*Математические структуры и моделирование
2019. № 3(51). С. 59–73*

УДК 519.63 + 533.6
DOI 10.25513/2222-8772.2019.3.59-73

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЁТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА И ЕЁ НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ

С.П. Баутин
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SBautin@usurt.ru
И.Ю. Крутова
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

Аннотация. Для системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса проведена линеаризация в двух случаях: когда учитывается и когда не учитывается действие силы тяжести. Для линеаризованных систем определены их характеристики. В случае прямоугольной системы координат проведено частичное расщепление линейной системы уравнений. Найдены частные решения в виде стоя́щих и бегущих волн. Построено течение в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, линеаризация, точные решения.

Введение

Природные восходящие закрученные потоки: торнадо, тропические циклоны, огненные вихри — представляют собой сложные и ещё достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надёжное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса.

В монографиях [1, 5–8] (более подробную библиографию см. в [6, 7]) с использованием этой математической модели — система уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса — и с применением методологии характеристической задачи Коши [2–4] проведены аналитические и численные исследования течений воздуха в природных восходящих закрученных потоках.

В силу нелинейности системы уравнений газовой динамики построение её решений является достаточно трудоёмким. Это и послужило причиной линеаризации системы уравнений газовой динамики на её точных решениях.

Далее в работе в случае двух точных решений системы уравнений газовой динамики: при учёте и без учёта силы тяжести — приведены линеаризованные на этих двух точных решениях линейные системы уравнений с частными производными. Неучёт действия силы тяжести возможен при исследовании газодинамических течений в придонных частях природных восходящих закрученных потоков, в которых параметры газа не сильно зависят от высоты. Также в работе, в случае отсутствия силы тяжести для полученной линеаризованной системы, построено несколько конкретных решений.

1. Линеаризация системы уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$ при учёте действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид [1, 5–8]:

$$\begin{cases} c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\,(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}) = 0, \\[2ex] v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_x = a v_2 - b v_3, \\[2ex] v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_y = -a v_1, \\[2ex] v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c c_z = b v_1 - g. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь p — давление газа; ρ — плотность газа; $\gamma = \mathrm{const} > 1$ — показатель политропы идеального газа; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox, Oy, Oz; $\mathbf{\Omega} = (\ 0;\ \Omega_2;\ \Omega_3\ )$; $\Omega_2 = \Omega\cos\psi$; $\Omega_3 = \Omega\sin\psi$, — вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z), вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega_3$; $b = 2\Omega_2$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g = \mathrm{const} > 0$ — ускорение свободного падения.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния — u_{00}, c_{00}, t_{00}, r_{00} — стандартным образом [1, 5–8] введены безразмерные переменные:

$$f = \frac{f_*}{f_{00}},$$

где f_* и f_{00} — соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины f. При этом положено, что

$$u_{00} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}.$$

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$c = 1; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0. \tag{2}$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$c = 1 + \tilde{s}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}$$

и эти выражения подставляются в систему (1).

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1). Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются.

В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен:

$$\begin{cases} c_t + \dfrac{(\gamma-1)}{2}\left(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}\right) = 0, \\[2ex] v_{1t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_x = a v_2 - b v_3, \\[2ex] v_{2t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_y = -a v_1, \\[2ex] v_{3t} + \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_z = b v_1. \end{cases} \tag{3}$$

Более простой случай $g = 0$ можно рассматривать тогда, когда требуется исследовать течения в придонной части восходящего закрученного потока, где параметры газа с изменением высоты меняются незначительно [1, 5–8].

В случае $g \neq 0$ линеаризация системы уравнений газовой динамики на точном решении

$$c = \sqrt{1 - (\gamma-1)gz}; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

приведёт к более простым формулам, если вместо искомой скорости звука — функции c — ввести другую искомую функцию: $\Theta = c^2$. В этом случае система (1) переходит в следующую систему

$$\begin{cases} \Theta_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\Theta + (\gamma-1)\Theta \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\[2ex] \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \dfrac{1}{(\gamma-1)} \nabla\Theta = \mathbf{g} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}, \end{cases} \tag{4}$$

точное решение этой системы имеет вид

$$\Theta = 1 - (\gamma-1)gz; \quad \mathbf{V} = \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ — нулевой вектор.

