешности

$$K_\theta(0) - \sum_{i,j=0}^n h_i h_j [K_\theta(t_i - t_j) + K_\Delta(t_i - t_j)]. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.28) — это система линейных алгебраических уравнений, стандартно решаемая на ЭВМ. Найдя решение  $\{h_i\}$  благодаря формулам (2.29), (2.30), находим оптимальную оценку сигнала  $\theta(t)$ .

#### 2.4. Оценка детерминистского дискретного сигнала на фоне случайного шума с известным математическим ожиданием

Примем, что каждый сброс порождает суммарный полезный сигнал, задаваемый обычной функцией  $\theta_k(t)$ , и полезный сигнал  $\theta(t)$ , порождаемый  $M$  сбросами, имеет вид

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^M c_k \theta_k(t), \quad (2.31)$$

где  $c_k$  могут принимать различные действительные значения.

Какой вид имеют функции  $\theta_k(t)$ ?

В качестве модели можно брать различные функции. Уточнение возможно в ходе проведения машинных экспериментов. Вполне возможно, что эти функции имеют вид, приведённый на рис. 4, а) или б).

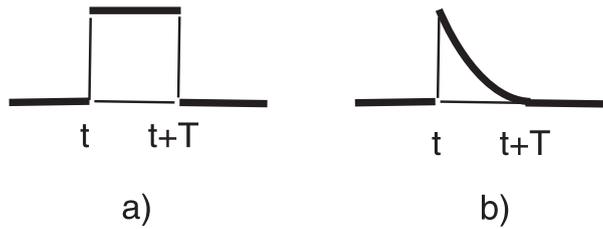


Рис. 4. Сигналы, порождаемые сбросами

В первом случае  $\theta_k(t)$  — это математическое представление скачкообразного процесса, определяемого пуассоновским потоком событий, заданным на интервале  $(t, t + T)$ . Во втором случае  $\theta_k(t)$  — это математическое представление случайного процесса

$$\sum_{k=1}^{n_t} \alpha_k \exp[-\gamma(t - \tau_k)]^+, \quad (**)$$

где

$$\exp[-\gamma(t - \tau_k)]^+ = \begin{cases} 0, & t < \tau_k, \\ \exp[-\gamma(t - \tau_k)], & t \geq \tau_k, \end{cases}$$

имеющего реализации вида, изображённого на рис. 5 (см. [7, с. 208-212]).

Принимаем, что

$$\theta_k \cdot \theta_j = 0 \quad (k \neq j), \quad (2.32)$$

т. е. сигнал от  $k$ -го сброса никак не накладывается на сигнал от  $j$ -го сброса.

Будем считать, что для шума  $\Delta(t)$ , являющегося пуассоновским,

$$M\Delta(t) = 0.$$

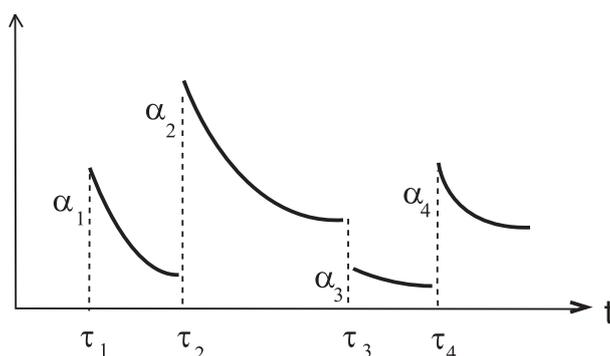


Рис. 5. Реализации процесса (\*\*)

Пусть наблюдается процесс

$$\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t), \quad t \in [0, T].$$

Поставим перед собой задачу оценить неизвестные числа  $c_k$  в (2.31) так, что (2.31) с оценками  $\hat{c}_k$  вместо  $c_k$  принадлежат пространству  $\mathcal{H}$ , состоящему из линейных комбинаций вида

$$\sum_k a_k \xi(t_k), \quad t_k \in [0, T]$$

и их среднеквадратичных пределов, причём

$$M\hat{c}_k = c_k$$

и

$$\int_0^T \left\{ \xi(t) - \sum_{k=1}^M \hat{c}_k \theta_k(t) \right\}^2 dt = \min_{y_1, \dots, y_M} \int_0^T \left\{ \xi(t) - \sum_{k=1}^M y_k \theta_k(t) \right\}^2 dt. \quad (2.33)$$

Оценки  $\hat{c}_k$  называют оценками наименьших квадратов [4].

Если

$$R(y_1, \dots, y_M) = (\xi, \xi) - 2 \sum_{k=1}^M y_k (\xi, \theta_k) + \sum_{k,j=1}^M (\theta_k, \theta_j) \geq 0,$$

где

$$(f, g) = \int_0^T f(t)g(t)dt,$$

то задача (2.33) сводится к нахождению

$$\min_{y_1, \dots, y_M} R(y_1, \dots, y_M).$$

Так как он достигается в точке  $(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_M)$ , то

$$\frac{\partial}{\partial y_k} R(y_1, \dots, y_M)|_{y_i=\hat{c}_i} = 2 \left[ -(\xi, \theta_k) + \sum_{j=0}^M \hat{c}_j (\theta_k, \theta_j) \right] = 0.$$

Следовательно, с учётом (2.32),

$$\hat{c}_k = \frac{(\xi, \theta_k)}{(\theta_k, \theta_k)}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (2.34)$$

Легко проверить, что  $\sum \hat{c}_k \theta_k \in \mathcal{H}$  и  $\mathbf{M}\hat{c}_k = c_k$ .

Формула (2.34) позволяет найти статистическую вероятность выделения полезных детерминистских сигналов, порождаемых сбросами. Для этого достаточно проводить машинные эксперименты следующим образом. Задав числа  $c_k$  и вычислив реализацию на ЭВМ, можно по формулам (2.34) найти оценки  $\hat{c}_k$ . Если для данного сигнала  $\theta(t)$ ,  $t \in [0, T]$  и реализации  $\xi(t)$ , найденные  $\{\hat{c}_k\}$  близки с заданной ошибкой к  $\{c_k\}$ , то считаем, что принят полезный сигнал, в противном случае — нет. Прделав достаточно большую серию экспериментов, найдём, что вероятность выделения полезного сигнала равна

$$P = \frac{\text{число выделенных полезных сигналов}}{\text{общее число экспериментов (реализаций)}}.$$

Следует помнить, что, во-первых, оценки  $\hat{c}_k$  не являются, вообще говоря, наилучшими [2, с. 266], и, во-вторых, «сигнал»  $\sum_k \hat{c}_k \theta_k(t)$  близок к полезному сигналу лишь после усреднения.

### 3. Моделирование на ЭВМ случайного дискретного сигнала на фоне пуассоновского шума

Для моделирования на ЭВМ посылок и сбросов И.С. Кальчевским и А.А. Филимоновым была создана программа на языке Fortran [8].

Программа численного моделирования вырабатывает  $N$  посылок, длительностью  $\tau$  каждая. Посылки группируются по сбросам так, что

$$m \cdot N_S \leq N,$$

где  $m$  — число посылок в сбросе,  $N_S$  — число сбросов, необходимое для статистической обработки информации.

Посылки содержат случайные (шумовые) и полезные сигналы дискретного характера, способы моделирования которых изложены ниже.

#### 3.1. Моделирование пуассоновского шума

Генерация случайного пуассоновского шума осуществляется в режиме «сжатого времени» следующим образом (для этого написана программа ВЕЕМ).

Исходя из среднего числа фоновых импульсов в единицу времени  $n_\phi$  определяется количество фоновых сигналов  $N_\phi$  за время  $t = N\tau$ , так что  $N_\phi = n_\phi \cdot N \cdot \tau$ .

Используя стандартный датчик псевдослучайных равномерно распределённых чисел, вырабатываются  $N_\phi$  значений в интервале  $(0, 1)$ , которые трансформируются в интервал  $(0, t)$ . Тем самым определяются  $\{t_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N_\phi$  моментов

времени прихода фоновых сигналов в режиме «сжатого времени». Затем интервал  $(0, t)$  разбивается на  $N$  подинтервалов-посылок и вычисляется количество фоновых сигналов в каждой посылке, а также время прихода первого фонового сигнала в посылке.

### 3.2. Моделирование полезных сигналов

1. Отметим, что полезные сигналы недетерминированы, т. е., в свою очередь, являются случайными. Поэтому для получения сигналов такого рода в программе используется пакет программ для генерации случайных величин, подчиняющихся заданным законам распределения.

Для большей общности программа моделирования реализована в предположении, что случайными являются как количество полезных сигналов в каждой из посылок, так и время приёма полезных сигналов в посылке. Для определения количества полезных сигналов в каждой из посылок в программе вырабатывается  $N$  случайных чисел, распределённых по закону, заданному пользователем. Затем вычисляется среднее значение  $\bar{n}^*$  массива этих чисел, и каждое из них умножается на величину  $\bar{n}/\bar{n}^*$ , где  $\bar{n}$  — среднее (ожидаемое) количество полезных сигналов в посылке (задаётся пользователем). Таким образом определяется количество полезных сигналов в каждой из посылок.

На экран монитора выводятся на одном рисунке графики функции и плотности распределения количества полезных сигналов по посылкам, а также гистограмма этого распределения, построенная по вычисленным в программе значениям количества полезных сигналов. Если гистограмма неудовлетворительно совпадает с заданной плотностью распределения, то вычисления рекомендуется повторить, изменив входные данные распределения.

При продолжении работы в программе в соответствии с заданным (пользователем) распределением вырабатывается для каждой посылки время прихода полезных сигналов. Информация о построении временного распределения сигналов выводится на экран монитора.

Отметим, что законы распределения могут задаваться пользователем в виде плотности распределения статистической таблицей.

Достоинством разработанной программы являются широкие возможности, предоставляемые пользователю для моделирования полезного недетерминированного сигнала.

Указанный способ моделирования полезных сигналов реализуется для случая, когда среднее число полезных сигналов в посылке  $sps \geq 3$ .

2. Для случая, когда число полезных сигналов в посылке не велико,  $sps < 3$ , в программе реализуется пуассоновское распределение полезных сигналов по посылкам. Алгоритм реализации сигналов и их обработки остаются теми же, что и случае, описанном в пункте 1. Однако графическая информация на экран монитора не выводится.

Для вывода нужного варианта генерации полезного сигнала пользователь задаёт величину параметра  $l_n$ . При  $l_n = 0$  программа вырабатывает полезные сигналы в соответствии с распределением, заданным пользователем. При  $l_n = 1$

реализуется пуассоновское распределение полезных сигналов.

### 3.3. Статистическая обработка результатов моделирования

Как указывалось, для каждой посылки вычисляются количество фоновых и полезных сигналов, а также время прихода этих сигналов.

В программе предусмотрены два варианта обработки результатов.

**Вариант А.** Здесь предполагается, что датчики приёма сигналов имеют «мёртвое время», превышающее длительность посылки. В этом случае принимается сигнал, пришедший первым (в посылке). Поэтому в программе вычисляется время первого пришедшего сигнала в каждой посылке и определяется его статус (фоновый или полезный).

**Вариант В.** Здесь предполагается, что «мёртвое время» датчиков приёма сигналов равно нулю. В этом случае в программе сравнивается количество полезных и фоновых сигналов в каждой посылке. Считается, что если число полезных сигналов превышает (или равно) числу фоновых, то посылка, в целом, несёт полезный сигнал.

Отметим, что в каждом из вариантов возможны случаи, когда какие-либо посылки не содержат сигналов. После определения статуса посылки (принят полезный или фоновый сигнал) в программе задаётся цикл по числу посылок  $m$  в сбросе от  $m_n$  до  $m_k$  (эти величины определяются пользователем). Для каждого из вариантов по числу сбросов  $N/m$  определяется доля принятых сигналов и затем вычисляется вероятность приёма в сбросе хотя бы  $k$  полезных сигналов-посылок ( $k = 1, \dots, m$ ).

## 4. Заключение

Сбросы, о которых говорится в статье, могут быть потоками нейтрино, порождаемыми ускорителями. Нейтрино способно проходить сквозь любые преграды, не взаимодействуя с материалом, например по прямой сквозь Землю. Естественно попытаться использовать их для передачи информации, решая параллельно задачу о выделении передаваемых сигналов. Так, в 2009 году возможность использования пучка нейтрино высокой энергии от мюонного накопительного кольца для обеспечения односторонней связи с подводной лодкой предложил Р. Huber [9]. Можно говорить и о межзвёздной связи.

Интересно, что «14 марта 2012 года случилось событие, сравнимое с изобретением радиосвязи: учёные из американской Национальной ускорительной лаборатории им. Энрико Ферми (FermiLab) смогли передать информацию с помощью частиц нейтрино (рис. 6). Пока это первый самый сложный эксперимент, далёкий от практического применения» [10]. Импульсный источник *пучков нейтрино на Главном инжекторе (NuMI)* передал кодированное слово «нейтрино», записанное в 7-битном ASCII-коде, где импульс нейтрино соответствовал «1» в двоичной системе, а отсутствие импульса соответствовало «0»; канал связи достиг скорости кодированной передачи данных 0,1 бит/сек с

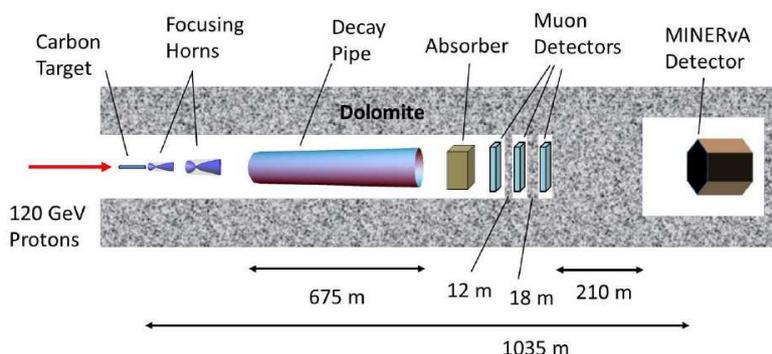


Рис. 6. Схема передачи сигнала сбросом NuMI, используемого в качестве источника нейтрино и детектора MINERvA [10]

частотой появления ошибок 1 % на расстоянии 1,035 км, включая 240 м Земли [10].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М. : Советское радио, 1973. 231 с.
2. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М. : Наука, 1971. 286 с.
3. Гихман И.И., Скороход И.И. Введение в теорию случайных процессов. М. : Наука, 1965. 654 с.
4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. М. : ФМ, 364 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. Теория вероятностей. М. : Наука, 1973. 364 с.
6. Коростелев А.А. Пространственно-временная теория радиосистем. М. : «Радио и связь», 1987. 319 с.
7. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971. 536 с.
8. Гуц А.К., Иванов В.Н., Кальчевский И.С., Филимонов А.А. Разработка методов математического моделирования физических процессов // Итоговый научно-исследовательский отчет по НИР «ГЭК-1». Омск : Молодёжный центр ОмГУ, 1990. 65 с.
9. Huber P. Submarine neutrino communication. Arxiv: 0909.4554 (2009). URL: <https://arxiv.org/abs/0909.4554>.
10. Stancil D.D., Adamson P. and others. Demonstration of Communication using Neutrinos. ArXiv:1203.2847 (2012). URL: <https://arxiv.org/abs/1203.2847>.

## DETECTION AND SELECTION OF USEFUL DISCRETE SIGNALS IN PERIODIC DISCHARGES OF PRIMARY PARTICLES

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

**V.N. Ivanov**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** We study the problem of signal transmission using discharges flows of primary particles and calculate the probability of such signals registration, as well as probability of highlighting them against the background of the Poisson noise. The computer simulations of such useful signals and noises are discussed

**Keywords:** Discharge of primary particles, signal transmission, Poisson signals and noises, registration of useful signals.

## REFERENCES

1. Kazakov V.A. Vvedenie v teoriyu markovskikh protsessov i nekotorye radiotekhnicheskie zadachi. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1973, 231 p. (in Russian)
2. Rozanov Yu.A. Sluchainye protsessy. Moscow, Nauka Publ., 1971, 286 p. (in Russian)
3. Gikhman I.I. and Skorokhod I.I. Vvedenie v teoriyu sluchainykh protsessov. Moscow, Nauka Publ., 1965, 654 p. (in Russian)
4. Rozanov Yu.A. Statsionarnye sluchainye protsessy. Moscow, FM Publ., 364 p. (in Russian)
5. Venttsel' E.S. and Ovcharov L.A. Teoriya veroyatnostei. Moscow, Nauka Publ., 1973, 364 p. (in Russian)
6. Korostelev A.A. Prostranstvenno-vremennaya teoriya radiosistem. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1987, 319 p. (in Russian)
7. Karlin S. Osnovy teorii sluchainykh protsessov. Moscow, Mir Publ., 1971, 536 p. (in Russian)
8. Guts A.K., Ivanov V.N., Kal'chevskii I.S., and Filimonov A.A. Razrabotka metodov matematicheskogo modelirovaniya fizicheskikh protsessov. Itogovyi nauchno-issledovatel'skii otchet po NIR "GAK-1", Omsk, Molodezhnyi tsentr OmGU Publ., 1990, 65 p. (in Russian)
9. Huber P. Submarine neutrino communication. Arxiv: 0909.4554 (2009), URL: <https://arxiv.org/abs/0909.4554>.
10. Stancil D.D., Adamson P. and others. Demonstration of Communication using Neutrinos. ArXiv:1203.2847 (2012), URL: <https://arxiv.org/abs/1203.2847>.

*Дата поступления в редакцию: 05.07.2019*

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОГО КРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СЛАБО НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА С ЧИСЛОМ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ $Q = 3$

**В.Н. Бородихин**

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: borodikhin@inbox.ru

**М.М. Михайловский**

студент, e-mail: maxmihailovski@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе исследовано поведение слабо неупорядоченной трёхмерной модели Поттса с числом спиновых состояний  $q = 3$ , со спиновой концентрацией 0,95 методом коротковременной динамики. Уточнено значение критической температуры. Вычислены динамический индекс  $z$  и критический индекс  $\nu$  с учётом поправок к скейлингу.

**Ключевые слова:** фазовые переходы, модель Поттса, влияние примесей, критическая динамика.

### 1. Введение

Проблема фазовых переходов в неупорядоченных системах представляет большой теоретический и экспериментальный интерес. Это связано с тем, что большинство реальных твёрдых тел содержит примеси и другие дефекты структуры, присутствие которых влияет на их термодинамические характеристики и, в частности, может существенно влиять на поведение систем при фазовых переходах. В настоящее время наиболее интересным является исследование влияния замороженных примесей на критические свойства спиновых систем [1].

Исследования показали, что присутствие замороженных примесей изменяет при фазовых переходах свойства лишь тех магнетиков, теплоёмкость которых в однородном состоянии испытывает расходимость в критической точке. Данному критерию удовлетворяют только системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критической точки изоморфен модели Изинга. Для разбавленных изингоподобных систем было получено хорошее согласие теоретических расчётов с результатами эксперимента и численного исследования [2, 3].

Представляет интерес исследование неупорядоченной модели Поттса, которая в пределе двух спиновых состояний сводится к модели Изинга, и дефекты структуры могут оказывать существенное влияние на критические свойства данной модели. В частности, представляет интерес исследование критического

поведения слабо неупорядоченной модели Поттса с числом спиновых состояний  $q = 3$ , поскольку существующие в настоящее время результаты являются неоднозначными. Так, исследования слабо неупорядоченной трёхкомпонентной модели Поттса в равновесном случае [4] показали, что внесение даже малого количества примесей в систему приводит к смене типа фазового перехода с первого на второй. В тоже время исследования [5] на основе теории конечно-размерного скейлинга не выявили смену типа фазового перехода при спиновой концентрации  $p = 0,95$ . Таким образом, представляет интерес исследование слабо неупорядоченной трёхкомпонентной модели Поттса с использованием методов, не применявшихся ранее для исследования данной модели, в частности, методом коротковременной динамики.

## 2. Трёхмерная модель Поттса с примесями

Модель Поттса с числом спиновых состояний  $q = 3$  находит широкое применение при описании ряда объектов и явлений в физике конденсированных сред, таких как сложные анизотропные ферромагнетики кубической структуры, многокомпонентные сплавы и жидкие смеси. Структурные фазовые переходы в некоторых материалах, таких как  $SrTiO_3$  или  $Pb_3(PO_4)_2$  относятся к классу универсальности трёхкомпонентной модели Поттса [6].

Данная модель имеет следующие основные особенности. В узлах кубической решётки расположены спины  $S_i$ , которые могут находиться в одном из 3-х спиновых состояний, и немагнитные примеси. Немагнитные атомы примеси распределены случайным образом и являются фиксированными в узлах решётки. Энергия связи между двумя узлами равна нулю, в случае, если они находятся в разных состояниях или если в одном из узлов находится немагнитная примесь, и равна  $|J|$ , если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях, где  $J$  — обменный интеграл.

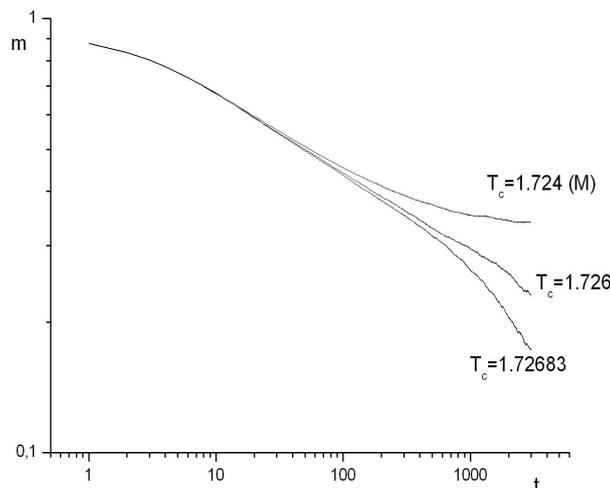
Гамильтониан модели имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_{i,j} \rho_i \rho_j \delta(S_i, S_j), \quad (1)$$

где  $S_i, i = 1, 2, 3, \delta(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & S_i = S_j \\ 0, & S_i \neq S_j \end{cases}$ , и

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & \text{в узле находится спин;} \\ 0, & \text{в узле находится примесь.} \end{cases}$$

Известно, что в чистой модели Поттса с состоянием  $q > q_c(d)$ , где  $d$  — размерность системы, наблюдается фазовый переход 1-го рода, а для  $q < q_c(d)$  фазовый переход 2-го рода. Для двумерной модели Поттса величина  $q_c(d = 2) = 4$  [7], в то время как для трёхмерной модели  $q_c(d = 3) = 2,45$  [8]. К настоящему времени также известно, что присутствие замороженного беспорядка в модели Поттса с состоянием  $q > q_c$  может изменить порядок фазового перехода. В [9] было доказано, что для низкоразмерных систем  $d \leq 2$ , описываемых моделью

Рис. 1. Критическая температура  $p = 0,95$ 

Поттса с  $q > q_c(d)$ , наличие сколь угодно малой величины замороженного беспорядка достаточно, чтобы изменить фазовый переход 1-го рода на фазовый переход 2-го рода. Для трёхмерной модели Поттса с  $q = 4$  при концентрациях примесей  $c = 0,2$  и выше фазовый переход 1-го рода меняется на фазовый переход 2-го рода [10]. Для трёхмерной модели Поттса с  $q = 2$ , которая соответствует трёхмерной модели Изинга, при примесных концентрациях выше порога примесной перколяции наблюдается фазовый переход второго рода.

### 3. Компьютерное моделирование

В работе применялся алгоритм Метрополиса. В качестве намагниченности  $m$  для разбавленной модели Поттса использовалось следующее выражение [11]:

$$m = \frac{q \left( \frac{N_{max}}{N} \right) - 1}{q - 1}, \quad (2)$$

где  $N_{max} = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ,  $N_1$  — число спинов в состоянии с  $q = 1$ ,  $N_2$  — число спинов в состоянии с  $q = 2$ ,  $N_3$  — число спинов в состоянии с  $q = 3$ ,  $N = pL^3$ .

Рассмотрим динамическое поведение слабо неупорядоченной трёхкомпонентной модели Поттса. Если исследование статических свойств трёхкомпонентной модели Поттса проводилось и ранее [4, 5], то исследования динамических свойств модели до сих пор не проводились.

При исследовании динамических свойств модели Поттса применялся метод коротковременной динамики, основная особенность которого заключается

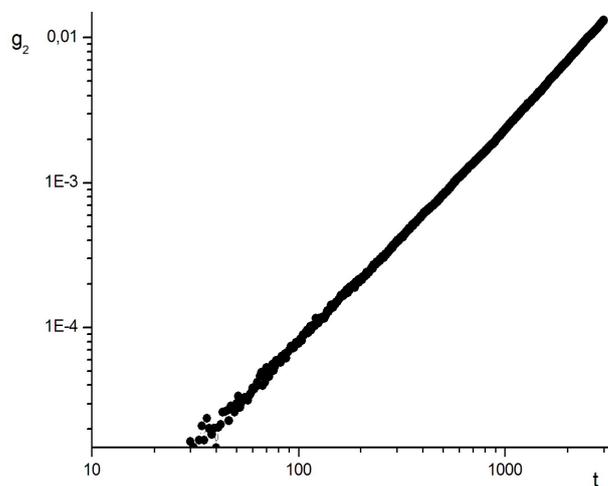


Рис. 2. Временная зависимость кумулянта 2-го порядка

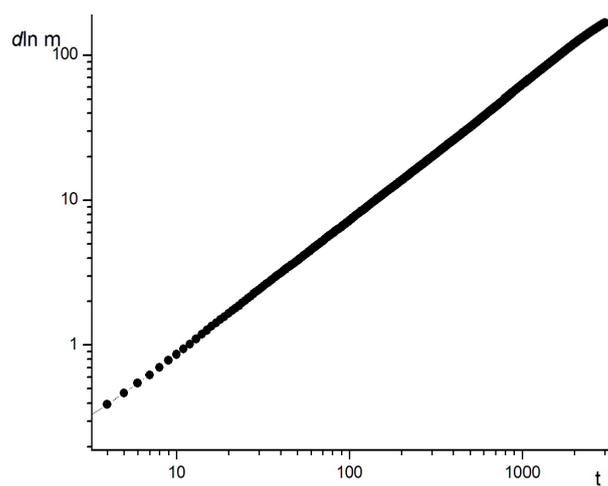


Рис. 3. Временная зависимость логарифмической производной

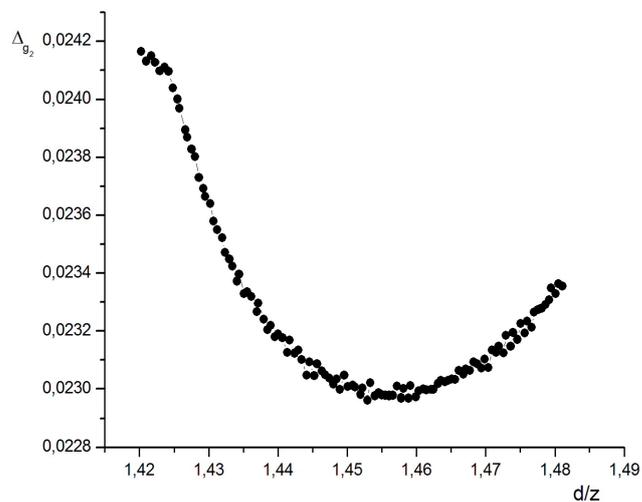


Рис. 4. Минимум погрешности для показателя  $d/z$

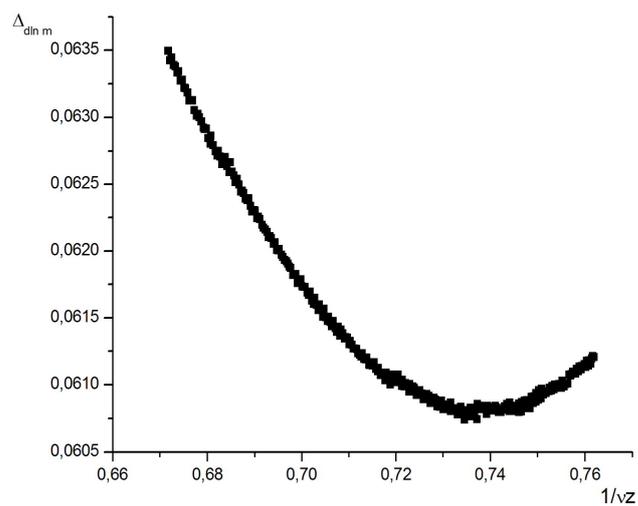


Рис. 5. Минимум погрешности для индекса логарифмической производной

в том, что информация о критическом поведении системы получается из относительно малого макроскопического промежутка времени на ранней стадии развития системы в критической точке или её окрестности.

Для решёток с достаточно большими размерами  $L$  динамическая скейлинговая зависимость для параметра порядка  $m$  приобретает следующий вид [12] в критической области:

$$m(t, \tau) = t^{\beta/\nu z} F(t^{1/\nu z}, \tau), \quad (3)$$

где  $t$  — время,  $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$  — приведённая температура,  $\beta$  — критический индекс для параметра порядка, определяемый соотношением

$$m(T) \sim (T_c - T)^\beta, \quad (4)$$

$\nu$  — критический индекс, определяющий температурную зависимость корреляционной длины

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad (5)$$

$z$  — динамический критический индекс, характеризующий поведение времени релаксации  $t_p$  вблизи критической точки:

$$t_p \sim |T_c - T|^{-\nu z}. \quad (6)$$

Для независимого определения критического индекса  $z$  использовался кумулянт Биндера второго порядка:

$$U_2(t) = \frac{\langle m(t)^2 \rangle}{\langle m(t) \rangle^2} - 1 \quad (7)$$

со скейлинговой зависимостью

$$U_2(t) \sim t^{d/z}, \quad (8)$$

где  $d$  — размерность системы.

