

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 2(50)
2019**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 2(50)

Омск
2019

Математические структуры и моделирование. — Омск : Омский государственный университет, 2019. — № 2(50). — 120 с.
ISSN 2222-8772 (print)
ISSN 2222-8799 (online)

Редакционная коллегия

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневарттовского государственного университета.
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- В. А. Плетюхов** доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск,
пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 05.07.2019.

Тираж 100 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ! Гринь Анатолий
Гаврилович 4

Фундаментальная математика и физика

И.А. Еганова, В. Каллис. *Априорная взаимосвязь в Мире событий: методический комментарий к введению нового эталона массы* 6

А.К. Гуц. *Структуры Кулакова в описании Мира* 23

М. Tchoshanov, O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Summation of Divergent Infinite Series: How Natural are the Current Tricks* 58

Прикладная математика и моделирование

С.А. Терентьев, А.К. Гуц. *Особенности спектральной плотности электромагнитного поля для электрического и магнитного диполей в вертикально неоднородной проводящей среде* 66

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Равновесная динамика неразложившегося опада в лесных экосистемах* 79

Компьютерные науки

А.А. Сеньковская, И.И. Фураева. *Анализ исходных данных в задаче оптимизации рабочих учебных планов* 85

O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Was There a Pre-Biblical 9-Ary Number System?* 95

Проблемы образования

O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Why STEM?* 99

O. Kosheleva, J. Viera, V. Kreinovich. *From Gig Economy to Gig Education* 107

O. Kosheleva, J. Viera, V. Kreinovich. *Should School Feel Like a Family: Lessons from Business Controversy as Interpreted by Decision Making Theory* 112

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ!

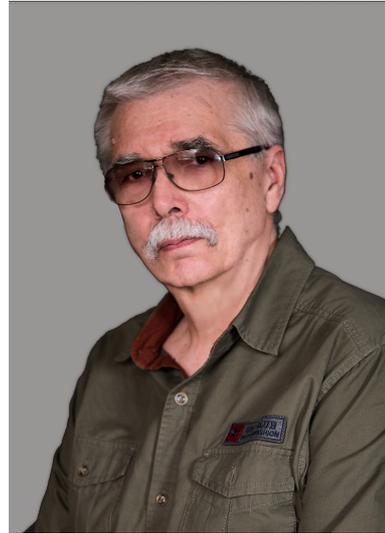
Гринь Анатолий Гаврилович

Анатолий Гаврилович Гринь — член редколлегии нашего журнала, великолепный учёный и прекрасный преподаватель! Доктор физико-математических наук, профессор, Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.

Анатолий Гаврилович родился 9 апреля 1949 г. в посёлке Ново-Александровск Южно-Сахалинского района Сахалинской области. В 1971 г. окончил механико-математический факультет Томского государственного университета по специальности «математика». В 1974 г. успешно завершил обучение в аспирантуре Московского государственного университета, а в 1977 г. защитил кандидатскую диссертацию «О малых случайных импульсных возмущениях динамических систем», специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Работа посвящена вопросам устойчивости динамических систем при малых случайных возмущениях. В 1995 г. в Институте математики СО РАН (г. Новосибирск) защитил докторскую диссертацию на тему «Предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин», специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. Основные результаты диссертации относятся к исследованию пограничных ситуаций в предельных теоремах для сумм слабо зависимых случайных величин. Наибольшее влияние на формирование научных интересов А.Г. Гриня, на направление и стиль исследований оказал академик РАН Ильдар Абдулович Ибрагимов.

В Омском государственном университете Анатолий Гаврилович работает с 1978 г. Преподавал на кафедре математического анализа математического факультета. В 1998 г. получил учёное звание «профессор». В 2003 г. после создания факультета компьютерных наук перешёл работать на кафедру кибернетики, где успешно преподаёт по настоящее время.

За время своей преподавательской деятельности Анатолий Гаврилович вёл



занятия на механико-математическом факультете МГУ, читал лекции на математическом и физическом факультетах ОмГУ по дисциплинам: «Теория вероятностей», «Математический анализ», «Теория множеств», «Дифференциальные уравнения». Разработал и провёл ряд спецкурсов: «Предельные теоремы», «Случайные процессы», «Интегрирование», «Статистическая обработка информации», «Дополнительные главы теории вероятностей» и др. По сей день преподаёт курс «Теория вероятностей и математическая статистика» на факультете компьютерных наук ОмГУ.

А.Г. Гринь участвовал в грантах Российского фонда фундаментальных исследований и фонда Сороса, в федеральной программе интеграции науки и высшей школы. Участвовал в работе международных конференций по теории вероятностей и математической статистике в Вильнюсе (1985, 1989 гг.), I Всемирного Конгресса Общества им. Бернулли (1986 г.) и др. Являлся членом диссертационного Советов Д 003.015.01 при институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН. На протяжении многих лет Анатолий Гаврилович был членом жюри и председателем оргкомитетов студенческих математических олимпиад различных уровней — от университетских до Всероссийских.

Областью научных интересов Анатолия Гавриловича являются предельные теоремы теории вероятностей. Получены необходимые и достаточные условия притяжения стационарных последовательностей с перемешиванием к устойчивым законам, точные по порядку оценки скорости сходимости и асимптотические разложения в предельных теоремах для зависимых случайных величин, минимальные условия слабой зависимости, обеспечивающие сходимость распределений сумм зависимых величин к устойчивым распределениям и пр. В настоящее время имеет более 50 научных трудов в рецензируемых научных изданиях.

Анатолий Гаврилович, от всего сердца желаем Вам крепкого здоровья, научных достижений, успешных учеников, творческих свершений и вдохновения!

*Коллеги по факультету
и редколлегия журнала
«Математические структуры
и моделирование»*

Дата поступления в редакцию:

АПРИОРНАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ В МИРЕ СОБЫТИЙ: МЕТОДИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ К ВВЕДЕНИЮ НОВОГО ЭТАЛОНА МАССЫ

И.А. Еганова¹

к.ф.-м.н., e-mail: eganova@math.nsc.ru

В. Каллис²

к.ф.-м.н., Dr.rer.nat., e-mail: wkallies@jinr.ru

¹Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, Россия

²Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Аннотация. Данная статья посвящена двум существенным обстоятельствам, которые следует принимать во внимание при использовании нового эталона (прототипа) массы — килограмма, прежде всего в процедуре измерения массы с помощью весов Киббла, а именно: априорной взаимосвязи в Мире событий (в пространстве-времени) и принадлежности эталона массы к сложным, структурированным объектам. В трёх разделах статьи (п. 2–п. 4) раскрываются и иллюстрируются главные черты названных выше обстоятельств, исходя (п. 1) из решения Международного комитета мер и весов по переопределению прототипа килограмма с 20 мая 2019 года. В центре внимания находится явление изменения массы сложного, организованного тела вследствие изменения его внутренней энергии, которое ассоциируется с явлением иницирующего влияния внешних необратимых процессов, принадлежащим временному аспекту объективной реальности. Теоретические соображения (п. 2) подтверждены прямым и наглядным экспериментальным материалом (п. 3 и п. 4). В заключении даны общие рекомендации, касающиеся измерения массы структурированного (на атомном уровне) тела на весах Киббла и которые следуют из рассмотренных обстоятельств.

Ключевые слова: эталон (прототип) массы, килограмм, весы Киббла, априорная взаимосвязь, Мир событий (пространство-время), структурированные объекты, открытые системы, необратимые процессы.

1. Введение

XXVI Генеральная конференция по мерам и весам (ГКМВ, 13–16 ноября 2018 года) приняла решение, которое предусматривает коренную ревизию Международной системы единиц СИ. Новая ситуация заключается в том, что

после этого решения набор из семи фундаментальных физических констант с заданными значениями полностью и жёстко фиксирует эту систему и является основой определения всех единиц измерения. Благодаря такому подходу исчезает потребность в эталонном килограмме после почти столетнего использования (III ГКМВ, 1901 год: килограмм — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма), а он будет заменён на единицу массы, которая базируется на наборе выбранных природных констант [1]. И существующий «прототип» (эталон) более не будет определять килограмм, он станет очень точной гирькой с потенциально измеримой погрешностью [2]. Дата вступления этого решения в силу — Всемирный день метрологии 20 мая 2019 года. А ведь ещё в 1994 году считалось, что неопределённость в 2,3 мкг по отношению к эталону является хорошей основой для определения массы различных тел [3]. В тот момент все измерения проводились с использованием международного эталона килограмма, который был выпущен решением Генеральной конференции по мерам и весам в 1889 году на основе Метрической конвенции (1875) и передан на хранение Международному бюро мер и весов (МБМВ). Этот международный эталон килограмма практически не подвергается какому-либо перемещению или использованию, а его копии хранятся в национальных метрологических учреждениях по всему миру. Обратим внимание: изготовление и использование такого чрезвычайно важного артефакта как прототип килограмма на протяжении всей его истории существования происходило исключительно в сфере воззрений механики Ньютона. Представления о взаимосвязи массы и внутренней энергии, соответствующая возможность изменения массы структурированного (на атомном уровне) объекта не учитывались.

В 1889, 1948, 1989 и 2014 годах проводились верификации копий с эталоном с целью обеспечить единство измерений массы относительно эталона (верификация 2014 года не является официальной «periodic verification», так как использовался только ограниченный набор копий эталона) [4, 5]. Об этих копиях известно весьма многое, вплоть до состава сплава и их плотности; результаты названных верификаций представлены на сайте МБМВ. Считается, что однозначно обнаружены (подтверждены) изменения масс копий эталона. Можно видеть, что есть группа копий, которая даёт в среднем рост в 0,25 мкг в год, а другая — средний рост в 0,9 мкг в год, но также есть пример, когда за значительный период времени (1950–1992) зафиксировано изменение в совокупности на +0,027 мг.

Однако остался открытым естественный вопрос: а масса самого эталона не потерпела изменений? Ведь нет никаких оснований предполагать, что масса Международного прототипа килограмма более стабильна, чем масса его официальных копий. На вопрос об устойчивости его массы можно дать однозначный ответ только при сравнении с фундаментальной постоянной природы (такой, как постоянная Планка или масса атома ^{28}Si). Такие исследования ведутся в нескольких национальных лабораториях с целью переопределения килограмма относительно инвариантной и общедоступной фундаментальной константы. В то же время был предпринят и другой шаг: эволюция этого смещения массы с течением времени, начиная с 3-й периодической проверки, была математиче-

ски смоделирована, и всем соответствующим национальным метрологическим учреждениям были предоставлены исправления для предыдущих сертификатов калибровки массы за период с 2003 по начало 2014 года. Приходится констатировать, что на данный момент продолжает отсутствовать полное понимание причин изменения масс, так как моделирование не является ответом на заданный вопрос, и рекомендации МКМВ переопределить килограмм вполне обоснованы с этой точки зрения.

Предлагаемый методический комментарий имеет целью привлечь внимание к двум существенным физическим обстоятельствам, которые следует иметь в виду при использовании нового эталона массы.

2. Эталон массы в свете априорной взаимосвязи в Мире событий

Учитывая современную высокую точность измерения массы, следует взглянуть на объект, казалось бы, полностью принадлежащий представлениям классической механики, каким является эталон килограмма, как на сложный *структурированный* объект.

Исторически сложилось так, что, закладывая основы механики для рассматриваемого им круга физических явлений, И. Ньютон мог ограничиться таким объектом как «массивная точка», не имеющая внутренней структуры и пребывающая в одном и том же внутреннем состоянии. Именно подобный объект фигурирует в определении «массы» как меры «количества материи»: «*Quantitas materiale est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim*» [6, с. 23]. (Перевод А.Н. Крылова: «Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объёму её», см. его комментарий там же.) У Ньютона данное определение выступает как опорное для последующего формулирования аксиом или законов движения — фундамента остальных разделов [6]: трёх книг «*О движении тел*». Придав значимость этой интегральной основополагающей характеристике тела, Ньютон фактически превратил обыденное представление о «количестве материи» (точнее — о «количестве вещества»), существовавшее уже тысячелетия, в научный термин, зафиксировав способ измерения данной величины — в переводе Крылова: «*Определяется масса по весу тела*» [6, с. 23]¹. Как видим, в переводах труда Ньютона в качестве наименования данного понятия предпочли употреблять известный синоним «количества материи» — «массу» (см. пояснения Крылова [6, с. 23]).

Итак, рассматривалось некое абстрактное «количество вещества», ибо его вещественный состав, внутренняя структура и внутренняя энергия не конкретизировались и вообще не мыслились: речь шла именно о «материальной точке» — теле, однородном и пребывающем в одном и том же состоянии (образно говоря, в одном и том же «качестве»). Таким образом, изначально масса мысли-

¹Напомним, что устройство, используемое для измерения веса — «рычажные весы», было создано в III–II тыс. до н. э. [7, с. 352].

лась как нечто постоянное. Такое представление о рассматриваемых Ньютоном телах было естественным, допустимым и целесообразным, так как он занимался выводением *законов движения* соответствующих тел. Однако исторически сложилось так, что и вся механика, шаг за шагом, целиком строилась на идейной основе его «Математических начал натуральной философии» и их представлениях. Как и следовало предвидеть, вне инструментальных возможностей такой механики оказались все проблемы, связанные с существованием реальной действительности: с возникновением и развитием, эволюцией сложных, *структурированных* систем. Только когда они весомо возникли в повестке дня физики, начали появляться подходы к описанию и изучению организованных структурированных объектов. Подобный подход был недавно представлен в монографии В.М. Сомсикова «К основам физики эволюции» [8].²

Множественно обнаружив определённую динамику внутреннего состояния (а именно массы) эталона килограмма, которая была упомянута выше в п. 1, прежде всего следовало бы обратить внимание на тот факт, что этот объект представляет собой сложное структурированное тело. А именно исследовать вопрос: не является ли наблюдаемое изменение массы эталона³ прямым следствием естественного изменения его внутренней энергии? Ибо согласно представлениям специальной теории относительности, для массы и внутренней энергии существует знаменитое соотношение Эйнштейна, и при изменении внутренней энергии масса *должна* изменяться (см. актуальные и в настоящее время методические заметки Л.Б. Окуня [12], посвящённые понятию массы). Тем более, что был известен длительный гравитационный эксперимент К. Майораны [13] в 1919 году (см. также обзор [14]), где наблюдалось уменьшение веса килограммового (1274 Г) свинцового шара на $\Delta Q = (2,09 \pm 0,07) \cdot 10^{-6}$ Г.

Приведём современную характеристику этого эксперимента из статьи [15] опытного гравитациониста-метролога В.П. Дедова: «*Опыты К. Майораны [13] — образец не превзойдённой до сих пор методической и технической чистоты тончайших гравитационных измерений. Никто не нашёл в них несовершенств, которые могли бы имитировать обнаруженный дефект веса ΔQ . Оппоненты критиковали не опыты К. Майораны, а его рабочую гипотезу (весьма сырую). При этом допускались неправомерные экстраполяции. Никто не смог повторить эксперимент К. Майораны [13] в аналогичном схемном решении и в столь же безупречном исполнении*»⁴ [15, с. 65].

²Здесь имеет смысл указать, что ожидать существенного продвижения в создании физики сложных организованных систем, в том числе в создании количественной теории массы, будет действительно реально, когда, наконец, будут задействованы *адекватные объективной реальности* представления об устройстве атомного мира — свойства и особенности его динамической электронной структуры, открытые М. Грызинским (см. обзорную статью авторов [9] и процитированную там литературу). Кроме того, необходимо полноценно воспринять и включить в свои, активно используемые, представления об объективной реальности априорную взаимосвязь в Мире событий, которая может обуславливать метрику пространства-времени, уже известные её свойства и особенности (см. обзорные статьи авторов [10, 11]).