Линеаризация системы уравнений газовой динамики с искомой функцией Θ на приведённом точном решении также состоит в том, что решение ищется в виде

$$\Theta = 1 - (\gamma-1)gz + \tilde{\Theta}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}},$$

эти выражения подставляются в систему (4): слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются; нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}_t - (\gamma-1)g\tilde{v}_3 + (\gamma-1)\left[1-(\gamma-1)gz\right] \operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \\ \tilde{\mathbf{V}}_t + \dfrac{1}{(\gamma-1)}\left[1-(\gamma-1)gz\right] \nabla\tilde{\Theta} - g\mathbf{k}\tilde{\Theta} = -2\boldsymbol{\Omega}\times\tilde{\mathbf{V}}, \end{cases}$$

здесь $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

В монографии [2] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером один у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра ε. Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида [2] и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням ε сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, даёт первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

2. Характеристики линеаризованной системы уравнений газовой динамики в случае $g = 0$

Для получения уравнений характеристических поверхностей системы (3), записанной в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

используется стандартная процедура [8].

Здесь:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ av_2 - bv_3 \\ -av_1 \\ bv_1 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{U}$ — вектор искомых функций; $\mathbf{F}$ — вектор правых частей и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что (C) — поверхность характеристики задана в виде

$$(C): \quad \theta(t, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где, не нарушая общности, можно предположить, что $\theta_{x_1} \neq 0$, и тогда по теореме о неявно заданной функции получается представление

$$(C): \quad \theta(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + \eta(t, x_2, x_3).$$

С учётом этого равенства для линеаризованной системы уравнений газовой динамики (3) делается следующая замена переменных:

$$\theta = x_1 + \eta(t, x_2, x_3); \quad \tau_1 = t; \quad \xi_i = x_i \quad i = 2, 3 \tag{5}$$

с якобианом $J = 1$.

Следовательно, при замене (5) поверхность характеристики (C) берётся за новую координатную плоскость $\theta = 0$.

С учётом формул преобразования производных при замене (5) система (3) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + A_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^{3} A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} = \mathbf{F},$$

где матрица A_0 имеет следующий вид

$$A_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t} E + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} A_i =$$

$$= \begin{pmatrix} \theta_t & \frac{\gamma-1}{2}\theta_{x_1} & \frac{\gamma-1}{2}\theta_{x_2} & \frac{2}{\gamma-1}\theta_{x_3} \\ \frac{2}{\gamma-1}\theta_{x_1} & \theta_t & 0 & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1}\theta_{x_2} & 0 & \theta_t & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1}\theta_{x_3} & 0 & 0 & \theta_t \end{pmatrix}.$$

Чтобы координатная плоскость $\theta = 0$ (т. е. поверхность (C)) по определению была характеристикой выписанной системы, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю определитель матрицы A_0, стоящий перед вектором производной, выводящей с плоскости $\theta = 0$.

Определитель матрицы A_0 вычисляется разложением по первой строке и имеет следующий вид:

$$\det A_0 = \theta_t^2 \left[\theta_t^2 - \left(\theta_{x_1}^2 + \theta_{x_2}^2 + \theta_{x_3}^2\right)\right].$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\theta_t = 0; \quad \text{то есть} \quad \theta(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$$

задаёт стоящую на месте контактную характеристику кратности два, через которую газ не течёт: $\mathbf{V} = \mathbf{O}$.

А уравнения

$$\theta_t = \pm\sqrt{\theta_{x_1}^2 + \theta_{x_2}^2 + \theta_{x_3}^2}$$

задаёт две звуковые характеристики (C^+), (C^-), каждая кратности единица и распространяющиеся в разные стороны со скоростью, равной единице.

3. Частичное расщепление линеаризованной системы

Последующие выкладки будут производиться с отдельными уравнениями системы (3).