Для определения критического показателя  $\nu$  вычислялась логарифмическая производная

$$\partial_\tau \ln m(t, \tau)|_{\tau=0} \sim t^{1/\nu z}. \quad (9)$$

Полученные результаты уточнялись с использованием поправок к скейлингу, которые определялись методом наименьших квадратов из выражения

$$X(t) = t^\delta (A + Bt^{-\omega/z}), \quad (10)$$

где  $X(t)$  — соответствующая физическая величина,  $\delta$  — уточняемый критический показатель,  $A, B$  — коэффициенты,  $\omega$  — показатель поправки к скейлингу.

#### 4. Основные результаты

Проводилось моделирование трёхмерной слаборазбавленной модели Поттса с  $q = 3$ . Исследовалась спиновая конфигурация  $p = 0,95$ . Линейный размер системы брался равным  $L = 128$ .

Для концентрации  $p = 0,95$  была уточнена критическая температура  $T_c = 1,726$ . На рис. 1 приведён график намагниченности при найденной критической температуре  $T_c = 1,726$ , видно, что при данной температуре график почти ложится на прямую, что и соответствует критической точке. В то же время график для температуры  $T = 1,724$ , найденной в [4], загибается вверх, что соответствует случаю  $T < T_c$ . Для примера также приведён график температуры  $T < T_c$ ,  $T = 1,72683$ .

Производилось вычисление динамической зависимости кумулянта второго порядка и логарифмической производной  $\Delta T = 0,002$ . Статистическое усреднение осуществлялось по 6800 примесным конфигурациям. Результаты моделирования приведены на рис. 2–3. С учётом поправок к скейлингу найдены значения показателей  $d/z = 1,452 \pm 0,0011$  ( $\omega/z = 0,392 \pm 0,004$ ),  $1/\nu z = 0,73457 \pm 0,0008$  ( $\omega/z = 0,40 \pm 0,0045$ ), соответствующие минимумы погрешностей показаны на рис. 4–5. Из полученных значений показателей, соответственно, значение динамического критического индекса  $z = 2,0657 \pm 0,0022$ , а значение критического индекса  $\nu = 0,6590 \pm 0,003$ .

#### 5. Заключение

Исследование модели Поттса с  $q = 3$  в статическом случае [4, 11] при малых концентрациях примесей показало, что внесение примесей приводит к новому типу критического поведения, при этом в системе реализуется фазовый переход второго рода. В то время как для однородной модели реализуется фазовый переход первого рода. Таким образом, в модели Поттса с  $q = 3$  внесение даже малого количества примесей меняет характер критического поведения, происходит смена фазового перехода первого рода на второй. Проведённые, методом коротковременной динамики исследования подтвердили данные результаты: уже для малой концентрации примесей  $p = 0,95$  фазовый переход 1-го рода меняется на фазовый переход 2-го рода. Значение динамического критического показателя  $z$  для модели Поттса с учётом поправок к скейлингу имеет немного меньшее значение по сравнению с индексом  $z$ , найденным для модели Изинга при той же концентрации примесей [3]. Возможно, это связано с влиянием дополнительной спиновой компоненты. Значение индекса  $\nu$  близко к значению, найденному в [4] для модели Поттса с концентрацией примесей  $p = 0,95$  статическими методами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фольк Р., Головач Ю., Яворский Т. Критические показатели трёхмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173. С. 175.
2. Pelissetto A., Vicari E. Randomly dilute spin models: a six-loop field-theoretic study // Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. 6393.
3. Prudnikov P.V., Prudnikov V.V., Krinitsyn A.S., Vakilov A.N., Pospelov E.A. Short-time dynamics and critical behavior of three-dimensional site-diluted Ising model. arXiv: 1005.5218v1.
4. Муртазаев А.К., Бабаев А.Б., Азнаурова Г.Я. Особенности фазовых переходов в трёхмерных разбавленных структурах, описываемых моделью Поттса // Журнал эксперим. и теор. физики. 2009. Т. 136. С. 520.
5. Ballesteros H.G. et al. Effect of Dilution on First Order Transitions: The Three Dimensional Three States Potts Model // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. 3215.
6. Wu F.Y., The Potts model // Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 235.
7. Loulidi M. Some analytical results on the bond diluted q-state Potts model // Physica A. 2000. V. 287. P. 177.
8. Guttman A.J., Enting I.G. Series studies of the Potts model: III. The 3-state model on the simple cubic lattice // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 5801.
9. Aizenman M., Wehr J. Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2503.
10. Chatelain C., Berche B., Janke W., Berche P.-E. Monte Carlo Study of Phase Transitions in the Bond-Diluted 3D 4-State Potts Model // Nuclear Physics B. 2005. V. 719/3. P. 275.
11. Муртазаев А.К., Бабаев А.Б., Азнаурова Г.Я. Исследование влияния замороженных немагнитных примесей на фазовые переходы в трехмерной модели Поттса // Физика твёрдого тела. 2008. Т. 50. С. 703.
12. Zheng B. Monte Carlo simulations of short-time critical dynamics // Comp. Phys. Comm. 1999. V. 121. P. 338.

**COMPUTER SIMULATION OF THE NONEQUILIBRIUM CRITICAL BEHAVIOR  
OF THE WEAKLY DISORDERED POTTS MODEL WITH THE NUMBER  
OF SPIN STATES  $Q = 3$ .**

**V.N. Borodikhin**

Associate Professor, Ph.D.(Phys.-Math.), e-mail: borodikhin@inbox.ru

**M.M. Mikhailovskiy**

Student, e-mail: maxmikhailovski@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** In this paper, by the method of short-time dynamics the behavior of weakly disordered three-dimensional Potts model with the number of spin components equal to three was studied. The critical temperature value has been clarified. For spin concentrations 0.95 critical indexes  $z$  and  $\nu$  were calculated.

**Keywords:** phase transitions, Potts model, effect of impurities, critical dynamics.

## REFERENCES

1. Fol'k R., Golovach Yu., and Yavorskii T. Kriticheskie pokazateli trekhmernoj slabo razbavlennoj zamorozhennoj modeli Izinga. Uspekhi fiz. nauk, 2003, vol. 173, pp. 175. (in Russian)
2. Pelissetto A., Vicari E. Randomly dilute spin models: a six-loop field-theoretic study. Phys. Rev. B, 2000, vol. 62, pp. 6393.
3. Prudnikov P.V., Prudnikov V.V., Krinitsyn A.S., Vakilov A.N., and Pospelov E.A. Short-time dynamics and critical behavior of three-dimensional site-diluted Ising model. arXiv: 1005.5218v1.
4. Murtazaev A.K., Babaev A.B., and Aznaurova G.Ya. Osobennosti fazovykh perekhodov v trekhmernykh razbavlennykh strukturakh, opisyvaemykh model'yu Potts'a. Zhurnal eksperim. i teor. fiziki, 2009, vol. 136, pp. 520. (in Russian)
5. Ballesteros H.G. et al. Effect of Dilution on First Order Transitions: The Three Dimensional Three States Potts Model Phys. Rev. B, 2000, vol. 61, pp. 3215.
6. Wu F.Y. The Potts model. Rev. Mod. Phys., 1982, vol. 54, pp. 235.
7. Loulidi M. Some analytical results on the bond diluted q-state Potts model. Physica A, 2000, vol. 287, pp. 177.
8. Guttmann A.J. and Enting I.G. Series studies of the Potts model: III. The 3-state model on the simple cubic lattice. J. Phys. A, 1994, Vvol. 27. pp. 5801.
9. Aizenman M. and Wehr J. Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder. Phys. Rev. Lett., 1989, vol. 62, pp. 2503.
10. Chatelain C., Berche B., Janke W., and Berche P.E. Monte Carlo Study of Phase Transitions in the Bond-Diluted 3D 4-State Potts Model. Nuclear Physics B, 2005, vol. 719/3, pp. 275.
11. Murtazaev A.K., Babaev A.B., and Aznaurova G.Ya. Issledovanie vliyaniya vmorozhennykh nemagnitnykh primesei na fazovye perekhody v trekhmernoj modeli Potts'a. Fizika tverdogo tela, 2008, vol. 50, pp. 703. (in Russian)
12. Zheng B. Monte Carlo simulations of short-time critical dynamics. Comp. Phys. Comm., 1999, vol. 121, pp. 338.

*Дата поступления в редакцию: 07.09.2019*

## РАЗМЫШЛЕНИЯ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Д.Н. Горелов

д.т.н., профессор, главный научный сотрудник, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

**Аннотация.** Проведён анализ характерных свойств турбулентного течения жидкости за пластинкой на основе гипотезы Л. Ландау о возможности применения модели идеальной жидкости для исследования турбулентных течений.

**Ключевые слова:** турбулентное течение, отрывное обтекание, автоколебания.

Турбулентность — одно из самых загадочных явлений природы. Серьёзные исследования этого явления ведутся с конца XIX века. По результатам исследований опубликован огромный теоретический и экспериментальный материал. Было установлено, что турбулентность отличается от других явлений чрезвычайной сложностью и разнообразием своих проявлений. Но что следует понимать под турбулентным движением жидкости и газа? Однозначного ответа на этот вопрос нет. Многочисленные определения ограничиваются обычно перечислением визуальных признаков турбулентности: хаотичное вихревое движение, разнообразие масштабов, широкий спектр частот, мод и амплитуд колебаний и т. д. Можно ожидать, что однозначное определение турбулентности дать невозможно из-за огромного разнообразия форм её проявления. В настоящей работе автор попытается дать определение крупномасштабного турбулентного течения жидкости для отрывного обтекания тонких тел при больших значениях числа Рейнольдса. Прежде всего рассмотрим влияние вязкости жидкости на турбулентное движение. Реальная жидкость обладает вязкостью. Движение жидкости во многом зависит от отношения сил инерции к силам вязкого трения, которое определяется числом Рейнольдса  $Re = VL/\nu$  ( $V$  — характерная скорость жидкости,  $L$  — характерный линейный размер,  $\nu$  — кинематическая вязкость).

Существенный вклад в теорию турбулентного течения внёс О. Рейнольдс, исследуя в 1883 г. движение жидкости в трубе. Он установил, что с изменением скорости движения жидкости меняется характер её движения в трубе. При малой скорости наблюдается плавное (ламинарное) движение жидкости. Но при достижении некоторого критического значения скорости (числа Рейнольдса) плавное ламинарное течение жидкости переходит в бурное турбулентное. Таким образом было установлено, что при числе  $Re$  меньше его критического значения течение может оставаться ламинарным, а при значениях  $Re$  больше критического — становится турбулентным. Этот экспериментальный результат объясняется влиянием вязкости жидкости. В ламинарном течении силы

вязкого трения гасят случайные возмущения жидкости. С ростом числа  $Re$  влияние вязкости снижается и возрастает роль сил инерции, которые не гасят, а усиливают случайные возмущения. Дальнейший рост числа  $Re$  приводит к турбулентному течению. При  $Re \rightarrow \infty$  жидкость становится идеальной. Это позволяет исследовать основные закономерности турбулентного течения, моделируя реальную жидкость идеальной. К такому выводу пришёл Л. Ландау: «Турбулентное движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описываемое уравнениями Эйлера» [18, с. 160]. Можно предположить, что в идеальной несжимаемой жидкости проявляются базовые закономерности турбулентного течения реальной жидкости при больших значениях числа Рейнольдса, а вязкость, сжимаемость и термодинамические свойства жидкости вносят дополнительные коррективы в эти закономерности. Гипотеза Л. Ландау неоднократно получала практическое подтверждение. Так, например, была показана высокая эффективность модели идеальной жидкости при расчёте аэродинамических характеристик треугольных крыльев на режиме отрывного обтекания [2]. Перейдём к обсуждению некоторых закономерностей турбулентного течения в рамках гипотезы Л. Ландау. Наиболее полные исследования турбулентного течения идеальной жидкости проведены для задач отрывного обтекания пластинки (например [2–5]).

Ограничимся рассмотрением результатов работы [5], в которой исследуется структура турбулентных вихревых следов за пластинкой, начавшей движение с постоянной скоростью  $V$  из состояния покоя.

На рис. 1 представлены результаты расчёта интенсивностей вихрей  $\gamma_{w1}$ ,  $\gamma_{w2}$ , сходящих с кромок пластинки с течением времени  $t$ . Пластика движется под углом  $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ . Безразмерное время  $\tau = t/T$ ,  $T = l/V$ ,  $l$  — длина пластинки. Расчёт проводился до значений  $\tau = 100$ . За это время пластинка перемещалась на сто своих длин. Наиболее информативными оказываются результаты расчёта для вертикальной пластинки при  $\theta = 90^\circ$ . В этом случае хорошо наблюдаются две области разного поведения интенсивности вихрей:  $0 < \tau < 30$  и  $30 < \tau < 100$ . В области  $0 < \tau < 30$  модуль интенсивности вихрей монотонно убывает от своего максимального значения до нуля, а в области  $30 < \tau < 100$  имеют место высокочастотные колебания функций  $\gamma_{w1}$ ,  $\gamma_{w2}$  с большой амплитудой. На эти колебания накладываются низкочастотные пульсации также с большой амплитудой. Переход из одной временной области в другую имеет взрывной характер. Высокочастотные колебания функций  $\gamma_{w1}$ ,  $\gamma_{w2}$  наблюдаются и для других значений угла  $\theta$ . Но область монотонного изменения интенсивности сходящих вихрей в начальной стадии движения пластинки существенно уменьшается. Проследим формирование вихревых следов за пластинкой с течением времени. За вертикально установленной пластинкой в начальной стадии её движения (при  $0 < \tau < 30$ ) образуются два вихревых ядра, которые затем теряют устойчивость и переходят в цепочку вертикально расположенных вихрей. Через некоторое время эта цепочка скачкообразно переходит в другую устойчивую конфигурацию [5]. Структура вихревых следов, образовавшаяся к моменту времени  $\tau = 100$ , приведена на рис. 2. Непосредственно за пластинкой при всех углах  $\theta$  сформировалась устойчивая конфигурация вих-

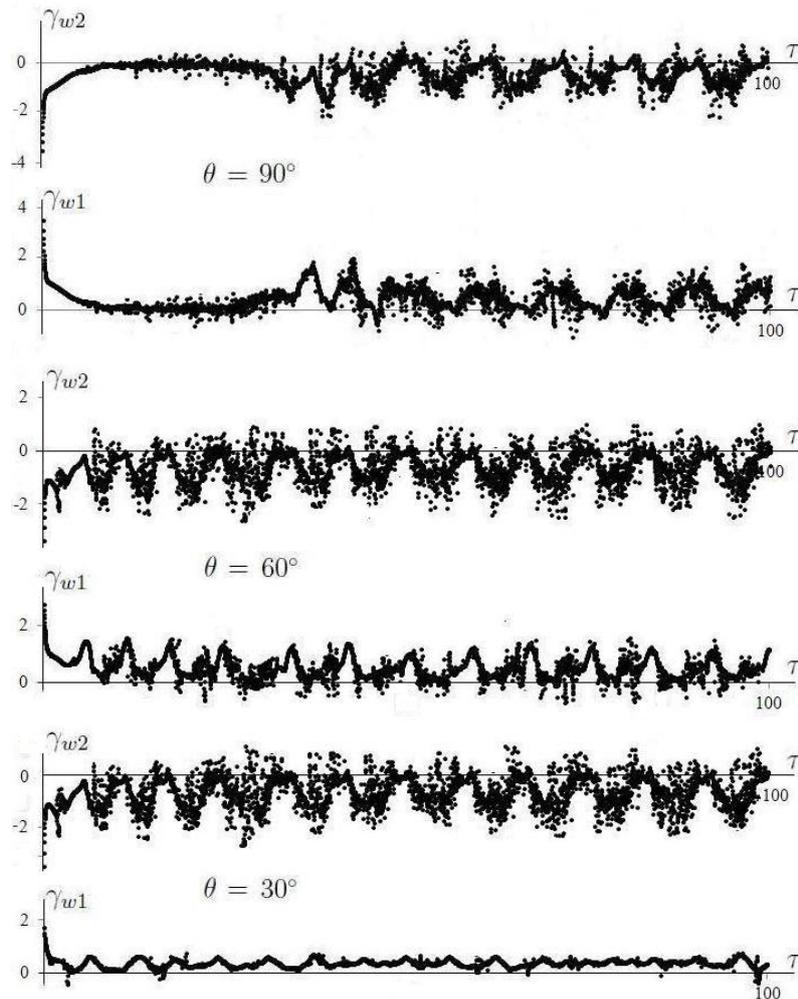


Рис. 1. Зависимость интенсивностей  $\gamma_{w1}$ ,  $\gamma_{w2}$  сходящихся вихрей от времени  $\tau$  для  $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$

рей типа дорожки Кармана. Затем возникают другие вихревые структуры. Эти структуры остаются устойчивыми на больших расстояниях от пластинки.

Важно отметить, что все изменения вихревых структур происходят при практически постоянном законе изменения интенсивности вихрей с течением времени (рис. 1). Это показывает, что вихревой след за пластинкой живёт независимо, по своим законам. Естественно предположить, что управление формированием вихревых следов осуществляет энергия потока. Свободные вихри в следе имеют бесконечное число степеней свободы и могут создавать бесконечное число мод, частот и амплитуд колебаний. Выбор конкретного закона происходит, видимо, путём выполнения условия минимальных затрат энергии.

Характерными признаками турбулентных течений являются внезапность и самовозбуждаемость их возникновения, а также скачкообразный переход из одного состояния в другое. Такими же признаками обладают самовозбуждающиеся автоколебательные явления типа флаттера крыла самолёта, например.

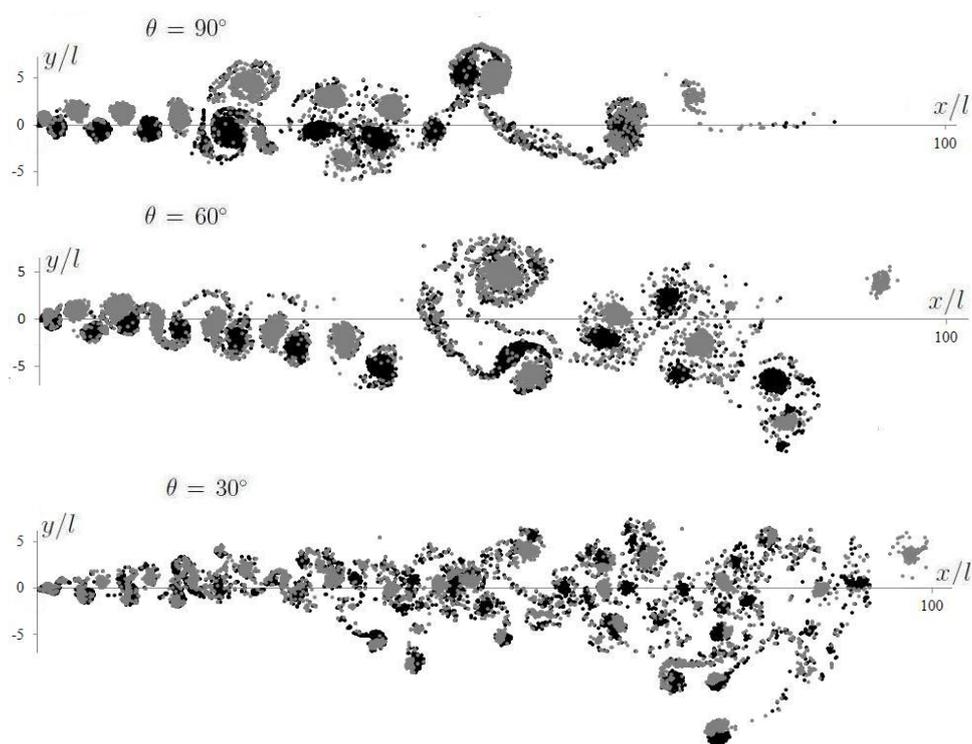


Рис. 2. Форма вихревых следов в момент времени  $\tau = 100$   
для  $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$

Можно полагать, что в турбулентном вихревом следе за пластинкой жидкость совершает самовозбуждающиеся автоколебания. Набор мод при таких автоколебаниях меняется скачкообразно в пространстве и по времени. Такое движение жидкости не может быть случайным и имеет детерминированный характер.

По итогам обсуждения результатов расчёта отрывного обтекания пластинки потоком идеальной жидкости можно предложить следующее определение турбулентного течения за пластинкой. Турбулентное течение за пластинкой представляет собой вихревое самовозбуждающееся автоколебательное движение жидкости, происходящее с минимальной затратой энергии. Это определение не претендует на полноту, так как турбулентность многолика, а её проявления разнообразны. Но отдельные детали этого определения могут проявляться при отрывном обтекании других тел.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М. : Изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 788 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М. : Физматгиз, 1978. 352 с.
3. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 5. С. 116–125.

4. Jones M.A. The separated flow of an inviscid fluid around a moving flat plate // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 405–441.
5. Горелов Д.Н., Говорова А.И. Исследование структуры вихревого следа при отрывном обтекании пластинки // Теплофизика и аэромеханика. 2017. № 3. С. 373–380.

## REFLECTIONS ON TURBULENCE

**D.N. Gorelov**

Dr.Sc. (Eng.), Professor, Chief Researcher, e-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

S.L. Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS

**Abstract.** The characteristic properties of the turbulent fluid flow behind the plate are analyzed based on the hypothesis of L. Landau on the possibility of using the ideal fluid model for the study of turbulent flows.

**Keywords:** turbulent flow, separated flow, self-oscillations.

## REFERENCES

1. Landau L.D. and Lifshits E.M. *Mekhanika sploshnykh sred*. Moscow, Izd-vo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1953. 788 p. (in Russian)
2. Belotserkovskii S.M. and Nisht M.I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noi zhidkost'yu*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1978, 352 p. (in Russian)
3. Skobelev B.Yu. and Shmagunov O.A. *Novyi podkhod k modelirovaniyu vyzakosti v metode diskretnykh vikhrei*. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2007, vol. 12, no. 5, pp. 116–125. (in Russian)
4. Jones M.A. The separated flow of an inviscid fluid around a moving flat plate. *J. Fluid Mech*, 2003, vol. 496, pp. 405–441.
5. Gorelov D.N. and Govorova A.I. *Issledovanie struktury vikhrevogo sleda pri otryvnom obtekanii plastinki*. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2017, no. 3, pp. 373–380. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 17.06.2019*

## **ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЁТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА И ЕЁ НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ**

**С.П. Баутин**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SBautin@usurt.ru

**И.Ю. Крутова**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского  
ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

**Аннотация.** Для системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса проведена линеаризация в двух случаях: когда учитывается и когда не учитывается действие силы тяжести. Для линеаризованных систем определены их характеристики. В случае прямоугольной системы координат проведено частичное расщепление линейной системы уравнений. Найдены частные решения в виде стоящих и бегущих волн. Построено течение в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости.

**Ключевые слова:** система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, линеаризация, точные решения.

### **Введение**

Природные восходящие закрученные потоки: торнадо, тропические циклоны, огненные вихри — представляют собой сложные и ещё достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надёжное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса.

В монографиях [1, 5–8] (более подробную библиографию см. в [6, 7]) с использованием этой математической модели — система уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса — и с применением методологии характеристической задачи Коши [2–4] проведены аналитические и численные исследования течений воздуха в природных восходящих закрученных потоках.

В силу нелинейности системы уравнений газовой динамики построение её решений является достаточно трудоёмким. Это и послужило причиной линеаризации системы уравнений газовой динамики на её точных решениях.

Далее в работе в случае двух точных решений системы уравнений газовой динамики: при учёте и без учёта силы тяжести — приведены линеаризованные

на этих двух точных решениях линейные системы уравнений с частными производными. Неучёт действия силы тяжести возможен при исследовании газодинамических течений в придонных частях природных восходящих закрученных потоков, в которых параметры газа не сильно зависят от высоты. Также в работе, в случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы, построено несколько конкретных решений.

## 1. Линеаризация системы уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния  $p = \rho^\gamma/\gamma$  при учёте действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид [1, 5–8]:

$$\begin{cases} c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \frac{(\gamma - 1)}{2} c (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_x = a v_2 - b v_3, \\ v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_y = -a v_1, \\ v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c c_z = b v_1 - g. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $p$  — давление газа;  $\rho$  — плотность газа;  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы идеального газа;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  — скорость звука газа;  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$  — вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;  $\mathbf{\Omega} = (0; \Omega_2; \Omega_3)$ ;  $\Omega_2 = \Omega \cos \psi$ ;  $\Omega_3 = \Omega \sin \psi$ , — вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси;  $\psi$  — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат  $(x, y, z)$ , вращающейся вместе с Землёй;  $a = 2\Omega_3$ ;  $b = 2\Omega_2$ ;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ,  $g = \text{const} > 0$  — ускорение свободного падения.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния —  $u_{00}$ ,  $c_{00}$ ,  $t_{00}$ ,  $r_{00}$  — стандартным образом [1, 5–8] введены безразмерные переменные:

$$f = \frac{f_*}{f_{00}},$$

где  $f_*$  и  $f_{00}$  — соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины  $f$ . При этом положено, что

$$u_{00} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}.$$

У системы (1) в случае  $g = 0$  имеется точное решение:

$$c = 1; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0. \quad (2)$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$c = 1 + \tilde{s}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}$$

и эти выражения подставляются в систему (1).

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1). Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются.

В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + \frac{(\gamma - 1)}{2} (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\ v_{1t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_x = av_2 - bv_3, \\ v_{2t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_y = -av_1, \\ v_{3t} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_z = bv_1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Более простой случай  $g = 0$  можно рассматривать тогда, когда требуется исследовать течения в придонной части восходящего закрученного потока, где параметры газа с изменением высоты меняются незначительно [1, 5–8].

В случае  $g \neq 0$  линеаризация системы уравнений газовой динамики на точном решении

$$c = \sqrt{1 - (\gamma - 1)gz}; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

приведёт к более простым формулам, если вместо искомой скорости звука — функции  $c$  — ввести другую искомую функцию:  $\Theta = c^2$ . В этом случае система (1) переходит в следующую систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \Theta + (\gamma - 1)\Theta \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \nabla \Theta = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \end{array} \right. \quad (4)$$

точное решение этой системы имеет вид

$$\Theta = 1 - (\gamma - 1)gz; \quad \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор.

Линеаризация системы уравнений газовой динамики с искомой функцией  $\Theta$  на приведённом точном решении также состоит в том, что решение ищется в виде

$$\Theta = 1 - (\gamma - 1)gz + \tilde{\Theta}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}},$$

эти выражения подставляются в систему (4): слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются; нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}_t - (\gamma - 1)g\tilde{v}_z + (\gamma - 1)[1 - (\gamma - 1)gz] \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{V}}_t + \frac{1}{(\gamma - 1)}[1 - (\gamma - 1)gz] \nabla \tilde{\Theta} - g\mathbf{k}\tilde{\Theta} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{V}}, \end{cases}$$

здесь  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

В монографии [2] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером один у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра  $\varepsilon$ . Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида [2] и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням  $\varepsilon$  сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, даёт первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

## 2. Характеристики линеаризованной системы уравнений газовой динамики в случае $g = 0$

Для получения уравнений характеристических поверхностей системы (3), записанной в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

используется стандартная процедура [8].

Здесь:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ av_2 - bv_3 \\ -av_1 \\ bv_1 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{U}$  — вектор искомых функций;  $\mathbf{F}$  — вектор правых частей и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что  $(C)$  — поверхность характеристики задана в виде

$$(C) : \theta(t, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где, не нарушая общности, можно предположить, что  $\theta_{x_1} \neq 0$ , и тогда по теореме о неявно заданной функции получается представление

$$(C) : \theta(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + \eta(t, x_2, x_3).$$

С учётом этого равенства для линеаризованной системы уравнений газовой динамики (3) делается следующая замена переменных:

$$\theta = x_1 + \eta(t, x_2, x_3); \quad \tau_1 = t; \quad \xi_i = x_i \quad i = 2, 3 \quad (5)$$

с якобианом  $J = 1$ .

Следовательно, при замене (5) поверхность характеристики  $(C)$  берётся за новую координатную плоскость  $\theta = 0$ .

С учётом формул преобразования производных при замене (5) система (3) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + A_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} = \mathbf{F},$$

где матрица  $A_0$  имеет следующий вид

$$A_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t} E + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} A_i =$$

$$= \begin{pmatrix} \theta_t & \frac{\gamma-1}{2} \theta_{x_1} & \frac{\gamma-1}{2} \theta_{x_2} & \frac{2}{\gamma-1} \theta_{x_3} \\ \frac{2}{\gamma-1} \theta_{x_1} & \theta_t & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} \theta_{x_2} & 0 & \theta_t & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} \theta_{x_3} & 0 & 0 & \theta_t \end{pmatrix}.$$

Чтобы координатная плоскость  $\theta = 0$  (т. е. поверхность  $(C)$ ) по определению была характеристикой выписанной системы, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю определитель матрицы  $A_0$ , стоящий перед вектором производной, выводящей с плоскости  $\theta = 0$ .

Определитель матрицы  $A_0$  вычисляется разложением по первой строке и имеет следующий вид:

$$\det A_0 = \theta_t^2 [\theta_t^2 - (\theta_{x_1}^2 + \theta_{x_2}^2 + \theta_{x_3}^2)].$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\theta_t = 0; \quad \text{то есть } \theta(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$$

задаёт стоящую на месте контактную характеристику кратности два, через которую газ не течёт:  $\mathbf{V} = \mathbf{O}$ .

А уравнения

$$\theta_t = \pm \sqrt{\theta_{x_1}^2 + \theta_{x_2}^2 + \theta_{x_3}^2}$$

задаёт две звуковые характеристики ( $C^+$ ), ( $C^-$ ), каждая кратности единица и распространяющиеся в разные стороны со скоростью, равной единице.