³Причём достаточно согласованное между копиями эталона (см. рис. 2–9 в [3]).

⁴Заметим, что Quirino Majorana (1871–1958) — авторитетный физик-экспериментатор, Президент Общества итальянских физиков, известный своими широкими научными интересами:

Поэтому в современном глубоком, тщательном и критическом анализе гравитационного эксперимента Майораны в обзоре [14] Р. де А. Мартинс пришёл к чёткому выводу о том, что, во-первых, измерения Майораны не могут быть отвергнуты просто потому, что возможно сомневаться в их корректности или потому, что они противоречат наиболее широко принятой гравитационной теории. И во-вторых, пока улучшенное повторение экспериментов Майораны не даст нулевого результата для ΔQ , следует принять, что *имеется* наблюдаемое свидетельство существования гравитационного поглощения веществом. Здесь идёт речь о гравитационном поглощении, поскольку дефект веса ΔQ возникал именно тогда, когда свинцовый шар, который фигурировал в качестве пробного тела, был со всех сторон окружён 104-килограммовым ртутным экраном — Майорана исследовал вопрос: имеет ли место поглощение гравитации веществом?

При этом автор обзора [14], рассмотрев вопрос: *наблюдал ли Майорана именно поглощение?* — высказывает предположение, что поглощения гравитации, может быть, и не существует, а что было измерено некоторое непостоянное влияние на вес тела. Он сослался на тот факт, который давно подмечен в гравитационных наблюдениях: «*И в старых гравитационных экспериментах, и в недавних обычно обнаруживаются необъяснимые систематические эффекты*» [14, с. 237], отмеченные в работах А. Кука [16, 17], которые были посвящены 300-летию гравитационных исследований. В связи с этим авторы данной статьи в коллективной монографии [18] предложили и проанализировали другую версию для интерпретации наблюдаемой роли ртутного экрана, а именно: 104-килограммовый ртутный экран играет роль мощной антенны для приёма воздействия внешних необратимых процессов на внутреннее состояние структурированных систем (в рассматриваемом случае — ртути) и трансляции его на пробное тело гравитационного эксперимента (см. [18, с. 72–73]). Данное воздействие (не силовое по своему характеру, а по своей сути в духе кибернетики — информационное) принадлежит априорной (т.е. врождённой) взаимосвязи в Мире событий [10]. Эта взаимосвязь может обуславливать метрику пространства-времени и (в буквальном смысле!) является фундаментальной — она, как было показано в методическом обзоре авторов [10], лежит в самом основании физической реальности — в Мире событий. Как принадлежащая временному аспекту объективной реальности, она обладает специфическими свойствами, которые необходимо учитывать в современных прецизионных экспериментах и технологиях, где присутствуют необратимые процессы и структурированные системы. Поэтому, чтобы привлечь должное внимание к этой взаимосвязи, в обзоре [10] (как и в монографии [18]) было наглядно показано, каким образом априорная взаимосвязь в пространстве-времени обнаруживается чисто аналитическим путём, каким путём мы выходим, чисто теоретически, на представление о врождённой взаимосвязи всех необратимых процессов, в том числе происходящих в структурированных телах, и на представление о

магнитооптический и фотометрический эффекты, зодиакальный свет, радиоизлучение Юпитера, скорость света, гравитация, космология. Его экспериментальные методики никогда не критиковались и не подвергались сомнению.

дистанционной реакции внутреннего состояния сложного, организованного тела на внешний необратимый процесс. Укажем, что в монографии [18, с. 38–50] приведены наглядные примеры реакции внутреннего состояния различных структурированных систем (внутренней энергии, определённых физических характеристик тела, в том числе его массы) на иницирующее влияние внешних необратимых процессов.

Теперь вернёмся к заданному выше риторическому вопросу о том, что не является ли наблюдаемое поведение эталона массы и его копий⁵ закономерным следствием динамики их внутренней энергии. Ведь, как уже подчёркивалось выше, при изменении внутренней энергии тела его масса изменяется: в принципе, *масса не является постоянной величиной* (см. методические заметки [12]). Так что при отсутствии специального⁶ экранирования, вообще говоря, может иметь место реакция массы на внешние необратимые процессы⁷.

Вопрос о природе массы (о соотношении массы и энергии) был впервые поднят Эйнштейном в 1905 году и интересовал его, можно сказать, всю жизнь: ряд его работ по данному вопросу был опубликован в 1905, 1906, 1935 и 1946 годах. Соотношению массы и энергии Эйнштейн придавал особо важное значение, о чём свидетельствует название его последней работы по этому вопросу: « $E = mc^2$: настоящая проблема нашего времени» [19]. В этой работе он элементарно (и весьма доходчиво!) снял сомнения всех тех, кто, не наблюдая в обыденной жизни масштабных проявлений этого соотношения, высказывал сомнения в его справедливости, заявляя: «Но если каждый грамм вещества содержит столь большое количество энергии, то почему это обстоятельство так долго оставалось незамеченным?» [19, с. 655], что и разъяснил Эйнштейн: «*Ответ достаточно прост: до тех пор, пока энергия не выходит наружу, она остаётся незамеченной. Дело обстоит так же, как со сказочно богатым человеком, который никогда не тратит ни цента: никто не может сказать, насколько он богат*» [19, с. 655]. (Т. е. надо понимать, что изменение внутренней энергии не означает её полного немедленного выхода.) В связи с этим соотношением и его толкованием напомним, что соотношение $E = mc^2$ было получено для так называемых замкнутых, абсолютно изолированных систем (см., например, монографию В.А. Угарова [20, с. 297–299]). И укажем, что *существование априорной взаимосвязи в пространстве-времени в случае отсутствия экранирования внешних необратимых процессов означает «открытость» (незамкнутость) системы, что присуще всем природным структурированным системам.* Поэтому исследование естественной динамики массы⁸ специально подобранных открытых систем предоставляет реальную

⁵Ещё раз подчеркнём: судя по динамике, подробно представленной в обзоре [3], достаточно не случайное, а как бы согласованное.

⁶В том числе и весьма специфического — с учётом известных свойств и особенностей дистанционного влияния внешних необратимых процессов на внутреннее состояние сложных организованных систем (см. [18, с. 29–37]).

⁷Например, на упомянутую в [3] «чистку» копий эталона, при которой наблюдалось изменение их веса.

⁸Заметим: при использовании моделей Грызинского для электронной динамической структуры атомов, динамики молекулярных связей и др., см. [21].

возможность изучения взаимосвязи массы и внутренней энергии для *открытых систем*, в том числе возможности «входа» и «выхода» последней.

Реальность представлений, изложенных выше, продемонстрирована в следующих двух разделах на экспериментальном материале.

3. Естественная динамика массы

В монографии [18] развёрнуто описание многолетнего исследования динамики внутреннего состояния наземных структурированных систем, ассоциирующейся с динамикой внешних необратимых процессов. Имеются в виду крупномасштабный природный необратимый процесс весеннего интенсивного таяния снежного покрова в Новосибирске и звёздные процессы на Солнце. В данном разделе весьма сжато приводятся результаты этого исследования для того, чтобы весомо подтвердить справедливость теоретических соображений, которые были развиты в предыдущем разделе.

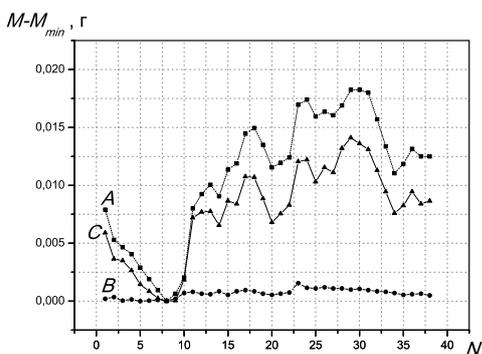


Рис. 1. Вариация массы геологических образцов A, B и C; погрешность измерений $\pm 0,00075$ г для A и B, $\pm 0,0005$ г для C (репродуцирован рис. 2.2 из [18])

су; предметом исследования являлась естественная динамика массы этих открытых (т. е. специально не экранированных, см. п. 2) систем в контролируемых условиях отдельного лабораторного помещения (атмосферное давление, относительная влажность, температура), а также вне его — по данным местного Гидрометеоцентра.

Здесь на рис. 1 и 2 мы приводим наглядные примеры календарной динамики массы, которая наблюдалась в новосибирском Академгородке весной 1991 и 1992 годов. По результатам первого наблюдения (которое проводилось ежедневно в определённое время, одним и тем же оператором, одним и тем же образом⁹) для наблюдения в 1992 году геологическая коллекция была увеличена

В качестве модели структурированного тела были выбраны геологические системы: минералы и минеральные агрегаты. В качестве ключевой, интегральной характеристики внутреннего состояния данной сложной организованной системы рассматривалась её масса. Так что *объектом исследования* была достаточно представительная коллекция специально подобранных геологических образцов: одинаковых и разных по своему химическому составу и структуре, по физическим свойствам ограничивающей поверхности (пористость, проницаемость и др.), по геологическому возрасту и генезису;

⁹Для измерения массы использовались аналитические весы (лабораторные равноплечие 2-го класса модели ВЛР-200г № 66–509, паспорт 1К2.790.300 ПС, «Госметр», Ленинград, 1989), которые дали возможность проводить так называемое точное взвешивание; *N.B.!*: здесь речь идёт не об *абсолютных* измерениях, т. е. когда определяется сама масса и когда необходимо

до 55 образцов так, чтобы в ней были полноценно представлены выделившиеся группы образцов с разным типом динамики их масс, что обнаружилось в первом наблюдении. Семь таких групп (*I – VII*) описано во второй главе монографии [18]. Здесь укажем, что тип динамики массы выделялся по двум его характеристикам: по значению увеличения массы ΔM за время интенсивного таяния снежного покрова и по форме линии, которая соединяет точки графика $M(N) - M_{min}$ (где M_{min} — минимальное значение M в рассматриваемый период времени) на рис. 1. При этом было обнаружено, что имеется группа (отдельные чистые кристаллы, фрагменты монокристаллов или сливные сростки кристаллов разного химического состава, структуры и возраста, а также некоторые др.) *I*, которая не даёт заметной реакции на внешний необратимый процесс: $\Delta M < 1$ мг. Поэтому образцы этой группы могут быть использованы в качестве практического наглядного контроля процедуры взвешивания (на наличие в ней источников имитации изменения веса). Так как, если в то же время, когда масса образцов группы, например *VI*, увеличивается, как на рис. 1, на 18 мг (у образца A^{10}), а образец группы *I* (в данном случае образец *B*) не показывает заметного изменения массы, это фактически означает, что «эффект весов» отсутствует.

Итак, на рис. 1 изображена календарная динамика массы трёх весьма разных геологических образцов (*A* и *C* — из группы *VI*, а *B* — из группы *I*) в период времени, который включает интенсивное таяние снежного покрова. Номер измерения N соответствует дате наблюдения: первое относится к 21 марта, последнее — к 27 апреля; интенсивное таяние пришлось на период 28 марта ($N = 8$) — 31 марта ($N = 11$). Как видим, для образцов *A* (141 г, гранат, содержащий примеси) и *C* (71 г, раковина рапаны, арагонит) размах вариации массы за всё время наблюдения составил 18 и 14 мг соответственно, а образец *B* (137 г, гранат, чистый кристалл) не дал заметной реакции (и может выступать в роли контроля «эффекта весов»).

В 1992 году интенсивное таяние снежного покрова происходило в период 10–23 апреля, см. рис. 2, где приведено календарное поведение масс двух

принимать во внимание весь набор указанных в паспорте весов возможных погрешностей: учитывать, что взвешивания могут производиться на разных весах, с использованием разных наборов гирь, в разных условиях. Речь идёт только об *относительных* измерениях, т.е. об измерении *вариации* массы на одних и тех же весах, с использованием одного и того же набора гирь. Это отдельные многочисленные измерения в определённой последовательности наблюдений в обстановке стабильности специального лабораторного помещения, *когда перед и после каждого взвешивания контролируется «нуль весов»*. Поэтому погрешность измерений указывается по её значению, которое приведено в паспорте весов в графе погрешностей «при любых включениях встроенных гирь и их комбинациях» для соответствующего диапазона величины массы. Также подчеркнём, что геологические образцы с их богатым разнообразием дали возможность с помощью сравнительного анализа оценить роль изменений относительной влажности (как и изменений плотности воздуха) в лабораторном помещении и изменений атмосферного давления, а также изменений параметров используемых весов как источников имитации наблюдаемой динамики массы образцов (см. [18, с. 78–80, 85–86], а также [18, с. 154–158]).

¹⁰Характеристика ограничивающей поверхности образца *A*: микропористость отсутствует, проницаемость нулевая.

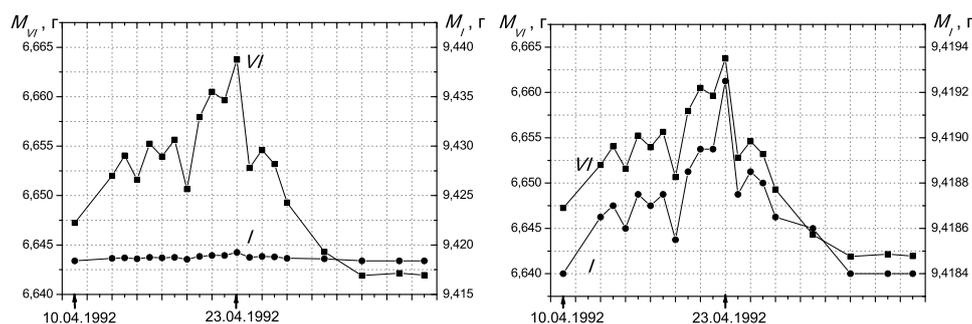


Рис. 2. Календарная динамика массы геологических образцов разных типов (из групп *I* и *VI*) — слева; справа — то же самое, при использовании другого масштаба на оси M_I . Погрешность измерений $\pm 0,00012$ г (использованы фрагменты рис. 2.6 и 2.11 из [18])

образцов: из группы *VI* (6,6 г, среднекристаллический агрегат доломита (преобладает) и слюды — мусковита, кристаллы плотно спаяны, микротрещиноватость отсутствует) и группы *I* (9,4 г, окатанная галька палеозойского гранита, 300–400 млн лет). Как видим, за период 10–23 апреля масса первого образца, M_{VI} , увеличилась на 16,5 мг (при погрешности измерений $\pm 0,12$ мг), а поведение массы второго может выступать в роли контрольного, подтверждающего отсутствие «эффекта весов». Однако стоит отметить, что незначительные колебания его массы (на уровне погрешности) при сравнении в соответствующем масштабе с M_{VI} выглядят не случайными (см. правую часть рис. 2).

Подведём итог: как видим в обоих наблюдениях, процесс весеннего таяния снежного покрова ассоциируется с увеличением массы соответствующей сложной организованной системы. Это соответствует известному (установленному Н.А. Козыревым) свойству иницирующего воздействия внешнего необратимого процесса на внутреннее состояние сложной системы, а именно: в случае процессов, сопровождающихся увеличением энтропии (как при процессе таяния снега), наблюдается упорядочение вещества материальных систем (чему, вследствие изменения внутренней энергии, соответствует, согласно представлениям [21] о динамической электронной структуре вещества, увеличение массы).