Первое уравнение системы (3) дифференцируется по t и разрешается относительно производной c_{tt}. А затем второе, третье и четвёртое уравнения системы (3) дифференцируются каждое по своей пространственной переменной и найденные смешанные производные по времени и по пространственным переменным подставляются в уравнение для c_{tt}:

$$c_{tt} = \Delta c - \frac{(\gamma - 1)}{2}\left(av_{2x} - bv_{3x} - av_{1y} + bv_{1z}\right), \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа.

В полученное уравнение для c при $\Omega \neq 0$, то есть при учёте вращения Земли вокруг своей оси, вошли производные от искомых компонент вектора скорости газа. Если же не учитывать вращение Земли, $\Omega = 0$, то полученное уравнение будет линейным волновым уравнением для скорости звука — функции c.

Далее делаются следующие преобразования.

Первое уравнение системы (3) дифференцируется по каждой из пространственных переменных, а последние три уравнения системы (3) дифференцируются по t. В эти уравнения подставляются смешанные производные функции c по времени и по пространственным переменным, и получается такая система:

$$\begin{cases} v_{1tt} = v_{1xx} + v_{2yx} + v_{3zx} + av_{2t} - bv_{3t}, \\ v_{2tt} = v_{1xy} + v_{2yy} + v_{3zy} - av_{1t}, \\ v_{3tt} = v_{1xz} + v_{2yz} + v_{3zz} + bv_{1t}, \end{cases} \tag{7}$$

в которую входят только компоненты вектора скорости газа.

Следовательно, система (3) допускает частичное разделение переменных: сначала надо решать систему (7) только для v_1, v_2, v_3, а затем при известных v_1, v_2, v_3 решать уравнение (6) для c.

Если для системы (3) задать начальные условия

$$\begin{gathered} c|_{t=0} = c_0(x, y, z); \qquad v_1|_{t=0} = v_{10}(x, y, z); \\ v_2|_{t=0} = v_{20}(x, y, z); \quad v_3|_{t=0} = v_{30}(x, y, z), \end{gathered} \tag{8}$$

то такая задача Коши (3), (8) будет иметь единственное решение, например в классе аналитических функций.

Если из системы (3), рассматриваемой при $t = 0$ и с учётом условий (8), однозначно определить начальные данные для первых производных по времени

$$\begin{aligned} &c_t|_{t=0} = \frac{(\gamma-1)}{2}\left(v_{10x} + v_{20y} + v_{30z}\right); \\ &v_{1t}|_{t=0} = av_{20} - bv_{30} - \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0x}; \\ &v_{2t}|_{t=0} = -\frac{2}{(\gamma-1)}c_{0y} - av_{10}, \\ &v_{3t}|_{t=0} = bv_{10} - \frac{2}{(\gamma-1)}c_{0z}; \end{aligned} \tag{9}$$

то и для уравнения (6), и системы (7) получаются задачи Коши с начальными данными (8), (9), которые также будут иметь единственные решения. Естественно, что эти решения будут совпадать с решением системы (3) при начальных условиях (8).

Замечание. Известно, что любое решение исходной задачи удовлетворяет следствию этой исходной задачи. Однако не всякое решение следствия является решением исходной задачи. Уравнения (6), (7) являются следствиями системы (3) и поэтому всякое решение системы (3) удовлетворяет уравнениям (6), (7). Но не всякое решение уравнений (6), (7) является решением системы (3). Например, если для уравнений (6), (7) в качестве начальных условий для производных по времени при $t = 0$ взять не функции (9), а другие, то получившаяся задача (6)–(9) будет иметь единственное решение, но получившиеся функции c, v_1, v_2, v_3, не будут удовлетворять задаче (3), (8).

У системы (7) традиционным для этих задач способом можно получить следствия, ещё более простые по записи, чем система (7).