### 3. Частичное расщепление линеаризованной системы

Последующие выкладки будут производиться с отдельными уравнениями системы (3).

Первое уравнение системы (3) дифференцируется по  $t$  и разрешается относительно производной  $c_{tt}$ . А затем второе, третье и четвёртое уравнения системы (3) дифференцируются каждое по своей пространственной переменной и найденные смешанные производные по времени и по пространственным переменным подставляются в уравнение для  $c_{tt}$ :

$$c_{tt} = \Delta c - \frac{(\gamma - 1)}{2} (av_{2x} - bv_{3x} - av_{1y} + bv_{1z}), \quad (6)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

В полученное уравнение для  $c$  при  $\Omega \neq 0$ , то есть при учёте вращения Земли вокруг своей оси, вошли производные от искомым компонент вектора скорости газа. Если же не учитывать вращение Земли,  $\Omega = 0$ , то полученное уравнение будет линейным волновым уравнением для скорости звука — функции  $c$ .

Далее делаются следующие преобразования.

Первое уравнение системы (3) дифференцируется по каждой из пространственных переменных, а последние три уравнения системы (3) дифференцируются по  $t$ . В эти уравнения подставляются смешанные производные функции  $c$  по времени и по пространственным переменным, и получается такая система:

$$\begin{cases} v_{1tt} = v_{1xx} + v_{2yx} + v_{3zx} + av_{2t} - bv_{3t}, \\ v_{2tt} = v_{1xy} + v_{2yy} + v_{3zy} - av_{1t}, \\ v_{3tt} = v_{1xz} + v_{2yz} + v_{3zz} + bv_{1t}, \end{cases} \quad (7)$$

в которую входят только компоненты вектора скорости газа.

Следовательно, система (3) допускает частичное разделение переменных: сначала надо решать систему (7) только для  $v_1, v_2, v_3$ , а затем при известных  $v_1, v_2, v_3$  решать уравнение (6) для  $c$ .

Если для системы (3) задать начальные условия

$$\begin{aligned} c|_{t=0} &= c_0(x, y, z); & v_1|_{t=0} &= v_{10}(x, y, z); \\ v_2|_{t=0} &= v_{20}(x, y, z); & v_3|_{t=0} &= v_{30}(x, y, z), \end{aligned} \quad (8)$$

то такая задача Коши (3), (8) будет иметь единственное решение, например в классе аналитических функций.

Если из системы (3), рассматриваемой при  $t = 0$  и с учётом условий (8), однозначно определить начальные данные для первых производных по времени

$$\begin{aligned} c_t|_{t=0} &= \frac{(\gamma - 1)}{2} (v_{10x} + v_{20y} + v_{30z}); \\ v_{1t}|_{t=0} &= av_{20} - bv_{30} - \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0x}; \\ v_{2t}|_{t=0} &= -\frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0y} - av_{10}, \\ v_{3t}|_{t=0} &= bv_{10} - \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0z}; \end{aligned} \tag{9}$$

то и для уравнения (6), и системы (7) получаются задачи Коши с начальными данными (8), (9), которые также будут иметь единственные решения. Естественно, что эти решения будут совпадать с решением системы (3) при начальных условиях (8).

**Замечание.** Известно, что любое решение исходной задачи удовлетворяет следствию этой исходной задачи. Однако не всякое решение следствия является решением исходной задачи. Уравнения (6), (7) являются следствиями системы (3) и поэтому всякое решение системы (3) удовлетворяет уравнениям (6), (7). Но не всякое решение уравнений (6), (7) является решением системы (3). Например, если для уравнений (6), (7) в качестве начальных условий для производных по времени при  $t = 0$  взять не функции (9), а другие, то получившаяся задача (6)–(9) будет иметь единственное решение, но получившиеся функции  $c, v_1, v_2, v_3$ , не будут удовлетворять задаче (3), (8).

У системы (7) традиционным для этих задач способом можно получить следствия, ещё более простые по записи, чем система (7).

Для этого первое уравнение системы (7) дифференцируется по  $x$ , второе и третье уравнения дифференцируются по  $y, z$  соответственно:

$$\begin{cases} v_{1ttx} = v_{1xx} + v_{2yxx} + v_{3zxx} + av_{2tx} - bv_{3tx}, \\ v_{2ytt} = v_{1xyy} + v_{2yyy} + v_{3zyy} - av_{1ty}, \\ v_{3ztt} = v_{1xzz} + v_{2yzz} + v_{3zzz} + bv_{1tz}. \end{cases}$$

В полученной системе меняются последовательности нахождения частных производных и вводится новая искомая функция  $\Psi(t, x, y, z)$  такая, что

$$\Psi_x = v_1, \quad \Psi_y = v_2, \quad \Psi_z = v_3.$$

Тогда последняя система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \Psi_{xxtt} = \Psi_{xxxx} + \Psi_{yyxx} + \Psi_{zzxx} + a\Psi_{xyt} - b\Psi_{xzt}, \\ \Psi_{yytt} = \Psi_{xyyy} + \Psi_{yyyy} + \Psi_{zzyy} - a\Psi_{xyt}, \\ \Psi_{zztt} = \Psi_{xxzz} + \Psi_{yyzz} + \Psi_{zzzz} + b\Psi_{xzt}. \end{cases}$$

Сложение уравнений этой системы даёт следующее её следствие:

$$\Delta\Psi_{tt} = \Delta\Delta\Psi + a\Psi_{xyt} - b\Psi_{xzt} - a\Psi_{xyt} + b\Psi_{xzt},$$

которое после приведения подобных становится таким

$$\Delta\Psi_{tt} = \Delta\Delta\Psi, \quad (10)$$

и при введении новой искомой функции

$$\Phi = \Delta\Psi$$

получается ещё более простое следствие системы (7):

$$\Phi_{tt} = \Delta\Phi. \quad (11)$$

Ещё раз подчеркнём, что не всякие решения уравнений (10), (11) дадут решения системы (7), а тем более, — решения системы (3).

#### 4. Стоящая и бегущая волны

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных  $y$  и  $z$  и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t, x) = c_n(t) \cos nx; \\ v_1(t, x) = v_{1n}(t) \sin nx; \\ v_2(t, x) = v_{2n}(t) \sin nx; \\ v_3(t, x) = v_{3n}(t) \sin nx \end{cases} \quad (12)$$

с искомыми коэффициентами  $c_n(t)$ ,  $v_{1n}(t)$ ,  $v_{2n}(t)$ ,  $v_{3n}(t)$ . Здесь  $n$  — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (12) в систему (3) при условии, что  $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ , и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c'_n(t) + \frac{(\gamma-1)}{2} n v_{1n}(t) = 0; \\ v'_{1n}(t) - \frac{2}{(\gamma-1)} n c_n(t) = a v_{2n}(t) - b v_{3n}(t); \\ v'_{2n}(t) = -a v_{1n}(t); \\ v'_{3n}(t) = b v_{1n}(t). \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы (13) ищется в стандартном виде

$$c_n(t) = c_n^o e^{kt}; \quad v_{1n}(t) = v_{1n}^o e^{kt}; \quad v_{2n}(t) = v_{2n}^o e^{kt}; \quad v_{3n}(t) = v_{3n}^o e^{kt}; \quad (14)$$

где  $c_n^o$ ,  $v_{1n}^o$ ,  $v_{2n}^o$ ,  $v_{3n}^o$  и  $k$  — неизвестные пока константы.

Представление (14) подставляется в систему (13), и получается однородная линейная система алгебраических уравнений для констант  $c_n^o, v_{1n}^o, v_{2n}^o, v_{3n}^o$ :

$$\begin{cases} c_n^o \cdot k + \frac{(\gamma - 1)}{2} n v_{1n}^o = 0; \\ v_{1n}^o \cdot k - \frac{2}{(\gamma - 1)} n c_n^o - a v_{2n}^o + b v_{3n}^o = 0; \\ v_{2n}^o \cdot k + a v_{1n}^o = 0; \\ v_{3n}^o \cdot k - b v_{1n}^o = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & \frac{(\gamma - 1)}{2} n & 0 & 0 \\ -\frac{2}{(\gamma - 1)} n & k & -a & b \\ 0 & a & k & 0 \\ 0 & -b & 0 & k \end{vmatrix}$$

равнялся нулю.

Раскрытие этого определителя по второй строке даёт следующее представление:

$$\Delta = k^2 (k^2 + n^2 + a^2 + b^2).$$

Следовательно, равенство нулю определителя  $\Delta$  приводит к следующим значениям константы  $k$ :

$$k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = \pm \sqrt{n^2 + a^2 + b^2} \cdot i.$$

Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \psi + 4\Omega^2 \cos^2 \psi = 4\Omega^2.$$

Вводится промежуточное обозначение

$$v_* = \sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{n^2}},$$

и тогда

$$k_{3,4} = \pm n v_* \cdot i. \tag{15}$$

В случае нулевых значений  $k_{1,2}$  система линейных алгебраических уравнений для констант  $c_n^o, v_{1n}^o, v_{2n}^o, v_{3n}^o$

$$\begin{cases} \frac{(\gamma - 1)}{2} n v_{1n}^o = 0; \\ -\frac{2}{(\gamma - 1)} n c_n^o - a v_{2n}^o + b v_{3n}^o = 0; \\ a v_{1n}^o = 0; \\ -b v_{1n}^o = 0 \end{cases}$$

имеет следующее решение:

$$c_n^o = \frac{(\gamma - 1)}{2}(av_{2n}^o - bv_{3n}^o); \quad v_{1n}^o = 0; \quad v_{2n}^o, v_{3n}^o - \text{произвольные константы.}$$

То есть у системы (3) имеется точное частное решение, не зависящее от времени — то есть стоящая волна:

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \frac{(\gamma - 1)}{2n}(av_{2n}^o - bv_{3n}^o) \cos nx; \\ v_1(t, x) &= 0; \quad v_2(t, x) = v_{2n}^o \sin nx; \quad v_3(t, x) = v_{3n}^o \sin nx. \end{aligned}$$

В случае комплексных значений  $k_{3,4}$  (15) искомое частное решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{cases} c(t, x) = c_n^o \cos(nv_*t) \cos(nx); \\ v_1(t, x) = v_{1n}^o \sin(nv_*t) \sin(nx); \\ v_2(t, x) = v_{2n}^o \cos(nv_*t) \sin(nx); \\ v_3(t, x) = v_{3n}^o \cos(nv_*t) \sin(nx), \end{cases} \quad (16)$$

где

$$c_n^o = \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{1}{d} v_{1n}^o; \quad v_{2n}^o = \frac{a}{nd} v_{1n}^o; \quad v_{3n}^o = -\frac{b}{nd} v_{1n}^o;$$

$v_{1n}^o$  — произвольное число.

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (16) системы (3) является бегущей волной:

$$\begin{cases} c(t, x) = \frac{1}{2} c_n^o \{[\cos[n(x + v_*t)] + \cos[n(x - v_*t)]]\}; \\ v_1(t, x) = \frac{1}{2} v_{1n}^o \{[\cos[n(x - v_*t)] - \cos[n(x + v_*t)]]\}; \\ v_2(t, x) = \frac{1}{2} v_{1n}^o \{[\cos[n(x - v_*t)] + \cos[n(x + v_*t)]]\}; \\ v_3(t, x) = \frac{1}{2} v_{1n}^o \{[\cos[n(x - v_*t)] - \cos[n(x + v_*t)]]\}; \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных:

$$x \pm \sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью  $v_*$ , значение которой больше единицы, если  $\Omega \neq 0$ .

Естественно, что для системы (3) можно строить и другие частные решения с использованием гармоник, и по другим пространственным переменным как в случае зависимости только от какой-то одной пространственной переменной, так и в случае одновременной зависимости решений от многих пространственных переменных.

### 5. Стационарное решение с нулевой вертикальной скоростью

Далее будут исследоваться стационарные решения системы (3), то есть решения системы

$$\begin{cases} v_{1x} + v_{2y} + v_{3z} = 0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_x = av_2 - bv_3, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_y = -av_1, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_z = bv_1, \end{cases} \quad (17)$$

представимые в виде бесконечного ряда по степеням  $z$

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(x, y) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(x, y) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (18)$$

Решение системы (1) в виде (18) будет строиться в окрестности непроницаемой плоскости  $z = 0$ , то есть в предположении, что

$$v_3|_{z=0} = v_{30}(x, y) = 0. \quad (19)$$

Если в системе (17) положить  $z = 0$  и учесть вводимые рядом (18) обозначения, включая учёт значения  $v_{30} = 0$ , то получается следующая система:

$$\begin{cases} v_{10x} + v_{20y} + v_{31} = 0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0x} = av_{20}, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0y} = -av_{10}, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_1 = bv_{10}. \end{cases}$$

Из этой системы получаются два явных выражения для  $v_{31}$  и  $c_1$ :

$$v_{31} = -(v_{10x} + v_{20y}y); \quad c_1 = \frac{\gamma - 1}{2}bv_{10} \quad (20)$$

и два условия на коэффициенты  $c_0(x, y)$ ,  $v_{10}(x, y)$ ,  $v_{20}(x, y)$

$$\begin{cases} \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0x} = av_{20} \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{0y} = -av_{10}. \end{cases} \quad (21)$$

Из этого следует, что задача (17), (19) является характеристической задачей Коши и условия (20), (21) являются необходимыми условиями разрешимости этой характеристической задачи Коши [2].

При задании аналитической функции  $c_0(x, y)$  при  $a \neq 0$  из условий (21) однозначно определяются коэффициенты  $v_{10}, v_{20}$  в виде аналитических функций

$$v_{20} = \frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0x}, \quad v_{10} = \frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0y}$$

и, следовательно, из второго уравнения системы (20) однозначно в виде аналитической функции определится коэффициент  $c_1(x, y)$

$$c_1(x, y) = \frac{a(\gamma - 1)}{2}bv_{10}(x, y).$$

Из условий (21) определяются производные

$$v_{20y} = \frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0xy}; \quad v_{10x} = -\frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0yx},$$

которые при подстановке полученных соотношений в первое уравнение системы (20) однозначно определяют коэффициент  $v_{31}$ :

$$v_{31} = -\left(-\frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0xy} + \frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{0xy}\right) = 0.$$

Предположим, что коэффициенты  $c_i(x, y), v_{3i}(x, y)$  при  $i = 0, 1, \dots, k$  известны, являются аналитическими функциями, причём  $v_{3i}(x, y) = 0$ . Также предположим, что коэффициенты  $v_{1j}(x, y), v_{2j}(x, y)$  при  $j = 0, 1, \dots, k - 1$  также известны и являются аналитическими функциями.

Система (17) дифференцируется  $k$  раз по  $z$  и полагается  $z = 0$ . С учётом значения  $v_{30} = 0$  в результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} v_{1kx} + v_{2ky} + v_{3,k+1} = 0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{kx} = av_{2k}, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{ky} = -av_{1k}, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)}c_{k+1} = bv_{1k}. \end{cases} \quad (22)$$

Из второго и третьего уравнений при  $a \neq 0, b \neq 0$  и при известном коэффициенте  $c_k(x, y)$  однозначно определяются коэффициенты  $v_{2k}(x, y), v_{1k}(x, y)$ :

$$v_{2k} = \frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{kx}; \quad v_{1k} = -\frac{2}{a(\gamma - 1)}c_{ky} \quad (23)$$

в виде аналитических функций от  $x, y$ .

А из четвёртого уравнения системы (22) также однозначно определится аналитическая функция  $c_{k+1}(x, y)$

$$c_{k+1} = \frac{(\gamma - 1)}{2}bv_{1k}.$$

Используя соотношения (23), однозначно определяются частные производные функций  $v_{2k}(x, y)$ ,  $v_{1k}(x, y)$  по  $y$  и  $x$  соответственно

$$v_{2ky} = \frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{kxy}; \quad v_{1kx} = -\frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{kyx},$$

подстановка которых в первое уравнение системы (22) приводит к равенству

$$v_{3,k+1} = 0.$$

Таким образом, индукцией по  $k$  доказано, что при задании аналитической функции  $c_0(x, y)$  ряд (18) с аналитическими коэффициентами строится однозначно, и у степенного ряда функции  $v_3$  все коэффициенты равны нулю, то есть

$$v_3(x, y) \equiv 0. \tag{24}$$

Сходимость ряда (18) следует из того, что характеристическая задача Коши (17), (19) имеет стандартный вид [2], и её решение является аналитической функцией. Спецификой этой характеристической задачи Коши (17), (19) является то, что для построения единственного решения требуется дополнительно задать только одну функцию  $c_0(x, y)$ , а все остальные коэффициенты ряда (18) определяются явно из алгебраических уравнений.

Исходя из этого установленного факта (24) стационарное решение системы (17) строится как решение следующей системы

$$\begin{cases} v_{1x} + v_{2y} = 0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_x = av_2 \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_y = -av_1, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_z = bv_1. \end{cases} \tag{25}$$

Из второго и третьего уравнений системы (25) следует, что

$$v_{2y} = \frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{xy}; \quad v_{1x} = -\frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{yx},$$

и поэтому первое уравнение системы (25) выполняется тождественно

$$v_{2y} + v_{1x} = \frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{xy} - \frac{2}{a(\gamma - 1)} c_{yx} \equiv 0,$$

и его можно опустить как следствие двух уравнений этой системы и рассматривать систему

$$\begin{cases} \frac{2}{(\gamma - 1)} c_x = av_2 \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_y = -av_1, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_z = bv_1. \end{cases}$$

Последние два уравнения этой системы делятся соответственно на  $a$ ,  $b$ , складываются, и последняя система расщепляется:

$$\begin{cases} v_2 = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_x, & v_1 = -\frac{2}{(\gamma-1)}c, \\ -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_y + \frac{2}{b(\gamma-1)}c_z = 0. \end{cases} \quad (26)$$

При этом, естественно, предполагается, что  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Эти ограничения говорят о том, что начало прямоугольной системы координат, которая вращается вместе с Землёй, не лежит ни на экваторе, ни на полюсах.

Последнее уравнение в системе (26) записывается в виде

$$c_z - \frac{b}{a}c_y = 0,$$

и его решение следующее

$$c = c_0(x, y + \frac{b}{a}z).$$

На плоскости  $z = 0$  найденная функция удовлетворяет начальному условию

$$c|_{z=0} = c_0(x, y)$$

с произвольно заданной функцией  $c_0(x, y)$ .

Таким образом, стационарное решение системы (3), удовлетворяющее условию (19), имеет вид

$$\begin{cases} c(x, y, z) = c_0(x, y + \frac{b}{a}z); & v_1(x, y, z) = -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0y}(x, y + \frac{b}{a}z); \\ v_2 = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0x}(x, y + \frac{b}{a}z); & v_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
3. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Сборник «Численные методы механики сплошной среды». ВЦ СО АН СССР. 1973, Т. 4, № 1. С. 3–15.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
5. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / Баутин С.П. [и др.]. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
6. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / Баутин С.П. [и др.]. Екатеринбург : УрГУПС. 2017. 216 с.
7. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
8. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.

**LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS EQUATIONS WHEN TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF CORIOLIS FORCE AND ITS SOME SOLUTIONS****Bautin S.P.**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SBautin@usurt.ru

**Krutova I.Yu.**

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University  
"MEPhI", Snezhinsk, Russia

**Abstract.** For the system of gas dynamics equations, taking into account the action of the Coriolis force, the linearization is carried out in two cases: when the effect of gravity is and when it is not taken into account. For linearized systems, their characteristics are defined. In the case of a rectangular coordinate system, a partial splitting of the linear system of equations is carried out. Particular solutions in the form of standing and running waves are found. The flow in the vicinity of the impenetrable horizontal plane is constructed.

**Keywords:** system of equations of gas dynamics, Coriolis force, linearization, exact solutions.

## REFERENCES

1. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
2. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)
3. Bautin S.P. Analiticheskie resheniya zadachi o dvizhenii porshnya. Sbornik "Chislennye metody mekhaniki splushnoi sredy". VTs SO AN SSSR Publ., 1973, vol. 4, no. 1, pp. 3–15. (in Russian)
4. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya kvazilineinoi analiticheskoi sistemy. *Differentsial'nye uravneniya*, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 2052–2063. (in Russian)
5. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty. Bautin S.P. [i dr.]. Novosibirsk, Nauka Publ.; Ekaterinburg, UrGUPS Publ, 2013, 216 p. (in Russian)
6. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug osi. Bautin S.P. [i dr.]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017, 216 p. (in Russian)
7. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenii gaza pri uchete deistviya sily Koriolisa. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019, 181 p. (in Russian)
8. Bautin S.P. and Obukhov A.G. Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferynykh vikhrei. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012, 152 p. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 19.09.2019*

## МЕЖВИДОВАЯ КОНКУРЕНЦИЯ В ЛЕСНЫХ ФИТОЦЕНОЗАХ КАК СТРАТЕГИЧЕСКАЯ БИМАТРИЧНАЯ ИГРА

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье исследуются равновесия в межвидовой конкурентной борьбе в лесных фитоценозах с точки зрения математической теории игр. Описываются игровые стратегии. Анализируются различные типы выигрышных матриц, которые можно использовать для описания конкуренции.

**Ключевые слова:** межвидовая конкуренция, лесной фитоценоз, теория игр, равновесие Нэша.

### Введение

Под конкуренцией растений в фитоценозе понимают такие их взаимоотношения, когда они перехватывают друг у друга наличные ресурсы местообитания. Причинами конкуренции являются ограниченность ресурсов местообитания и перенаселённости растений в фитоценозе.

Конкуренция между растениями одного вида — это *внутривидовая конкуренция*, а между особями разных видов — *межвидовая*.

Результат внутривидовой конкуренции зависит от физиологических особенностей и индивидуальной наследственности каждого отдельного организма, а также от неравенства индивидуальных условий развития, в частности условий микросреды, которая будет окружать конкретное растение (микропонижения и микроповышения рельефа, избыток или недостаток влаги, защищённость от заморозков и солнцепёка и пр.) [1].

Исход межвидовых конкурентных взаимоотношений определяется не только условиями окружающей среды, но и видовыми особенностями организмов, их умением приспосабливаться [1].

В лесных фитоценозах хорошо видна конкуренция между целыми структурными единицами — различными ярусами лесной растительности. Чем плотнее древесный полог<sup>1</sup>, тем слабее развиты нижележащие подчинённые ярусы и тем более угнетены образующие их отдельные растения.

---

<sup>1</sup>Полог леса — пространство, занятое кронами сомкнувшихся деревьев, размещающихся в одном или нескольких ярусах. В простых древостоях лесной полог образуется одним ярусом

Чем лучше условия существования в фитоценозе, тем интенсивнее борьба за жизнь и острее конкуренция. Эту закономерность подтверждают данные лесоводов.

## 1. Описание конкуренции с помощью дифференциальных уравнений

В [2] для прогнозирования совместного роста двух лесообразователей и сопряжённости восстановительно-возрастной динамики ярусов лесной растительности после сплошных рубок и пожаров использована следующая логистическая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A_1x - B_1x^2 + C_1x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = A_2x - B_2x^2 + C_2x_1x_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  — фитомассы конкурирующих видов,  $A_i = 1/\tau B_i = 1/K\tau$ ,  $A_i$  — специфическая скорость естественного увеличения функции,  $\tau$  — характерный момент времени,  $K$  — предел функции (ёмкость экологической ниши), произведение  $x_1x_2$  — описывает взаимодействие ярусов,  $C_i$  — интенсивность этого взаимодействия.

С помощью уравнений (1) межвидовая конкуренция деревьев и травяно-кустарникового яруса была исследована на примере восстановления растительности после сплошных рубок в ягодниково-липняковых сосняках Среднего Урала (рис. 1).

Систему (1) можно рассматривать как дифференциальную игру, в рамках теории которой возможно нахождение равновесной нэшевской динамики [3, 4], в духе работы [5]. Однако попытка нахождения равновесий не дала ожидаемого результата: не удалось доказать существование таких равновесий. Поэтому в данной статье мы обращаемся к математической теории стратегических (матричных) игр.

## 2. Стратегии межвидовой конкуренции

Для того чтобы воспользоваться математической теорией игр, необходимо выделить *игроков* — очевидно, что это конкурирующие виды растений и используемые ими *стратегии* в конкурентной борьбе.

Растения-конкуренты способны активно воздействовать друг на друга. Подавление соперников может происходить за счёт выделения токсичных соединений подземными и надземными частями, взаимным перехватом минеральных

---

деревьев, в котором кроны размещаются примерно на одном уровне с отклонением на 10–15 % от средней высоты древостоя. Лесной полог в смешанных и сложных древостоях формируется из нескольких ярусов (Википедия).

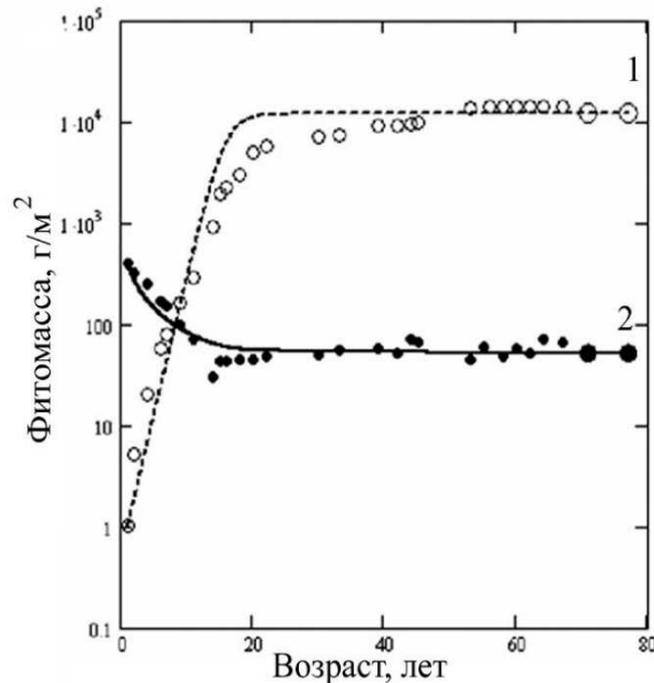


Рис. 1. Динамика надземной фитомассы после сплошных рубок в сосняках ягодниково-липняковых: 1 — фитомасса деревьев (г/м<sup>2</sup>), 2 — фитомасса травяно-кустарникового яруса (г/м<sup>2</sup>), точки — статистические данные, линии — результат решения системы уравнений (1) (две последние точки — прогноз на 5 и 10 лет).

Коэффициенты уравнений:  $A_1 = 0,632$ ;  $B_1 = 5,263 \cdot 10^{-5}$ ;  $C_1 = 0$ ;  $A_2 = 0,18$ ;  
 $B_2 = 1,211 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_2 = 3,684 \cdot 10^{-6}$  [2]

питательных веществ, почвенной влаги корневой системой и солнечного света листовым аппаратом (степень пропускания света) за счёт механических взаимодействий (охлестывание) [1].

Перечислим характеристики видов лесных растений, которые будем рассматривать как игровые стратегии, используемые видами растений в межвидовой конкуренции.

1. *Численность растений данного вида.* Часто результат конкуренции между различными видами зависит от их численного соотношения. Так, при преобладании берёз в сосново-берёзовом молодняке сосна постепенно гибнет, а преобладание сосен приводит к отставанию в росте и развитии молодых берёз [1].

Очевидно, что численность растений данного вида характеризуется числом растений  $n_i$ .

2. *Темп роста, скорость прорастания.* На рис.1 приведены результаты моделирования с помощью системы (1) конкуренции деревьев и травяно-кустарникового яруса в ягодниково-липняковых сосняках при восстановлении после сплошных рубок: явно сказывается то, что скорость нарастания фитомассы деревьев намного выше,  $A_1 = 0,632$ , чем у травяно-кустарникового яруса —  $A_2 = 0,18$ .

Можно характеризовать темп роста величиной коэффициента  $A_i$ .

3. *Плотность древесного полога* [1], *сомкнутость полога* — отношение суммы площадей горизонтальных проекций крон деревьев (без учёта площади их перекрытия) к общей площади участка леса.

Выражается в десятых долях единицы, соответствующей полной сомкнутости, т. е. числом  $s_i \in [0, 1]$ .

4. *Степень пропускания света* — конкуренция за свет — одна из самых острых и ярко выраженных. При разной степени пропускания света деревья, которые создают более сильное затенение, постепенно начинают обгонять и подавлять конкурентов. Недостаток освещённости может приводить к опаданию ветвей и листьев, замедлению роста и развития и, в конечном итоге, к гибели растений. Подобные взаимоотношения наблюдаются в природе между теневыносливыми и светолюбивыми породами. Так, темнохвойные виды (ель, сосна, кедр) с плотными кронами со временем вытесняют быстрорастущую, но светолюбивую берёзу [1].

Характеризуем степень пропускания света числом  $l_i \in [0, 1]$  (1 — максимальное пропускание света, 0 — полное непропускание света).

5. *Конкурентная борьба за влагу*. Увеличение относительной массы корней по сравнению с наземной массой обеспечивает более активное использование почвенной влаги [6, с. 531]. Незначительная часть влаги поглощается листьями растений из воздуха, но только тогда, когда его влажность очень высока и близка к точке насыщения.

Характеризуем борьбу за влагу числом  $w_i$  (масса корней делится на массу наземной части).

6. *Охлестывание*. При раскачивании деревьев ветром их ветви наносят сильные удары по кронам соседей, в результате чего заметно изреживаются. При этом особенно страдают молодые хвойные, у которых сбивается хвоя, верхушечные почки, замедляется рост, образуются двойные или тройные верхушки [1]. Выигрывают породы, которые имеют гибкие ветви (берёза, осина, ольха).

Характеризуем охлестывание числом  $o_i \in [0, 1]$  (1 — максимальное наличие свойства охлестывания).