В дальнейшем (1994–1995) было проведено длительное ежедневное наблюдение в течение 375 дней. Данные по поведению массы образца группы *VI*, фигурирующего на рис. 2, представлены на рис. 3 слева. Как видим, рост массы, ассоциированный выше с процессом интенсивного весеннего таяния снежного покрова, вписывается в её общий весенний рост, начинающийся со дня весеннего равноденствия (21 марта). В настоящее время годовую динамику массы такого же идентичного геологического образца из группы *VI* отслеживает почти непрерывный геофизический мониторинг [18]¹¹. Для сравнения на рис. 3,

¹¹Мониторинг осуществляет специально созданная (В.И. Струминским, ИМ СО РАН) информационно-измерительная система (ИИС), измеряющая и записывающая каждые десять секунд следующие физические параметры: массу контролируемого образца, атмосферное давление, температуру и относительную влажность в помещении мониторинга, освещённость земной поверхности, напряжённость квазистатического электрического поля атмосферы в двух диа-

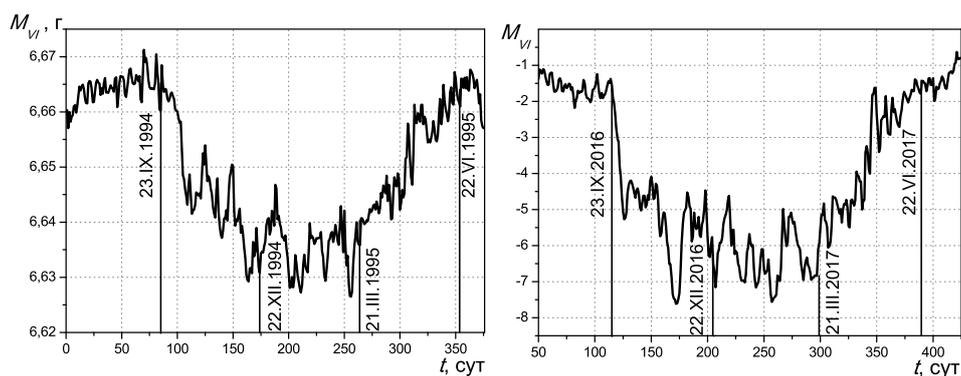


Рис. 3. Годовая календарная динамика массы геологического образца из группы VI, фигурирующего на рис. 2. Погрешность измерений $\pm 0,00012$ г (использованы фрагменты рис. 2.19 из монографии [18] — слева; справа — годовая динамика среднесуточного значения массы геологического образца, отличающегося от фигурирующего на левом графике только величиной массы (4,9 г), по данным специального геофизического мониторинга; одно большое деление на оси M_{VI} соответствует изменению массы на 5 мг, погрешность $\pm 0,12$ мг

справа, приведена годовая динамика среднесуточного значения массы образца, контролируемого данным мониторингом.

Обратим внимание: на рис. 3 специально нанесены известные астрономические даты, связанные с положением Земли на орбите — день осеннего равноденствия, день зимнего солнцестояния (перигелий), день весеннего равноденствия и день летнего солнцестояния (афелий). Как видим, динамика массы не обусловлена величиной гелиоцентрического расстояния Земли. По-видимому, эти даты очерчивают четыре характерных периода в динамике массы: «максимум», «спад», «минимум», «рост» — вследствие отражения в ней известных четырёх земных сезонов с их характерными необратимыми процессами, особенно в биосфере.

Упомянутый выше геофизический мониторинг был задействован для того, чтобы исследовать почти непрерывно суточное поведение массы исследуемых объектов, в частности, улавливать наблюдающиеся иногда (как обнаружилось, особенно часто — в условиях высокогорья, см. рис. 2.12 и 2.13 в монографии [18, с. 88–89]) весьма кратковременные, но весьма существенные «пики» (и «антипики», т. е. «провалы») массы геологических образцов. При этом следует иметь в виду, что сложная система на Земле находится под воздействием великого множества внешних необратимых процессов, земного и космического происхождения. Из общих соображений можно предполагать, что звёздные процессы, происходящие на Солнце, по их иницирующему воздействию на состояние структурированных наземных систем являются наиболее значимыми, ключевыми для их существования. Поэтому, если предметом исследования является именно наиболее значимый в указанном смысле внешний процесс, то в качестве объекта исследования следует выбрать геологическую систему

пазонах, температуру и относительную влажность атмосферы, микросейсмы и др.

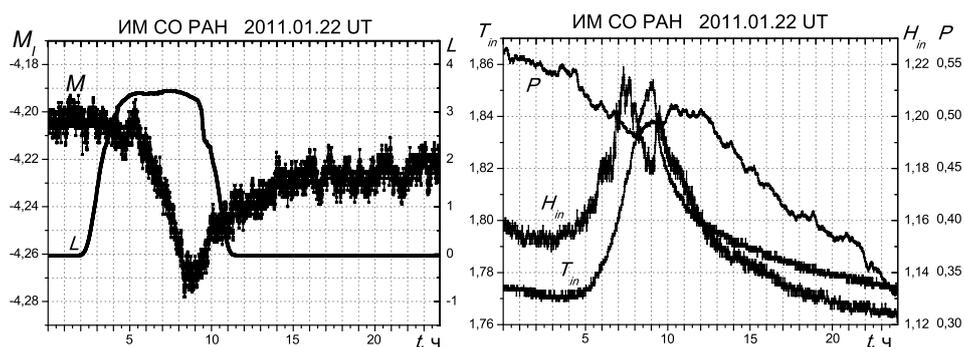


Рис. 4. Эффект суточного уменьшения массы M_I , связанного с Солнцем, и динамика условий его наблюдения: L , P , T_{in} и H_{in} . Используются единицы измерения мониторинга: изменение M_I на 0,01 адекватно изменению на 0,05 мг, такое же изменение значений T_{in} и H_{in} означает их изменение на $0,44^\circ\text{C}$ и 0,32 % соответственно, изменение P на 0,1 соответствует изменению на 1 мм рт. ст. (репродуцированы фрагменты рис. 4.1 и 4.4 в [18])

из группы I с малой (но не нулевой!) годовой вариацией массы. Дело в том, что весьма малая годовая вариация свидетельствует о том, что данная система реагирует в основном только на наиболее значимый фактор, тем самым выделяя его. Так что для исследований влияния фактора Солнца был выбран именно образец из группы I , который фигурирует на рис. 2 — как показало проведённое наблюдение в течение 375 дней, годовая вариация массы данного образца была порядка 1 мг.

Почти непрерывный (каждые десять секунд) мониторинг массы данного геологического образца при синхронном контроле характеристик условий измерения (температуры T_{in} и относительной влажности H_{in} в помещении мониторинга, атмосферного давления P , освещённости L земной поверхности и др.) дал возможность рассмотреть все наблюдающиеся типы суточной динамики массы и выделить особый тип — суточное уменьшение массы, ассоциирующееся с Солнцем (см. п. 4.1.1 в [18, с. 135–145]). При этом было установлено, что этот тип динамики массы (см. левый график на рис. 4) наблюдается только при достаточной прозрачности земной атмосферы (о чём свидетельствовало поведение освещённости L , см. рис. 4.1 и 4.2 в [18, с. 136–137]) и когда Солнце находится высоко над горизонтом — t в диапазоне $5 \div 8,5$ ч (UT), что соответствует известным свойствам явления инициирующего воздействия внешних необратимых процессов на внутреннее состояние сложных организованных систем (см. [18, с. 33–37]).

Обоснованный окончательный вывод о Солнце (точнее, о процессах на Солнце) как источнике наблюдаемого воздействия на величину массы геологического образца был сделан на основании наблюдений в Новосибирске во время полного солнечного затмения (1 августа 2008 г.) и многочисленных искусственных «затмений» Солнца, которые создают массивные высотные здания-башни в окрестности мониторинга. Эти экспериментальные данные представлены в следующем разделе.

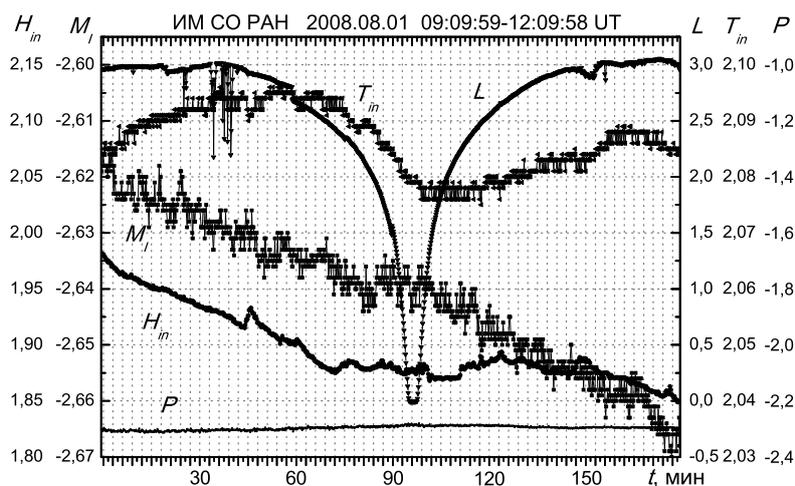


Рис. 5. Минутная динамика массы M_I и характеристик условий наблюдения в течение трёх часов, которые включают полное солнечное затмение. Описание масштабов на осях M_I , T_{in} , H_{in} и P дано в подписи к рис. 4 (репродуцирован рис. 4.9 в [18])

4. Экранирование массы: природное и искусственное

Астрономическое явление затмения Солнца массивным телом — Луной (т. е. экранирование влияния солнечных процессов) даёт возможность выявить роль фактора Солнца в динамике массы сложной организованной системы. Действительно, полное солнечное затмение дало нам возможность увидеть и записать в деталях кратковременное «выключение» влияния солнечных процессов на наземную систему. ИИС мониторинга чётко зафиксировала: в Новосибирске при наличии благоприятных атмосферных условий наблюдавшееся уменьшение контролируемой массы M_I прекратилось за 15 минут до наступления нулевой освещённости L (когда уже перекрыто порядка 50% солнечного диска) и возобновилось (с той же скоростью) через несколько минут после окончания нулевой освещённости (см. рис. 5).

Итак, фактический материал ИИС мониторинга подтвердил гипотезу о Солнце как источнике наблюдаемого эффекта суточного уменьшения массы при соответствующих условиях. Однако одного этого наблюдения (1 августа 2008 г.) во время полного солнечного затмения для обоснованного окончательного вывода, разумеется, недостаточно — для этого был необходим большой наблюдательный материал. Возможность его получения, не дожидаясь полных затмений Солнца, предоставило расположение мониторинга в Новосибирске. Дело в том, что, во-первых, в Новосибирске в те годы наблюдались весьма благоприятные атмосферные условия для обнаружения и регулярного наблюдения рассматриваемого связанного с Солнцем суточного уменьшения массы контролируемого образца. И во-вторых, мониторинг неожиданно обнаружил, что в зимние месяцы, когда Солнце не поднимается высоко над горизонтом, оно «заходит» за здания-башни, которые расположены в окрестности мониторинга, и немедленно наступает искусственное затмение — это чётко фиксирует

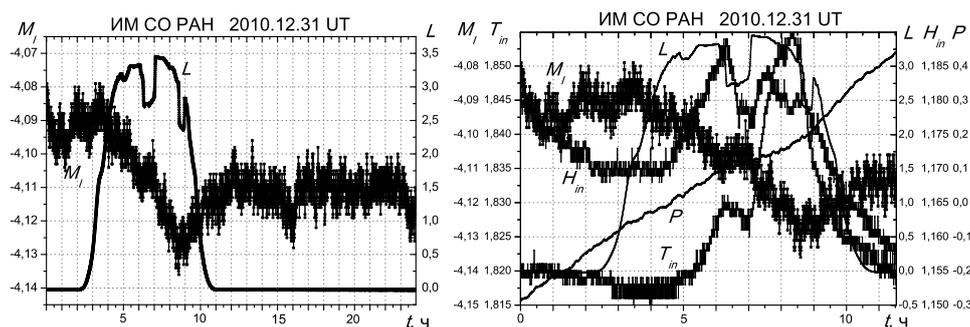


Рис. 6. Суточная динамика M_I и L — слева, справа — более подробное поведение M_I и характеристик условий измерения L , T_{in} , H_{in} и P в течение 11,5 часов. Величина масштабов на осях та же, что на рис. 5 (репродуцирован рис. 4.11 в [18])

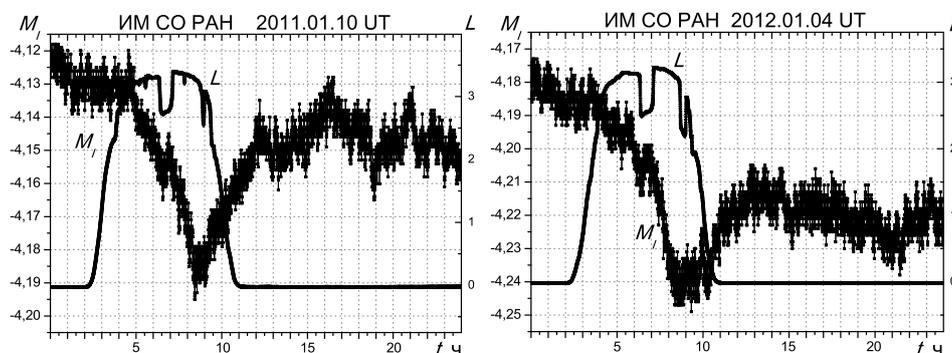


Рис. 7. Дополнение к рис. 6 (репродуцирован рис. 4.12 в [18])

динамика освещённости L , а одновременно с этим ИИС мониторинга записывает прекращение наблюдаемого уменьшения массы образца, что можно видеть на рис. 6. Сравните поведение M_I и L , когда время t находится в диапазоне $6 \div 7$ ч (UT), а также в диапазоне $8,5 \div 9$ ч (UT).

Таким образом, почти непрерывный мониторинг чётко показывает, что, как только массивное здание-башня экранирует Солнце, наблюдаемый суточный эффект уменьшения массы M_I прекращается на время этого экранирования — масса начинает увеличиваться. Ежегодно мониторинг предоставлял десятки таких записей. Для примера на рис. 6 и 7 приведены такие записи, относящиеся к разным годам. Этот обширный фактический материал заставил нас сделать вывод о проявлении фактора Солнца в естественной динамике массы наземной сложной системы.

5. Заключение

Главной целью двух последних разделов, п. 3 и п. 4, было убедительно показать на прямом и наглядном экспериментальном материале, что действительно имеет место реакция внутреннего состояния структурированного (на атомном

уровне) тела на инициирующее влияние внешних необратимых процессов, о котором шла речь в п. 2. А именно: показать, что **1)** интегральная, ключевая характеристика внутреннего состояния такого тела — масса может изменяться (когда изменяется внутренняя энергия), и **2)** имеет место определённая ежегодная динамика среднесуточного значения массы соответствующих геологических образцов (на примере образца группы VI), которую, по-видимому, обуславливает определённая периодичность внешних природных (наземных и космических) процессов. Другими словами, *подвести к выводу, что наблюдаемые вариации массы эталона килограмма, в принципе, не удивительны, тем более те, которые наблюдались.*

Разумеется, в роли эталона должны быть использованы тела с чрезвычайно ничтожной, нулевой вариацией массы. В наших исследованиях динамики массы объектов наиболее индифферентными по отношению к внешним лабораторным необратимым процессам (испарение жидкого азота и др.) показали себя золото и платина высокой пробы, ювелирные алмазы и опалы. Этот факт подтверждает целесообразность изготовления эталона килограмма из платины.