Для этого первое уравнение системы (7) дифференцируется по x, второе и третье уравнения дифференцируются по y, z соответственно:

$$\begin{cases} v_{1ttx} = v_{1xxx} + v_{2yxx} + v_{3zxx} + av_{2tx} - bv_{3tx}, \\ v_{2ytt} = v_{1xyy} + v_{2yyy} + v_{3zyy} - av_{1ty}, \\ v_{3ztt} = v_{1xzz} + v_{2yzz} + v_{3zzz} + bv_{1tz}. \end{cases}$$

В полученной системе меняются последовательности нахождения частных производных и вводится новая искомая функция $\Psi(t, x, y, z)$ такая, что

$$\Psi_x = v_1, \quad \Psi_y = v_2, \quad \Psi_z = v_3.$$

Тогда последняя система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \Psi_{xxtt} = \Psi_{xxxx} + \Psi_{yyxx} + \Psi_{zzxx} + a\Psi_{xyt} - b\Psi_{xzt}, \\ \Psi_{yytt} = \Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy} + \Psi_{zzyy} - a\Psi_{xyt}, \\ \Psi_{zztt} = \Psi_{xxzz} + \Psi_{yyzz} + \Psi_{zzzz} + b\Psi_{xzt}. \end{cases}$$

Сложение уравнений этой системы даёт следующее её следствие:

$$\Delta\Psi_{tt} = \Delta\Delta\Psi + a\Psi_{xyt} - b\Psi_{xzt} - a\Psi_{xyt} + b\Psi_{xzt},$$

которое после приведения подобных становится таким

$$\Delta\Psi_{tt} = \Delta\Delta\Psi, \tag{10}$$

и при введении новой искомой функции

$$\Phi = \Delta\Psi$$

получается ещё более простое следствие системы (7):

$$\Phi_{tt} = \Delta\Phi. \tag{11}$$

Ещё раз подчеркнём, что не всякие решения уравнений (10), (11) дадут решения системы (7), а тем более, — решения системы (3).

4. Стоящая и бегущая волны

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных y и z и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t,x) = c_n(t)\cos nx; \\ v_1(t,x) = v_{1n}(t)\sin nx; \\ v_2(t,x) = v_{2n}(t)\sin nx; \\ v_3(t,x) = v_{3n}(t)\sin nx \end{cases} \tag{12}$$

с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $v_{1n}(t)$, $v_{2n}(t)$, $v_{3n}(t)$. Здесь n — целое неотрицательное число.

Подстановка представлений (12) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c_n'(t) + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{1n}(t) = 0; \\ v_{1n}'(t) - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n(t) = a v_{2n}(t) - b v_{3n}(t); \\ v_{2n}'(t) = -a v_{1n}(t); \\ v_{3n}'(t) = b v_{1n}(t). \end{cases} \tag{13}$$

Решение системы (13) ищется в стандартном виде

$$c_n(t) = c_n^o e^{kt}; \quad v_{1n}(t) = v_{1n}^o e^{kt}; \quad v_{2n}(t) = v_{2n}^o e^{kt}; \quad v_{3n}(t) = v_{3n}^o e^{kt}; \tag{14}$$

где c_n^o, v_{1n}^o, v_{2n}^o, v_{3n}^o и k — неизвестные пока константы.

Представление (14) подставляется в систему (13), и получается однородная линейная система алгебраических уравнений для констант c_n^o, v_{1n}^o, v_{2n}^o, v_{3n}^o:

$$\begin{cases} c_n^o \cdot k + \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{1n}^o = 0; \\ v_{1n}^o \cdot k - \dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n^o - a v_{2n}^o + b v_{3n}^o = 0; \\ v_{2n}^o \cdot k + a v_{1n}^o = 0; \\ v_{3n}^o \cdot k - b v_{1n}^o = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & \dfrac{(\gamma-1)}{2} n & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{(\gamma-1)} n & k & -a & b \\ 0 & a & k & 0 \\ 0 & -b & 0 & k \end{vmatrix}$$

равнялся нулю.

Раскрытие этого определителя по второй строке даёт следующее представление:

$$\Delta = k^2 \left(k^2 + n^2 + a^2 + b^2\right).$$

Следовательно, равенство нулю определителя Δ приводит к следующим значениям константы k:

$$k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{n^2 + a^2 + b^2} \cdot i.$$