7. *Корневая конкуренция*. Корни конкурируют за влагу почвы и питательные вещества: чем лучше развита корневая система, тем лучше развивается растение. Наиболее часто встречается конкуренция за питательные вещества. Чтобы выдержать конкуренцию, корни образуют подземную ярусность. Выигрывают растения с развитой подземной ярусностью.

Характеризуем корневую конкуренцию числом  $k_i \in [0, 1]$  (число подземных ярусов делится на максимальное число подземных ярусов по всем конкурирующим видам).

### 3. Биматричные игры

Для формализации межвидовой конкуренции  $N$  видов в рамках математической теории игр, как нам представляется, лучше всего использовать  $N$ -

матричные игры. В такой игре средства (действия), используемые видом в конкуренции, описываются отдельной выигрышной матрицей (или матрицей вероятностей реальных угроз со стороны конкурента). Причём в общем случае эта матрица может не совпадать с матрицей конкурирующего вида.

В случае двух конкурирующих видов используются биматричные игры, имеющие две выигрышные матрицы.

*Биматричная игра*  $\Gamma_{AB}$  — это конечная игра двух лиц, выигрыш каждого из которых задаётся отдельной матрицей.

Пусть первый игрок имеет  $n$  стратегий  $x_i$ , а второй —  $m$  стратегий  $y_j$ . Выигрыши первого ( $P_1$ ) и второго ( $P_2$ ) игроков задаём двумя отдельными матрицами:

$$A = (a_{ij}) \text{ и } B = (b_{ij}).$$

Если игрок  $P_1$  выбирает стратегию  $x_i$ , а игрок  $P_2$  — стратегию  $y_j$ , то выигрыш первого игрока равен  $a_{ij}$ , а второго —  $b_{ij}$ .

Выигрыши в смешанных стратегиях  $s$  и  $\sigma$  игроков  $P_1$  и  $P_2$  соответственно равны

$$sA\sigma^T \text{ и } sB\sigma^T.$$

Биматричная игра — это одноходовая игра.

Биматричную игру часто представляют в форме одной матрицы (табл. 1).

Таблица 1. Выигрышная матрица

$P_1 \backslash P_2$	$y_1$	$y_2$	...	$y_m$
$x_1$	$[a_{11}, b_{11}]$	$[a_{12}, b_{12}]$	...	$[a_{1m}, b_{1m}]$
$x_2$	$[a_{21}, b_{21}]$	$[a_{22}, b_{22}]$	...	$[a_{2m}, b_{2m}]$
...	...	...	...	...
$x_n$	$[a_{n1}, b_{n1}]$	$[a_{n2}, b_{n2}]$	...	$[a_{nm}, b_{nm}]$

**Определение 1.** Назовём пару стратегий  $(x_{i_0}, y_{j_0})$  ситуацией *равновесия* (в чистых стратегиях) в *биматричной игре*, если выполняются неравенства

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \text{ для любого } i,$$

$$b_{i_0j} \leq b_{i_0j_0} \text{ для любого } j.$$

Равновесия в чистых стратегиях ищут следующим образом [7]. В каждом столбце матрицы  $A$  помечаем звёздочкой максимальные элементы. Затем помечаем звёздочкой максимальные элементы в каждой строке матрицы  $B$ . И наконец, запишем все пары стратегий  $(x_i, y_j)$  такие, что оба элемента  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  отмечены звёздочкой. Все такие пары и являются равновесиями.

**Определение 2.** Назовём пару смешанных стратегий  $(s_0, \sigma_0)$  ситуацией *равновесия* в *биматричной игре*, если выполняются неравенства

$$\forall s (sA\sigma_0^T \leq s_0A\sigma_0^T) \text{ и } \forall \sigma (s_0B\sigma^T \leq s_0B\sigma_0^T).$$

**Теорема 1.** ([8, с. 103]). *Биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*



### 3.1. Равновесия Нэша в конечной игре $N$ лиц

Рассмотрим бескоалиционную конечную игру  $N$  лиц, которую ведут  $N$  игроков  $P_1, \dots, P_N$ . С каждым игроком  $P_i$  связано конечное множество *чистых стратегий*

$$x_{\alpha_i}^i \quad (\alpha_i = 1, \dots, n_i)$$

и его собственная функция выигрыша

$$\pi_i(x_{\alpha_1}^1, \dots, x_{\alpha_N}^N) \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Кортеж длины  $N$

$$x = (x_{\alpha_1}^1, \dots, x_{\alpha_N}^N), \quad (3)$$

состоящий из набора чистых стратегий, будем называть чистой *ситуацией*. Чистые ситуации обозначаем  $x, y, \dots$

Игра состоит в том, что делается **один ход**, к котором каждый игрок  $P_i$  выбрал свою стратегию  $x_{\alpha_i}^i$ . Иначе говоря, имеем ситуацию (3), в которой выигрыш каждого игрока  $P_i$  равен (2).

Для удобства будем через  $(x||y_{\alpha_i}^i)$  обозначать ситуацию  $(x_{\alpha_1}^1, \dots, x_{\alpha_{i-1}}^{i-1}, y_{\alpha_i}^i, x_{\alpha_{i+1}}^{i+1}, \dots, x_{\alpha_N}^N)$ .

**Определение 3.** Чистая ситуация  $x$  называется *ситуацией чистого равновесия* тогда и только тогда, когда для каждого игрока  $P_i$

$$\pi_i(x) = \max_{y_{\alpha_i}^i} \{\pi_i(x||y_{\alpha_i}^i)\}. \quad (4)$$

Однако не каждая бескоалиционная конечная игра имеет ситуацию чистого равновесия. Поэтому приходится рассмотреть, как и в случае матричных игр, смешанные стратегии.

Под *смешанной стратегией* игрока  $P_i$  будет пониматься набор неотрицательных чисел, сумма которых равна единице и которые поставлены в однозначное соответствие чистым стратегиям этого игрока. Для представления такой смешанной стратегии игрока  $P_i$  мы будем писать

$$s_i = \sum_{\alpha=1}^{n_i} p_{\alpha}^i x_{\alpha}^i,$$

где

$$\sum_{\alpha=1}^{n_i} p_{\alpha}^i = 1, \quad \text{и} \quad \forall i \alpha (p_{\alpha}^i \geq 0).$$

Мы можем рассматривать смешанные стратегии  $s_i$  как точки симплекса, вершинами которого являются чистые стратегии  $x_\alpha^i$ . Этот симплекс можно рассматривать как выпуклое подмножество векторов вещественного векторного пространства. Смешанные стратегии оказываются, таким образом, линейными комбинациями чистых.

Выражения  $s_i, t_i, r_i$  и т. д. будут означать смешанные стратегии.

Функция выигрыша  $\pi_i$ , введённая в данном выше определении конечной игры, имеет единственное распространение на кортежи длины  $N$ , состоящие из смешанных стратегий<sup>2</sup>

$$(s_1, \dots, s_N),$$

которое линейно относительно смешанной стратегии каждого из игроков ( $N$ -линейна). Это распространение также будем обозначать через  $\pi_i$ , записывая его значения как  $\pi_i(s_1, \dots, s_N)$ .

Для обозначения ситуации в смешанных стратегиях будем писать  $f$  или  $t$ . Если  $f = (s_1, \dots, s_N)$ , то положим  $\pi_i(f) = \pi_i(s_1, \dots, s_N)$ . Такая ситуация может рассматриваться поэтому как точка векторного пространства, являющегося произведением векторных пространств, содержащих множества смешанных стратегий игроков. Множество всех таких ситуаций образует, очевидно, выпуклый многогранник, являющийся произведением симплексов, представляющих множества смешанных стратегий.

Для удобства будем через  $(f||t_i)$  обозначать ситуацию  $(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_N)$ , где  $f = (s_1, \dots, s_N)$ .

**Определение 4.** Ситуация  $f$  называется *ситуацией равновесия Нэша* в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда для каждого игрока  $P_i$

$$\pi_i(f) = \max_{r_i} \{\pi_i(f||r_i)\}. \quad (5)$$

Таким образом, ситуация равновесия является такой ситуацией  $f$ , что каждая входящая в неё смешанная стратегия игрока максимизирует выигрыш этого игрока, если стратегии остальных игроков остаются неизменными. В такой ситуации стратегия каждого из игроков оказывается оптимальной против стратегий остальных игроков.

**Теорема 2.** (Нэш, [9]). *Каждая бескоалиционная конечная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия Нэша в смешанных стратегиях.* ■

**Принцип равновесия Нэша.** Стратегии, образующие ситуацию равновесия Нэша, называем оптимальными стратегиями в смысле *критерия оптимальности Нэша*.

При пребывании в равновесии Нэша игроки добиваются устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение,

<sup>2</sup>Называемые *ситуациями* в смешанных стратегиях.

отклонение от оптимальной стратегии ухудшит их положение. Поведение игроков должно соответствовать *нэшевской рациональности*, согласно которой необходимо подчас пожертвовать частью «интересов» вида и учитывать «интерес» конкурента. Но столь рациональными (разумными) должны быть оба игрока.

При изучении конкуренции видов растений в фитоценозе нэшевское равновесие означает наличие в фитоценозе обоих видов, находящихся в относительном угнетении.

Нэшевская рациональность свойственна лишь людям со *стратегическим мышлением*, которая, как можно думать свойственна природе. Люди не настолько совершенны, они чаще всего начинают действовать иррационально, не веря в рациональность противника. В природе же важно сохранять биоразнообразие; именно оно обеспечивает её устойчивое существование. Это, скорее всего, и означает нэшевское равновесие.

#### 4. Составление выигрышных матриц

Рассматриваем межвидовую конкуренцию двух видов — 1 и 2. Игрок  $P_1$  — это вид 1, игрок  $P_2$  — вид 2.

Стратегии  $x_i = y_i$ , которые используются игроками, перечислены в § 2.

В теории матричных игр исходным является представление о том, что игроки свободны в выборе своей стратегии. Можно допустить такой выбор в игре природы и лесным управлением [10]: лесники прогнозируют, что можно ждать от природы, т. е. какой «выбранной» «стратегии в игре» можно ждать от природы (засуха, вредители и пр.), а выбор лесников — это понятный нам выбор, который способны делать люди.

В нашем случае мы имеем дело с двумя видами растений. Если первый вид «демонстрирует» большую численность растений вида или, скажем, присущее виду охлестывание, то что этому может противопоставить другой вид?

Решая эту задачу, мы рассмотрим две возможности.

Вначале рассмотрим «тупой» выбор стратегии каждым видом, никак не зависящий от выбора конкурента.

Затем попробуем допустить наличие своего рода сознательного «отпора» одного вида на «выбор» другого.

##### 4.1. «Тупой» выбор стратегии

Если, например, первый игрок «выбирает» стратегию  $x_1$  — «Численность растений», то в его матрицу мы поставим число  $n_1$  по всей строке. И так для всех стратегий.

Для второго игрока, при выборе стратегии  $y_j$ , ставим числовую характеристику этой стратегии для второго вида по всему столбцу.

Следовательно, имеем выигрышную биматрицу, представленную в таблице 2, или, как пример, две матрицы, данные на рис. 2. Соответствующие показатели взяты достаточно условно, в иллюстративных целях.

Таблица 2. Выигрышная матрица

$P_1/P_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$
$x_1$	$[n_1, n_2]$	$[n_1, A_2]$	$[n_1, s_2]$	$[n_1, l_2]$	$[n_1, w_2]$	$[n_1, o_2]$	$[n_1, k_2]$
$x_2$	$[A_1, n_2]$	$[A_1, A_2]$	$[A_1, s_2]$	$[n_1, l_2]$	$[n_1, w_2]$	$[n_1, o_2]$	$[n_1, k_2]$
$x_3$	$[s_1, n_2]$	$[s_1, A_2]$	$[s_1, s_2]$	$[n_1, l_2]$	$[s_1, w_2]$	$[s_1, o_2]$	$[s_1, k_2]$
$x_4$	$[l_1, n_2]$	$[l_1, A_2]$	$[l_1, s_2]$	$[l_1, l_2]$	$[l_1, w_2]$	$[l_1, o_2]$	$[l_1, k_2]$
$x_5$	$[w_1, n_2]$	$[w_1, A_2]$	$[w_1, s_2]$	$[w_1, l_2]$	$[w_1, w_2]$	$[w_1, o_2]$	$[w_1, k_2]$
$x_6$	$[o_1, n_2]$	$[o_1, A_2]$	$[o_1, s_2]$	$[o_1, l_2]$	$[o_1, w_2]$	$[o_1, o_2]$	$[o_1, k_2]$
$x_7$	$[k_1, n_2]$	$[k_1, A_2]$	$[k_1, s_2]$	$[k_1, l_2]$	$[k_1, w_2]$	$[k_1, o_2]$	$[k_1, k_2]$

Для нахождения равновесий Нэша воспользуемся он-лайн программой Solve a Bimatrix Game (VIRTUALIZED)<sup>3</sup>, которая позволяет находить решения биматричных игр.

В результате находим семь ситуаций чистого равновесия с соответствующими платежами (строки в таблице на рис. 3):

$$n_1 = 500; A_1 = 0,632; s_1 = 0,8; l_1 = 0,6; w_1 = 0,5; o_1 = 1; k_1 = 0,3$$

и

$$n_2 = 2000; A_2 = 0,18; s_2 = 0,3; l_2 = 0,1; w_2 = 0,5; o_1 = 0; k_1 = 0,3.$$

7 x 7 Payoff matrix A:

500	500	500	500	500	500	500	500
79/125	79/125	79/125	79/125	79/125	79/125	79/125	79/125
4/5	4/5	4/5	4/5	4/5	4/5	4/5	4/5
3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1	1	1	1	1	1
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

7 x 7 Payoff matrix B:

2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
9/50	9/50	9/50	9/50	9/50	9/50	9/50	9/50
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

Рис. 2. Выигрышные матрицы  $7 \times 7$ 

<sup>3</sup>Сайт: <http://banach.lse.ac.uk/>

Rational Output

EE 1	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 2	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(2)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 3	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(3)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 4	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(4)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 5	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(5)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 6	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(6)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	EP=	2000
EE 7	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	EP=	500	P2:	(7)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	EP=	2000

Рис. 3. Равновесия Нэша для  $7 \times 7$ , EE = Extreme Equilibrium, EP = Expected Payoff

Мы видим, что в равновесиях 1-й вид (деревья с сильным охлестыванием) выбирает одну и ту же стратегию —  $x_1$  (численность деревьев), а второй (кустарники с нулевым охлестыванием) — перебирает все варианты стратегий:

$$\begin{aligned}
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\
 s &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).
 \end{aligned}$$

**Случай неучёта численности растений.** Посмотрим, что изменится, если не учитывать 1-ю стратегию «Численность растений», т. е. рассмотрим игру без стратегий  $x_1, y_1$ . Выигрышные матрицы даны на рис. 4.

Шесть возможных равновесий приведены на рис. 5.

Мы видим, что в равновесиях 1-й вид (деревья с сильным охлестыванием) выбирает одну и ту же стратегию —  $x_6$  (охлестывание), а второй (кустарники с нулевым охлестыванием) — перебирает все варианты стратегий:

$$\begin{aligned}
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), \\
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), \\
 s &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \sigma &= (0, 0, 0, 0, 0, 1).
 \end{aligned}$$

Фактически игра показала, что деревья с сильным охлестыванием обеспечивают себе выживание за счёт охлестывания. В рассмотренном ранее случае выживание 1-го вида обеспечивалось численностью.

6 x 6 Payoff matrix A:

79/125	79/125	79/125	79/125	79/125	79/125
4/5	4/5	4/5	4/5	4/5	4/5
3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1	1	1	1
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

6 x 6 Payoff matrix B:

9/50	9/50	9/50	9/50	9/50	9/50
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	0	0	0	0
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

Рис. 4. Выигрышные матрицы 6 × 6

Rational Output

EE 1	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	0
EE 2	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(2)	0	1	0	0	0	0	EP=	0
EE 3	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(3)	0	0	1	0	0	0	EP=	0
EE 4	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(4)	0	0	0	1	0	0	EP=	0
EE 5	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(5)	0	0	0	0	1	0	EP=	0
EE 6	P1:	(1)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(6)	0	0	0	0	0	1	EP=	0

Рис. 5. Равновесия Нэша для 6 × 6, EE = Extreme Equilibrium, EP = Expected Payoff

#### 4.2. «Отпор» на «выбор»

Известно, что в борьбе светолюбивых берёз и елей берёзы используют охлестывание, а ели, пробиваясь через берёзовый ярус, закрывают берёзы густым пологом. Иначе говоря, на выбор видом 1 (берёза) стратегии  $x_6$  (максимальное охлестывание) с показателем-выигрышем  $a_{52} = 1$  вид 2 (ель) может ответить «отпором»  $y_3$  (максимальная сомкнутость полога) с показателем-выигрышем  $b_{52} = 1$ :

$$A_1 = 0,632; s_1 = 0,2; l_1 = 0,6; w_1 = 0,5; o_1 = 1; k_1 = 0,3$$

и

$$A_2 = 0,18; s_2 = 1; l_2 = 0,1; w_2 = 0,5; o_2 = 0; k_2 = 0,3.$$

Это даёт выигрышные матрицы, приведённые на рис. 6.

Решая игру, находим равновесия Нэша (рис. 7). Для игрока 1 (берёза) — это чистые стратегии, а для игрока 2 (ель) имеют место и смешанные стратегии (строки 2–6).

6 x 6 Payoff matrix A:

79/125	79/125	79/125	79/125	79/125	79/125
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	0	0	0	0
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

6 x 6 Payoff matrix B:

9/50	9/50	9/50	9/50	9/50	9/50
1	1	1	1	1	1
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	0	0	0	0
3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	3/10

Рис. 6. Выигрышные матрицы 6 x 6

Rational Output

EE 1	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	9/50
EE 2	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(2)	46/125	79/125	0	0	0	0	EP=	9/50
EE 3	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(3)	0	79/125	46/125	0	0	0	EP=	9/50
EE 4	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(4)	0	79/125	0	46/125	0	0	EP=	9/50
EE 5	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(5)	0	79/125	0	0	46/125	0	EP=	9/50
EE 6	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(6)	0	79/125	0	0	0	46/125	EP=	9/50
EE 7	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(7)	0	0	1	0	0	0	EP=	9/50
EE 8	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(8)	0	0	0	1	0	0	EP=	9/50
EE 9	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(9)	0	0	0	0	1	0	EP=	9/50
EE 10	P1:	(1)	1	0	0	0	0	0	EP=	79/125	P2:	(10)	0	0	0	0	0	1	EP=	9/50
EE 11	P1:	(2)	0	0	0	0	1	0	EP=	1	P2:	(11)	0	1	0	0	0	0	EP=	1

Рис. 7. Равновесия Нэша для «выбор»–«отпор», EE = Extreme Equilibrium, EP = Expected Payoff

Мы видим, например, среди найденных равновесий ожидаемое чистое равновесие–11 с «выбором» = охлестывание и «отпором» = плотный полог.

Все остальные равновесия предполагают «выбор» = скорость роста, а отпор разнообразен и может быть смешанным, как, например, равновесие–2, которое предполагает, что с вероятностью 46/125 задействуется стратегия «скорость роста растений» и с вероятностью 79/125 задействуется стратегия «плотный полог».

Есть и другие равновесия, в которых вид 2 задействует прочие стратегии.

### Заключение

Мы продемонстрировали возможности теории стратегических игр для анализа ситуаций, возникающих в межвидовой конкуренции. Наши примеры носят иллюстративный учебный характер. Мы сделали только первый шаг в нашем исследовании. Для получения серьезных результатов необходимо провести ревизию средств, используемых растениями в конкурентной борьбе, и более тща-

тельно составлять выигрышные матрицы. Помимо это необходимо продумать способы интерпретации получаемых результатов игры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Титова М. Деревья-конкуренты. URL: <http://givoyles.ru/articles/uhod/derevya-konkurenty/>.
2. Иванова Н.С. Лесотипологические особенности биоразнообразия и восстановительно-возрастной динамики растительности горных лесов Южного и Среднего Урала: автореф. дис. ... доктор. биол. наук. Екатеринбург, 2019. 40 с.
3. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
4. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.
5. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Равновесная динамика лесных экосистем с учетом взаимосвязи «растительность-почва» // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 68–79.
6. Абатуров Б.Д., Лопатин В.Н. Углеродный баланс, жизнеспособность и зональное распределение деревьев, трав и кустарников в различных условиях увлажнения // Успехи современной биологии. 2002. Т. 122, № 6. С. 527–536.
7. Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. Минск : БГУ, 2013. 233 с.
8. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями в экономике. М., 2003. 278 с.
9. Нэш Дж. Бескоалиционные игры / Матричные игры. М. : ФМ, 1961. С. 205–221.
10. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Защита леса как стратегическая игра // Математические структуры и моделирование. 2013. Вып. 28. С. 43–48.

## INTERSPECIFIC COMPETITION IN FOREST PHYTOCENOSES AS A STRATEGIC BIMATRIX GAME

**L.A. Volodchenkova**

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The article examines the equilibrium in interspecific competition in forest phytocenoses from the point of view of the mathematical theory of games. Game strategies are described. Various types of payoff matrices that can be used to describe the competition are analyzed.

**Keywords:** interspecific competition, forest phytocenosis, game theory, Nash equilibrium.

## REFERENCES

1. Titova M. Derev'ya-konkurenty. URL: <http://givoyles.ru/articles/uhod/derevya-konkurenty/>. (in Russian)
2. Ivanova N.S. Lesotipologicheskie osobennosti bioraznoobraziya i vosstanovitel'no-vozzrastnoi dinamiki rastitel'nosti gornyykh lesov Yuzhnogo i Srednego Urala: avtoref. dis. ... doktor. biolog. nauk. Ekaterinburg, 2019, 40 p. (in Russian)
3. Lewis F.L., Vrabie D.L., and Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2012, 540 p.
4. Tynyanskii N.T. and Zhukovskii V.I. Differentsial'nye igrы s nenulevoi summoi (koop-erativnyi variant). Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal., 1979, vol. 17, pp. 3–112. (in Russian)
5. Guts A.K. and Volodchenkova L.A. Ravnovesnaya dinamika lesnykh ekosistem s uchetom vzaimosvyazi "rastitel'nost'-pochva". Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 2(42), pp. 68–79. (in Russian)
6. Abaturov B.D. and Lopatin V.N. Uglerodnyi balans, zhiznesposobnost' i zonal'noe raspredelenie derev'ev, trav i kustarnikov v razlichnykh usloviyakh uvlazhneniya. Uspekhi sovremennoi biologii, 2002, vol. 122, no. 6, pp. 527–536. (in Russian)
7. Pisaruk N.N. Vvedenie v teoriyu igr. Minsk, BGU Publ., 2013, 233 p. (in Russian)
8. Vasin A.A. and Morozov V.V. Vvedenie v teoriyu igr s prilozheniyami v ekonomike. Moscow, 2003, 278 p. (in Russian)
9. Nesh Dzh. Beskoalitsionnye igrы, Matrichnye igrы. Moscow, FM Publ., 1961, pp. 205–221. (in Russian)
10. Guts A.K. and Volodchenkova L.A. Zashchita lesa kak strategicheskaya igra. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2013, iss. 28, pp. 43–48. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 07.08.2019*

## **ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

**В.А. Шовин**

научный сотрудник, e-mail: v.shovin@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

**Аннотация.** В работе предлагаются новые подходы к проведению факторного анализа для качественных показателей. Подход вычисления количественных показателей на базе многомерного шкалирования и матрицы взаимных расстояний объектов. И новый подход вычисления корреляционной матрицы. Оба метода могут быть предварительно использованы для проведения количественного факторного анализа. Также предлагается новый подход к восстановлению расстояний объектов и их расположения в многомерном пространстве. Основой метода является принцип выбора ближайшего объекта из двух других объектов. В результате расстояния между всеми парами объектов становятся определены. Такая матрица расстояний далее используется в методе многомерного шкалирования на базе метода Верле. Все объекты помещаются в многомерное пространство выбранной размерности. Такой метод восстановления расстояний между объектами и помещение их в многомерное пространство может быть использован предварительно также для классических методов классификации.

**Ключевые слова:** качественные показатели, факторный анализ, метод Верле, многомерное шкалирование, восстановление расстояний.

### **Введение**

Большой потребностью анализа данных является обработка качественных показателей. Цель данной работы — осуществление возможности проведения факторного анализа качественных показателей.

Для реализации факторного анализа качественных показателей оказалось возможным использование количественного факторного анализа, когда качественные показатели преобразуются в количественные.

Классический количественный факторный анализ может использовать альтернативные исходные данные. Это матрица количественных показателей объектов или матрица корреляций показателей.

Расчёт коэффициента корреляции между двумя качественными показателями можно осуществить на базе информации о доле объектов, у которых эти качественные показатели одинаковы. Корреляция между такими показателями тем больше, чем больше представителей с одинаковыми значениями пары показателей.

Преобразование качественных показателей в количественные можно осуществить на базе метода многомерного шкалирования, предварительно вычислив матрицу взаимных расстояний.

Расстояние между двумя объектами с количественными показателями тем больше, чем больше различий в значениях одинаковых качественных показателей.

Чтобы была возможность использования смешанных данных (с качественными и количественными показателями), количественные показатели преобразуются в качественные. Для этого интервал каждого количественного показателя разбивается на небольшое число частей, и попадание показателя объекта в один из таких интервалов считается новым качественным значением.

Также предлагается новый подход восстановления расстояний объектов и их расположения в многомерном пространстве. Принцип выбора из двух объектов более близкого используется во многих алгоритмах. Например, в алгоритме сортировки и в классификации на базе FRIS-компактности. Такой принцип может быть также использован для восстановления расстояний между всеми парами объектов. Матрица взаимных расстояний является исходной для многих других алгоритмов. В частности, такая матрица может быть предварительно использована методом многомерного шкалирования и помещения объектов в многомерное пространство выбранной размерности. Известные координаты объектов в многомерном пространстве могут быть использованы во многих классических методах классификации. Такой принцип выбора ближайшего объекта, или предиката, может быть также использован для проведения социологического и психологического тестирования.

## 1. Вычисление корреляционной матрицы

Если в матрице исходных данных имеются количественные показатели, то их значения приводятся к качественным посредством приведения их значений в интервалы. Интервал их значений от  $\min$  до  $\max$  делится на 2 или 3 интервала.

Коэффициент корреляции между двумя качественными показателями может быть определён по формуле  $r_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{ij}^{lk}$ , где

$$\delta_{ij}^{lk} = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i^k = x_i^l \text{ and } x_j^k = x_j^l, \\ 0, & \text{else} \end{cases},$$

$m$  – число исходных показателей,  $n$  – число объектов,  $x_i^k$  –  $i$ -ый качественный показатель у  $k$ -го объекта.

Далее в матрице элементов  $r_{ij}$  находятся минимальный ( $\min$ ) и максимальный ( $\max$ ) вне диагональные элементы. И интервал значений таких элементов переводится из  $[\min, \max]$  в  $[0, 1]$  по формуле:

$$r_{ij} = \frac{r_{ij} - \min}{\max - \min}.$$

## 2. Вычисление матрицы исходных данных

Для вычисления матрицы исходных количественных данных может быть использован алгоритм на базе многомерного шкалирования. Для этого необходимо подготовить матрицу взаимных расстояний объектов. Такую матрицу можно получить с помощью алгоритма Dist Redux или по следующей формуле:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \delta_k^{ij},$$

$$\delta_k^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } x_k^i = x_k^j. \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

## 3. Метод восстановления взаимных расстояний Dist Redux

Метод восстановления взаимных расстояний использует выбор ближайшего объекта из двух других или из двух предикатов.

Пусть  $z_i$  —  $i$ -ый объект из  $n$  множества объектов.

Пусть  $p_i$  —  $i$ -ый предикат из  $m$  множества предикатов.

Пусть представлены все пары предикатов  $p_s, p_t$ , где  $s \neq t$ ,  $s$  и  $t = 1, \dots, m$ .

Все объекты проходят тест на выбор ближайшего предиката из пары  $p_s, p_t$ .

Все объекты, выбравшие предикат  $p_s$ , формируют свой класс объектов  $A_{st}$ . Аналогично для предиката  $p_t$  формируется свой класс объектов  $B_{st}$ . Для всех пар объектов из своих классов  $A_{st}$  или  $B_{st}$  взаимные расстояния не меняются. Для объектов из различных классов  $A_{st}$  и  $B_{st}$  взаимные расстояния увеличиваются на величину  $v$ , зависящую от  $p_s, p_t$

$$d(z_i, z_j) := d(z_i, z_j) + v(p_s, p_t).$$

Далее перебираются все пары предикатов  $p_s, p_t$  и изменяются все взаимные расстояния  $d(z_i, z_j)$ .

## 4. Многомерное шкалирование

На базе метода Верле и полученной матрицы взаимных расстояний возможно провести многомерное шкалирование и поместить множество объектов в многомерное пространство выбранной размерности. Данный метод был предложен в статье [1].