В заключение о крайне важном — условия хранения и процедура измерения массы эталона и его копий должны учитывать, что **1)** все наземные системы (специально не экранированные) находятся в мировом океане инициирующих внешних необратимых процессов (прежде всего следует рассмотреть возможное влияние процессов, которые находятся в окрестности эталона), и **2)** взвешивание на весах Киббла — чрезвычайно сложный эксперимент с участием квантового эффекта Холла и эффекта Джозефсона. Так что целесообразно предварительно проконтролировать влияние процессов, которые присутствуют в измерениях, на результаты измерения. Также необходимо длительное (не меньше года) достаточно подробное слежение за динамикой массы эталона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis R. The SI unit of Mass // *Metrologia*. 2003. V. 40. P. 299–305.
2. Gläser M., Borys M. Precision mass measurements // *Rep. Prog. Phys.* 2009. V. 72. P. 126101(1–32). doi:10.1088/0034-4885/72/12/126101
3. Girard G. The Third Periodic Verification of National Prototypes of the Kilogram (1988–1992) // *Metrologia*. 1994. V. 31. P. 317–336.
4. Stock M., Barat P., Davis R.S., Picard A., Milton M.J.T. Calibration Campaign against the International Prototype of the Kilogram in Anticipation of the Redefinition of the Kilogram Part I: comparison of the international prototype with its official copies // *Metrologia*. 2015. V. 52. P. 310–316.
5. Snegov V.S., Kamenskikh Yu.I., Viktorov I.V. Comparison of Duplicate Standards with the National Primary Standard for the Unit of Mass in 2014–2015 // *Measurement Techniques*. 2017. V. 59, No. 10. P. 1125–1131.
6. Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Крылов А.Н. Собрание трудов. Т. 7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. С. 1–696.
7. Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. 2-е изд. испр.и дополн. М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. 400 с.

8. Сомсиков В.М. К основам физики эволюции. Алматы, 2016. 306 с.
9. Еганова И.А., Каллис В. О моделировании нейтрона в классической физике: методический обзор // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13, № 2(200). С. 403–417.
10. Еганова И.А., Каллис В. Основание Мира Минковского как математической структуры: к ответу на вопрос Римана // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4(44). С. 33–48.
11. Еганова И.А., Каллис В. Физика для геологии: об объективной реальности Мира событий // УГЖ. 2018. № 4(124). С. 3–18.
12. Окунь Л.Б. Понятие массы. (Масса, энергия, относительность) // УФН. 1989. Т. 158, вып. 3. С. 511–530.
13. Majorana Q. On gravitation. Theoretical and experimental researches // London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine [series 6]. 1920. V. 39. P. 488–504.
14. Martins R. de A. Majorana's Experiments on Gravitational Absorption // Pushing Gravity : new perspectives on Le Sage's theory of gravitation / Ed. M.R. Edwards. Montreal : Apeiron, 2002. P. 219–238.
15. Дедов В.П. К вопросу о природе нецентральности гравитационного поля Луны // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Под ред. М.М. Лаврентьева, В.Н. Самойлова. Новосибирск : Академическое изд-во «Гео», 2006. С. 63–68.
16. Cook A. Experiments on gravitation // Three hundred years of gravitation / Eds. S. Hawking, W. Israels. Cambridge : Cambridge University Press, 1987. P. 51–79.
17. Cook A. Experiments on gravitation // Rep. Prog. Phys. 1988. V. 51. P. 707–757.
18. Еганова И.А., Каллис В., Самойлов В.Н., Струминский В.И. Геофизический мониторинг Дубна–Научный–Новосибирск: фазовые траектории массы. Новосибирск : Академическое изд-во «Гео», 2012. 188 с.
19. Эйнштейн А. $E = mc^2$: настоящая проблема нашего времени // Собрание научных трудов. М. : Наука, 1966. Т. 2. С. 653–656.
20. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М. : Наука, 1977. 383 с.
21. Грызинский М. Об атоме точно: Семь лекций по атомной физике. Новосибирск, 2004; М. : Editorial URSS, 2005. 94 с.

INNATE INTERCONNECTION IN THE WORLD OF EVENTS: METHODOICAL COMMENTARY ON THE INTRODUCTION OF A NEW MASS STANDARD**I.A. Eganova**¹Ph.D.(Phys.-Math.), e-mail: eganova@math.nsc.ru**W. Kallies**²Ph.D.(Phys.-Math.), Dr.rer.nat., e-mail: wkallies@jinr.ru¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia²Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Abstract. This paper is devoted to the two essential circumstances that should be taken into account when using the new standard (prototype) of mass — the kilogram, primarily, in the procedure of measuring mass by means of the Kibble balance, i.e.: the innate interconnection in the World of events (in space-time) and the belonging of the mass standard to complex structured objects. In the three sections of the paper (sec. 2–sec. 4) the main traits of the mentioned above circumstances are discussed and illustrated, due to (sec. 1) the decision of the International Committee for Weights and Measures on redefining the prototype of the kilogram after 20 May 2019. In the limelight is a phenomenon of change of mass of a complex organized object due to change of its inner energy that is associated with the phenomenon of initializing influence of external irreversible processes that belongs to temporal aspect of the objective reality. Theoretical considerations (sec. 2) are supported with direct and clear experimental material (sec. 3 and sec. 4). In conclusion, general recommendations on measuring mass of structured (on atomic level) object by means of the Kibble balance, that follow from the discussed circumstances, are given.

Keywords: mass prototype, kilogram, Kibble balance, innate (a priori) interconnection, World of events (space-time), structured objects, open systems, irreversible processes.

REFERENCES

1. Davis R. The SI unit of Mass. *Metrologia*, 2003, V. 40, pp. 299–305.
2. Gläser M. and Borys M. Precision mass measurements. *Rep. Prog. Phys.*, 2009, V. 72, pp. 126101(1–32). doi:10.1088/0034-4885/72/12/126101
3. Girard G. The Third Periodic Verification of National Prototypes of the Kilogram (1988–1992). *Metrologia*, 1994, V. 31, pp. 317–336.
4. Stock M., Barat P., Davis R.S., Picard A., and Milton M.J.T. Calibration Campaign against the International Prototype of the Kilogram in Anticipation of the Redefinition of the Kilogram. Part I: comparison of the international prototype with its official copies. *Metrologia*, 2015, V. 52, pp. 310–316.
5. Snegov V.S., Kamenskikh Yu.I., and Viktorov I.V. Comparison of Duplicate Standards with the National Primary Standard for the Unit of Mass in 2014–2015. *Measurement Techniques*, 2017, V. 59, no. 10, pp. 1125–1131.

6. N'yuton I. Matematicheskie nachala natural'noi filosofii. Krylov A.N., Sobranie trudov., V. 7. Moscow; Leningrad, AN SSSR Publ., 1936, pp. 1–696. (in Russian)
7. Khramov Yu.A. Fiziki: Biograficheskii spravochnik, 2-e izd., ispr. i dopoln. Moscow, Nauka GRFML Publ., 1983, 400 p. (in Russian)
8. Somsikov V.M. K osnovam fiziki evolyutsii. Almaty, 2016, 306 p. (in Russian)
9. Eganova I.A. and Kallies W. On Modeling the Neutron in Classical Physics: Methodical Review. Phys. Part. Nuclei Lett. URL: <https://link.springer.com/article/10/1134/S1547477119030130#Bib1>. (in Russian)
10. Eganova I.A. and Kallis V. Osnovanie Mira Minkovskogo kak matematicheskoi struktury: k otvetu na vopros Rimana. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 4(44), pp. 33–48. (in Russian)
11. Eganova I.A. and Kallis V. Fizika dlya geologii: ob ob"ektivnoi real'nosti Mira sobytii. UGZh, 2018, no. 4(124), pp. 3–18. (in Russian)
12. Okun' L.B. Ponyatie massy. (Massa, energiya, otnositel'nost'). UFN, 1989, V. 158, iss. 3, pp. 511–530. (in Russian)
13. Majorana Q. On gravitation. Theoretical and experimental researches. London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine [series 6], 1920, V. 39, pp. 488–504.
14. Martins R. de A. Majorana's Experiments on Gravitational Absorption. Pushing Gravity: new perspectives on Le Sage's theory of gravitation. Ed. M.R. Edwards, Montreal, Apeiron, 2002, pp. 219–238.
15. Dedov V.P. K voprosu o prirode netsentral'nosti gravitatsionnogo polya Luny. Poisk matematicheskikh zakonomernostei Mirozdaniya: fizicheskie idei, podkhody, kontseptsii. Pod red. M.M. Lavrent'eva, V.N. SamoiloVA, Novosibirsk, Akademicheskoe izd-vo "Geo", 2006, pp. 63–68. (in Russian)
16. Cook A. Experiments on gravitation. Three hundred years of gravitation. Eds. S. Hawking, W. Israels, Cambridge, Cambridge University Press, 1987, pp. 51–79.
17. Cook A. Experiments on gravitation. Rep. Prog. Phys., 1988, V. 51, pp. 707–757.
18. Eganova I.A., Kallis V., SamoiloV V.N., and Struminskii V.I. Geofizicheskii monitoring *Dubna–Nauchnyi–Novosibirsk*: fazovye traektorii massy. Novosibirsk, Akademicheskoe izd-vo "Geo", 2012, 188 p. (in Russian)
19. EinshTEIN A. $E = mc^2$: nastoyatel'naya problema nashego vremeni. Sobranie nauchnykh trudov. Moscow, Nauka Publ., 1966, V. 2, pp. 653–656. (in Russian)
20. Ugarov V.A. Spetsial'naya teoriya otnositel'nosti. Moscow, Nauka Publ., 1977, 383 p. (in Russian)
21. Gryzinskii M. Ob atome tochno: Sem' lektsii po atomnoi fizike. Novosibirsk, 2004; Moscow, Editorial URSS Publ., 2005, 94 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 24.03.2019

СТРУКТУРЫ КУЛАКОВА В ОПИСАНИИ МИРА

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Показано, каким образом представление об устройстве Мира может исходить не из того «из чего устроен Мир», а из того, по каким образцам (паттернам) он устроен. Такими паттернами могут быть так называемые физические структуры новосибирского физика В.И. Кулакова, обобщённые позже Г.Г. Михайличенко и Ю.С. Владимировым. Мы показываем, что физические структуры обнаруживают своё присутствие в социально-психологических отношениях людей, в экономических отношениях людей, предприятий и экономик, в ботанике. Более того, показано, что структуры Кулакова–Владимирова подсказывают нам, каким образом можно менять физические законы.

Ключевые слова: Структуры Кулакова, физика, социология, психология, микроэкономика, макроэкономика, ботаника, космогония Лема.

С расширением знания время от времени наступает необходимость изменить расстановку данных, чаще всего это происходит по новым принципам, но всегда остаётся провизорным.

Гете. *Метаморфоз растений*. 1790 г.

Наука развивалась таким образом, что, объясняя окружающий Мир, человек пытался указать первоэлементы, из которых состоят объекты и явления. И это относится не только к наукам о природе, но и к наукам об обществе.

Общество — это социально-экономические отношения. Правильное описание структуры социальных и экономических отношений является и правильным описанием структуры общества. Из каких простейших структурных элементов, или «первоструктур», складываются социально-экономические отношения? Задавая такой вопрос, мы во главу угла ставим не простейшие элементы, скажем, крестьяне, рабочие, управленцы и т. д., образующие общество, а простейшие структуры, составляющие в конечном итоге структуры и организацию всего общества и его экономики.

Поиск «первоструктур» не в традиции западной науки. Тем не менее в 1970 году нобелевский лауреат И.Е. Тамм писал: «...более перспективно искать не исходную «первоматерию», а исходные «первоструктуры» — такая

переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественной и в логическом, и в естественно-научном отношении...». Он усматривал при этом необходимость отказа от наглядных представлений: «...Проблема отказа от "наглядности" вставала перед человеческим интеллектом и раньше. Так, уже пифагорейская традиция осознала необходимость перехода от пластического Эйдоса¹ к чистому Логосу², однако "телесно-чувственная" природа греческой цивилизации помешала реализации этой программы — европейская наука в каком-то смысле унаследовала это бремя "наглядности", в несении которого есть своя прелесть» [1].

И.Е. Тамм высказал эту мысль в предисловии к книге своего ученика Ю.И. Кулакова, в которой «первоструктуры» были найдены для описания физики и геометрии. Однако идеи Ю.И. Кулакова универсальны; актуальны и для социологии, и для экономики, и для ботаники, и для космогонии.

1. Теория систем отношений Ю.И. Кулакова

В теории Ю.И. Кулакова постулируется наличие одного или нескольких множеств M, F, \dots элементов, между которыми определены отношения, обладающие двумя свойствами. Во-первых, некоторый набор этих отношений, выраженных в виде чисел, должен удовлетворять специальному уравнению, именуемому *законом*, и, во-вторых, в данном законе можно одни элементы заменять на другие по правилу, называемому *фундаментальной симметрией*.

В простейшем случае отношение — это вещественное число, сопоставляемое паре, тройке, четвёрке и т. д. элементов [1]. В качестве элементов могут выступать объекты любой природы: физические тела, индивиды социальной группы, мужчины и женщины, элементарные частицы и т. д., а в качестве

¹Эйдос (греч. *eidos* — вид, образ) — термин античной философии и литературы, первоначально обозначавший «видимое» или «то, что видно», но постепенно получивший более глубокий смысл — «конкретная явленность», «телесная или пластическая данность в мышлении». Уже у Гомера термин обозначал «наружность» и преимущественно «прекрасную наружность». В античной натурфилософии Э. понимался почти исключительно как «образ» (Эмпедокл, Демокрит). Однако уже у Парменида Э. выступал как сущность, правда, так или иначе видимая. У Платона имеются различные значения Э. — «внешнее» и «внутреннее» и т. д., вплоть до значения субстанциальной идеи, которое для него особенно характерно. У Аристотеля Э. употреблялся также и в значении «формы». В стоицизме и неоплатонизме Э. имеет разнообразные значения (начиная с «наружности тела» и кончая самостоятельной субстанциальной идеей). (БСЭ)

²Логос (греч. *logos*) — термин древнегреческой философии, означающий одновременно «слово» (или «предложение», «высказывание», «речь») и «смысл» (или «понятие», «суждение», «основание»); при этом «слово» берётся не в чувственно-звуковом, а исключительно в смысловом плане, но и «смысл» понимается как нечто явленное, оформленное и постольку «словесное». Из бытовой сферы в понятие «Л.» вошёл ещё момент чёткого числового отношения — «счёта», а потому и «отчёта» (*logon didonai* — «отдавать отчёт»). Л. — это сразу и объективно данное содержание, в котором ум должен «отдавать отчёт», и сама эта «отчитывающаяся» деятельность ума, и, наконец, сквозная смысловая упорядоченность бытия и сознания; это противоположность всему безотчётному и бессловесному, безответному и безответственному, бессмысленному и бесформенному в мире и человеке.