Имеет место равенство

$$a^2 + b^2 = 4\Omega^2 \sin^2\psi + 4\Omega^2 \cos^2\psi = 4\Omega^2.$$

Вводится промежуточное обозначение

$$v_* = \sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{n^2}},$$

и тогда

$$k_{3,4} = \pm n v_* \cdot i. \qquad (15)$$

В случае нулевых значений $k_{1,2}$ система линейных алгебраических уравнений для констант c_n^o, v_{1n}^o, v_{2n}^o, v_{3n}^o

$$\begin{cases} \dfrac{(\gamma-1)}{2} n v_{1n}^o = 0; \\ -\dfrac{2}{(\gamma-1)} n c_n^o - a v_{2n}^o + b v_{3n}^o = 0; \\ a v_1^o n = 0; \\ -b v_{1n}^o = 0 \end{cases}$$

имеет следующее решение:

$$c_n^o = \frac{(\gamma-1)}{2}(av_{2n}^o - bv_{3n}^o); \quad v_{1n}^o = 0; \quad v_{2n}^o, v_{3n}^o \text{-- произвольные константы.}$$

То есть у системы (3) имеется точное частное решение, не зависящее от времени — то есть стоя́щая волна:

$$\begin{aligned} &c(t,x) = \frac{(\gamma-1)}{2n}(av_{2n}^o - bv_{3n}^o)\cos nx;\\ &v_1(t,x) = 0; \quad v_2(t,x) = v_{2n}^o \sin nx; \quad v_3(t,x) = v_{3n}^o \sin nx. \end{aligned}$$

В случае комплексных значений $k_{3,4}$ (15) искомое частное решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{cases} c(t,x) = c_n^o \cos(nv_* t)\cos(nx);\\ v_1(t,x) = v_{1n}^o \sin(nv_* t)\sin(nx);\\ v_2(t,x) = v_{2n}^o \cos(nv_* t)\sin(nx);\\ v_3(t,x) = v_{3n}^o \cos(nv_* t)\sin(nx), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$c_n^o = \frac{(\gamma-1)}{2}\frac{1}{d}v_{1n}^o; \quad v_{2n}^o = \frac{a}{nd}v_{1n}^o; \quad v_{3n}^o = -\frac{b}{nd}v_{1n}^o;$$

v_{1n}^o — произвольное число.

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение (16) системы (3) является бегущей волной:

$$\begin{cases} c(t,x) = \frac{1}{2}c_n^o\left\{[\cos[n(x+v_*t)] + \cos[n(x-v_*t)]\right\};\\ v_1(t,x) = \frac{1}{2}v_{1n}^o\left\{[\cos[n(x-v_*t)] - \cos[n(x+v_*t)]\right\};\\ v_2(t,x) = \frac{1}{2}v_{1n}^o\left\{[\cos[n(x-v_*t)] + \cos[n(x+v_*t)]\right\};\\ v_3(t,x) = \frac{1}{2}v_{1n}^o\left\{[\cos[n(x-v_*t)] - \cos[n(x+v_*t)]\right\}; \end{cases}$$

зависящей от таких комбинаций переменных:

$$x \pm \sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{n^2}} \cdot t$$

и распространяющейся в разные стороны со скоростью v_*, значение которой больше единицы, если $\Omega \neq 0$.

Естественно, что для системы (3) можно строить и другие частные решения с использованием гармоник, и по другим пространственным переменным как в случае зависимости только от какой-то одной пространственной переменной, так и в случае одновременной зависимости решений от многих пространственных переменных.

5. Стационарное решение с нулевой вертикальной скоростью

Далее будут исследоваться стационарные решения системы (3), то есть решения системы

$$\begin{cases} v_{1x} + v_{2y} + v_{3z} = 0, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_x = av_2 - bv_3, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_y = -av_1, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_z = bv_1, \end{cases} \tag{17}$$

представимые в виде бесконечного ряда по степеням z

$$\mathbf{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(x,y) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(x,y) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \tag{18}$$

Решение системы (1) в виде (18) будет строиться в окрестности непроницаемой плоскости $z = 0$, то есть в предположении, что

$$v_3|_{z=0} = v_{30}(x,y) = 0. \tag{19}$$

Если в системе (17) положить $z = 0$ и учесть вводимые рядом (18) обозначения, включая учёт значения $v_{30} = 0$, то получается следующая система:

$$\begin{cases} v_{10x} + v_{20y} + v_{31} = 0, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_{0x} = av_{20}, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_{0y} = -av_{10}, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_1 = bv_{10}. \end{cases}$$