## 5. Численный эксперимент

В качестве исходных данных были взяты данные, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Исходные качественные показатели

Пол	муж	муж	муж	муж	муж	жен	жен	жен	жен	жен
Рост	выс	выс	сре	сре	низ	низ	сре	сре	сре	выс
Сила	сил	сил	сил	сла	сла	сла	сла	сил	сла	сла
Бюджет	бог	бог	бог	сре	бед	бед	бог	сре	сре	сре
Возраст	взо	сре	взр	мла	мла	мла	сре	сре	взр	сре
Ум	умн	умн	нет	нет	умн	нет	умн	умн	нет	умн
Кол. комп.	1	1	3	0	2	0	1	1	2	1

Таблица 2. Матрица корреляций

	Пол	Рост	Сила	Бюджет	Возраст	Ум	Кол. комп.
Пол	1	0,25	0,875	0,375	0,125	0,625	0,125
Рост	0,25	1	0,375	0,375	0,125	0,5	0,125
Сила	0,875	0,375	1	0,5	0,25	0,75	0,375
Бюджет	0,375	0,375	0,5	1	0	0,25	0,125
Возраст	0,125	0,125	0,25	0	1	0,625	0,5
Ум	0,625	0,5	0,75	0,25	0,625	1	1
Кол. комп.	0,125	0,125	0,375	0,125	0,5	1	1

Таблица 3. Матрица взаимных расстояний объектов

№ объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,125	0,708	0,792	0,667	0,917	0,5	0,5	0,917	0,5
2	0,125	0	0,708	0,792	0,667	0,917	0,375	0,375	0,917	0,375
3	0,708	0,708	0	0,875	0,792	1,125	0,833	0,833	0,542	1,083
4	0,792	0,792	0,875	0	0,708	0,375	0,667	0,667	0,583	0,667
5	0,667	0,667	0,792	0,708	0	0,583	0,667	0,792	0,625	0,667
6	0,917	0,917	1,125	0,375	0,583	0	0,667	0,792	0,708	0,667
7	0,5	0,375	0,833	0,667	0,667	0,667	0	0,25	0,542	0,25
8	0,5	0,375	0,833	0,667	0,792	0,792	0,25	0	0,542	0,25
9	0,917	0,917	0,542	0,583	0,625	0,708	0,542	0,542	0	0,542
10	0,5	0,375	1,083	0,667	0,667	0,667	0,25	0,25	0,542	0

Результаты матрицы корреляций приведены в таблице 2.

Результат применения многомерного шкалирования к матрице дистанций представлен в таблице 4.

Таблица 4. Матрица исходных данных

Пол	-0,276	-0,198	-0,105	-0,081	0,08	0,22	0,508	-0,153	0,144	-0,025
Рост	0,231	0,375	0,178	-0,476	-0,48	-0,566	0,557	0,527	0,027	0,191
Сила	0,513	0,381	0,428	0,171	-0,402	-0,344	-0,172	-0,011	-0,348	-0,434
Бюджет	0,298	0,256	-0,456	0,013	0,293	0,298	0,022	-0,203	-0,59	0,235
Возраст	-0,566	-0,48	-0,11	0,436	-0,452	0,207	0,045	0,339	0,512	0,127
Ум	-0,436	-0,575	0,077	0,702	0,134	0,557	-0,377	-0,519	0,229	-0,498
Кол. комп.	-0,091	-0,222	0,74	-0,235	0,541	-0,267	-0,508	-0,523	0,441	-0,675

Матрица факторов, полученная методом Верле и вращением из матрицы исходных количественных данных, представлена в таблице 5.

Таблица 5. Матрица факторной структуры

Пол	<b>-1</b>	-0,009
Рост	<b>0,736</b>	0,676
Сила	<b>0,894</b>	0,449
Бюджет	0,431	<b>0,902</b>
Возраст	-0,362	<b>-0,932</b>
Ум	0,002	<b>1</b>
Кол. комп.	0,275	<b>0,962</b>

Матрица факторов, полученная многомерным шкалированием из корреляционной матрицы, представлена в таблице 6.

Таблица 6. Матрица факторной структуры

Пол	<b>0,956</b>	0,295
Рост	<b>-0,771</b>	0,637
Сила	<b>0,919</b>	0,395
Бюджет	0,605	<b>-0,796</b>
Возраст	-0,288	<b>-0,958</b>
Ум	0,06	<b>-0,998</b>
Кол. комп.	-0,154	<b>0,988</b>

В результате сравнения полученных факторных структур можно сделать вывод о взаимоподтверждаемости результатов двух подходов.

Такой подход для проведения факторного анализа можно рекомендовать, когда среди исходных качественных показателей есть показатели, не приводящиеся к количественным. Такие, например, как «пол», являющиеся исключительно качественными. Другие качественные показатели (все, кроме «пола» в данном примере) можно привести к количественным, используя их количественные характеристики («рост» — высота в сантиметрах, «сила» — жим в Ньютонах, «бюджет» — количество денег в рублях, «возраст» — в прожитых годах, «ум» — в величине коэффициента интеллекта IQ).

Стоит заметить, что в матрице исходных данных (см. табл. 4) 7 показателей являлись факторами, поставленными в соответствие исходным показателям. То есть были взяты взаимные расстояния объектов, и согласно им, в лучшем соответствии с ними, все объекты были помещены в 7-мерное факторное пространство. Поэтому в данной матрице строка с отметкой «пол» служит некоторому интегративному факторному показателю.

Также был проведён численный расчёт с данными артериальной гипертензии. По новой формуле коэффициента корреляции была рассчитана матрица корреляций, и на её основе была получена матрица факторной структуры (метод главных компонент), подвергнутая факторному вращению (критерий интерпретируемости).

Таблица 7. Новая факторная структура артериальной гипертензии

	F1	F2	F3	F4	F5
<b>Вес</b>	0,3269	<b>0,8957</b>	-0,0316	-0,0697	0,0254
<b>ИМТ</b>	0,2274	<b>0,8949</b>	-0,0567	-0,0955	0
<b>ЧД</b>	-0,4871	0,0494	-0,5293	<b>-0,5828</b>	0,272
<b>С</b>	-0,0852	<b>0,5525</b>	0,3681	-0,0568	-0,3236
<b>Л</b>	0	0,0181	<b>0,9143</b>	-0,1551	0,0404
<b>КСР</b>	<b>0,7028</b>	0,1688	-0,0152	0,1108	<b>0,5451</b>
<b>КСО</b>	0,3266	-0,0869	-0,3087	<b>0,8569</b>	0,0105
<b>КДР</b>	<b>0,902</b>	0,1849	0,0353	0,0112	0,3233
<b>КДО</b>	<b>0,9775</b>	-0,0178	-0,0445	0,0309	0,0401
<b>УО</b>	<b>0,9574</b>	0,0119	-0,0098	-0,147	-0,0825
<b>МОС</b>	<b>0,9355</b>	0,0186	-0,1139	-0,1231	-0,2582
<b>ОПСС</b>	<b>0,7399</b>	0,1605	-0,1475	-0,2109	-0,4773
<b>ИХ</b>	-0,0767	<b>0,8137</b>	-0,1215	-0,2146	-0,0238
<b>ФВ</b>	0,2578	<b>0,8169</b>	0,0595	0,1205	0,1596
<b>ФУ</b>	0,2132	<b>0,805</b>	0,0746	0,0264	0,0767

Полученные факторы артериальной гипертензии находятся в большом соответствии с факторами, полученными ранее в других работах [2]. Этот результат

также подтверждает работоспособность данного метода. Можно заметить, что в данной факторной структуре отдельные факторы из раннего исследования соединились. Это, видимо, произошло из-за большой дискретности количественных показателей, когда их значения были разделены всего на 2 интервала и большая часть информации о взаимоотношении показателей потерялась.

В качестве исходных данных для тестирования алгоритма Dist Redux были взяты 15 биофизических показателей для 131 лица с артериальной гипертензией начальной стадии [3]:

- 1) *вес*,
- 2) *индекс массы тела (ИМТ)*,
- 3) *частота дыхания (ЧД)*,
- 4) *сегментоядерные нейтрофилы (С)*,
- 5) *лимфоциты (Л)*,
- 6) *конечно-систолический размер левого желудочка (КСР)*,
- 7) *конечно-систолический объём левого желудочка (КСО)*,
- 8) *конечно-диастолический размер левого желудочка (КДР)*,
- 9) *конечно-диастолический объём левого желудочка (КДО)*,
- 10) *ударный объём (УО)*,
- 11) *минутный объём сердца (МОС)*,
- 12) *общее периферическое сосудистое сопротивление (ОПСС)*,
- 13) *индекс Хильдебрандта (ИХ)*,
- 14) *фракция выброса левого желудочка (ФВ)*,
- 15) *фракция укорочения левого желудочка (ФУ)*.

В качестве предикатов  $p_i$  использовались сами объекты  $z_i$ . В качестве принципа выбора ближайшего предиката — наименьшее расстояние  $e(z_i, z_j)$  до объекта в евклидовом пространстве стандартизированных показателей. В качестве величины  $v(p_s, p_t)$  используется расстояние  $e(z_s, z_t)$ .

В результате применения метода восстановления взаимных расстояний и многомерного шкалирования была получена структура объектов в многомерном пространстве показателей, подобная исходной структуре, но исключившая шум и разброс объектов около кривых зависимостей различных пар показателей.

## 6. Программная реализация

Методы обработки качественных показателей реализованы программно как web-приложение. Вычислительная часть приложения вынесена на сервер, написанный на языке PHP с использованием фреймворка Zend. Интерфейс приложения написан с использованием HTML, CSS, JavaScript, JQuery. Приложение многомерного шкалирования доступно по адресу: <http://svlaboratory.org/application/multscalkind> — после регистрации нового пользователя. Вычисление корреляционной матрицы реализовано в макросе Excel на языке VBA и доступно по адресу: <http://svlaboratory.org/blog/blog-single/articleid/35>.



Рис. 1. Результирующая структура объектов в плоскости первых двух показателей

## Заключение

Предложены подходы обработки качественных показателей для проведения факторного анализа. По результату численного эксперимента подход вычисления корреляционной матрицы и подход вычисления матрицы исходных данных показали сходство факторных структур. Это подтверждает работоспособность таких методов. Предложен метод восстановления расстояний между объектами. Данный метод позволяет вычислить матрицу взаимных расстояний между объектами и применить типичные методы классификации. Проведён численный эксперимент с количественными показателями объектов. В результате применения данного метода была получена структура объектов, лишённая шума и разброса объектов возле кривых зависимостей пар показателей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шовин В.А. Многомерное шкалирование на базе метода Верле // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 117–122.
2. Шовин В.А., Гольцяпин В.В. Методы вращения факторных структур // Математические структуры и моделирование. 2015. № 2(34). С. 75–84.
3. Гольцяпин В.В., Шовин В.А. Косоугольная факторная модель артериальной гипертензии первой стадии // Вестник Омского университета. 2010. № 4. С. 120–128.

**FACTOR ANALYSIS OF QUALITY INDICATORS****V.A. Shovin**

Scientist Researcher, e-mail: v.shovin@mail.ru

S.L. Sobolev Institute of Mathematics (Omsk Branch), Siberian Branch of RAS

**Abstract.** The paper proposes new approaches for conducting factor analysis for qualitative indicators: the approach of calculating quantitative indicators on the basis of multidimensional scaling and matrix of mutual distances of objects; and a new approach to calculating the correlation matrix. Both methods can be preliminarily used for quantitative factor analysis. Also we propose a new approach to reconstructing the distances of objects and their location in a multidimensional space. The basis of the method is the principle of choosing the nearest object from two other objects. As a result, the distances between all pairs of objects are determined. Such a distance matrix is further used in the method of multidimensional scaling based on the Verlet method. All objects are placed in a multidimensional space of the selected dimension. This method of restoring distances between objects and placing them in a multidimensional space can also be used previously for classical classification methods.

**Keywords:** qualitative indicators, factor analysis, Verlet method, multidimensional scaling, distance reconstruction.

**REFERENCES**

1. Shovin V.A. Mnogomernoe shkalirovanie na baze metoda Verle. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2015, no. 4(36), pp. 117–122. (in Russian)
2. Shovin V.A. and Gol'tyapin V.V. Metody vrashcheniya faktornykh struktur. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2015, no. 2(34), pp. 75–84. (in Russian)
3. Gol'tyapin V.V. and Shovin V.A. Kosougol'naya faktornaya model' arterial'noi gipertenzii pervoi stadii. Vestnik Omskogo universiteta, 2010, no. 4, pp. 120–128. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 01.07.2019*

# **A THEORETICAL EXPLANATION FOR THE EFFICIENCY OF GENERALIZED HARMONIC WAVELETS IN ENGINEERING AND SEISMIC SPECTRAL ANALYSIS**

**Michael Beer**<sup>1</sup>

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: beer@irz.uni-hannover.de

**Afshin Gholamy**<sup>2</sup>

Ph.D. (Geological Sciences), Post-doc, e-mail: afshingholamy@gmail.com

**Vladik Kreinovich**<sup>2</sup>

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

<sup>1</sup>Leibniz University of Hannover, Hannover, Germany

<sup>2</sup>University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** Wavelets of different shapes are known to be very efficient in many data processing problems. In many engineering applications, the most efficient shapes are shapes of a generalized harmonic wavelet, i.e., a wavelet of the shape  $w(t) = t^a \exp(b \cdot t)$  for complex  $b$ . Similar functions are empirically the most successful in the seismic analysis — namely, in simulating the earthquake-related high-frequency ground motion. In this paper, we provide a theoretical explanation for the empirical success of these models.

**Keywords:** Generalized harmonic wavelets, seismic spectral analysis, symmetries.

## **1. Formulation of the Problem**

**Fourier transforms: a brief reminder.** In signal processing, an important tool is Fourier transform, where a signal is represented as linear combination of sine and cosine waves  $\sin(\omega \cdot t)$  and  $\cos(\omega \cdot t)$  corresponding to different frequencies  $\omega$ . The possibility for such representation can be traced to the famous Newton's prism experiment, when he showed that any light passing through a prism decomposes into a linear combination of monochromatic lights (from red to violet) — which are exactly sines and cosines.

The sinusoidal *infinite* periodic waves, whose frequencies do not change with time, are indeed very efficient in analyzing *stationary* processes, i.e., processes whose statistical characteristics do not change with time. In particular, these waves are very useful in *spectral analysis*, i.e., in describing phenomena that include processes corresponding to different frequencies and periods. Examples of such phenomena include sea waves, wind storms, vibrations in civil engineering structures, etc.

**Wavelets: need to go beyond Fourier transforms.** Many real-life processes are *non-stationary*. In particular, many engineering and seismic processes are non-

stationary. During a short time interval, we can often safely ignore the changes in their statistical characteristics, but as we consider larger and larger time intervals, we are no longer able to ignore this change. Thus, locally, we can still describe the signal as a linear combination of periodic waves, but this representation can no longer be expanded to the whole real line.

So, to properly represent non-stationary signals, we need to use functions which are not periodic. These functions should instead be limited to a bounded time interval. Such time-bounded wave-like functions are known as *wavelets*.

Wavelets have indeed been successfully applied in many engineering applications.

**Which wavelets are the most efficient in engineering applications: empirical analysis.** There are many different types of wavelets. A comparative analysis of the efficiency of different types of wavelets — described in [3, 4, 7, 12–14] — shows that in many engineering applications, the most efficient wavelets are so-called *generalized harmonic wavelets* first introduced in [8–10], i.e., linear combinations of the functions  $t^{-1} \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$  corresponding to different values  $\omega$  (here, as usual,  $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$ ).

*Comment.* In real-valued terms, harmonic wavelets are linear combinations of the functions  $t^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot t)$  and  $t^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Both these functions tend to 0 as  $t$  goes to  $+\infty$  or to  $-\infty$ . Thus, these functions are indeed localized.

From the mathematical viewpoint, we have a minor problem with the values corresponding to  $t = 0$ : since we cannot divide by 0, strictly speaking, the above functions are not defined when  $t = 0$ .

For the function  $t^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , this is not a serious problem, since this expression has a finite limit (equal to  $\omega$ ) when  $t \rightarrow 0$ . By using this limit as the value of the function when  $t = 0$ , we get a continuous bounded function — well-suited for describing continuous processes whose intensity is usually bounded by some constant (we are not talking about explosion-type processes when the values of some quantities can suddenly experience a drastic increase).

For the function  $t^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , however, the limit at  $t \rightarrow 0$  is infinity. To make it bounded, we therefore cannot consider any such function by itself, we need to consider linear combinations of such functions, combinations arranged in such a way that infinities cancel each other and the limit becomes finite.

**Similar functions are empirically most efficient in seismic analysis.** Interestingly, similar functions, namely, functions of the type

$$w(t) = t^a \cdot \exp(b \cdot t),$$

turn out to be the most empirically successful in seismic analysis; see, e.g., [2, 5, 6, 11]. Specifically, to gauge the effect of a possible earthquake on an engineering structure, it is necessary to be able to adequately simulate the corresponding ground motion. This simulated ground motion  $g(t)$  is usually obtained by the following multi-stage procedure:

- first, we generate a white noise  $n(t)$ ;

- then, we apply an appropriate shaping window  $w(t)$  to the white noise, resulting in the function  $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int w(s) \cdot n(t-s) ds$ ;
- after that, we apply the Fourier transform to the function  $x(t)$ , resulting in  $\hat{x}(\omega)$ ;
- we multiply the resulting Fourier transform  $\hat{x}(\omega)$  by an appropriate function  $s(\omega)$ , to make sure that the spectrum of the resulting signal  $\hat{m}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} s(\omega) \cdot \hat{x}(\omega)$  is close to the empirically observed spectrum of the earthquake-related ground motion, and
- finally, we apply the inverse Fourier transform to  $\hat{m}(\omega)$ ; the result  $m(t)$  of this application is the desired simulation.

It turns out (see, e.g., [2, 5, 6, 11]) that the most accurate simulation results are obtained if we use the window of the type  $t^a \cdot \exp(b \cdot t)$ , a general type for which the generalized harmonic wavelets are a particular case corresponding to  $a = -1$  and imaginary values  $b$ .

**Problem: this empirical fact needs a theoretical explanation.** While there is an empirical evidence of the efficiency of the generalized harmonic wavelets in engineering and seismic applications, to the best of our knowledge, there is no convincing theoretical explanation for this empirical efficiency. Without such a theoretical explanation, it is not clear whether this efficiency is indeed a general phenomenon — or it is simply an artifact of the current applications, and in other applications, other wavelets will turn out to be more efficient.

It is also not clear whether these are indeed the most efficient wavelets. In each empirical study, we can only compare finitely many types of wavelets. As a result, after such comparison, it is not clear whether the selected wavelets are indeed the best of all possible ones — or they are simply the best of all that we tried, and some other not-yet-tried wavelets will be even more efficient.

**What we do in this paper.** To resolve all these doubts, it is desirable to undertake a theoretical analysis of the corresponding problem. This is what we do in this paper:

- we formulate the problem of selecting the most efficient family of wavelets as a precise mathematical problem, and
- we show that the generalized harmonic wavelets are indeed the most efficient — in this precise sense.

Thus, we indeed provide a theoretical explanation for the efficiency of harmonic wavelets in engineering and seismic applications.

## 2. Analysis of the Problem and the Resulting Justification

**What we need.** We are interested in representing how the signal  $x$  depends on time  $t$ . There may be many different types of signals. In general, we need infinitely many parameters to describe a general signal. However, in a computer, we can only represent finitely many numbers. Thus, a reasonable idea is to consider a finite-parameter family of functions, i.e., to consider functions of the type  $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e_i(t)$  for some functions  $e_1(t), \dots, e_n(t)$ . The question is then: which

functions  $e_i(t)$  should we choose?

**Scale- and shift-invariance: idea.** The numerical value of time depends on the selection of a measuring unit and on the selection of the starting point.

If we replace the original unit for measuring time with a new measuring unit which is  $a$  times smaller, then all the numerical values of time will be multiplied by  $a$ :  $t \rightarrow a \cdot t$ . For example, if we replace days with hours, then 2 days becomes  $24 \cdot 2 = 48$  hours.

If we replace the original starting point for measuring time with a new starting point which is  $b$  units earlier, then the value  $b$  is added to all the numerical values of time:  $t \rightarrow t + b$ .

The selection of the measuring unit and the selection of the starting point change the numerical values, but they do not change the physics of the process. It is therefore reasonable to require that the basic functions  $e_i(t)$  do not depend on these selections, i.e., that if we change the measuring unit or the starting point, we will still get the same basic function.

Of course, to make sure that all the physical formulas remain valid, we probably need to also accordingly change the related units. For example, distance  $d$  is velocity  $v$  times time  $t$ . This formula remains valid no matter what units we choose for measuring distance and time, but for it to remain valid, we need to appropriately change the unit for measuring velocity.

In our case, for the formula  $x(t) \approx e_i(t)$  to remain valid, we may need to change the unit for measuring the signal  $x$ . Under this change, the original numerical value of  $x$  changes to  $C \cdot x$ , for some appropriate value  $C$ . In other words, we arrive at the following two requirements:

- for every  $a > 0$ , there exists a value  $C(a)$  (depending on  $a$ ) for which

$$e_i(a \cdot t) = C(a) \cdot e_i(t);$$

and

- for every  $b$ , there exists a value  $C(b)$  (depending on  $b$ ) for which

$$e_i(t + b) = C(b) \cdot e_i(t).$$

The first property is usually called *scale-invariance*, the second *shift-invariance*.

**Problem: a function can be scale-invariant or shift-invariant, but not both.**

Both for scale-invariance and for shift-invariance, the solutions to the above requirements are well-known. Namely, for the case when the signal is measurable (and all physical signals are) [1]:

- scale-invariant signals have the form  $x(t) = A \cdot t^\alpha$ , for some  $A$  and  $\alpha$ , and
- shift-invariant signals have the form  $x(t) = B \cdot \exp(\beta \cdot t)$ , for some  $B$  and  $\beta$ .

*Comment.* In the general case, the proofs of these results are somewhat complicated, but for the case of smooth (differentiable) functions, the proofs are reasonably straightforward. For reader's convenience, we reproduce these proofs in the special proofs section at the end of this paper.

As we can easily see, the only functions that belong to both classes are constant functions. A non-constant function cannot be both scale- and shift-invariant. So what shall we do?

**Idea: combining scale- and shift-invariant functions.** We can have scale-invariant functions — but this will ignore the requirement of shift-invariance. We can have shift-invariant functions — but this will ignore the requirement of scale-invariance. A more reasonable idea is to consider combinations of scale- and shift-invariant functions, i.e., functions of the type  $x(t) = F(c(t), h(t))$ , where the function  $c(t)$  is scale-invariant, the function  $h(t)$  is shift-invariant, and  $F(c, h)$  is an appropriate combination function.

**Which combination function should we choose.** As we have mentioned earlier, the numerical value of the signal changes if we change the measuring unit — in which case all the numerical values are multiplied by the same constant. From this viewpoint:

- for every  $\lambda > 0$ , the function  $c(t)$  describes the same signal as the function  $\lambda \cdot c(t)$ , and
- for every  $\mu > 0$ , the function  $h(t)$  describes the same signal as the function  $\mu \cdot h(t)$ .

It is reasonable to require that when we make these changes, the combined function remains the same — maybe modulo an appropriate re-scaling of the resulting signal. In other words, we require that for all possible values  $c(t)$ ,  $h(t)$ ,  $\lambda > 0$ , and  $\mu > 0$ , we have

$$F(\lambda \cdot c(t), \mu \cdot h(t)) = C(\lambda, \mu) \cdot F(c(t), h(t))$$

for some value  $C(\lambda, \mu)$  depending on  $\lambda$  and  $\mu$ .

This functional equation also has a known solution [1]: namely, all its solutions have the form  $F(c, h) = D \cdot c^p \cdot h^q$  for some  $D$ ,  $p$ , and  $q$ . (For the smooth case, the proof is given in the last section.) Thus, the desired combined functions  $e_i(t)$  should have the form

$$e_i(t) = F(c(t), h(t)) = D \cdot (c(t))^p \cdot (h(t))^q,$$

where  $c(t)$  is a scale-invariant function and  $h(t)$  is a shift-invariant function.

Into this formula, we can substitute the known expression  $c(t) = A \cdot t^\alpha$  for scale-invariant functions and the known expression  $h(t) = B \cdot \exp(\beta \cdot t)$  for shift-invariant functions. As a result, we arrive at the following formula.

**Resulting formula.** We conclude that

$$e_i(t) = A_0 \cdot t^{a_0} \cdot \exp(b_0 \cdot t),$$

where  $A_0 \stackrel{\text{def}}{=} D \cdot A^p \cdot B^q$ ,  $a_0 \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot \alpha$ , and  $b_0 \stackrel{\text{def}}{=} q \cdot \beta$ .

Thus, we have indeed explained the empirically successful formulas.

### 3. Proofs

In this section, as promised, we show — in the case of smooth (differentiable) signals — that scale- and shift-invariance indeed leads to the desired formulas.

**Case of scale-invariance.** Let us assume that the differentiable function  $x(t)$  satisfies the scale-invariance requirements, i.e.,

$$x(a \cdot t) = C(a) \cdot x(t).$$

The function  $C(a)$  is a ratio of two differentiable functions  $x(a \cdot t)$  and  $x(t)$  and is, thus, differentiable itself.

Since all three terms in the above equality are differentiable, we can differentiate both sides with respect to  $a$ . As a result, we get

$$t \cdot x'(a \cdot t) = C'(a) \cdot x(t),$$

where  $x'(t)$ , as usual, denotes the derivative. In particular, for  $a = 1$ , we get  $t \cdot x'(t) = \alpha \cdot x(t)$ , where we denoted  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} C'(1)$ . This means that

$$t \cdot \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x.$$

We can separate the variables  $x$  and  $t$  if we multiply both sides by  $dt$  and divide both sides by  $t \cdot x$ . Then, we get

$$\frac{dx}{x} = \alpha \cdot \frac{dt}{t}.$$

Integrating both sides, we get  $\ln(x) = \alpha \cdot \ln(t) + C_0$ , where  $C_0$  is an integration constant. Thus, by taking exp of both sides, we conclude that  $x(t) = A \cdot t^\alpha$ , where we denoted  $A \stackrel{\text{def}}{=} \exp(C_0)$ . The statement is proven.

**Case of shift-invariance.** Let us assume that the differentiable function  $x(t)$  satisfies the shift-invariance requirements, i.e.,

$$x(t + b) = C(b) \cdot x(t).$$

The function  $C(b)$  is a ratio of two differentiable functions  $x(t + b)$  and  $x(t)$  and is, thus, differentiable itself.

Since all three terms in the above equality are differentiable, we can differentiate both sides with respect to  $b$ . As a result, we get  $x'(t+b) = C'(b) \cdot x(t)$ . In particular, for  $b = 0$ , we get  $x'(t) = \beta \cdot x(t)$ , where we denoted  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} C'(0)$ . This means that

$$\frac{dx}{dt} = \beta \cdot x.$$

We can separate the variables  $x$  and  $t$  if we multiply both sides by  $dt$  and divide both sides by  $x$ . Then, we get

$$\frac{dx}{x} = \beta \cdot dt.$$

Integrating both sides, we get  $\ln(x) = \beta \cdot t + C_0$ , where  $C_0$  is an integration constant. Thus, by taking exp of both sides, we conclude that  $x(t) = B \cdot \exp(\beta \cdot t)$ , where we denoted  $B \stackrel{\text{def}}{=} \exp(C_0)$ . The statement is proven.

**Scale-invariant combination functions.** We want to find functions for which  $F(\lambda \cdot c, \mu \cdot h) = C(\lambda, \mu) \cdot F(c, h)$ . In particular, for  $\mu = 1$ , we have  $F(\lambda \cdot c, h) = C_1(\lambda) \cdot F(c, h)$ , where we denoted  $C_1(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} C(\lambda, 1)$ . Specifically, if we fix  $h$ , then we get

$$F_h(\lambda \cdot c) = C_1(\lambda) \cdot F_h(c),$$

where we denoted  $F_h(c) \stackrel{\text{def}}{=} F(c, h)$ .

The above equality for  $F_h(c)$  is exactly the scale-invariance requirement that we considered earlier, so we know that  $F_h(c) = A \cdot c^p$  for some  $A$  and  $p$ . Thus, we conclude that

$$C_1(\lambda) = \frac{F_h(\lambda \cdot c)}{F_h(c)} = \frac{A \cdot (\lambda \cdot c)^p}{A \cdot c^p} = \lambda^p.$$

Therefore, the formula  $F(\lambda \cdot c, h) = C_1(\lambda) \cdot F(c, h)$  takes the form  $F(\lambda \cdot c, h) = \lambda^p \cdot F(c, h)$ . In particular, for  $c = 1$ , we conclude that  $F(\lambda, h) = \lambda^p \cdot F(1, h)$ , i.e., that  $F(c, h) = c^p \cdot F(1, h)$ .

Similarly, we can conclude that  $F(c, \mu \cdot h) = \mu^q \cdot F(c, h)$ , for some  $q$ . In particular, for  $c = h = 1$ , we conclude that  $F(1, \mu) = \mu^q \cdot D$ , where we denoted  $D \stackrel{\text{def}}{=} F(1, 1)$ . So,  $F(1, h) = D \cdot h^q$ . From  $F(c, h) = c^p \cdot F(1, h)$ , we can now conclude that indeed  $F(c, h) = D \cdot c^p \cdot h^q$ . The statement is proven.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. Aczél J. and Dhombres J. *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge University Press, 2008.
2. Atkinson G.M. and Somerville P.G. Calibration of time history simulation models. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1994, vol. 84, no. 2, pp. 400–414.
3. Beer M., Kouguoumtzoglou I.A., and Patelli E. Emerging concepts and approaches for efficient and realistic uncertainty quantification. In D. Frangopol and Y. Tsompanakis (eds.), *Maintenance and Safety of Aging Infrastructure* CRC Press/Balkema, Boca Raton, Florida, 2014, pp. 121–161.
4. Beer M., Kouguoumtzoglou I.A., and Patelli E. Emerging concepts and approaches for efficient and realistic uncertainty quantification. In: S. Freitag, R. L. Muhanna, and R. L. Mullen (eds.), *Proceedings of the 7th International Workshop on Reliable Engineering Computing*, Bochum, Germany, June 15–17, 2016, pp. 1–39.
5. Boore D.M. Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1983, vol. 73, no. 6, pp. 1865–1894.
6. Boore D.M. Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and Applied Geophysics*, 2003, vol. 160, pp. 635–676.
7. Kouguoumtzoglou I.A. and Spanos P. An analytical Wiener path integral technique for non-stationary response determination of nonlinear oscillators. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, vol. 28, pp. 125–131.