отношений между элементами могут рассматриваться расстояния между телами (точками), родственные связи, отношения между полами, взаимодействия между частицами. Если ограничиваются одним множеством, то теория, которая строится, называется *унарной системой фундаментальных отношений*. В случае двух множеств соответствующая теория носит название *бинарной системы фундаментальных отношений*. Мы будем использовать для систем фундаментальных отношений название системы Кулакова.

Каждая система отношений отличается от любой другой парой натуральных чисел (r, s) , называемой рангом. Ю.И. Кулаков [1] и его ученик Г.Г. Михайличенко [2] показали, что существует классификация систем отношений, и нашли соответствующие алгебраические формулы для всех рангов (r, s) (см. 1.2).

Ю.И. Кулаков, Ю.С. Владимиров и их ученики [3, 4], ограничивая свои исследования рамками физики, продемонстрировали, что каждая система бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определённом физическому закону, например, ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т. д.).

Успех теории систем отношений в физике и геометрии заставляет думать о том, что эта теория предоставляет нам паттерны (образцы) первоструктур. Для того чтобы в этом убедиться, необходимо обнаружить их не только во всех естественных науках, таких как физика, но и социальных [9, 14], психологических [9] и экономических науках [16, 18, 19]. Это имеет смысл сделать сейчас, несмотря на то, что в XXI веке существует предубеждение, и это следует признать, против перенесения методов естествознания на науки об обществе. Однако такое предубеждение удерживается, как правило, среди исследователей, которых называют узкими специалистами. Те же, кто более склонен к философским обобщениям, чаще пытаются увидеть за достижением в конкретной области знаний пути к получению новых результатов и в других областях науки.

1.1. Формализация бинарных отношений

Рассмотрим два исходных абстрактных множества $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ и $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Отношение между этими множествами есть отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$, значение отношения между элементом i и элементом α представляется в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \quad (1)$$

Другими словами, отношение между любым i и любым α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

Будем предполагать, что отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что существуют два натуральных числа r и s такие, что найдётся отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r элементов $i_1, \dots, i_r \in \mathcal{M}$ и любого набора из s элементов

$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемой пары $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. В этом определении отчётливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любой элемент $i \in \mathcal{M}$ может быть заменён на любой элемент из \mathcal{M} , так же как и элементы из множества \mathcal{F} . Но при этом элементы из \mathcal{M} берут в количестве r , а из $\mathcal{F} — s$.

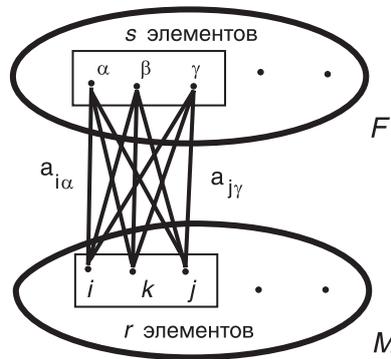


Рис. 1. Бинарная система отношений

1.2. Классификация бинарных систем Кулакова

Для того чтобы найти классификацию бинарных систем отношений Кулакова, необходимо представить соотношение (1) в форме вещественной функции от двух вещественных переменных x_i и y_α . С точки зрения математики это означает, что \mathcal{M}, \mathcal{F} рассматриваются как (гладкие) многообразия размерности соответственно m и n и на них вводятся локальные координаты

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n). \end{cases}$$

В этих координатах формула (1) принимает вид

$$a_{i\alpha} = \phi(x_i^1, \dots, x_i^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n). \quad (3)$$

Выражение (3) подставляется в (2), и после достаточно кропотливых выкладок находится вид функций ϕ и Φ . Приведём итог этих исследований.

Классификация бинарных систем Кулакова. Если m — размерность многообразия \mathcal{M} , а n — размерность многообразия \mathcal{F} , то ранг (r, s) связан с ними соотношениями: $r = n + 1, s = m + 1$.

- Не существует системы Кулакова ранга $(1, 1)$.
- Существуют системы Кулакова только ранга (r, r) , $r \geq 2$, $(r - 1, r)$, $r \geq 3$ и $(r + 1, r)$, $r \geq 2$.
- Существуют системы Кулакова ранга $(2, 4)$, $(4, 2)$.
- Все диагональные системы отношений с рангом (r, r) могут быть двух типов. Их ранги обозначают как (r, r) и $(r, r; a)$. Для системы отношений ранга (r, r) закон в некоторых координатах записывается в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где отношения между элементами множеств \mathcal{M}, \mathcal{F}

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2. \quad (5)$$

Системы отношений ранга $(r, r; a)$ характеризуются законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где отношения между элементами множеств \mathcal{M}, \mathcal{F}

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0, \quad r = 2; \\ a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r > 2. \quad (7)$$

- Для систем отношений ранга $(r + 1, r)$, $r \geq 2$, имеем

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & \dots & a_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{i_{r+1}\alpha_1} & \dots & a_{i_{r+1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2; \quad (9).$$

для систем ранга $(r - 1, r)$, $r \geq 3$,

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i_{r-1}\alpha_1} & a_{i_{r-1}\alpha_2} & \dots & a_{i_{r-1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 3. \quad (11)$$

- Для системы (4, 2) закон и отношения могут быть записаны в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & (a_{i_1\alpha_1} a_{i_1\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & (a_{i_2\alpha_1} a_{i_2\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_3\alpha_1} & a_{i_3\alpha_2} & (a_{i_3\alpha_1} a_{i_3\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_4\alpha_1} & a_{i_4\alpha_2} & (a_{i_4\alpha_1} a_{i_4\alpha_2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}, \quad (13)$$

а для системы (2, 4) –

$$\begin{aligned} & \Phi = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & a_{i_1\alpha_3} & a_{i_1\alpha_4} \\ a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & a_{i_2\alpha_3} & a_{i_2\alpha_4} \\ (a_{i_1\alpha_1} a_{i_2\alpha_1}) & (a_{i_1\alpha_2} a_{i_2\alpha_2}) & (a_{i_1\alpha_3} a_{i_2\alpha_3}) & (a_{i_1\alpha_4} a_{i_2\alpha_4}) \end{vmatrix} = \\ & = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2}{x_i^3 + y_\alpha^1}. \quad (15)$$

Ю.И. Кулаков и его ученики продемонстрировали, что каждая структура бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определённым физическим законам, например, ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т. д.).

1.3. Закон Ньютона — пример реализации паттерна Кулакова

Первый закон Ньютона — пример бинарного паттерна Кулакова ранга (2,2). Покажем это.

Рассматриваем ускорение $a_{i\alpha}$, которое приобретает масса m_i под воздействием силы f_α . Фундаментальный физический первый закон Ньютона можно записать как

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Действительно, достаточно вспомнить, что согласно закону Ньютона

$$a_{i\alpha} = \frac{f_\alpha}{m_i}, \quad m_i \in \mathcal{M}, \quad f_\alpha \in \mathcal{F},$$

и подставить эти бинарные отношения в (16).

2. Унарная система отношений

2.1. Межличностные взаимодействия как система фундаментальных отношений

Общество состоит из индивидов, членов общества, т. е. людей. Обозначим совокупность индивидов общества через \mathcal{P} . На данном этапе исследования социальной системы мы не различаем мужчин и женщин. *Межличностное взаимодействие* — это отношение между индивидами общества.

Будем обозначать индивидов, элементы множества \mathcal{P} , малыми латинскими буквами i, k, j, \dots . Поставим в соответствие межличностному взаимодействию отображение $\mu : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $i, k \in \mathcal{P}$, то значения межличностного взаимодействия между индивидом i и индивидом k представляются в виде формулы

$$m_{ik} = \mu(i, k). \tag{17}$$

Другими словами, межличностное взаимодействие между индивидами i и k характеризуется вещественным числом m_{ik} .

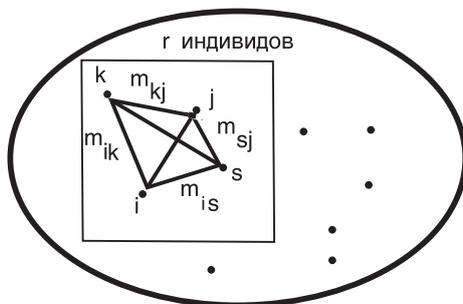


Рис. 2. Унарная система отношений = межличностное взаимодействие

Будем предполагать, что межличностное взаимодействие μ является *универсальным* в том смысле, что для данного взаимодействия существует натуральное число r такое, что существует отображение $\Phi : \mathbb{R}^{\frac{1}{2}r(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r индивидов i_1, \dots, i_r справедливо тождество

$$\Phi \begin{pmatrix} m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & \dots & m_{i_1 i_r} \\ & m_{i_2 i_3} & \dots & m_{i_2 i_r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & m_{i_{r-1} i_r} \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Число r называется *рангом* рассматриваемого типа межличностного взаимодействия. В данном определении отчётливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любой индивид может быть заменён на любого иного. Но при этом индивидов берут в количестве r . Естественно допустить, что $r \geq 2$, т. е. общество должно состоять хотя бы из двух индивидов. Как будет следовать из теории унарных систем отношений, в действительности $r \geq 3$. Другими словами, общество начинается с трёх индивидов (двое, общаясь, вынуждены оглядываться на третьего).

Как здесь не вспомнить анекдот времён строительства социализма: один русский — пьяница, двое русских — драка, трое русских — первичная партийная ячейка³.

Можно только удивляться, как математика и социология достаточно уверенно сходятся в оценке минимального числа участников межличностных взаимодействий.

Межличностное взаимодействие — это структура в смысле Бурбаки рода

$$\langle \mathcal{P}, \mu, r, \Phi \rangle.$$

2.2. Классификация унарных отношений ранга r , $3 \leq r \leq 5$

Для того чтобы найти классификацию унарных отношений, необходимо представить соотношение (17) в форме вещественной функции от двух вещественных переменных x_i и y_k . С точки зрения математики это означает, что \mathcal{P} рассматривается как (гладкое) многообразие размерности n и на нём вводятся локальные координаты

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n) \\ k \rightarrow x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n). \end{cases}$$

³Согласно уставу КПСС партийная организация должна содержать не менее трёх коммунистов.

В этих координатах формула (17) принимает вид

$$m_{ik} = \mu(x_i^1, \dots, x_i^n, x_k^1, \dots, x_k^n). \quad (19)$$

Выражение (19) подставляется в (18), и после достаточно кропотливых выкладок для некоторых значений n и r находится вид функций μ и Φ . Приведём итог этих исследований [1, 3].

Классификация межличностных взаимодействий. Если n — размерность многообразия \mathcal{P} , то ранг r связан с ней соотношением: $r = n + 2$. Причём $r \geq 3$.

А) Для систем отношений ранга $r = 3$ имеем четыре варианта:

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(1)}(1) = (x_i^1 - x_k^1)^2. \quad (20)$$

- Антисимметричные –

$$m_{ik}^{(2)}(1) = -m_{ki}^{(2)}(1) = x_i^1 - x_k^1. \quad (21)$$

В обоих случаях закон имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} \\ 1 & m_{i_2 i_1} & 0 & m_{i_2 i_3} \\ 1 & m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(3)}(1) = -x_i^1 x_k^1 + \sqrt{(1 + x_i^{1^2})(1 + x_k^{1^2})}, \quad (23)$$

с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} \\ m_{i_2 i_1} & 1 & m_{i_2 i_3} \\ m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(4)}(1) = x_i^1 x_k^1 + \sqrt{(1 - x_i^{1^2})(1 - x_k^{1^2})} \quad (25)$$

с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} \\ m_{i_2 i_1} & 1 & m_{i_2 i_3} \\ m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Б) Для систем отношений ранга $r = 4$ имеем девять вариантов:

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(1)}(2) = (x_i^1 - x_k^1)^2 + (x_i^2 - x_k^2)^2 \quad (27)$$

и

$$m_{ik}^{(2)}(2) = (x_i^1 - x_k^1)^2 - (x_i^2 - x_k^2)^2. \quad (28)$$

Закон для них имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & m_{i_1 i_4} \\ 1 & m_{i_2 i_1} & 0 & m_{i_2 i_3} & m_{i_2 i_4} \\ 1 & m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 0 & m_{i_3 i_4} \\ 1 & m_{i_4 i_1} & m_{i_4 i_2} & m_{i_4 i_3} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

- Далее

$$m_{ik}^{(3)}(2) = x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 + \sqrt{(1 - x_i^{1^2} + x_i^{2^2})(1 - x_k^{1^2} + x_k^{2^2})} \quad (30)$$

и

$$m_{ik}^{(4)}(2) = -x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 + \sqrt{(1 + x_i^{1^2} + x_i^{2^2})(1 + x_k^{1^2} + x_k^{2^2})} \quad (31)$$

с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & m_{i_1 i_4} \\ m_{i_2 i_1} & 1 & m_{i_2 i_3} & m_{i_2 i_4} \\ m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 1 & m_{i_3 i_4} \\ m_{i_4 i_1} & m_{i_4 i_2} & m_{i_4 i_3} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (32)$$

- Антисимметричные взаимодействия

$$m_{ik}^{(5)}(2) = -m_{ki}^{(5)}(2) = x_i^1 x_k^2 - x_i^2 x_k^1 \quad (33)$$

с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & m_{i_1 i_4} \\ -m_{i_1 i_2} & 0 & m_{i_2 i_3} & m_{i_2 i_4} \\ -m_{i_1 i_3} & -m_{i_2 i_3} & 0 & m_{i_3 i_4} \\ -m_{i_1 i_4} & -m_{i_2 i_3} & -m_{i_3 i_4} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(6)}(2) = x_i^1 x_k^1 + x_i^2 x_k^2 + \sqrt{(1 - x_i^{1^2} - x_i^{2^2})(1 - x_k^{1^2} - x_k^{2^2})}, \quad (35)$$

закон Φ имеет вид (32).

- Особые случаи взаимодействий ранга 4:

$$m_{ik}^{(7)}(2) = \ln(x_i^1 - x_k^1)^2 + \frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1}, \quad (36)$$

$$m_{ik}^{(8)}(2) = \ln [(x_i^1 - x_k^1)^2 + (x_i^2 - x_k^2)^2] + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1}, \quad (37)$$

$$m_{ik}^{(9)}(2) = \ln [(x_i^1 - x_k^1)^2 + (x_i^2 - x_k^2)^2] + \gamma \operatorname{arcth} \frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1}, \quad (38)$$

где γ — параметр. Для них закон Φ в явном виде не выписывается.