Из этой системы получаются два явных выражения для v_{31} и c_1:

$$v_{31} = -(v_{10x} + v_{20y}y); \quad c_1 = \frac{\gamma-1}{2} bv_{10} \tag{20}$$

и два условия на коэффициенты $c_0(x,y)$, $v_{10}(x,y)$, $v_{20}(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_{0x} = av_{20} \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)} c_{0y} = -av_{10}. \end{cases} \tag{21}$$

Из этого следует, что задача (17), (19) является характеристической задачей Коши и условия (20), (21) являются необходимыми условиями разрешимости этой характеристической задачи Коши [2].

При задании аналитической функции $c_0(x,y)$ при $a \neq 0$ из условий (21) однозначно определяются коэффициенты v_{10}, v_{20} в виде аналитических функций

$$v_{20} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0x}, \quad v_{10} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0y}$$

и, следовательно, из второго уравнения системы (20) однозначно в виде аналитической функции определится коэффициент $c_1(x,y)$

$$c_1(x,y) = \frac{a(\gamma-1)}{2}bv_{10}(x,y).$$

Из условий (21) определяются производные

$$v_{20y} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0xy}; \quad v_{10x} = -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0yx},$$

которые при подстановке полученных соотношений в первое уравнение системы (20) однозначно определяют коэффициент v_{31}:

$$v_{31} = -\left(-\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0xy} + \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{0xy}\right) = 0.$$

Предположим, что коэффициенты $c_i(x,y)$, $v_{3i}(x,y)$ при $i = 0, 1, ..., k$ известны, являются аналитическими функциями, причём $v_{3i}(x,y) = 0$. Также предположим, что коэффициенты $v_{1j}(x,y)$, $v_{2j}(x,y)$ при $j = 0, 1, ..., k-1$ также известны и являются аналитическими функциями.

Система (17) дифференцируется k раз по z и полагается $z = 0$. С учётом значения $v_{30} = 0$ в результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} v_{1kx} + v_{2ky} + v_{3,k+1} = 0, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_{kx} = av_{2k}, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_{ky} = -av_{1k}, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_{k+1} = bv_{1k}. \end{cases} \tag{22}$$

Из второго и третьего уравнений при $a \neq 0$, $b \neq 0$ и при известном коэффициенте $c_k(x,y)$ однозначно определяются коэффициенты $v_{2k}(x,y)$, $v_{1k}(x,y)$:

$$v_{2k} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{kx}; \quad v_{1k} = -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{kx} \tag{23}$$

в виде аналитических функций от x, y.

А из четвёртого уравнения системы (22) также однозначно определится аналитическая функция $c_{k+1}(x,y)$

$$c_{k+1} = \frac{(\gamma-1)}{2}bv_{1k}.$$

Используя соотношения (23), однозначно определяются частные производные функций $v_{2k}(x,y)$, $v_{1k}(x,y)$ по y и x соответственно

$$v_{2ky} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{kxy}; \quad v_{1kx} = -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{kyx},$$

подстановка которых в первое уравнение системы (22) приводит к равенству

$$v_{3,k+1} = 0.$$

Таким образом, индукцией по k доказано, что при задании аналитической функции $c_0(x,y)$ ряд (18) с аналитическими коэффициентами строится однозначно, и у степенного ряда функции v_3 все коэффициенты равны нулю, то есть

$$v_3(x,y) \equiv 0. \tag{24}$$

Сходимость ряда (18) следует из того, что характеристическая задача Коши (17), (19) имеет стандартный вид [2], и её решение является аналитической функцией. Спецификой этой характеристической задачи Коши (17), (19) является то, что для построения единственного решения требуется дополнительно задать только одну функцию $c_0(x,y)$, а все остальные коэффициенты ряда (18) определяются явно из алгебраических уравнений.