8. Newland D.E. Harmonic wavelet analysis. Proceedings of the Royal Society of London, Part A, 1993, vol. 443, no. 1917, pp. 203–225.
9. Newland D.E. An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. Longmans Scientific and Technical, Harlow, UK, 1993.
10. Newland D.E. Harmonic and musical wavelets. Proceedings of the Royal Society of London, Part A, 1994, vol. 444, pp. 605–620.
11. Saragoni G.R. and Hart G.C. Simulation of artificial earthquakes. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1974, vol. 2, pp. 249–267.
12. Spanos P. and Kouguoumtzoglou I.A. Harmonic wavelet based statistical linearization for response evolutionary power spectrum determination. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, vol. 27, no. 1, pp. 57–68.
13. Spanos P., Tezcan J., and Tratskas P. Stochastic processes evolutionary spectrum estimation via harmonic wavelets. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, vol. 194, no. 12–16, pp. 1367–1383.
14. Yan R. and Gao R.X., Generalized harmonic wavelet as an adaptive filter for machine health diagnosis. In: M. Tomizuka (ed.), Smart Structures and Materials 2005: Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems, Proceedings of SPIE, Vol. 5765, pp. 786–793.

### **ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБОБЩЁННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЕЙВЛЕТОВ В ИНЖЕНЕРНО-СЕЙСМИЧЕСКОМ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ**

**М. Беер**<sup>1</sup>

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: beer@irz.uni-hannover.de

**А. Голами**<sup>2</sup>

к.геол.н., постдок, e-mail: afshingholamy@gmail.com

**В. Крейнович**<sup>2</sup>

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

<sup>1</sup>Университет Лейбница в Ганновере, Ганновер, Германия

<sup>2</sup>Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, Техас 79968, США

**Аннотация.** Известно, что вейвлеты различных форм очень эффективны во многих задачах обработки данных. Во многих инженерных приложениях наиболее эффективными формами являются формы обобщённого гармонического вейвлета, то есть вейвлета формы  $w(t) = t^a \exp(b \cdot t)$  для комплексного  $b$ . Опытным путем установлено, что подобные функции наиболее успешно используются в сейсмическом анализе, а именно в моделировании высокочастотного движения грунта, связанного с землетрясением. В этой статье мы даём теоретическое объяснение эмпирического успеха этих моделей.

**Ключевые слова:** Обобщённые гармонические вейвлеты, сейсмический спектральный анализ, симметрии.

*Дата поступления в редакцию: 24.06.2019*

## **WHY PATIENTS DO NOT ALWAYS FOLLOW DOCTOR'S ADVICE: SYSTEMS APPROACH EXPLAINS EMPIRICAL OBSERVATION**

**Griselda Acosta**

Doctoral Student, e-mail: gvacosta@miners.utep.edu

**Eric D. Smith**

Ph.D. (Systems & Industrial Engineering), Associate Professor, e-mail: esmith2@utep.edu

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** Empirical studies show that when a medical doctor prescribes a medicine, only two third of the patients fill the prescription, and of this filling-prescription group, only half follow the doctor's instructions when taking the medicine. In this paper, we show that a general systems approach — namely, abstracting from the specifics of this situation — helps explain these empirical observations. We also mention that systems approach can not only explains this problem, it can also help solve it — i.e., it can help increase the patients' adherence to the doctors' recommendations.

**Keywords:** doctor's recommendations, systems approach, Laplace Indeterminacy Principle.

### **1. Formulation of the Problem**

**Empirical observation.** A recent study [5,6] shows that among all the patients who get a prescription from a medical doctor:

- approximately one third of the patients do not fill their prescription at all,
- one third of the patients fill the prescription, but do not exactly follow the doctor's instructions about dosage and times, and
- only the remaining one third of the patients does exactly what the doctor suggested.

Researchers tried to explain this somewhat unexpected observation; see, e.g., [2, 4, 6]. However, all these explanations have been mostly qualitative. So far, to the best of our knowledge, there has been no convincing quantitative explanation.

**What we do in this paper.** In this paper, we show that the above empirical observation can be quantitatively explained if we abstract away from medical and social details and reformulate this problem on the general systems level.

## 2. Our Explanation

**Possible reactions to a doctor's recommendation.** When a patient gets some recommendation from the doctor, the patient does not necessarily believe that these recommendations are correct — otherwise, he/she would obediently follow this recommendation. In general, there are three possible options:

- the first option is that the patient is confident that the doctor's recommendation is correct,
- the second option is that the patient is confident that the doctor's recommendation is not correct, and
- the third option is that the patient is not sure whether the doctor's recommendation is correct or not.

**How these reactions affect the patient's behavior.** If a patient is confident that the doctor's recommendation is correct, then this patient will obediently follow this recommendation. In particular, this patient will fill the doctor's prescription and take the corresponding medicine at the prescribed times and at the prescribed dosage.

If the patient is confident that the doctor's recommendation is not correct, this patient will not even bother to fill the doctor's prescription.

In the third case, when the patient is not sure whether the doctor's recommendation is correct, a reasonable idea — unless the patient goes to a second doctor for a second opinion — is to follow some part of the doctor's recommendation. In this case, the patient fills the prescription but follows only part of the doctor's instructions about taking this medicine, e.g.:

- takes only half-dose each time or
- takes it only once a day when the doctor recommended to take it twice a day, etc.

**The resulting frequencies with which patients exhibit different reactions to the doctor's recommendation.** The above analysis shows that, depending on the patient's reaction, we will observe exactly the three types of behavior that the above empirical study observed. Thus, the frequencies with which we observe three different behaviors are exactly the frequencies with which the patients show one of the above three reactions to a doctor's recommendation:

- approximately one third of the patients are confident that the doctor's recommendation is correct;
- about one third of the patients are confident that the doctor's recommendation is not correct, and
- the remaining one third of the patients are not sure whether the doctor's recommendation is correct or not.

Hence, to explain the above empirical observation, we need to explain the frequencies of different patient's reactions to the doctor's recommendation.

**Frequencies explained.** The vast majority of patients are not trained in medicine. Thus, they have no reasonable way to decide whether they should trust the doctor's recommendation or not. As a result, they face the problem of selecting one of

the three alternatives — i.e., one of the three possible reactions to a doctor's recommendation — without having any information that would help them select one of these three alternatives.

Such a situation of selection under complete uncertainty is well known. A usual way to solve it — known as *Laplace Indeterminacy Principle* — is to conclude that since we have no reason to assign different probabilities to different alternatives, a reasonable idea is to assign the exact same probability to all these alternatives; see, e.g., [3] and references therein.

In our case, there are three alternatives, so we assign the exact same probability  $p$  to each of these three alternatives. Since the probabilities of selecting one of the alternatives must add up to 1, we thus conclude that  $p+p+p = 1$ , i.e., that  $p = 1/3$ . So, we predict that the patient will select each of three alternative reactions — and thus, the corresponding behavior — in exactly  $1/3$  of the cases. This is exactly what the empirical study observed.

Thus, we have indeed explained the observed frequencies of different medicine adherence behavior.

**Need to go beyond explanations.** Explanations are nice, but it is desirable not just to explain the fact that patients do not follow the doctors' recommendation, but to come up with ways to increase their adherence to these recommendations. In this, systems approach can also help; see, e.g., [1]. Specifically, systems approach helps in developing tools that help the patients understand the reasoning behind the doctors' recommendations and thus, increase the percentage of patients who follow these recommendations.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. Dantu B. and Smith E. Diagnostic modeling for medical decision making. In: T. Doolen and E. Van Aken (eds.), Proceedings of the 2011 Industrial Engineering Research Conference, Reno, Nevada, May 21–25, 2011.
2. Gropman J. How Doctors Think. Houghton Mifflin Co., New York, 2007.
3. Jaynes E.T. and Bretthorst G.L., Probability Theory: The Logic of Science. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
4. Morabia A. Last stand or burgeoning rebellion against evidence-based medicine? A book review of [2], Preventive Medicine, 2007, vol. 45, pp. 491–494.
5. Peterson J.B. 12 Rules for Life: An Antidote to Chaos. Random House Canada, Toronto, Canada, 2018.

6. Tamblyn R., Tewodros E., Huang A., Winslade N., and Doran P. The incidence and determinants of primary nonadherence with prescribed medication in primary care: a cohort study. *Annals of Internal Medicine*, 2014, vol. 160, pp. 441–450.

**ПОЧЕМУ ПАЦИЕНТЫ НЕ ВСЕГДА СЛЕДУЮТ СОВЕТАМ ВРАЧА:  
СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД ОБЪЯСНЯЕТ ЭМПИРИЧЕСКОЕ НАБЛЮДЕНИЕ**

**Г. Акоста**

докторант, e-mail: [acosta@miners.utep.edu](mailto:acosta@miners.utep.edu)

**Э.Д. Смит**

к.т.н., доцент, e-mail: [Eventsmith2@utep.edu](mailto:Eventsmith2@utep.edu)

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: [eculement.lav@utep.edu](mailto:eculement.lav@utep.edu)

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, Техас, 79968, США

**Аннотация.** Эмпирические исследования показывают, что когда врач выписывает лекарство, только две трети пациентов его приобретают, и только половина из тех, кто его приобретает, следует указаниям врача при приёме лекарства. В этой статье мы показываем, что общий системный подход, а именно абстрагирование от специфики этой ситуации, помогает объяснить эти эмпирические наблюдения. Мы также отмечаем, что системный подход может не только объяснить эту проблему, но и помочь решить её, т.е. помочь улучшить показатель соблюдения пациентами рекомендаций врачей.

**Ключевые слова:** рекомендации врача, системный подход, принцип неопределённости Лапласа.

*Дата поступления в редакцию: 26.04.2019*

## WHY EXPERTS SOMETIMES DO NOT PERFORM WELL IN UNUSUAL SITUATIONS

**Julio C. Urenda**

Ph.D. (Phys.-Math.), Instructor, e-mail: jcurenda@utep.edu

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** We expect that the quality of experts' decisions increases with their experience. This is indeed true for reasonably routine situations. However, surprisingly, empirical data shows that in unusual situations, novice experts make much better decisions than more experienced ones. This phenomenon is especially unexpected for medical emergency situations: it turns out that the mortality rate of patients treated by novice doctors is a third lower than for patients treated by experience doctors. In this paper, we provide a possible explanation for this seemingly counterintuitive phenomenon.

**Keywords:** experts, statistics, unusual vs. routine situations.

### 1. Formulation of the Problem

At first glance, it would seem that the more experienced the experts, the better their solutions. This is indeed the case for reasonably routine situations. However, somewhat surprisingly, empirical data shows that in unusual situations, novice experts perform, on average, better than more experienced ones. This is especially surprising in cases of medical emergency: in cases when high-risk patients were treated by relative novices, the mortality rate was a third lower than when patients were treated by experienced professional; see, e.g., [1,2].

In this paper, we provide a possible explanation for this counterintuitive phenomenon.

### 2. Our Explanation

**Formulation of the problem in precise terms.** We have an observed value  $\tilde{x}$  of the desired quantity  $x$ . Based on this observation and on the expert's knowledge, we need to estimate the actual value  $x$ .

The observed value is imprecise, due to measurement and observation errors: the difference  $\tilde{x} - x$  is, in general, different from 0. Based on the prior experience, we can estimate the mean and the standard deviation of this difference. If the corresponding mean is different from 0, this simply means that our measuring instrument has a bias. In this case, we can re-calibrate this instrument,

by subtracting this bias from all the measurement results. Thus, without losing generality, we can safely assume that the bias has been eliminated, so the mean is 0. Let us denote the corresponding standard deviation by  $\sigma$ .

The expert's experience-based knowledge consists of several cases for which this expert knows a reasonably accurate value of the corresponding quantity. For example, in the medical situation, an experienced expert is familiar with many cases in which, later on, the value of the corresponding quantity was measured more accurately. Let us denote the corresponding values by  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ . These values are very accurate, in the sense that they are very close to the corresponding actual values  $x_i$ . However, all situations are different. As a result, the actual values  $x_i$  are, in general, different from  $x$ , and thus, the measurement results  $\tilde{x}_i$  provide only an approximate estimation for the desired quantity  $x$ . Again, from the previous experience, we can estimate the standard deviation  $\sigma_0$  of the corresponding difference  $x_i - x$ .

Thus, we arrive at the following problem:

- we know the value  $\tilde{x}$  which is approximately equal to  $x$  with standard deviation  $\sigma$ :

$$\tilde{x} \approx x \text{ (st.dev. } \sigma\text{);}$$

and

- we know  $n$  values  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  which are close to  $x$  with standard deviation  $\sigma_0$ :

$$\tilde{x}_i \approx x \text{ (st.dev. } \sigma_0\text{).}$$

Based on these values, we must provide an estimate for the desired quantity  $x$ .

**Let us solve this problem.** A natural way to solve the above problem is to use the Least Squares technique (see, e.g., [6]), i.e., to minimize the expression

$$\frac{(\tilde{x} - x)^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(\tilde{x}_i - x)^2}{\sigma_0^2}.$$

Differentiating this expression by  $x$  and equating the derivative to 0, we conclude that for the resulting estimate  $\hat{x}$ , we have

$$\frac{2 \cdot (\hat{x} - \tilde{x})^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot (\hat{x} - \tilde{x}_i)^2}{\sigma_0^2} = 0.$$

Multiplying both sides of this equation by  $\sigma^2/2$  and moving all the terms not containing  $\hat{x}$  to the right-hand side, we conclude that

$$\hat{x} \cdot (1 + k \cdot n) = \tilde{x} + k \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i,$$

where we denoted  $k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$ . Thus,

$$\hat{x} = \frac{\tilde{x} + k \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i}{1 + k \cdot n}. \tag{1}$$

From the expression (1), we see that for this estimate, we do not need to know the individual values  $\tilde{x}_i$ , it is sufficient to know their sum — i.e., equivalently, to know their arithmetic average

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i.$$

In terms of this average, the sum  $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i$  takes the form  $n \cdot \bar{x}$  and thus, the formula (1) takes the form

$$\hat{x} = \frac{\tilde{x} + k \cdot n \cdot \bar{x}}{1 + k \cdot n}. \tag{2}$$

**How accurate is the resulting estimate?** To analyze how accurate is this estimate, we need to consider the absolute value  $\Delta$  of the difference between this estimate and the actual value  $x$ . Here,

$$\Delta = \left| \frac{\tilde{x} + k \cdot n \cdot \bar{x}}{1 + k \cdot n} - x \right|.$$

Explicitly subtracting the fractions in the right-hand side of this formula, we get the formula

$$\Delta = \left| \frac{\tilde{x} + k \cdot n \cdot \bar{x} - x + k \cdot n \cdot x}{1 + k \cdot n} \right|,$$

i.e., regrouping the terms in the numerator, the formula

$$\Delta = \left| \frac{\tilde{x} - x}{1 + k \cdot n} + \frac{k \cdot n \cdot (\bar{x} - x)}{1 + k \cdot n} \right|. \tag{3}$$

Let us show that this formula enables us to explain the empirical phenomenon: namely, that while experienced experts make better decisions in routine situations, their decisions in unusual situations are worse than the decisions of novice experts.

**What happens in reasonably routine situations.** In reasonably routine situations, when  $x$  is close to the average  $\bar{x}$  and thus, when the difference  $\bar{x} - x$  is very small, the first term in the right-hand side of the formula (3) dominates, so we have

$$\Delta \approx \frac{|\tilde{x} - x|}{1 + k \cdot n}.$$

In this case, the more experienced the expert, i.e., the larger the corresponding value  $n$ , the smaller the value  $\Delta$  and thus, the more accurate the expert's estimate. So, in such cases, indeed, the more experienced the expert, the more accurate his/her estimates.

**What happens in unusual situations.** Let us now consider unusual situations, when the difference  $\bar{x} - x$  is large, so that the absolute value  $|\bar{x} - x|$  of this difference is larger than the typical observation uncertainty  $|\tilde{x} - x| \approx \sigma$ :

$$|\bar{x} - x| > |\tilde{x} - x|. \quad (4)$$

In this case, for experienced experts, for which  $n$  is large, the second term in the formula (3) dominates, so we get

$$\Delta_{\text{exp}} \approx |\bar{x} - x|. \quad (5)$$

In contrast, for novice experts, e.g., for experts with  $n = 0$  (e.g., medical doctors who have just received their degrees and do not have the experience of independently treating patients), we have

$$\Delta_{\text{nov}} = |\tilde{x} - x|. \quad (6)$$

Comparing the expressions (5) and (6) and taking into account the inequality (4), we conclude that here, indeed,  $\Delta_{\text{nov}} < \Delta_{\text{exp}}$ , i.e., that in such unusual situations, novice experts indeed make more accurate estimates (and thus, better decisions) than experienced ones.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. A. B. Jena, V. Prasad, D. P. Goldman, and J. Romley, "Mortality and treatment patterns among patients hospitalized with acute cardiovascular conditions during dates of national cardiology meetings", *Journal of the American Medical Association JAMA: Internal Medicine*, 2015, Vol. 175, No. 2, pp. 237-244.
2. L. Mlodinow, *Elastic: Flexible Thinking in a Time of Change*, Pantheon Books, New York, 2018.
3. D. J. Sheskin, *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2011.

**ПОЧЕМУ ЭКСПЕРТЫ ИНОГДА НЕ ОСОБО ХОРОШО РАБОТАЮТ  
В НЕОБЫЧНЫХ СИТУАЦИЯХ**

**Х.С. Уренда**

к.ф.-м.н., преподаватель, e-mail: @utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, Техас 79968, США

**Аннотация.** Мы ожидаем, что качество решений экспертов возрастает с их опытом. Это действительно так для достаточно обыденных ситуаций. Однако, как это ни удивительно, эмпирические данные показывают, что в необычных ситуациях начинающие эксперты принимают гораздо лучшие решения, чем опытные. Это явление особенно неожиданно для ситуаций, связанных с медицинской помощью: выясняется, что уровень смертности пациентов, которых лечат начинающие врачи, на треть ниже, чем среди пациентов, которых лечат опытные врачи. В этой статье мы даём возможное объяснение этому, казалось бы, нелогичному явлению.

**Ключевые слова:** эксперты, статистика, необычные и обычные ситуации.

*Дата поступления в редакцию: 28.07.2019*

## HOW WE CAN EXPLAIN SIMPLE EMPIRICAL MEMORY RULES

**Francisco Zapata**

Ph.D. (Phys.-Math.), Instructor, e-mail: fazg74@gmail.com

**Olga Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** Researchers have found out that normally, we remember about 30% of the information; however, if immediately after reading, we get a test, the rate increases to 45%. In this paper, we show that Zipf law can explain this empirical dependence.

**Keywords:** human memory; Zipf's law; empirical memory rules.

### 1. Formulation of the Problem

**Empirical facts about memory.** Researchers have consistently observed that:

- Very fast, we forget about 70% of what we have heard or read and remember only 30%; see, e.g., [1, 3]. This is the percentage of correct answers that we get if we test the students a few days after they read the material.
- Interestingly, if, immediately after reading, the students take a test on what they just read, they retain 50% more information, i.e., they remember 45% of the original material; see, e.g., [1, 5].

**How can we explain these empirical facts?** To best of our knowledge, there are no quantitative explanations for the above empirical facts.

**What we do in this paper.** In this paper, we provide such an explanation.

### 2. Our Explanation

**Main idea: Zipf's law.** The main idea behind our explanation is to use Zipf's law; see, e.g., [2, 4]. This law was first observed in linguistics: if we sort all the words from a language in the decreasing order of their frequency, then the frequency with which the  $k$ -th word appears in the texts is approximately equal to  $c/k$ , for some constant  $c$ .

The same dependence was observed in many other situations, e.g., when we sort people by wealth or sort facts by importance.

**Let us apply Zipf's law to our situation.** Suppose that we have read or heard  $N$  different pieces of information. According to Zipf's law, the relative importance of the  $k$ -th piece of information is approximately equal to

$$\frac{c}{k}.$$

In particular, the least important piece of information has importance  $c/N$ . This is already close to the noise level, so it is reasonable to assume that the standard deviation  $\sigma$  of the corresponding noise is

$$\sigma \approx \frac{c}{N}.$$

Which pieces of information does it make sense to remember? Only those about which we are absolutely sure that this is not noise, that this information is indeed true. Usually, in applications of statistics, we use the "three sigma" rule: we believe in a certain fact if its deviation from the mean exceeds three times the standard deviation; see, e.g., [6]. This rule corresponds to 99.9% confidence: if we follow this rule, we will get erroneous signal only in 0.1% of the cases.

**This explains 30%.** So, we remember only the pieces for which the importance is larger than or equal to

$$3\sigma \approx \frac{3c}{N},$$

i.e., for which

$$\frac{c}{k} \geq \frac{3c}{N}.$$

This inequality is equivalent to

$$k \leq \frac{N}{3}.$$

Thus, out of the original  $N$  pieces of information, we remember one third. This is very close to the empirical 30%.

The fact that we actually remember slightly less than 1/3 can be explained by the imperfection of memory mechanisms.

**This also explains 45%.** Indeed, testing means, in effect, that the students encounter the same information twice. It is known that when the signal is repeated  $t$  times, averaging decreases the noise by a factor of  $\sqrt{t}$ ; see, e.g., [6]. In particular, for  $t = 2$ , the level of noise decreases from

$$\sigma \approx \frac{c}{N}$$

to

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \approx \frac{c}{\sqrt{2} \cdot N}.$$

Thus, the three sigma threshold determining which pieces of information to remember is now

$$3\sigma' = \frac{3c}{\sqrt{2} \cdot N}.$$

Thus, only pieces for which

$$\frac{c}{k} \geq 3\sigma' = \frac{3c}{\sqrt{2} \cdot N}$$

are recalled. This inequality is equivalent to

$$k \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot N \approx 0.47 \cdot N.$$

This is very close to the empirical 45%. Thus, this number is also explained.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. P. C. Brown, H. L. Roedinger III, and M. A. McDaniel, *Make it Stick*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, UK, 2014.
2. D. Cervantes, O. Kosheleva, and V. Kreinovich, "Why Zipf's law: a symmetry-based explanation", *International Mathematical Forum*, 2018, Vol. 13, No. 6, pp. 255–258.
3. H. Ebbinghaus, *A Contribution to Experimental Psychology*, Dover, New York, 1964.
4. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, California, 1983.
5. H. L. Roediger and J. D. Karpicke, "Test-enhanced learning: taking memory tests improves long-term retention", *Psychological Science*, 2006, Vol. 17, pp. 249–255.
6. D. J. Sheskin, *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, Boca Raton, Florida: Chapman and Hall/CRC, 2011.

## КАК МЫ МОЖЕМ ОБЪЯСНИТЬ ПРОСТЫЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА ЗАПОМИНАНИЯ

**Ф. Запата**

к.ф.-м.н., преподаватель, e-mail: fazg74@gmail.com

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: olgak@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, Техас, 79968, США

**Аннотация.** Исследователи выяснили, что обычно мы запоминаем около 30% информации. Однако, если сразу после прочтения мы получим тест, показатель возрастёт до 45%. В этой статье мы показываем, что закон Ципфа может объяснить эту эмпирическую зависимость.

**Ключевые слова:** человеческая память, закон Ципфа, эмпирические правила памяти.

*Дата поступления в редакцию: 28.07.2019*

## ПРИМЕНЕНИЕ АФФИННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ СРАВНЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**С.В. Лейхтер**<sup>1</sup>

преподаватель, e-mail: leykhter@mail.ru

**С.Н. Чуканов**<sup>2</sup>

профессор, д.т.н., ведущий научный сотрудник, e-mail: ch\_sn@mail.ru

<sup>1</sup>Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

**Аннотация.** Рассмотрена задача сравнения форм исходного и терминального изображений. Для анализа деформаций изображения используются диффеоморфные преобразования. Для повышения точности сравнения исходного и терминального изображений их предлагается нормализовать. Исходное изображение подвергается аффинному преобразованию и функционал качества между преобразованным исходным и терминальным изображениями минимизируется. Решение задачи эволюции формы изображения основано на использовании алгоритма имитации отжига.

**Ключевые слова:** распознавание образов, нормализация изображений, аффинные преобразования, алгоритм имитации отжига.

### Введение

В работе рассмотрена задача сравнения форм исходного и терминального изображений. Для анализа деформаций изображения используются диффеоморфные преобразования. Задача сравнения исходного и терминального изображений решается на основе построения минимизируемого функционала качества, характеризующего эволюцию преобразования изображения. Для решения задачи сравнения в работе используется метод частиц-ориентиров, для которых формируются уравнения Гамильтона.

В настоящей работе решение задачи эволюции формы основано на метаэвристических алгоритмах: генетических, муравьиных колоний, PSO, машин Больцмана и имитации отжига. Под методами эвристики будем понимать методы для более быстрого решения задач оптимизации, когда традиционные методы не позволяют найти точное решение при ограниченном количестве вычислительных операций. Метаэвристика — это эвристика более высокого уровня, предназначенная для формирования эвристики, которая обеспечивает решение задач оптимизации с неполной информацией при ограниченном количестве вычислительных операций. Метаэвристические алгоритмы используются для

улучшения эвристики локального поиска и для глобального поиска оптимального решения. К алгоритмам метаэвристики относятся [1] алгоритм имитации отжига (SA — simulated annealing [2]), эволюционные вычисления [3], PSO [4].

Для повышения точности сравнения исходного и терминального изображений их необходимо нормализовать. В работе предлагается такой метод нормализации, при котором исходное изображение подвергается аффинному преобразованию, и функционал качества между преобразованным исходным и терминальным изображениями минимизируется. После этого нормализованное исходное изображение подвергается диффеоморфному преобразованию с целью минимизации функционала качества. Совместное аффинное преобразование исходного изображения с целью нормализации и диффеоморфное преобразование являются инвариантными к переносу, вращению, масштабированию, растяжению / сжатию.

### 1. Формирование уравнений эволюции точечных ориентиров изображения

Представление диффеоморфного отображения изображений будем рассматривать как эволюцию во времени точечных ориентиров изображения на основе механики Гамильтона. Пусть  $q_i(t); i = 1, \dots, N$  — обозначение вектора положения частицы  $i$  и  $p_i(t); i = 1, \dots, N$  — соответствующего вектора импульса в момент времени  $t$ . Если импульсы и скорости частиц связаны соотношением  $p_i = \mathcal{L} \cdot v_i$ , где  $\mathcal{L}$  — линейный обратимый оператор, то обратное соотношение  $v_i = \mathcal{L}^{-1} \cdot p_i = \mathcal{K}p_i$ . Скалярное произведение векторов  $p_i$  и  $v_i$  можно представить в виде  $\langle p_i, v_i \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L}v_i, v_i \rangle_{L^2}$ . Для оператора  $\mathcal{L} = \text{id} - \alpha \nabla^2$  обратным оператором является оператор  $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$ , который аппроксимируется функцией Гаусса [5]:

$$K^V(q_i - q_j) = k_V \exp\left(-\frac{\|q_i - q_j\|^2}{\lambda_V^2}\right). \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, как можно определить  $\lambda_V^2$ : при расстоянии между положениями ориентиров  $q_i, q_j$ , равном  $\lambda_V = |q_i - q_j|$ , значение функции  $K^V(q_i - q_j)$  уменьшается по отношению  $K^V(0)$  в  $e$  раз:  $\frac{K^V(\alpha)}{K^V(0)} = e^{-1}$ . Поля импульсов и скоростей могут быть сформированы из соотношений [6, 7]

$$\begin{aligned} p_t(q) &= \sum_{i=1}^N \delta(q - q_i(t)) \cdot p_i(t); \\ v_t(q) &= \sum_{i=1}^N K(q - q_i(t)) \cdot p_i(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Сформируем минимизируемый функционал качества, который соответствует деформации изображения в виде

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j=1}^N p_i^T K^V(q_i - q_j) p_j \right\} dt. \quad (3)$$

Так как  $K(\cdot)$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $\mathcal{L}^{-1}$ , то функционалу (3) соответствует функционал

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j} p_i^T \mathcal{L}^{-1} p_j \right\} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j} \langle \mathcal{L} v_j, v_j \rangle \right\} dt.$$

Минимизация  $J_0$  должна осуществляться по значениям векторов  $q_i, q_j$  и  $p_i, p_j$ . Но значения векторов  $q_i, q_j$  определяются начальными значениями  $q_i(0), q_j(0)$  и решениями уравнений (8), поэтому минимизация осуществляется по начальным неизвестным значениям векторов  $p_i(0), p_j(0)$ .

Минимизация  $J_0$  может быть представлена в форме задачи оптимального управления, связанной с гамильтонианом:

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i^T K^V(q_i - q_j) p_j. \quad (4)$$

Эволюция системы во времени определяется уравнениями Гамильтона для векторов  $p_i(t), q_i(t); i = 1, \dots, N$  [8, 9]

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j(t) \nabla_{q_i} K^V(q_i(t) - q_j(t)) p_j(t); \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K^V(q_i(t) - q_j(t)) p_j(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя для  $K^V(q_i - q_j)$  функцию (1), получим

$$\nabla_{q_i} K^V(q_i - q_j) = K^V(q_i - q_j) \cdot (q_i - q_j) \cdot \lambda_V^{-2}. \quad (6)$$

Если функционал качества  $J_0$  принять в форме (3), а гамильтониан системы в форме

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2 = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^N p_i^2, \quad (7)$$

то уравнения Гамильтона для производных компонент  $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  примут вид [10]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j^T \nabla_{q_i} K^V(q_i - q_j) p_j; \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K^V(q_i - q_j) p_j + \sigma^2 p_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Член  $\sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2$  в (7) является штрафом при наличии рассогласования  $(\dot{q}_i - v_i(q))$ , где  $v_i(q)$  определяется в соответствии с (2).