В) Для систем отношений ранга $r = 5$ имеем десять вариантов:

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(1)}(3) = x_i^1 x_k^1 + x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \sqrt{(1 - x_i^{1^2} - x_i^{2^2} + x_i^{3^2})(1 - x_k^{1^2} - x_k^{2^2} + x_k^{3^2})}, \quad (39)$$

$$m_{ik}^{(2)}(3) = x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \sqrt{(1 - x_i^{1^2} + x_i^{2^2} + x_i^{3^2})(1 - x_k^{1^2} + x_k^{2^2} + x_k^{3^2})}, \quad (40)$$

$$m_{ik}^{(3)}(3) = -x_i^1 x_k^1 - x_i^2 x_k^2 - x_i^3 x_k^3 + \sqrt{(1 + x_i^{1^2} + x_i^{2^2} + x_i^{3^2})(1 + x_k^{1^2} + x_k^{2^2} + x_k^{3^2})} \quad (41)$$

с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & m_{i_1 i_4} & m_{i_1 i_5} \\ m_{i_2 i_1} & 1 & m_{i_2 i_3} & m_{i_2 i_4} & m_{i_2 i_5} \\ m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 1 & m_{i_3 i_4} & m_{i_3 i_5} \\ m_{i_4 i_1} & m_{i_4 i_2} & m_{i_4 i_3} & 1 & m_{i_4 i_5} \\ m_{i_5 i_1} & m_{i_5 i_2} & m_{i_5 i_3} & m_{i_5 i_4} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

- Следующие два отношения имеют вид:

$$m_{ik}^{(4)}(3) = (x_i^1 - x_k^1)^2 + (x_i^2 - x_k^2)^2 + (x_i^3 - x_k^3)^2, \quad (43)$$

$$m_{ik}^{(5)}(3) = (x_i^1 - x_k^1)^2 - (x_i^2 - x_k^2)^2 - (x_i^3 - x_k^3)^2. \quad (44)$$

Для них

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & m_{i_1 i_4} & m_{i_1 i_5} \\ 1 & m_{i_2 i_1} & 0 & m_{i_2 i_3} & m_{i_2 i_4} & m_{i_2 i_5} \\ 1 & m_{i_3 i_1} & m_{i_3 i_2} & 0 & m_{i_3 i_4} & m_{i_3 i_5} \\ 1 & m_{i_4 i_1} & m_{i_4 i_2} & m_{i_4 i_3} & 0 & m_{i_4 i_5} \\ 1 & m_{i_5 i_1} & m_{i_5 i_2} & m_{i_5 i_3} & m_{i_5 i_4} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (45)$$

- Антисимметричные взаимодействия

$$m_{ik}^{(6)}(3) = -m_k^{(6)}(3) = x_i^1 x_k^2 - x_i^2 x_k^1 + x_i^3 - x_k^3 \quad (46)$$

с законом (45).

- Симметричные взаимодействия вида

$$m_{ik}^{(7)}(3) = x_i^1 x_k^1 + x_i^2 x_k^2 + x_i^3 x_k^3 + \sqrt{(1 - x_i^1 - x_i^2 - x_i^3)(1 - x_k^1 - x_k^2 - x_k^3)}, \quad (47)$$

и закон Φ имеет вид (42).

- Особые случаи взаимодействий ранга 5:

$$m_{ik}^{(8)}(3) = \ln(x_i^1 - x_k^1)^2 + \frac{x_i^2 - x_k^2 + x_i^3 x_k^1 - x_k^3 x_i^1}{x_i^1 - x_k^1}, \quad (48)$$

$$m_{ik}^{(9)}(3) = \ln [(x_i^1 - x_k^1)^2 + (x_i^2 - x_k^2)^2] + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1} + x_i^3 + x_k^3, \quad (49)$$

$$m_{ik}^{(10)}(3) = \ln [(x_i^1 - x_k^1)^2 - (x_i^2 - x_k^2)^2] + \gamma \operatorname{arcth} \frac{x_i^2 - x_k^2}{x_i^1 - x_k^1} + x_i^3 + x_k^3, \quad (50)$$

где γ — параметр. Для них закон Φ в явном виде не выписывается.

3. Социология и психология

3.1. Гендер как система фундаментальных отношений

Общество состоит из индивидов, членов общества. Обозначим совокупность индивидов общества через \mathcal{P} .

Гендер есть не что иное, как постулат о наличии в обществе двух типов индивидов: мужчин и женщин. *Гендерное отношение* – это отношение между множеством мужчин \mathcal{M} и множеством женщин \mathcal{F} . Будем обозначать мужчин малыми латинскими буквами i, k, j, \dots , а женщин малыми греческими – $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ⁴. В таком случае поставим в соответствие гендерному отношению отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$, то значения гендерного отношения между мужчиной i и женщиной α представляются в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \quad (51)$$

Другими словами, гендерное отношение между любым мужчиной i и любой женщиной α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

Будем предполагать, что гендерное отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что для данного гендера существуют два натуральных числа r и s такие, что найдётся отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r мужчин i_1, \dots, i_r и любого набора из s женщин $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \quad (52)$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемого гендера. В данном определении отчетливо видна постулируемая симметрия данного гендера: любая женщина может быть заменена на любую из множества \mathcal{F} , так же, как и мужчина из множества \mathcal{M} . Но при этом мужчин берут в количестве r , а женщин – s .

3.2. Об однополых и трехполых гендерах

Закономерен вопрос: можно ли рассматривать гендер как унарную систему отношений, что соответствует обществу с индивидами одного пола, или – тернарную, построенную на трёх множествах $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{S}$ (три пола), а также тетрадную (четыре пола) и т. д.?

Как показано группой Ю.И. Кулакова, однополый гендер ранга r возможен, но соответствующие отношения вида (51), которые в данном случае надо писать как a_{ik} , выражаются в виде более сложных математических формул, чем бинарные отношения для «двуполоых» гендеров. А вот «трехполые» гендеры и другие экзотические многополые гендеры не приводят к содержательной теории, по крайней мере, для случая вещественных отношений [3].

⁴Более правильно говорить не о мужчинах и женщинах, а о мужских и женских признаках.

3.3. Индекс различий Дункана

Чтобы убедиться в том, что формализация гендера на основе теории систем фундаментальных отношений эффективна, необходимо:

- 1) показать, что известные числовые характеристики гендерных отношений являются гендером некоторого ранга;
- 2) продемонстрировать, что найденные в 1.2 законы и соответствующие отношения являются характеристиками вполне определенных гендерных отношений.

К сожалению, в отличие от физики, гендерная социология от силы насчитывает 30 лет с момента своего появления, более того, является гуманитарной наукой и в силу этого предпочитает качественные описания количественным. Другими словами, в учебниках и монографиях по социологии гендера практически нет формул, поэтому трудно реализовывать намеченную программу по проверке адекватности предложенной формализации.

Тем не менее в научной литературе можно найти формулы, связанные с гендерными отношениями. Одной из таких формул является *индекс различий Дункана* [10]:

$$I = 100 \sum_{l=1}^p \frac{\left| \frac{m_l}{m} - \frac{f_l}{f} \right|}{2}. \quad (53)$$

Здесь p — число сфер производственной деятельности, или сфер занятости населения в обществе; m_l, f_l — число мужчин и, соответственно, женщин, занятых в сфере с номером l ; m, f — общее число трудоспособных мужчин и женщин. Индекс изменяется от 0 (совершенная интеграция) до 100 (совершенная сегрегация). Чем ближе индекс I к нулю, тем больше в обществе справедливости при получении работы для женщин.

Формула (53) легко приводится к виду (5) для гендера ранга (r, r) , $r = p + 1$. Достаточно ввести новые *координаты* для маскулинности и феминности:

$$\begin{cases} x_i^l = \left| \sqrt{\frac{50m_l}{m}} - \sqrt{\frac{50f_l}{f}} \right| \\ y_\alpha^l = \left| \sqrt{\frac{50m_l}{m}} + \sqrt{\frac{50f_l}{f}} \right|. \end{cases} \quad (54)$$

Таким образом, индекс различий Дункана — это гендерное отношение ранга (r, r) , $r \geq 2$.

4. Трансформация гендерных отношений

При формализации гендера естественно возникает вопрос о возможности трансформации, т. е. преобразования гендерных отношений.

Пусть дано гендерное отношение ранга (r, s) между мужчиной i из множества \mathcal{M} , обладающим некоторым набором параметров (x_i^1, \dots, x_i^m) , и женщиной α из множества \mathcal{F} , также имеющей совокупность параметров $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n)$,

определённых для данного отношения $a_{i\alpha} = \phi(x_i^1, \dots, x_i^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n)$ с законом $\Phi(a) = 0$. Требуется узнать, подлежит ли трансформации⁵ данное отношение в отношение ранга (\bar{r}, \bar{s}) вида $b_{i\alpha} = \psi(\bar{x}_i^1, \dots, \bar{x}_i^p, \bar{y}_\alpha^1, \dots, \bar{y}_\alpha^q)$ с законом $\bar{\Phi}(b) = 0$ при добавлении ряда мужских и / или женских параметров.

Если трансформация возможна, то существует отображение $g : \mathcal{M}^m \times \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{M}^p \times \mathcal{F}^q$ такое, что

$$\bar{x}_i^l = g_x(x_i^1, \dots, x_i^m), \quad l = \overline{1, p};$$

$$\bar{y}_\alpha^k = g_y(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n), \quad k = \overline{1, q},$$

при котором из $\Phi(a) = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}(b) = 0$.

В результате проведённых исследований было выявлено, что некоторые гендерные отношения определённого ранга могут трансформироваться в гендер более высокого ранга, т. е. $p \geq m, q \geq n$. Приведём итог этих исследований (рис. 3):

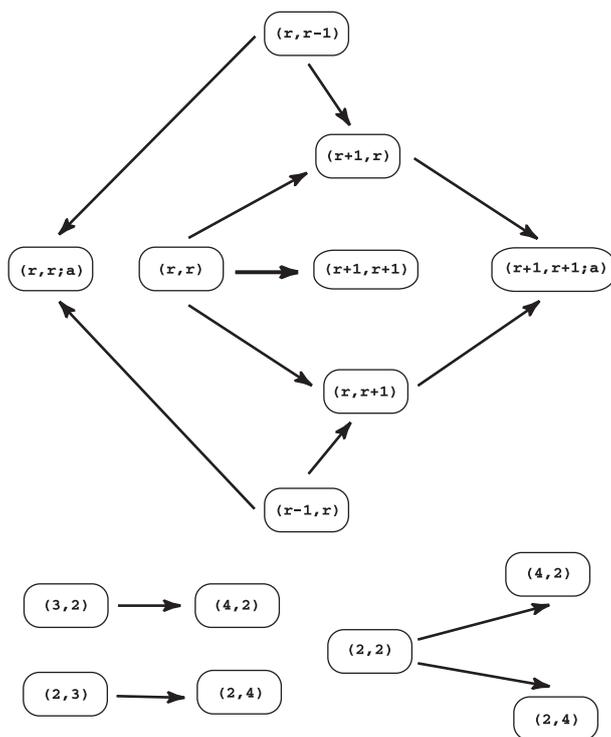


Рис. 3. Трансформация гендерных отношений

- гендерные отношения ранга (r, r) могут трансформироваться в гендер ранга $(r + 1, r)$, $(r, r + 1)$, $(r + 1, r + 1)$;
- гендерные отношения ранга $(r - 1, r)$ — в гендер ранга $(r, r; a)$ либо $(r, r + 1)$;

⁵Transformation (англ.) – преобразование.

- гендерные отношения ранга $(r, r - 1)$ — в ранг $(r, r; a)$ либо $(r + 1, r)$;
- гендерные отношения ранга $(r + 1, r)$ — в $(r + 1, r + 1; a)$;
- гендерные отношения ранга $(r, r + 1)$ — в $(r + 1, r + 1; a)$;
- гендерные отношения ранга $(2, 2)$ — в $(2, 4)$ либо $(4, 2)$;
- гендерные отношения ранга $(2, 3)$ — в $(2, 4)$;
- гендерные отношения ранга $(3, 2)$ — в $(4, 2)$.

5. Проекция на социометрию и психометрию

Проиллюстрируем применимость изложенной теории к различным формулам расчёта групповых и индивидуальных индексов, используемых в социальной психологии для диагностики малых групп.

Теоретическое направление в изучении малых социальных групп в современной социологии, исследующее эмоциональные межличностные отношения и экстраполирующее свои выводы на большие социальные группы и общество в целом, называется *социометрией*. Дадим более конкретное определение социометрии.

Социометрия — это количественное измерение эмоциональных отношений в малых группах [11].

Основной задачей социометрии является диагностика межличностных и межгрупповых отношений.

5.1. Индексы социометрии

На основе анализа результатов тестирования членов группы (респондентов) вычисляются индивидуальные и групповые социометрические индексы.

Социометрические индексы — это количественные показатели, характеризующие структуру межличностных отношений в малой группе (групповые социометрические индексы) или положение отдельных членов группы в этой структуре (индивидуальные социометрические индексы) [11].

Социометрические методы могут использоваться не только для изучения малых групп. В более широком смысле под социометрическими индексами понимают любые характеристики структуры отношений между элементами некоторого множества социальных объектов.

5.2. Индекс положения ребёнка в группе

Продemonстрируем возможности изложенной теории на примере одного из индивидуальных индексов — социометрического статуса i -го члена группы или, как часто его называют в литературе по психологии, — индекса психологической (эмоциональной) экспансивности члена группы.

Для описания взаимоотношений в группах детей он используется под названием *индекса положения (статуса) ребёнка* [12, с.193]:

$$P = \frac{\Pi_+ - \Pi_-}{N - 1}, \tag{55}$$

где Π_+ и Π_- — количество членов группы, которое избрало или отвергло данную личность, N — численность коллектива.

Для того чтобы вывести формулу (55), воспользуемся *бинарной комплексной системой отношений* ранга (3,3), которая сводится [3, с. 58–59] к *унарной вещественной системе отношений* ранга 5. Бинарная комплексная система отношений ранга (3,3) задаётся законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} \end{vmatrix} = 0 \tag{56}$$

и отношением

$$u_{i\alpha} = x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2 y_\alpha^2,$$

где $x_i^1, x_i^2, y_\alpha^1, y_\alpha^2$ — комплексные числа. Вводя шивку множеств \mathcal{M} и \mathcal{F} посредством формального сопряжения

$$x_i^1 + i \cdot x_i^2 = \overline{y_\alpha^1 + i \cdot y_\alpha^2}, \quad x_k^1 + i \cdot x_k^2 = \overline{y_\beta^1 + i \cdot y_\beta^2},$$

получаем унарное вещественное отношение ранга 5

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \frac{1}{2}(u_{i\beta} + u_{k\alpha}) = \frac{1}{2}(x_i^1 y_\beta^1 + x_i^2 y_\beta^2 + x_k^1 y_\alpha^1 + x_k^2 y_\alpha^2) = \\ &= \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + x_k^1 \overline{x_i^1} + x_k^2 \overline{x_i^2}) = \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + \overline{x_i^1 x_k^1} + \overline{x_i^2 x_k^2}). \end{aligned}$$

Предположим, что индивид, чей статус вычисляется — это элемент i , а остальные члены группы — элементы k, l, \dots, p . Примем, что все числа $x_i^1, x_i^2, x_k^1, x_k^2, \dots, x_p^1, x_p^2$ нормированы (интенсивность отношений в группе одинакова, нет выделенных индивидов), т. е. имеют модуль $\sqrt{1/2(N-1)}$, где N — численность группы. Допустим также, что

$$x_i^1 = x_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} e^{i\phi} \quad \text{и} \quad \phi = 0,$$

$$x_k^1 = x_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} e^{i\phi_k}, \dots, x_p^1 = x_p^2 = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} e^{i\phi_p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} = \\ &= \frac{1}{2(N-1)} \{ [e^{i\phi_k} + e^{-i\phi_k}] + \dots + [e^{i\phi_p} + e^{-i\phi_p}] \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(N-1)} \sum_{j=k, \dots, p} \cos \phi_k.$$

Если считать, что индивиды j , которые избрали данную личность i , имеют фазу $\phi_j = 0$, а те, кто отверг — $\phi_j = \pi$, и при этом нет неопределившихся индивидов, то

$$\sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} = \frac{1}{N-1} \left[\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{\Pi_+} + \underbrace{(-1 - \dots - 1)}_{-\Pi_-} \right] = \frac{\Pi_+ - \Pi_-}{N-1}.$$

То есть мы получили индекс положения ребёнка⁶. В ходе вывода этой формулы мы делали упрощающие предположения, которые показывают, что формула, используемая в психологии и социологии, является частным случаем более сложного соотношения. Вводя, к примеру, различные значения для фаз ϕ_j , можно более полно учитывать разнообразие в межличностных взаимодействиях индивидов.