Исходя из этого установленного факта (24) стационарное решение системы (17) строится как решение следующей системы

$$\begin{cases} v_{1x} + v_{2y} = 0, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_x = av_2 \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_y = -av_1, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_z = bv_1. \end{cases} \tag{25}$$

Из второго и третьего уравнений системы (25) следует, что

$$v_{2y} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{xy}; \quad v_{1x} = -\frac{2}{a(\gamma-1)}c_{yx},$$

и поэтому первое уравнение системы (25) выполняется тождественно

$$v_{2y} + v_{1x} = \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{xy} - \frac{2}{a(\gamma-1)}c_{yx} \equiv 0,$$

и его можно опустить как следствие двух уравнений этой системы и рассматривать систему

$$\begin{cases} \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_x = av_2 \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_y = -av_1, \\ \dfrac{2}{(\gamma-1)}c_z = bv_1. \end{cases}$$

Последние два уравнения этой системы делятся соответственно на a, b, складываются, и последняя система расщепляется:

$$\begin{cases} v_2 = \dfrac{2}{a(\gamma-1)}c_x, \quad v_1 = -\dfrac{2}{(\gamma-1)}c, \\ -\dfrac{2}{a(\gamma-1)}c_y + \dfrac{2}{b(\gamma-1)}c_z = 0. \end{cases} \tag{26}$$

При этом, естественно, предполагается, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Эти ограничения говорят о том, что начало прямоугольной системы координат, которая вращается вместе с Землёй, не лежит ни на экваторе, ни на полюсах.

Последнее уравнение в системе (26) записывается в виде

$$c_z - \frac{b}{a}c_y = 0,$$

и его решение следующее

$$c = c_0(x, y + \frac{b}{a}z).$$

На плоскости $z = 0$ найденная функция удовлетворяет начальному условию

$$c|_{z=0} = c_0(x, y)$$

с произвольно заданной функцией $c_0(x, y)$.

Таким образом, стационарное решение системы (3), удовлетворяющее условию (19), имеет вид

$$\begin{cases} c(x,y,z) = c_0(x, y + \frac{b}{a}z); \quad v_1(x,y,z) = -\dfrac{2}{a(\gamma-1)}c_{0y}(x, y + \frac{b}{a}z); \\ v_2 = \dfrac{2}{a(\gamma-1)}c_{0x}(x, y + \frac{b}{a}z); \quad v_3(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
3. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Сборник «Численные методы механики сплошной среды». ВЦ СО АН СССР. 1973, Т. 4, № 1. С. 3–15.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
5. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / Баутин С.П. [и др.]. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
6. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / Баутин С.П. [и др.]. Екатеринбург : УрГУПС. 2017. 216 с.
7. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
8. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.

LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS EQUATIONS WHEN TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF CORIOLIS FORCE AND ITS SOME SOLUTIONS

Bautin S.P.
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SBautin@usurt.ru
Krutova I.Yu.
Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI", Snezhinsk, Russia

Abstract. For the system of gas dynamics equations, taking into account the action of the Coriolis force, the linearization is carried out in two cases: when the effect of gravity is and when it is not taken into account. For linearized systems, their characteristics are defined. In the case of a rectangular coordinate system, a partial splitting of the linear system of equations iss carried out. Particular solutions in the form of standing and running waves are found. The flow in the vicinity of the impenetrable horizontal plane is constructed.

Keywords: system of equations of gas dynamics, Coriolis force, linearization, exact solutions.

References

1. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
2. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p. (in Russian)
3. Bautin S.P. Analiticheskie resheniya zadachi o dvizhenii porshnya. Sbornik "Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy". VTs SO AN SSSR Publ., 1973, vol. 4, no. 1, pp. 3–15. (in Russian)
4. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya kvazilineinoi analiticheskoi sistemy. Differentsial'nye uravneniya, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 2052–2063. (in Russian)
5. Razrushitel'nye atmosfernye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty. Bautin S.P. [i dr.]. Novosibirsk, Nauka Publ.; Ekaterinburg, UrGUPS Publ, 2013, 216 p. (in Russian)
6. Razrushitel'nye atmosfernye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug osi. Bautin S.P. [i dr.]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017, 216 p. (in Russian)
7. Bautin S.P. and Krutova I.Yu. Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenii gaza pri uchete deistviya sily Koriolisa. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019, 181 p. (in Russian)
8. Bautin S.P. and Obukhov A.G. Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosfernykh vikhrei. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012, 152 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 19.09.2019