## 2. Обучение начальных значений вектора импульса на основе алгоритма имитации отжига

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора  $x(t)$ :

$$\dot{x}(t) = u(t, x(t)); x(t_0) = x_0, \quad (9)$$

где  $u(t, x)$  — функция, непрерывная по  $t$  и равномерно непрерывная по  $x$ . Для уравнений (9) существует гладкое решение  $x(t) = \psi(t, t_0, x_0)$  на интервале  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \varepsilon > 0$ . Правые части уравнений (8) являются гладкими функциями по аргументам  $(q_k, p_k); k = 1, \dots, N$ , поэтому решения (8), рассматриваемые как функции  $(q_k, p_k)(t) = \psi(t_0, q_k|_{t=t_0}, p_k|_{t=t_0})$ , будут непрерывно дифференцируемыми по аргументам  $(t_0, q_k|_{t=t_0}, p_k|_{t=t_0}); k = 1, \dots, N$ .

Рассмотрим метод нахождения параметров при диффеоморфизме  $q_k(0) \rightarrow q_k(1)$  при заданном функционале

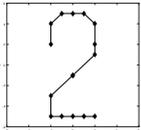
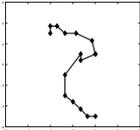
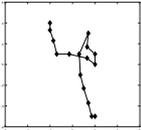
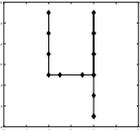
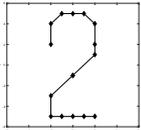
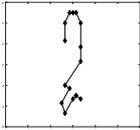
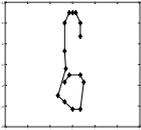
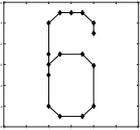
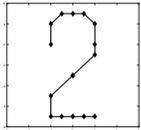
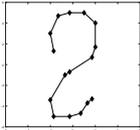
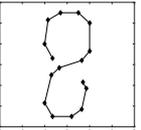
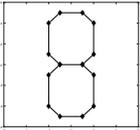
$$J^q = \sum_{i=1}^N [q_i(t) - q_i(1)]^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где  $(q_1(t), \dots, q_N(t))$  — целевое множество точек. Компоненты производной вектора  $\dot{q}$  и функционал  $J^q$  зависят от вектора  $p$  (см. (8)). Так как в системе (8) для вектора  $q$  заданы начальные условия  $q(0)$ , а для вектора  $p$  — терминальные  $p(1) = (0, \dots, 0)$  при  $t = 1$ , то для решения (8) получаем двухточечную краевую задачу.

Вектор начальных значений  $p(0) = (p_1(0), \dots, p_N(0))$  может быть найден методом имитации отжига (simulated annealing, см. Приложение [2]). Для этого сформируем функционал стоимости с учётом функциональной зависимости от  $p(0)$ :  $J^q(p(0))$ . Обозначим значение функционала стоимости при  $i$ -м начальном векторе  $p^i(0)$ :  $E_i = J^q(p^i(0))$ , где  $i$  — номер шага итерации. Выберем другое множество  $p^{i+1}(0) = p^i(0) + C \cdot \epsilon$ , где  $\epsilon \sim N[0, 1]$  — нормальное распределение,  $C$  — масштабирующий коэффициент. Если  $\Delta E = J^q(p^{i+1}(0)) - J^q(p^i(0)) < 0$ , то принимается новый начальный вектор  $p^{i+1}(0)$ , в противном случае оставляют вектор  $p^i(0)$ . Находится вероятность перехода  $p$ :  $p = \exp(-\Delta E \cdot T^{-1})$ , где  $T$  — температура для управления процессом отжига; переход  $p^i(0) \rightarrow p^{i+1}(0)$  будет принят, если  $p > r$ , где  $r \in [0 \dots 1]$  — случайное число из равномерного распределения.

**Пример 1.** Рассмотрим пример деформации с использованием интегрирования уравнений (8) при диффеоморфизме чётных цифр, которые представлены 16-ю точками. Начальные значения компонент вектора  $p(0)$  определялись на основе метода имитации отжига при  $\lambda_V^2 = 10, k_V = 1, \sigma^2 = 100$ . В табл. 1 представлены результаты диффеоморфизма чётных цифры 2 в цифры 4, 6, 8 с указанием значения действия  $J_0$ , которое определялось по формуле (3).  $J_0$  является мерой сходства (measure of similarity) исходного и терминального изображений.

Таблица 1

	$t = 0$	$t = 0,4$	$t = 0,7$	$t = 1$	$J_0$
$2 \rightarrow 4$					1,82
$2 \rightarrow 6$					1,21
$2 \rightarrow 8$					0,17

Исходные и терминальные изображения имеют различные топологические характеристики. Например, число ручек изображения цифр 2 и 4 —  $g = 0$ , цифр 0 и 6 —  $g = 1$ , а цифры 8 —  $g = 2$ , если представить эти цифры в форме поверхностей. Поверхность имеет число ручек (род)  $g$ , если она является диффеоморфной сумме сферы  $s^2$  и  $g$  торов  $T^2$ .  $\square$

### 3. Нормализация изображений на основе аффинных преобразований

Для повышения точности сравнения исходного и терминального изображений их необходимо нормализовать. Ниже предлагается такой метод нормализации, при котором исходное изображение подвергается аффинному преобразованию и функционал качества между преобразованным исходным и терминальным изображениями минимизируется. После этого нормализованное исходное изображение подвергается диффеоморфному преобразованию.

Аффинное преобразование является частным случаем диффеоморфного преобразования. Аффинное преобразование можно представить в виде [12, 13]  $x \rightarrow y = M \cdot x + b$ , где  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — обратимая матрица,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x, y$  — векторы в аффинном пространстве  $X \in \mathbb{R}^n$ . В случае аффинного преобразования точки кривой (поверхности), аппроксимирующей форму деформируемого объекта, можно представить в виде  $y_p \rightarrow M \cdot x_p + b, p = 1, \dots, P$ . В качестве минимизированного функционала выберем квадрат расстояния между точками

исходного и терминального изображений:

$$J(M, b) = \sum_{p=1}^P \|\bar{y}_p - (M \cdot x_p + b)\|^2, p = 1, \dots, P,$$

для заданных значений точек исходного  $x_p, p = 1, \dots, P$  и терминального изображений  $\bar{y}_p, p = 1, \dots, P$ . Пусть  $\xi_i$  — параметры аффинного преобразования  $\xi_i \in \Xi, i = 1, \dots, n$ , где  $\Xi$  — множество компонент матрицы  $M$  и компонент вектора  $b$ .

Требуемые значения параметров  $\xi_i$  могут быть найдены методом SA (simulated annealing, см. Приложение) для функционала  $J(M, b)$ . Обозначим значение функционала стоимости при множестве  $\xi_i^j: E_j = J(\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$ , где  $j$  — номер шага итерации. Выберем другое множество  $\xi_i^{j+1} = \xi_i^j + C \cdot \epsilon; i \in [1, \dots, n]$ , где  $\epsilon \sim N[0, 1]$  — нормальное распределение,  $C$  — масштабирующий коэффициент. Если  $\Delta E = E_{j+1} - E_j = J(\xi_1^{j+1}, \dots, \xi_n^{j+1}) - J(\xi_1^j, \dots, \xi_n^j) < 0$ , то принимается новое множество параметров  $(\xi_1^{j+1}, \dots, \xi_n^{j+1})$ , в противном случае оставляют множество  $(\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$ . Находится вероятность перехода  $p: p = \exp(-\Delta E \cdot T^{-1})$ , где  $T$  — температура для управления процессом отжига; переход  $(\xi_1^j, \dots, \xi_n^j) \rightarrow (\xi_1^{j+1}, \dots, \xi_n^{j+1})$  будет принят, если  $p > r$ , где  $r \in [0 \dots 1]$  — случайное число из равномерного распределения.

Рассмотрим декомпозицию аффинного преобразования на следующие элементарные преобразования изображений [12]: горизонтальный перенос  $x' = x + a, y' = y$ ; вертикальный перенос  $x' = x, y' = y + b$ ; равномерное масштабирование  $x' = \omega \cdot x, y' = \omega \cdot y; \omega > 0$ ; первый поворот  $x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$ ; растяжение / сжатие  $x' = \delta \cdot x, y' = \frac{y}{\delta}; \delta > 0$ ; второе вращение  $x' = x \cdot \cos \rho - y \cdot \sin \rho, y' = x \cdot \sin \rho + y \cdot \cos \rho$ . Традиционные методы распознавания изображений (например нейросетевые, методы глубокого обучения и т. д.) не являются инвариантными по отношению к этим преобразованиям. Поэтому для повышения точности сравнения исходного и терминального изображений их необходимо нормализовать.

В общем случае аффинные преобразования не могут совместить исходное и терминальное изображения. Но в результате предварительной аффинной нормализации функционал (3) между исходным и терминальным изображениями сокращается, что приводит к повышению характеристик распознавания образа [14, 15].

В работах [12, 13] предлагаются методы нормализации изображений на основе построения евклидовых и аффинных моментных инвариантов. При этом необходимо нормализовать как исходное, так и терминальное изображения.

**Пример 2.** На рисунке 1 приводится пример аффинного преобразования только исходного изображения для того, чтобы «приблизить» его к терминальному минимизацией функционала  $J_0$  в соответствии с (3).

На рисунке 2 приведён результат диффеоморфного отображения изображения после второго вращения до терминального изображения.

Значение  $J_0$  при диффеоморфном отображении Secondrotation  $\rightarrow$  Terminal:  $J_0 = 0,00000025$ .

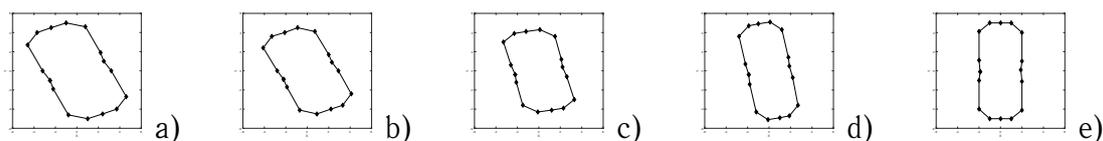


Рис. 1. Результат аффинного преобразования исходного изображения: а) исходное изображение; б) результат масштабирования; в) первое вращение; д) растяжение / сжатие; е) результат второго вращения



Рис. 2. Результат диффеоморфного отображения изображения после второго вращения до терминального изображения: а) результат второго вращения исходного изображения; б) терминальное изображение

На рисунке 3 приведён результат диффеоморфного отображения исходного изображения до терминального изображения.



Рис. 3. Результат диффеоморфного отображения исходного изображения до терминального изображения: а) исходное изображение  $t = 0$ ; б) преобразование при  $t = 0,4$ ; в) преобразование при  $t = 0,7$ ; д) терминальное изображение

Значение  $J_0$  при диффеоморфном отображении исходного изображения до терминального изображения  $J_0 = 0,061$ .  $\square$

## Заключение

В работе рассмотрена задача сравнения форм исходного и терминального изображений. Для анализа деформаций изображения используются диффеоморфные преобразования. Задача сравнения исходного и терминального изображений решается на основе построения минимизируемого функционала качества, характеризующего эволюцию преобразования изображения. Для решения задачи сравнения в работе используется метод частиц-ориентиров, для которых формируются уравнения Гамильтона.

Решение задачи эволюции формы в работе основано на использовании метаэвристических алгоритмов.

Для повышения точности сравнения исходного и терминального изображений в работе предлагается метод нормализации, при котором исходное изображение подвергается аффинному преобразованию и функционал качества между преобразованным исходным и терминальным изображениями минимизируется.

Совместное аффинное преобразование исходного изображения с целью нормализации и диффеоморфное преобразование являются инвариантными к переносу, вращению, масштабированию, растяжению / сжатию.

Предлагаемые в работе методы могут быть использованы в задачах распознавания образов.

### Приложение. Алгоритм имитации отжига

Имитация отжига (SA — simulated annealing) представляет собой метод случайного поиска на основе оценивания траектории частиц для глобальной оптимизации. Он имитирует процесс отжига при обработке материалов, когда металл после проведения отжига охлаждается и замерзает в кристаллическом состоянии с минимальной энергией. Процесс отжига включает в себя контроль температуры и скорости её охлаждения (график отжига). С момента разработки имитационного отжига Kirkpatrick et al. [2] SA применяется практически во всех областях оптимизации. Алгоритм SA имеет сходство с алгоритмом Metropolis et al. [16].

Преимущество SA заключается в его способности избегать попадания в локальные минимумы. Было доказано, что моделируемый отжиг будет сходиться к глобальному значению целевой функции, если будут использоваться случайные переменные в сочетании с медленным охлаждением [17]. Основная идея алгоритма SA заключается в использовании случайного поиска, который не только принимает изменения позиций частиц, улучшающие целевую функцию, но также сохраняет позиции, которые не являются идеальными. Например, в задаче минимизации будут приняты изменения, которые уменьшают значение целевой функции  $\Delta f < 0$ ; изменения, которые увеличивают  $\Delta f \geq 0$ , будут приняты с вероятностью перехода  $p$ :  $p = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана; для простоты  $k_B = 1$ .  $T$  — температура для управления процессом отжига,  $\Delta E$  — изменение уровня энергии. Вероятность перехода  $p$  основана на распределении Больцмана [18]. Самый простой способ связать  $\Delta E$  с изменением целевой функции  $\Delta f$ :  $\Delta E = \Delta f$ . Таким образом, вероятность перехода  $p(\Delta f, T) = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T}\right)$ . Случайный переход будет принят, если  $p(\Delta f, T) = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T}\right) > r$ , где  $r \in [0 \dots 1]$  — случайное число из равномерного распределения. В работе используется геометрический график охлаждения, который снижает температуру на коэффициент охлаждения  $0 < \alpha < 1$ :  $T(t) = T_0 \alpha^t, t = 0, 1, \dots, t_f$ .

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.5.1.7, проект 0314–2016–0020 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18–07–00526 и № 18–08–01284)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yang X.S. Nature-inspired algorithms and applied optimization. Springer International Publishing AG, 2018. 326 p.
2. Kirkpatrick S., Gellat C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing // Science. 1983. V. 220(4598). P. 671–80.
3. Simon D. Evolutionary Optimization Algorithms: Biologically Inspired and Population-Based Approaches to Computer Intelligence. Wiley, 2013. 742 p.
4. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, USA, 1995. P. 1942–48.
5. Younes L. Shapes and diffeomorphisms. Springer Science & Business Media, 2010. 434 p.
6. Ashburner J., Miller M.I. Diffeomorphic Image Registration // Brain Mapping: An Encyclopedic Reference. 2015. Vol. 1 P. 315–321.
7. Marsland S., McLachlan R.I. A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration / Karssemeijer N., Lelieveldt B. editors // Proceedings of Information Processing in Medical Images. Lect Notes Comput Sci. New York : Springer, 2006. P. 396–407.
8. Trouve A., Younes L. Metamorphoses through lie group action // Foundations of Computational Mathematics. 2005. V. 5, № 2. P. 173–198.
9. Holm D.D., Trouve A., Younes L. The Euler-Poincaré theory of metamorphosis // Quarterly of Applied Mathematics. 2009. V. 67, № 4. P. 661–685.
10. Lejhter S.V., Chukanov S.N. Matching of images based on their diffeomorphic mapping // Computer optics. 2018. V. 42, № 1. P. 96–104.
11. Lejhter S.V., Chukanov S.N. The Matching of Images Based on the Construction of the Hamilton Equations // Mathematical Structures and Modeling. 2018. № 2(46). P. 86–94.
12. Flusser J., Zitova B., Suk T. Moments and moment invariants in pattern recognition. Chichester, UK : John Wiley & Sons, Ltd., 2009. 296 p.
13. Pei S.C., Lin C.N. Image normalization for pattern recognition // Image and Vision Computing. 1995. V. 13, № 10. P. 711–23.
14. Chukanov S.N. Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. 2009. V. 19, № 2. P. 303–305.
15. Chukanov S.N., Ulyanov D.V. The formation of invariants for visualization of vector fields on the basis of constructing homotopy operator // Computer optics. 2012. V. 36, № 4. P. 622–626.
16. Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A., Teller E. Equations of state calculations by fast computing machines // Journal of Chemistry and Physics. 1953. V. 21. P. 1087–1092.
17. van Laarhoven P.J.M., Aarts E.H.L. Simulated Annealing: Theory and Applications. Springer, 1987. 187 p.
18. Landau L.D., Lifshitz E.M. Statistical Physics: Part 1. Elsevier Ltd., 1980. 544 p.

**THE USE OF AFFINE NORMALIZATION FOR ENHANCEMENT  
OF THE ACCURACY OF IMAGES COMPARISON**

**S.V. Lejhter**<sup>1</sup>

Instructor, e-mail: leykhter@mail.ru

**S.N. Chukanov**<sup>2</sup>

Dr.Sc.(Eng.), Professor, Leading scientific employee, e-mail: ch\_sn@mail.ru

<sup>1</sup>Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

<sup>2</sup>Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy  
of Sciences

**Abstract.** The problem of comparing the forms of the source and terminal images is considered. For the analysis of images deformations, diffeomorphic transformations are used. For enhancement of an accuracy of comparing source image and terminal image, it is proposed to normalize these images. The original image is exposed to affine transformation and the cost functional between the transformed original and terminal images is minimized. The solution for a problem of the image form evolution is based on the using of simulated annealing algorithm.

**Keywords:** pattern recognition, image normalization, affine transformations, simulated annealing algorithm.

*Дата поступления в редакцию: 29.08.2019*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СРОКОВ ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАБОЧИХ УЧЕБНЫХ ПЛАНОВ**

**А.А. Сеньковская**

аспирант, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье рассмотрены основные подходы к реализации образовательных программ. Представлены особенности моделирования процесса обучения на различных этапах организации учебных планов. Проанализирована возможность уменьшения сроков обучения за счёт моделирования учебного плана как ориентированного графа.

**Ключевые слова:** учебный план, ориентированный граф, моделирование, учебный процесс.

Рабочий учебный план является определяющим документом для организации учебного процесса. Однако следует отметить, что учебный план представляет собой не только набор дисциплин, которые должны быть изучены за определённый отрезок времени. Все учебные дисциплины, входящие в план, связаны между собой, то есть в более поздних по времени изучения дисциплинах используется информация из ранее изученных без её конкретизации, т. е. предполагается, что обучаемый знает, какой смысл вкладывается в то или иное определение или понятие.

Все дисциплины, входящие в рабочий учебный план, делятся на те, которые входят в цикл обязательного компонента, и те, которые являются компонентом по выбору.

В целях оптимизации учебного плана можно представить его в виде ориентированного графа, поскольку учебные дисциплины связаны между собой по пререквизитам и постреквизитам [1]. Рассмотрим более подробно различные способы реализации рабочего учебного плана с применением теории графов.

С вводом кредитной технологии обучения подход к организации модульных образовательных программ и, соответственно, рабочих учебных планов претерпел некоторые изменения. Рассмотрим особенности этих преобразований.

На первоначальном этапе внедрения в Казахстане кредитной технологии обучения при формировании учебных планов не выделялись траектории обучения. Можно сказать, что здесь для организации учебного процесса использовался линейный подход с элементами кредитной технологии. Однако при отсутствии траекторий обучения в образовательной программе были предусмотрены компоненты по выбору. Также использовалось понятие «пререквизиты дисциплин». Таким образом, выбор какой-то определённой дисциплины из компонента «по выбору» ограничивал дальнейший выбор дисциплин.

В итоге на данном этапе можно выделить следующие основные задачи обработки учебных планов:

1) проверить на противоречивость заданную последовательность выбора дисциплин. Здесь следует отметить, что критический путь освоения образовательной программы существует при любом выборе дисциплин из компонента «по выбору»;

2) проверить, может ли студент при данном выборе дисциплин завершить раньше обучение по образовательной программе. При этом стоит отметить, что срок обучения может быть сокращён не менее чем до двух лет. Это обосновано тем, что согласно типовым правилам организации обучения физическая культура должна проводиться в течение 4 семестров, то есть двух курсов, а также итоговая аттестационная комиссия по приёму государственного экзамена и защите итоговой квалификационной работы осуществляет свою деятельность только в весенне-летний период.

В случае задачи 2) следует отметить, что поскольку согласно требованиям к организации учебного процесса накладывается ограничение на максимальную недельную нагрузку для студентов, соответственно, определяется максимальное количество осваиваемых кредитов в семестр / учебный год (что составляет в среднем 18-20 кредитов в семестр по теоретическому обучению). Следовательно, на освоение в среднем 120 кредитов теоретического обучения студенту потребуется не менее 5–6 семестров.

Кроме того, для приобретения практических компетенций в образовательной программе предусмотрены различные виды практики, такие как учебно-вычислительная (для технических специальностей), производственная и преддипломная практики в 4, 6 и 8 семестрах соответственно. Поэтому, сдвигая освоение кредитов по производственной практике, продолжительность срока обучения можно сократить до трёх лет.

Преимущество организации образовательной программы подобным образом состоит в том, что все общеобразовательные дисциплины проводятся в рамках первого года обучения. Это даёт студенту возможность пройти некоторые дисциплины раньше, соблюдая пре- и постреквизиты.

Однако, не все дисциплины из компонента «по выбору» реально выбирались и проводились в рамках реализации программы, а именно выбор спецкурсов при таком подходе определяет индивидуальную траекторию обучения. Поэтому фактически задача сокращения срока обучения сводилась к рассмотрению учебного плана без учёта пререквизитов.

Отметим, однако, что право студентов на обучение по индивидуальному плану и траектории хотя и было, но на практике до сих пор не реализовано.

Важным этапом является осуществление перехода к модульным образовательным программам с выделенными траекториями обучения. Отличительной особенностью данного этапа являлось то, что при формировании образовательных программ по каждой из специальностей из элективных компонентов формируется две-три траектории обучения. На практике при малом контингенте студентов из нескольких траекторий выделяется одна рабочая траектория, по которой и осуществляется обучение студентов, при этом для русского и казах-

ского потоков траектории могли быть разные. Если набор студентов в текущем году большой (более 30 студентов для конкретной специальности), то допускается распределение студентов на две траектории обучения. При этом студент должен определиться с выбором траектории в начале обучения (или же при поступлении), которая сохраняется на протяжении всего срока обучения.

При данной организации учебных планов вопрос о сокращении сроков обучения не поднимается. Поскольку обновление образовательных программ ежегодно должно составлять не менее 30 % (что достигается как раз за счёт обновления элективного компонента), учебные планы для разных годов приёма значительно отличаются друг от друга, а следовательно, досрочное изучение определённых дисциплин из компонента «по выбору» для выбранной на первом курсе траектории обучения становится достаточно проблематичным [2].

С 2019 года внедряется новый подход к разработке модульных образовательных программ.

Снова объявлена идея, что можно сократить или же увеличить сроки обучения. Таким образом, стабильных групп и потоков обучения не будет. При этом остаётся требование к модульной образовательной программе на ежегодное обновление элективного компонента. В образовательной программе также сохраняется разделение на дисциплины обязательного компонента и компонента по выбору. При этом к изучению дисциплины условно можно разделить на две группы:

- цикл общеобразовательных дисциплин, определяемых типовым учебным планом (например, философия, инфо-коммуникационные технологии и другие);
- обязательные дисциплины вузовского компонента (определяются на усмотрение вуза и ориентируются на направление подготовки — технические, естественно-технические, гуманитарные, творческие и другие специальности — и читаются потоков всех специальностей определённого направления).

Также отличительной особенностью нового этапа является то, что компонент по выбору теперь представляет собой модуль, состоящий из нескольких дисциплин. Причём дисциплины учебного плана связаны между собой через пре- и постреквизиты.

Учёт пререквизитов и постреквизитов позволяет рассматривать учебный план как ориентированный граф (рисунок 1). Каждая вершина графа связана с дисциплиной и семестром, который рекомендован для её изучения рабочим учебным планом. Кроме того, учитывается вид дисциплины: обязательная или элективная, а также какие связанные компоненты относятся к одной группе. Однако данный граф может быть несвязным, поскольку некоторые дисциплины могут помещаться в отдельный подграф.

Задача сократить либо же увеличить сроки обучения с минимальными затратами по прежнему актуальна.

Рассмотрим отличительные черты процесса организации обучения, связанного с уменьшением сроков обучения.

Дополнительные виды обучения для любого направления остались неизменными и состоят из физической культуры в течение 6 семестров и профессиональных практик (на каждом курсе во время каникул после весеннего се-



местра). Основываясь на этом, можно сделать вывод, что для образовательных программ бакалавриата возможно уменьшить сроки обучения не менее чем до трёх лет. При этом для освоения всех видов практик возможно сдвинуть прохождение практики во время каникул после осенне-зимнего семестра.

Однако основную часть образовательной программы составляют дисциплины, поэтому анализ по сокращению сроков обучения осуществляется при рассмотрении дисциплин. Поэтому в целях оптимизации процесса разделим дисциплины образовательной программы на 3 категории:

1) общеобразовательные дисциплины, определяемые учебным планом, изучаются на всех специальностях во всех университетах. В настоящий момент распределены по первым 4-м семестрам обучения;

2) языковые дисциплины — базовые дисциплины ведутся на 1-м курсе в обоих семестрах. Кроме того, в качестве вузовского компонента определены профессионально-ориентированные языки, обучение по которым осуществляется на 2 курсе;

3) профильные дисциплины — дисциплины, направленные на приобретение профессиональных компетенций, причём связаны между собой посредством пре- и постреквизитов.

Поскольку общеобразовательные дисциплины всегда реализуются, причём для потоков любого направления, а также постоянно присутствуют в образовательной программе, то по ним можно в любом случае осуществить перезачёт. Следовательно, их можно исключить из графа образовательной программы при анализе на оптимизацию сроков обучения. Аналогично обстоит ситуация и с языковыми дисциплинами.

Поэтому после предварительного анализа образовательной программы из графа можно исключить общеобразовательные и языковые дисциплины.

Далее профильные дисциплины необходимо проанализировать на критичность соблюдения пре- и постреквизитов. То есть возникает вопрос: являются ли указанные в образовательной программе пререквизиты критичными при рассмотрении определённой дисциплины или же нет? Представляют ли собой дисциплины графа как сильносвязанные или же как слабосвязанные компоненты?

Итак, понятно, что есть дисциплины, которые должны изучаться в строгой последовательности друг за другом (например, сначала программирование на определённом языке, затем уже базы данных), или же есть дисциплины, которые можно подвинуть, задав пререквизиты для данной дисциплины из изученных на более раннем этапе.

Тогда, заменив пререквизиты для слабосвязанных компонентов, можно получить ориентированный граф, а точнее, набор подграфов, по максимальной длине которых можно будет определить оптимальный срок обучения по рассматриваемой образовательной программе (рисунок 2).

Здесь также следует учитывать, что при сокращении сроков обучения еженедельная нагрузка у студента возрастёт. Следовательно, Министерство образования и науки Казахстана должно определить критерии оптимальной нагрузки на студента и жёстко контролировать его соблюдение.

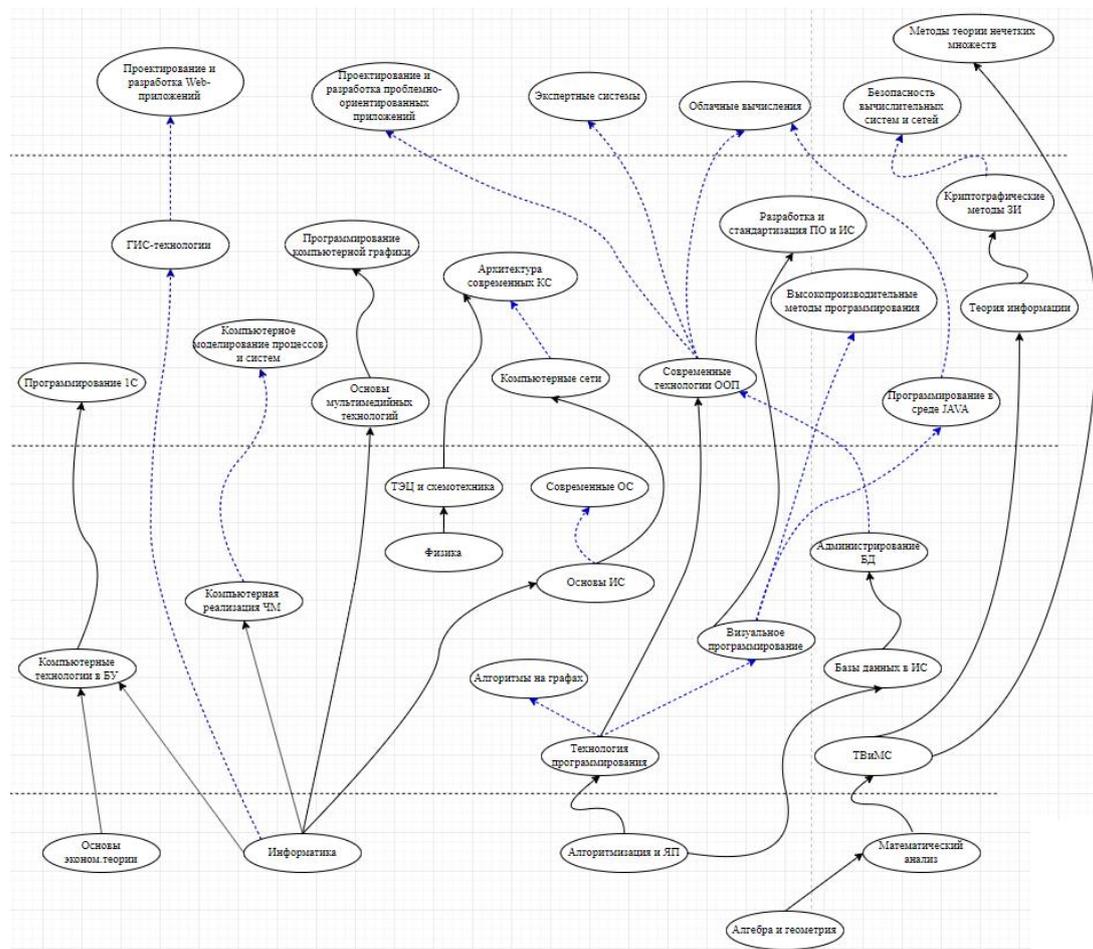


Рис. 2. Учебный план в виде ориентированного графа после изменений

Другой немаловажный вопрос состоит в следующем. Дисциплины, которые сдвигаются на более ранний срок, необязательно должны быть в образовательной программе другого года поступления. Поэтому возникает вопрос: как организовать обучение в данном случае? Возможно ли обучение в малочисленных группах? Решить эти задачи опять же можно, используя принцип перезачёта дисциплин.