5.3. Степень адекватности ролевой перцепции руководителя

Приведём ещё один пример приложения теории систем фундаментальных отношений как теории межличностных взаимодействий к социальной психологии. Выведем *коэффициент ролевой перцепции руководителя* [13], используемый в качестве характеристики адекватности оценки руководителем членов группы,

$$K = \frac{d}{S_d / \sqrt{N}}, \quad (57)$$

где

$$d = \sum_{j=1}^N (A_j - B_j) / N, \quad d_j = (A_j - B_j), \quad d_0 = \sum_{j=1}^N d_j / N,$$

$$S_d = \sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{(d_j - d_0)^2}{N-1}},$$

A_j — оценка, данная руководителем j -му члену группы, B_j — оценка, данная группой j -му члену, N — численность коллектива.

Введём следующее обозначение:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{\left((A_j - B_j) - \sum_{j=1}^N (A_j - B_j) / N \right)^2}{N}}.$$

Тогда формулу (57) можно переписать в виде

⁶В книге [9] выведены остальные социометрические индексы из законов бинарных отношений соответствующего ранга.

$$K = \frac{\sqrt{N-1} \sum_{j=1}^N (A_j - B_j)/N}{\sigma}. \quad (58)$$

Для того чтобы вывести формулу (58), снова воспользуемся подобно тому, как это делалось в 5.2., бинарной комплексной системой отношений ранга (3,3), которая сводится [3, с. 58–59] к унарной вещественной системе отношений ранга 5:

$$m_{ik} = \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + \overline{x_i^1 x_k^1} + \overline{x_i^2 x_k^2}).$$

Предположим, что руководитель, для которого вычисляется коэффициент ролевой перцепции, — это элемент i , а остальные члены группы — элементы k, l, \dots, p . Допустим также, что для руководителя

$$x_i^1 = x_i^2 = \frac{\sqrt{N-1}}{\sigma\sqrt{N}} e^{i\phi} \text{ и } \phi = 0.$$

Для всех остальных индивидов в группе полагаем

$$x_k^1 = \frac{A_k}{\sqrt{N}} e^{i\phi_k^a}, \dots, x_p^1 = \frac{A_p}{\sqrt{N}} e^{i\phi_p^a};$$

$$x_k^2 = \frac{B_k}{\sqrt{N}} e^{i\phi_k^b}, \dots, x_p^2 = \frac{B_p}{\sqrt{N}} e^{i\phi_p^b}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} = \\ & = \frac{\sqrt{N-1}}{2\sigma N} \{ [A_k(e^{i\phi_k^a} + e^{-i\phi_k^a}) + B_k(e^{i\phi_k^b} + e^{-i\phi_k^b})] + \\ & \quad + \dots + [A_p(e^{i\phi_p^a} + e^{-i\phi_p^a}) + B_p(e^{i\phi_p^b} + e^{-i\phi_p^b})] \} = \\ & = \frac{\sqrt{N-1}}{\sigma N} \{ [A_k \cos \phi_k^a + B_k \cos \phi_k^b] + \dots + [A_p \cos \phi_p^a + B_p \cos \phi_p^b] \}. \end{aligned}$$

Если считать, что в случае взаимодействия с руководителем индивид j имеет одинаковую с ним фазу $\phi_j^a = 0$, а при взаимодействии с другими членами группы — $\phi_j^b = \pi$, то

$$\sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} = \frac{\sqrt{N-1}}{\sigma N} \{ [A_k - B_k] + \dots + [A_p - B_p] \} = K.$$

Таким образом, мы получили коэффициент ролевой перцепции руководителя, характеризующий насколько адекватно оцениваются руководителем члены группы в межличностных взаимодействиях.

6. Первичные структуры микроэкономики

Покажем, как теория Ю.И. Кулакова может быть применена к описанию микроэкономических отношений.

6.1. Выручка предприятия

Предположим, что имеется некоторое множество $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ предприятий-производителей некоторого товара и множество $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ групп покупателей этого товара. Группа покупателей — это локализованная группа покупателей, т. е. население деревни, посёлка, микрорайона, города.

Отношение «производитель–группа покупателей» — это отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Мы примем, что это микроэкономическое отношение является структурой Кулакова рода (2, 2). В таком случае

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i^1 \\ \alpha \rightarrow y_\alpha^1, \end{cases}$$

и в силу (5)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^1 y_\alpha^1. \quad (59)$$

Если принять, что x_i^1 — это цена на товар i -го производителя, а y_α^1 — количество (в потенциале) товара, приобретаемого α -й группой покупателей, то формула (20) есть не что иное, как выручка i -го предприятия от продажи своего товара α -й группе покупателей.

Универсальность данной первоструктуры состоит в предположении, что пары производителей и пары групп покупателей могут заменяться на любые другие аналогичные пары. Выделение пары производителей, по существу, представляет требование отсутствия монополии какого-либо производителя на товарном рынке. Пара групп покупателей — это отсутствие на рынке диктата одной группы покупателей (монопсония).

Таким образом, микроэкономическая структура Кулакова ранга (2, 2) описывает формулу выручки предприятия-производителя, работающего в условиях идеального рынка.

6.2. Потенциальная потребность в товаре

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга (3, 3). Для неё

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^0, x_i^1) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1), \end{cases}$$

и в силу (7)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1. \quad (60)$$

Теперь мы примем, что $x_i^0 = (r_t)_i$ — объём товаров, требующих замены (потребленных или отслуживших свой срок); $x_i^1 = (b_t)_i$ — среднее количество товара, приобретаемое одним покупателем в период t ; $y_\alpha^0 = (l_t)_\alpha$ есть изменение потребности (потенциального спроса) на товар за счёт воздействия различных факторов (рекламы, появления новых товаров-субститутов, социально-экономической политики и др.); $y_i^1 = (m_t)_\alpha$ — изменение количества покупателей в группе α .

В таком случае формула (60) примет вид

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = (r_t)_i + (l_t)_\alpha + (b_t)_i(m_t)_\alpha \quad (61)$$

и описывает она потенциальную потребность в товаре в период t . Данная формула известна в микроэкономике [7, с. 57].

Теперь, говоря об универсальности данной первоструктуры, мы должны представлять себе, что речь идёт о более сложной симметрии троек производителей и троек групп покупателей, означающей более развитую систему конкуренции, антимонополии и антиолигополии.

Производитель i характеризуется парой чисел $((r_t)_i, (b_t)_i)$. Экономический смысл этих данных оговаривался выше. Очевидно, что подобные экономические показатели обязано иметь серьёзное предприятие-производитель для того, чтобы успешно продавать свой товар.

Группа покупателей α характеризуется парой чисел $((l_t)_\alpha, (m_t)_\alpha)$. Очевидно, что речь идёт о большом количестве групп покупателей, т. к. деятельность предприятий-производителей, описанных в данной структуре, для того, чтобы быть успешной, должна быть направлена на большое количество групп покупателей.

6.3. Финансирование предприятия с помощью заёмного капитала

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга (4, 2). Имеем

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = x_i^1 \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3) \end{cases}$$

и в силу (13)

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}. \quad (62)$$

Осталось обнаружить эту структуру в экономике. Известно, однако, что фирма-заёмщик при кредитном финансировании получает особое преимущество, которое называется «левиридж-эффект», или действие финансового рычага.

Исходным пунктом действия эффекта является процентная ставка за кредит I и общая рентабельность капитала активов R_A , вычисляемая по формуле

$$R_A = \frac{\Pi + I \cdot 3C}{CC + 3C}, \quad (63)$$

где Π — прибыль за рассматриваемый период, CC , $ЗС$ — соответственно собственные и заёмные средства (капитал) за тот же период [7, с. 340].

Положим

$$a_{i\alpha} = R_A, \quad x_i^1 = ЗС, \quad y_\alpha^1 = I, \quad y_\alpha^2 = \Pi, \quad y_\alpha^3 = CC.$$

Тогда формулы (63), (62) преобразуются одна в другую.

Таким образом, кредитор i характеризуется числом $ЗС$, т. е. предоставляемым кредитом, а предприятие (фирма–заёмщик) α — числами (I, Π, CC) . То, что ставка за кредит I является характеристикой предприятия, а не кредитора, объясняется тем, что от самой фирмы зависит, берёт ли она кредит на предложенных условиях или не берёт.

Обратим внимание на естественность фундаментальной симметрии в данном случае. Она требует инвариантности отношения (62) между кредиторами и предприятиями относительно замены пар кредиторов и четвёрок предприятий. Наличие двух кредиторов даёт возможность выбора для предприятия (у кого брать, на каких условиях), а существование четырёх фирм–заёмщиков обеспечивает само существование кредита как формы бизнеса.

Как видим, все структуры Кулакова присутствуют в микроэкономике.

7. Первичные структуры макроэкономики

7.1. Чем занимается макроэкономика?

Макроэкономика изучает национальную экономику государства. Покажем, что первичные структуры Кулакова легко обнаруживаются и в современной макроэкономике, подверженной процессу глобализации.

Закономерности функционирования макроэкономики связаны с *потреблением и инвестициями*.

Потребление домашних хозяйств C — это расходы на конечные товары и услуги, купленные в целях получения удовлетворения или насыщения потребностей посредством их использования.

Вторым важным компонентом частных расходов являются инвестиции I предпринимателей (фирм). Инвестиции играют две роли в макроэкономике. Во-первых, поскольку они — большой и изменчивый компонент расходов, резкие увеличения или уменьшения инвестиций могут оказывать огромное воздействие на совокупный спрос; а изменения последнего, в свою очередь, влияют на выпуск и занятость. Кроме того, инвестиции приводят к накоплению капитала. Прирост запаса сооружений и оборудования увеличивает потенциальный выпуск страны и обеспечивает экономический рост в длительном периоде. Таким образом, инвестиции играют двоякую роль, воздействуя в коротком периоде на выпуск через совокупный спрос, и в длительном периоде — на рост выпуска через влияние образования капитала на потенциальный выпуск и совокупное предложение.

7.2. Потребительский спрос

Таким образом, национальная макроэкономика (i, α) характеризуется двумя основными компонентами: потребительским спросом (потреблением) домашних хозяйств C_i и инвестиционным спросом предпринимателей I_α . Примем, что элементами множества $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ являются домашние хозяйства всех государств, а элементами $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ — предприниматели (фирмы) этих государств.

В простой макроэкономической кейнсианской модели [15, с.28] известна формула

$$Y = C + I, \quad (64)$$

где Y — совокупный спрос.

Мы ей придадим более широкий смысл:

$$Y_{i\alpha} = C_i + I_\alpha. \quad (65)$$

Формулу (65) можно получить в рамках теории фундаментальных отношений, лишь допуская существование фундаментальной симметрии ранга (r, s) . Это означает, что мы должны допустить инвестиции фирм одного государства в национальную экономику другого и наоборот. Иными словами, это означает наличие отношений $Y_{i\alpha}$ без оговорки, что домашнее хозяйство i связано только с инвестициями своих фирм. Инвестиции α должны вкладываться (более того, быть заметными) в другую национальную экономику. Это предположение означает возможность фундаментальной симметрии, и, следовательно, появляются первоструктуры Кулакова. В рассматриваемом случае это первоструктура ранга $(2, 2; a)$, поскольку для неё [1, 16] вводятся «координаты»:

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = x_i^0 \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = y_\alpha^0, \end{cases}$$

а соответствующее отношение имеет вид (для $r = 2$):

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_\alpha^0. \quad (66)$$

Следовательно, если принять, что $a_{i\alpha} = Y_{i\alpha}$, $x_i^0 = C_i$, $y_\alpha^0 = I_\alpha$, то формула (66) перейдёт в формулу (65).

Насколько экономически обоснована описанная процедура введения фундаментальной симметрии национальных экономик? Удивительно, но её легко увидеть, если обратиться к наблюдаемому в мировой экономике процессу, называемому *глобализацией*.

«Глобализация — это единый рынок, единое финансово-информационное пространство для конкуренции. Глобализация — это не то, что все одной семьёй теперь будут. Наоборот, глобализация есть предельно жёсткая конкуренция!»⁷.

⁷Делягин М. <http://www.ropnet.ru/ogonyok/win/200210/10-18-20.html>

«Под глобализацией экономики чаще всего понимается стремительное увеличение потоков товаров, инвестиций, кредитов, информации, обменов людьми и идеями, а также расширение географии их распространения. Скорость, интенсивность и глубина проникновения этих потоков возрастает до степени, когда национальные экономики становятся взаимозависимыми. Элементы национальных экономик (национальные производители, потребители, финансовые и другие институты) напрямую интегрируются в общее мировое экономическое пространство. В результате национальные производители становятся всё больше связаны с иностранными потребителями. Соответственно и на внутренних рынках в борьбе за национальных потребителей они вынуждены на равных конкурировать с иностранными экономическими субъектами. Таким образом, если раньше происходило количественное увеличение взаимодействия отдельных национальных экономик в форме роста потоков товаров, капитала и инвестиций, то сегодня наблюдается качественное изменение в их взаимодействии... Глобализация <...> приводит к тому, что национальные экономики становятся частью единой мировой экономической системы, т. е. глобализированной экономики».⁸

Приведённое определение заставляет предположить, что процессы глобализации не дадут преимущества ни одной национальной экономике. В случае «гибели» конкретной национальной экономики, включённой в систему глобальных экономических отношений, её место займёт другая, более удачливая в конкурентной борьбе. Это говорит о наличии некоторой *фундаментальной симметрии*, характерной для эпохи глобализации.

7.3. Валовый внутренний продукт

Рассмотрим другую формулу макроэкономики [15, с.10]:

$$\text{ВВП} = C + I + G + NX, \quad (67)$$

где ВВП — валовый внутренний продукт государства, C — потребительские расходы домашних хозяйств, I — инвестиционные расходы фирм, т. е. приобретение нового физического капитала или материальных активов, G — государственные закупки товаров и услуг (оно не включает государственные трансферты, которые лишь перераспределяют доходы), NX — чистый экспорт — разница (сальдо) между экспортом и импортом товаров и услуг (если импорт больше, чем экспорт, то NX — отрицательная величина).

Используя наши предположения, перепишем формулу (67) в виде:

$$\text{ВВП}_{i\alpha} = C_i + I_\alpha + G_\alpha + NX_i. \quad (68)$$

Покажем, что в данном случае имеем дело с первоструктурой ранга (4,4;а), для которой [1, 16]:

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1, y_\alpha^2) \end{cases}$$

⁸Насырова Л.Р., Литвиненко Н. Глобализация экономики. 2002.
<http://www.univer.omsk.ru/omsk/socstuds/glob/economic.html>.

и

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2 y_\alpha^2. \quad (69)$$

Примем, что $a_{i\alpha} = \text{ВВП}_{i\alpha}$, $x_i^0 = C_i$, $x_i^1 = 1$, $x_i^2 = NX_i$, $y_\alpha^0 = I_\alpha$, $y_\alpha^1 = G_\alpha$, $y_\alpha^2 = 1$, то формула (69) перейдет в формулу (68).