Таким образом, в новых условиях организации образовательных программ сокращение или увеличение сроков обучения можно реализовать подобно переводу из другого университета, то есть перемещение по образовательным программам для разных лет поступления осуществлять за счёт перезачёта элективных дисциплин. Следовательно, осуществляется анализ каталогов элективных дисциплин соответствующих годов поступления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фураева И.И. Автоматизированная система формирования рабочего учебного плана для кредитной системы обучения // Труды III Международной конференции «Стратегия качества в промышленности и образовании». Варна, Болгария, 2007. С. 662–664.
2. Фураева И.И. Вопросы автоматизации формирования рабочего учебного плана для кредитной системы обучения // Вестник Восточно-Казахстанского государственного университета. 2008. № 1(39). С. 135–139.

**MODELING OF TRAINING TERMS ON THE BASIS OF THE ANALYSIS OF WORKING EDUCATIONAL PLANS****A.A. Senkovskaya**

Graduate Student, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The article describes the main approaches to the implementation of educational programs. It presents features of the modeling of the learning process at various stages of the curricula organization. The possibility of reducing the duration of training due to the simulation of the curriculum as a directed graph is analyzed.

**Keywords:** curriculum, oriented graph, modeling, educational process.

## REFERENCES

1. Furaeva I.I. Avtomatizirovannaya sistema formirovaniya rabocheho uchebnogo plana dlya kreditnoi sistemy obucheniya. Trudy III Mezhdunarodnoi konferentsii "Strategiya kachestva v promyshlennosti i obrazovanii", Varna, Bolgariya, 2007, pp. 662–664. (in Russian)
2. Furaeva I.I. Voprosy avtomatizatsii formirovaniya rabocheho uchebnogo plana dlya kreditnoi sistemy obucheniya. Vestnik Vostochno-Kazakhstanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2008, no. 1(39), pp. 135–139. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 21.07.19*

## **ОБРАБОТКА ТЕКСТА С ФОНЕТИЧЕСКОЙ И ТЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗМЕТКАМИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ТЕКСТОВ ДИАЛЕКТНОГО КОРПУСА**

**Д.Н. Лавров**

к.т.н., доцент, e-mail: lavrov@omsu.ru

**А.П. Лапин**

студент, e-mail: aleksandrlapinsanek@gmail.com

**М.А. Харламова**

к.фил.н., доцент, e-mail: khr-spb@mail.ru

**И.А. Черкащенко**

магистрант, e-mail: ilyachr@yahoo.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе описаны схемы конечных автоматов, положенные в основу разработки веб-приложения диалектного корпуса Среднего Прииртышья. В статье предложена доработка структуры XML-документа, представляющего текстовую запись интервью с одним или несколькими информантами с фонетической и тематической разметками. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-012-00519.

**Ключевые слова:** веб-разработка, тематическая разметка, конечные автоматы, диалектный корпус.

### **Введение**

На протяжении более чем полувека в диалектологических экспедициях были собраны материалы в виде интервью с носителями говоров с разной диалектной основой. Все полученные данные хранятся в аудио- и видеоформате. Аудиоформат анализируется лингвистами-диалектологами, а затем преобразуется в текстовую форму с фонетической разметкой. Расшифрованный текст с фонетической разметкой размечается по тематике содержания. Совокупность всех размеченных текстов с соответствующими аудио- и видеозаписями представляет собой диалектный корпус полиэтнического региона Среднего Прииртышья, над созданием которого мы работаем.

В серии предыдущих работ [1–3] был создан формат представления тематической разметки. В статье представлена доработанная версия этого формата и описание машины конечных состояний по перекодированию этих данных в представление для веб-страниц. Такой подход позволяет хранить размеченные тексты в стандартной реляционной базе данных (БД), а при поступлении запроса отображать данные с возможностью подсветки заданных тем и с отображе-

нием реквизитов текстов и паспортов информантов. Использование библиотек jQuery позволяет выделять темы, не перегружая страницу. Аналогичный проект [4] может выделять только одну тему, а саму подсветку темы в тексте может выполнять только лишь с перезагрузкой страницы.

Целью данной работы является построение приложения для отображения тематической и фонетической разметок в веб-приложении.

## 1. Структура входного документа

Как правило, диалектные записи делаются в виде интервью с одним информантом. В ходе лингвистического анализа текстов было обнаружено, что часть интервью является записью беседы в форме диалога, реже — полилога.

В ранее разработанную структуру XML-документа [2] было добавлено поле, идентифицирующее информанта, что позволило использовать этот идентификатор для обозначения респондента в тексте.

Были добавлены соответствующие изменения в разрабатываемый код приложения разметки [2]. Внешний вид упомянутого приложения показан на рисунке 1.

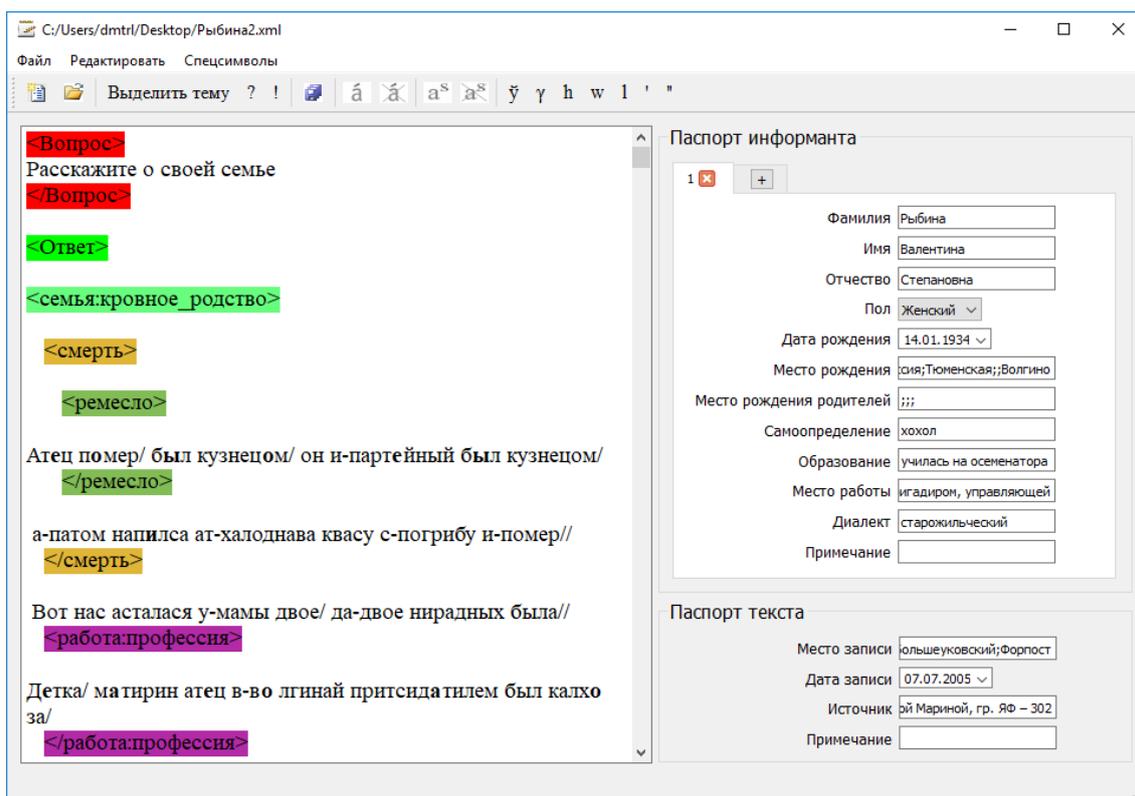


Рис. 1. Внешний вид приложения для выполнения тематической разметки

Необходимо, чтобы на веб-сайте регионального корпуса можно было «подсветить» темы, присутствующие в размеченных текстах. Для этого в текст добавлены теги <theme> со свойством class, в котором прописывается название

темы. Пример: `<theme class="Природа">`. Теги могут быть сложными, когда одна тема является подтемой другой темы. В таких темах используется разделитель «двойной минус» `--`. Пример: `<theme class="Семья--Брат">`. Окончание темы обозначается закрывающим тегом `</theme>`. Фрагменты текста с разной тематической разметкой могут быть вложены друг в друга, но с обязательным соблюдением корректной скобочной структуры: все внутренние теги должны быть закрыты до закрытия тега контейнера.

Текст интервью состоит только из вопросов и ответов. Для того, чтобы выделить вопросы и ответы, на них в текст добавлены теги `<question>` — вопрос и `<answer>` — ответ. Если информантов несколько, то к тегу `<answer>` добавляется свойство `<informant>`, в котором прописывается идентификатор интервьюируемого. В тексте могут присутствовать символы кириллицы, латиницы, а также специальные символы, обозначающие те или иные звуки. В тексте могут использоваться такие html-теги, как `<b>` — для выделения ударений или `<sub>` — для выделения особенностей звучания.

Пример кода разметки с идентификаторами нескольких информантов приведён ниже:

```
<doc>
<informant>
  <id>1</id>
  <lname>Сидоров</lname>
  <fname>Илья</fname>
  <sname>Николаевич</sname>
</informant>
<informant>
  <id>2</id>
  <lname>Сидорова</lname>
  <fname>Анастасия</fname>
  <sname>Степановна</sname>
</informant>
<text>
  <location>
    <state>Россия</state>
    <locality>Омск</locality>
  </location>
  <year>2019</year>
  <record><![CDATA[
    <question>
      Здравствуйте. Представьтесь, пожалуйста.
    </question>
    <answer informant="1">
      Здравствуйте. Меня зовут Илья
      Николaевич.
    </answer>
    <answer informant="2">
      Здравствуйте. Мое имя Анастасия
```

```
    Степановна.  
    Мне 34 года и я работаю бухгалтером.  
</answer>  
  ]]></record>  
</text>  
</doc>
```

## 2. Модель базы данных

База данных для хранения диалектных тестов с фонетической и тематической разметками содержит две таблицы «Текст» и «Информант» [1]. У текста будут следующие атрибуты: идентификатор текста, место записи (состоит из страны, региона, района и населённого пункта), год, ссылка на бумажный оригинал (запись на магнитную ленту или другой носитель), заметки и сам текст. У таблицы «Информант» имеются следующие поля: уникальный идентификатор, фамилия, имя, отчество, пол, место рождения, место рождения родителей, кем себя считает, образование, род занятий, тип диалекта и заметки.

Каждый текст должен быть прикреплен как минимум к одному информанту, а информант связан с одним текстом. Это связь «многое-ко-многим». Данные на сайт передаются в виде отдельных документов, в каждом из которых хранится вся информация о расшифрованном тексте, а также вся информация о респондентах данной записи.

В период разметки текста отсутствуют данные об уникальных идентификаторах информантов. А значит, нельзя сопоставить с достоверностью информантов из поступившего документа и из базы данных. Из-за этого принято решение каждого нового информанта хранить отдельно, даже если он уже есть в базе данных. Это нарушение первой нормальной формы, но это необходимо в условиях данной задачи. Чтобы это реализовать, была изменена структура базы данных: связь «Информант–Текст» реализована как «многие к одному». Для её реализации к паспорту информанта добавлен идентификатор конкретного текста.

## 3. Модель передачи данных

Расшифрованные тексты в базу данных передаются в виде xml-документа, структура которого была описана выше, и соответствуют в целом структуре базы данных. В документе существует главный тег <doc>. Внутри него может быть тег <version>, чтобы в случае изменений можно было легко отличить старую структуру документа от нового, а также обязательно есть как минимум один тег <informant> и один тег <text>. Тег <informant> может содержать те же теги, что и поля соответствующих таблиц в базе данных. Если информантов несколько, то они должны содержать тег <id>, на который необходимо ссылаться в тексте, в свойстве <informant> `tera \verb<answer>`". Если какой-либо тег отсутствует, то атрибут в базе данных остаётся пустым.

Атрибут, в котором содержится текст статьи, имеет секцию «CDATA». Сделано это для разделения точно определённых структур описания информанта и параметров интервью от тематической разметки самого интервью, которое в свою очередь может не полностью соответствовать всем спецификациям XML. Чтобы разобрать данный документ и внести полученную информацию в БД, будет использоваться библиотека «lxml». Эта библиотека разбирает документ только один раз при его загрузке.

В файле текст форматирован удобным для прочтения xml образом. При отображении на сайте необходимо заменить тематические теги, а также теги вопросов и ответов на теги html. Ниже приведён пример такого преобразования.

Текст, хранящийся в базе данных:

```
<question>Здравствуйте. Представьтесь, пожалуйста.</question>
<answer informant="1">
    Здравствуйте. Меня зовут Иль<b>я</b> Никол<b>а</b>евич.
</answer>
<answer informant="2">
    Здравствуйте. Мое имя Анастас<b>и</b>я Степ<b>а</b>новна.
    Мне 34 года и я работаю бухгалтером.
</answer>
<question>Расскажите что-нибудь с своей семье.</question>
<answer informant="1">
    <theme class="Семья">
        <theme class="Семья--Образование">
            Моя жена, в отличии от меня имеет высшее образование.
        </theme>
        <theme class="Работа">
            Благодаря ему она смогла устроиться бухгалтером
            в небольшую компанию. Ей очень нравится там
            работать. Я же работаю на СТО и, к моему удивлению,
            зарабатываю больше
        </theme>
    </theme>
</answer>
```

для отображения на веб-странице преобразуется в:

```
<ins class="question">
<i>Вопрос: </i>Здравствуйте. Представьтесь, пожалуйста.
</ins>
<ins class="answer">
    <i>И. Н.: </i>Здравствуйте. Меня зовут Иль<b>я</b>
    Никол<b>а</b>евич.
</ins>
<ins class="answer">
    <i>А. С.: </i>Здравствуйте. Мое имя Анастас<b>и</b>я
    Степ<b>а</b>новна. Мне 34 года и я работаю
```

```

    бухгалтером.
</ins>
<ins class="question">
    <i>Вопрос: </i>Расскажите что-нибудь с своей семье.
</ins>
<ins class="answer">
    <i>И. Н.: </i>
        <ins class="my_tag_0 ">
            <ins class="my_tag_0 my_tag_0 my_tag_1 ">
                Моя жена, в отличии от меня
                имеет высшее образование.
            </ins>
        <ins class="my_tag_0 my_tag_2 ">
            Благодаря ему она смогла устроиться бухгалтером
            в небольшую компанию. Ей очень нравится там
            работать. Я же работаю на СТО и, к моему
            удивлению, зарабатываю больше.
        </ins>
    </ins>
</ins>
</div>

```

После такого преобразования подсветка тем осуществляется через изменение стилей «на лету» с использованием библиотеки `jquery`. Это не требует перезагрузки страницы и улучшает удобство использования приложения.

Первый конечный автомат удаляет лишние пробельные символы (см. рисунок 2). После разбора документа и нахождения в нём размеченного текста интервью запускается первый автомат. Он удаляет лишние пробелы из текста. При нахождении нескольких пробельных символов, идущих подряд, он оставляет только первый, удаляя все остальные. Этот автомат удаляет пробельные символы после открывающихся и перед закрывающимися тегами `<question>` и `<answer>`. Кроме того, до и после открывающегося и закрывающегося тега `<theme>` на вход автомату поступают локальные идентификаторы информантов, используемые в файле, и соответствующие им глобальные идентификаторы информантов, используемые в базе данных. Автомат заменяет одни на другие. Если в тексте был обнаружен идентификатор информанта, которого нет в документе, то новый идентификатор будет равен «-1».

Второй автомат работает при открытии страницы с интервью. Автомат заменяет открывающийся тег `<question>` на текст `<ins class="question"><i>Вопрос: </i>`. А открывающийся тег `<answer>` на аналогичный текст `<ins class="answer"><i>Ответ: </i>`. При наличии в теге свойства `<informant>` вместо слова `<Ответ>` будут написаны инициалы соответствующего информанта или слово «Неизвестный», если он будет равен «-1». Открывающий тег `<theme>` меняется на тег `<ins>`. Если значение свойства `<class>` тематического тега встречается впервые, то вместо него прописывается уникальный идентификатор с использованием

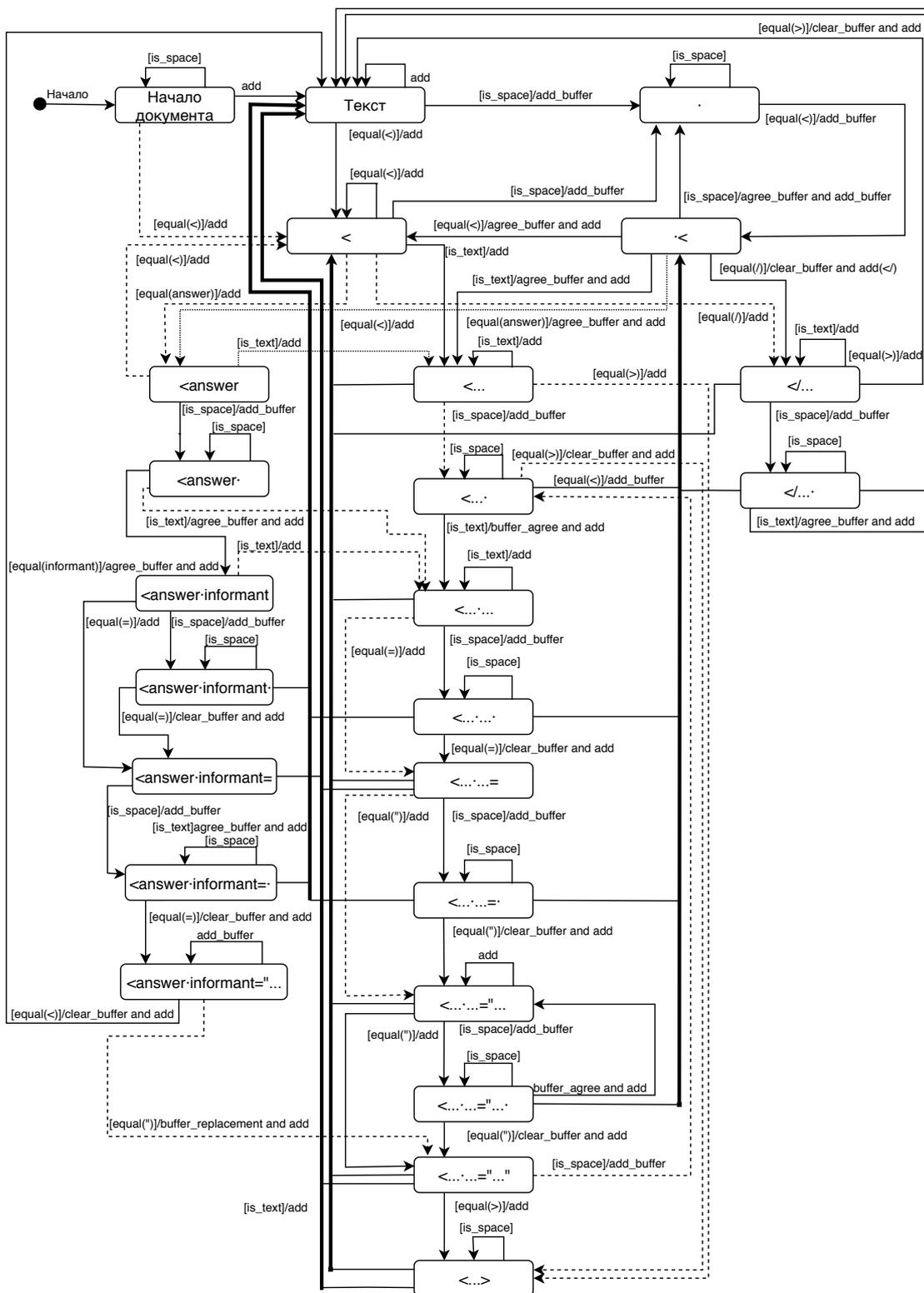


Рис. 2. Структурная схема первого автомата

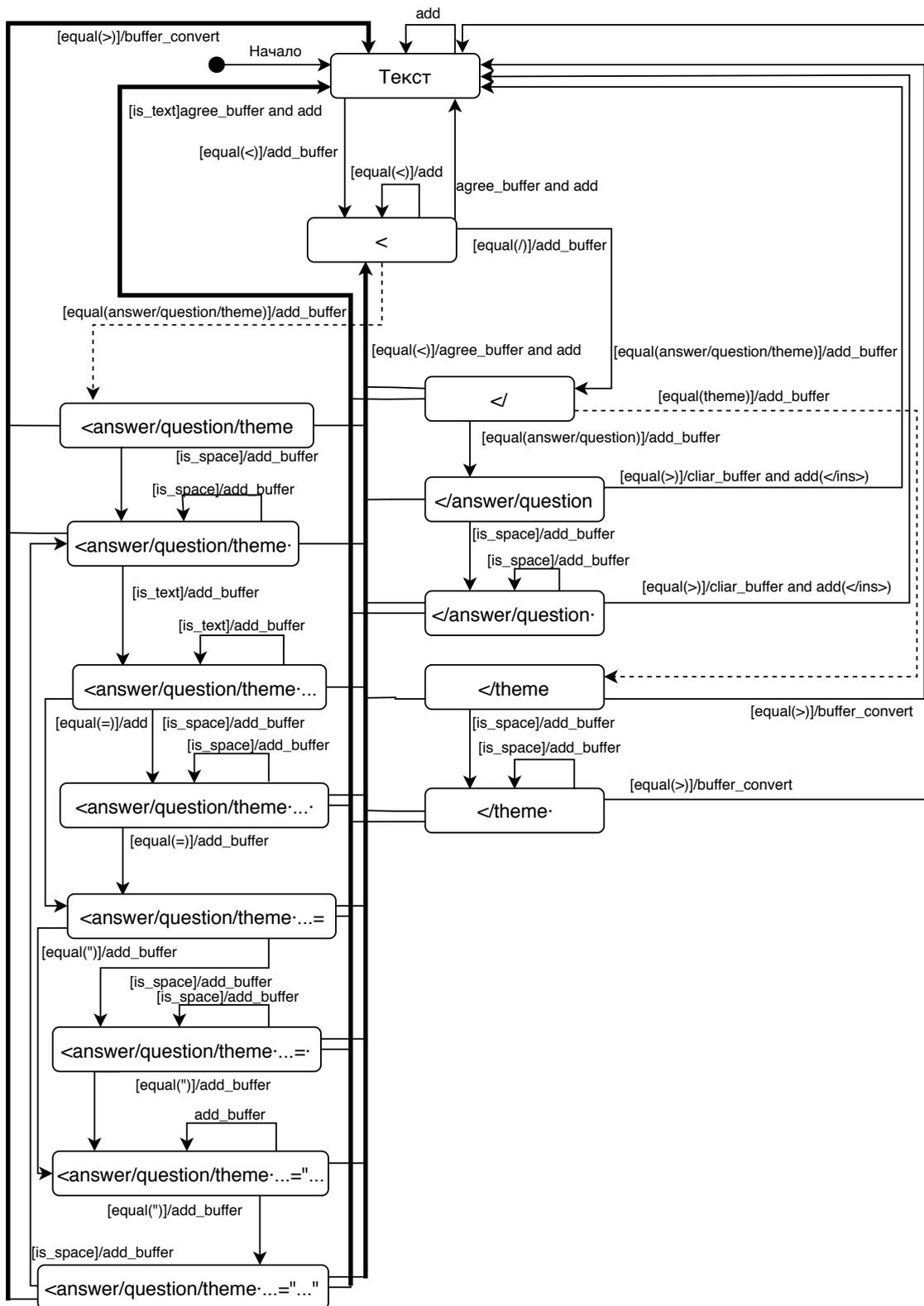


Рис. 3. Структурная схема третьего автомата

только латинских символов, цифр и нижнего подчёркивания, который и прописывается в свойстве `<class>`. Если значение тега уже встречалось, то ему присваивается тот же самый идентификатор, что и в прошлый раз. Если тематический тег является тегом темы (в иерархии тем), (он пишется через двойной минус «--»), обрабатывается как новая тема и записывается через пробел. После завершения работы автомат возвращает список всех названий тем и присвоенных им уникальных идентификаторов.

Закрывающий тег `<theme>` меняется на закрывающий тег `<ins>`. Тематический тег, установленный внутри другого тега, меняет своё значение на соответствующий идентификатор. Кроме того, прописывается идентификатор темы родительского тега. Стандартные теги html, используемые в тексте, остаются без изменений. Структурная схема автомата представлена на рисунке 3.

## Заключение

В результате: (1) разработано веб-приложение на платформе Django для внесения в базу данных и отображения диалектных текстов Среднего Прииртышья, (2) доработана структура формата обмена данными между подсистемами.

В настоящее время ведётся обучение пользователей и получение обратной связи об удобстве использования и необходимости доработки программных продуктов проекта построения регионального корпуса говоров Среднего Прииртышья.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-012-00519.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Харламова М.А., Лавров Д.Н. История полиэтнического региона в «зеркале» народной речи: о проекте регионального диалектного корпуса. / *Current trends and Future Perspectives in Russian Studies // Proceedings of the International Conference on Russian Studies at the University of Barcelona, MKR-Barcelona. Barcelona : Trialba Ediciones 2018. P. 1564–1572.*
2. Лавров Д.Н., Харламова М.А., Костюшина Е.А. Представление разметки корпуса народной речи Среднего Прииртышья // *Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 85–91.*
3. Лавров Д.Н., Харламова М.А., Костюшина Е.А. Модель представления экстралингвистической и тематической разметки в корпусе народной речи // *Математическое и компьютерное моделирование : сборник материалов VI Международной научной конференции, посвящённой памяти Б.А. Рогозина (Омск, 23 ноября 2018 г.). Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. С. 115–118.*
4. Лаборатория общей и сибирской лексикографии. Режим доступа: URL: <http://los1.tsu.ru/?q=corpus/demo> (дата обращения: 21.05.19).

## TEXT PROCESSING WITH PHONETIC AND THEMATIC MARKUP FOR DISPLAYING TEXTS OF DIALECT CORPUS

**D.N. Lavrov**

Ph.D.(Eng.), Associate Professor, e-mail: lavrov@omsu.ru

**A.P. Lapin**

Student, e-mail: aleksandrlapinsanek@gmail.com

**M.A. Kharlamova**

Ph.D.(Phil.), Associate Professor, e-mail: khr-spb@mail.ru

**I.A. Cherkashchenko**

Master, e-mail: ilyachr@yahoo.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The paper describes the developed finite state machine schemes that underlie the development of a web application for the dialect corpus of the Middle Irtysh. The paper proposes refinement of the structure of an XML document representing a text recording of an interview with one or more informants with phonetic and thematic markings. The study was carried out with the financial support of the Russian Federal Property Fund in the framework of the scientific project No. 18-012-00519.

**Keywords:** web development, thematic markup, state machines, dialect corpus.

## REFERENCES

1. Kharlamova M.A. and Lavrov D.N. Istoriya polietnicheskogo regiona v "zerkale" narodnoi rechi: o proekte regional'nogo dialektного korpUSA. Current trends and Future Perspectives in Russian Studies, Proceedings of the International Conference on Russian Studies at the University of Barcelona, MKR-Barcelona, Barselona, Trialba Ediciones 2018, pp. 1564–1572. (in Russian)
2. Lavrov D.N., Kharlamova M.A., and Kostyushina E.A. Predstavlenie razmetki korpUSA narodnoi rechi Srednego Priirtysh'ya. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 4(48), pp. 85–91. (in Russian)
3. Lavrov D.N., Kharlamova M.A., and Kostyushina E.A. Model' predstavleniya ekstralingvisticheskoi i tematicheskoi razmetki v korpuse narodnoi rechi. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sbornik materialov VI Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati B.A. Rogozina (Omsk, 23 noyabrya 2018 g.), Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2018, pp. 115–118. (in Russian)
4. Laboratoriya obshchei i sibirskoi leksikografii. Rezhim dostupa: URL: <http://los1.tsu.ru/?q=corpus/demo> (21.05.19). (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 26.08.2019*

## Авторам

### Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате  $\text{\LaTeX}$  (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу<sup>1</sup>;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

### Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

### Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
  - фамилии, имени и отчества,
  - учёного звания,
  - учёной степени,
  - должности,
  - места работы или учёбы,
  - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета  $\text{\LaTeX}$  и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор  $\text{\MiKTeX}$ , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

---

<sup>1</sup>Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

## Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

### **Авторская этика**

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

### **Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык**

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

### **Электронная почта для отправки статей**

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

# Математические структуры И моделирование

№3(51)

Главный редактор  
**А.К. Гуц**

Зам. глав. ред., выпускающий редактор  
**Д.Н. Лавров**

Зам. глав. ред., технический редактор  
**Н.Ф. Богаченко**

Корректор:  
**И.Н. Баловнева**

Проверка корректности перевода:  
**А.Н. Кабанов**

---

#### Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,  
Омский государственный университет

E-mail: [guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru), [lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>



---

Подписано в печать 25.10.2019. Формат 60 × 84 1/8.  
Усл. печ. л. 17,21. Тираж 70 экз. Заказ № 292.

---

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского  
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



19051 >