Заметим, что государство в данном случае рассматривается как фирма, а чистый экспорт отнесён к домашним хозяйствам. У экономиста это может вызвать возражения: они выделяют государство как самостоятельный элемент усложнённой макроэкономической модели (см. [15, с.7]), но нам думается, что на данном этапе обнаружения первичных структур Кулакова в макроэкономике наше допущение вполне оправдано.

8. Структуры Кулакова и рынок труда

8.1. Графические зависимости для равновесия на рынке труда

Ситуация на рынке труда иллюстрируется следующими графиками:

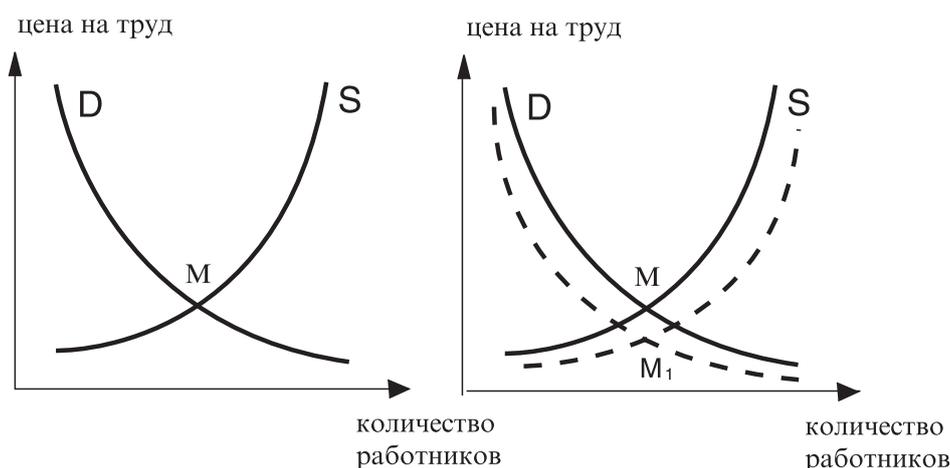


Рис. 4. Графическое описание равновесия на рынке труда

Здесь:

— кривая D — это спрос на труд. Зависимость простая: чем выше цена на трудовые ресурсы, тем меньше спрос на них;

— кривая S — это предложение труда. Чем выше цена на труд, тем больше людей предлагают свой труд на рынке труда;

— точка равновесия M . Когда спрос и предложение на труд равны, устанавливается относительное равновесие. Это равновесие не может находиться длительное время в устойчивом состоянии.

Возможны перемещения кривых S и D вверх и вниз. При этом происходит смещение точки равновесия M , и устанавливается новое относительное равновесие M_1 .

Каждая из двух приведённых кривых не задаётся посредством точной математической формулы. Например, очевидно, что кривая D может задаваться

как

$$W/P = \frac{c}{L}, \quad (70)$$

а кривая S –

$$W/P = c_1 \cdot L^2 + c_2. \quad (71)$$

Соотношение (70), будучи переписанным в виде

$$c = (W/P)L,$$

сразу обнаруживает структуру Кулакова рода (2,2). Роль отношения по Кулакову играет здесь величина c . Это отношение между работниками (L) и работодателями, определяющими оплату труда (W/P). Взаимозаменяемость работников и взаимозаменяемость работодателей определяет тип симметрии, которая и порождает системы отношений по Кулакову.

При выбранных переменных соотношение (71) не подпадает ни под одну из формул для фундаментальных отношений Кулакова. Тем не менее, универсальный характер системы отношений, выявленной Кулаковым, обнаруживается. Но для этого нужно перейти к обобщению теории Кулакова и описывать ситуацию равновесия M не с помощью одного отношения $f : \mathcal{S} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, а, естественно, с помощью пары отношений $f : \mathcal{S} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

8.2. Появление пары отношений Кулакова-Михайличенко при описании равновесий на рынке труда

Выше было дано описание рынка труда в виде двух кривых. Их пересечение задаёт точку равновесия.

Ось абсцисс X — величина требующегося труда (количество работников) (L). Ось ординат Y — величина реальной заработной платы (цена на труд) (W/P). Кривая D показывает, каким будет спрос на труд при определённой величине заработной платы. Показывает, что более низкой заработной плате соответствует больший спрос на труд и наоборот. Кривая S показывает величину предложения труда.

Кривые D и S можно получить также на основе принципа симметрий трудовых отношений. Для этого нужно использовать теорию двуметрических структур Михайличенко, обобщающую теорию фундаментальных отношений Кулакова. Г.Г. Михайличенко рассматривает не одно, как у Ю.И. Кулакова, отношение, а сразу два различных отношения.

В статье [2] даётся описание всех двуметрических структур ранга $(n + 1, 2)$.

Например, при $n = 2$ имеем следующую пару трудовых отношений:

$$f_1(X, Y; A, B) = XA, \quad f_2(X, Y; A, B) = YA + B.$$

Предположим, что трудовые отношения фиксированы, т. е.

$$f_1(X, Y; A, B) = XA = \text{const} = a,$$

$$f_2(X, Y; A, B) = YA + B = \text{const} = b.$$

Тогда, если принять, что $A = Y, B = -X$ (в 4-мерном пространстве выделяется 2-мерная плоскость), то

$$X = (f_1 - a)/Y,$$

$$X = Y^2 + b.$$

Переобозначив $Y = L, X = W/P$, находим конкретное выражение для кривых D и S . При этом возникает естественный вопрос: какой смысл имеют координаты A и B ? Оставляя этот вопрос пока без ответа, мы получаем, что фундаментальные отношения f_1, f_2 с точки зрения теории Кулакова-Михайличенко тесно связаны с такими основными величинами, характеризующими рынок труда, как количество работников L и величина реальной заработной платы (цена на труд) W/P :

$$W/P = f_1/A,$$

$$L = (f_2 - B)/A.$$

9. Геоботаника

Флора — это совокупность всех растений на данной территории. Изучение флоры какого-либо района или отдельного растительного сообщества (леса, луга и т. п.) предполагает выявление всех видов растений.

Флора — исторически сложившаяся совокупность видов растений, приуроченная к определённому географическому пространству, связанная с его современными природными условиями, геологическим прошлым и находящаяся в более или менее устойчивых отношениях с флорой других, в частности смежных, частей земной поверхности.

Конкретная флора — элементарная флора — совокупность видов растений, приуроченная к ограниченной (примерно от 100 до 1000 км²) части земной поверхности и целостная в генетическом отношении.

В высокоарктических районах численность видов конкретных флор колеблется от 20 до 90–100. В таёжной зоне она варьирует от 450 до 700, в зоне широколиственных лесов достигает 1000 видов, на побережье Средиземного моря и в Закавказье — 1300–1500 видов. В богатых лесами тропических странах число это возрастает до 2000, достигая в некоторых районах Бразилии 3000.

Пусть \mathcal{F} — множество флор на Земле. Предполагаем, что все виды перечисляются в форме упорядоченного списка, в котором конкретный вид имеем свой порядковый номер n . Введём число N , означающее число всех известных видов флоры. В таком случае конкретная флора $x \in \mathcal{F}$ — это последовательность (x_1, x_2, \dots, x_N) , называемая флористическим списком, где $x_n = 0$ (вид с номером n в этой флоре отсутствует) или $x_n = 1$ (вид с номером n в этой флоре присутствует).

Флористический список, таким образом, означает совершение исследователем N описаний одного геоботанического признака: наличие или отсутствия вида в описании.

Если такие описания произведены для двух флор

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N),$$

то расстояние между флорами можно вычислить по формуле:

$$D = \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2} \quad (72)$$

или

$$D = \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2 + \sum_{n=1}^N y_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N x_n y_n}. \quad (73)$$

Поскольку $x_n^2 = x_n$ $y_n^2 = y_n$, то

$$D = \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n + \sum_{n=1}^N y_n - 2 \sum_{n=1}^N x_n y_n}. \quad (74)$$

Введём следующие показатели:

$$a = \sum_{n=1}^N x_n, \quad b = \sum_{n=1}^N y_n, \quad c = \sum_{n=1}^N x_n y_n,$$

имеющие смысл, соответственно, числа видов во флоре x , числа видов во флоре y и числа общих видов во флорах x и y .

Тогда получаем

$$D = \sqrt{a + b - 2c}. \quad (75)$$

Это так называемый коэффициент *В.И. Василевича*, для измерения степени различия флористических списков двух растительных сообществ [20, с. 233].

Коэффициент Василевича связан алгебраическими соотношениями с другими аналогичными коэффициентами, предложенными Жаккаром, Экманом, Сёренсенем и Чекановским, Стугреном и Радулески [20, с. 236].

Но формула (72) есть отношение из унарной первоструктуры Кулакова, которую он связывал с N -мерной евклидовой геометрией [5, с. 473].

Однако говорить о том, что в геоботанике в полной мере проявляется первоструктура Кулакова, можно лишь после того, как будет выявлена фундаментальная симметрия.

Сущность действия фундаментальной симметрии Кулакова заключается в том, что любые флоры взаимозаменяемы в законе (2). Очевидно, что следует констатировать постулат о взаимозаменяемости флор, ибо биосфера биоразнообразна. Должны допускаться и взаимозаменяться любые наборы флор. Такова суть биосферы Земли.

Следовательно, геоботаника, а точнее, сравнительная флористика, подчиняется единому принципу, открытому Кулаковым.

10. Смена физических законов, действующих в Мире

Могут ли люди менять физические законы в Мире, в котором они обитают. Структуры-Владимирова, если мы из признаем показывают, как это может происходить [21].

Процесс смены физического закона мы опишем в терминах теории игр. Идея такой игры была высказана писателем-фантастом Станиславом Лемом [22].

10.1. Теория бинарных (унарных) систем комплексных отношений Ю.С. Владимирова

Теория Кулакова была существенно усовершенствована Ю.С. Владимировым [14] и была названа последним *теорией бинарных (унарных) систем комплексных отношений* (БСКО).

Ю.С. Владимиров расширил теорию Кулакова, полагая, что отношения — это комплексные числа, т. е. бинарное отношение — это отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$. Более того, Ю.С. Владимиров стал трактовать множество \mathcal{M} как начальное состояние, а \mathcal{F} — как конечное. Бинарная система в таком случае предстаёт как характеристика переходного момента из одного состояния в другое.

Ю.С. Владимиров и его ученики показали, как принятие к рассмотрению той или иной бинарной системы может говорить о появлении таких идей (понятий), как размерность пространства–времени 4, псевдоевклидовость, спиноры, уравнение Дирака, электромагнитное и электрослабое взаимодействия между частицами, заряды, лептоны, адроны и др. Другими словами, построенная ими теория, названная бинарной геометрофизикой, способна породить все понятия и объекты современной физики.

Например, лептон — это две пары элементов $(i, k), (\alpha, \beta)$ в БСКО ранга (4, 4) [23, с. 203]; причём (i, k) — начальное состояние лептона, (α, β) — конечное. Адрон — две тройки элементов $(i, k, j), (\alpha, \beta, \gamma)$ в БСКО ранга (6, 6) [23, с. 203]; где (i, k, j) — начальное состояние адрона, (α, β, γ) — конечное [23, с. 279].

Что самое важное, природа элементов множеств \mathcal{M} и \mathcal{F} никоим образом не конкретизируется.

10.2. Игроки

Итак, опишем игру результатом которой может быть смена физического закона. Для этого надо представить игроков, их стратегии, выигрышные функции и ходы [25].

Игрок — это сознание каждого отдельно взятого человека. Оно, индивидуальное сознание i , имеет идеи–фантазии, которые реализуются в окружающей материи [24] посредством квантовой корреляции. Идеи разных разумных существ могут быть взаимно исключающими, поэтому выбор идеи-фантазии каждым существом и упорство увидеть её материализованной в окружающем Мире и есть *стратегия*, выбранная данным игроком-существом. Поскольку

люди должны сосуществовать, то в гуманном варианте стратегической игры все игроки–существа должны будут согласиться на переход к равновесию Нэша.

10.3. Стратегии и ходы

Игра ведётся игроками, которые делают ходы. Каждый ход состоит из выбора конкретного физического закона⁹ в форме БСКО и констатации его ранга, т. е. констатации фундаментальной симметрии. Стратегия — это выбор закона ранга (r, s) . Смена стратегии происходит за счёт смены ранга, т. е. за счёт перехода к другой симметрии.

Как люди могут поменять симметрию, имеющую следствием изменение физического закона, действующего в нашей Вселенной? Как можно изменить закон Ньютона $F = GmM/r^2$ на другой закон для гравитация, скажем, на закон, описываемой формулой $F = (GmM/r^2) \exp(-a/r)$? Сама мысль о том, что человек может такое сделать, кажется безумной — мыслящие существа не могут вмешаться в ход космического механизма, как микроорганизмы на часовой стрелке не могут влиять на ход часового механизма — но именно это и предложено в Новой космогонии Лема.

И хотя пространственно-временную симметрию, симметрию пространства, согласно общей теории относительности мы можем менять, меняя распределение массы-энергии в пространстве, но мы не можем представить, как можем поменять $SU(n)$ -симметрии, действующие в микромире, в мире элементарных частиц!

Но в нашем случае речь идёт об изменении фундаментальных симметрий, которые говорят о том, сколько элементов в множествах \mathcal{M} и \mathcal{F} взаимозаменяемы. Природа этих элементов никоим образом не связана с их физической сущностью. На какие элементы мы можем повлиять, если не можем влиять напрямую на абстрактные симметрии микромира элементарных частиц? Ответ прост: на людей.

Бинарная геометрофизика Ю.С. Владимирова не запрещает множествам \mathcal{M} и \mathcal{F} состоять из разумных существ. И если мысли людей могут менять Реальность, то, видимо, чтобы изменить фундаментальную симметрию, необходимо перераспределять умонастроения в множестве индивидуальных сознаний так, чтобы умонастроения любых r индивидов были одинаковы. Как это делается — известно, скорее всего, в рамках социальной психологии, но соответствующее знание, видимо, в распоряжении иной, не нашей, исторической эпохи. Мы лишь что-то подозреваем о такой возможности и говорим об обработке сознания масс людей с помощью телевидения, образования и т. д.

Сколь не противно это высказывание логике современной научной физической парадигмы, оно удивительным образом впервые увязывает в единое целое и материю, и сознание, и включает в физику то, чего в ней не было — сознание. Иначе говоря, в физике появляется возможность рассматривать не только часовой механизм, но и микроорганизмы на его стрелках, и, более того, описывать ход часов с учётом нахождения микроорганизмов на его стрелках,

⁹Точнее, набора физических законов. Но для простоты говорим о выборе одного закона.

читай, взаимодействие космического механизма и мыслей мыслящих существ, живущих в Космосе.

10.4. Выигрышные функции

Каждому игроку i соответствует некоторая выигрышная функция f_i , определённая на выбранных стратегиях всех игроков.

Если определить эти функции так, что $f_i \in [0, 1]$, то можно проинтерпретировать f_i как вероятность материализации в окружающем Мире физического закона, выбранного игроком i . Действует тот физический закон, чья вероятность наибольшая¹⁰.

10.5. Партия игры

В каждый момент времени или на некотором отрезке времени в случае Варианта 1 выбора игроков игроки выбирают стратегии, т. е. делают выбор физического закона, который они желали бы видеть в окружающем Мире. Это ход в игре, или сыгранная партия. Мир в таком случае таков, его физические законы таковы, для которых максимальна выигрышная функция.

Изменить физические законы Мира возможно, но для этого нужно, чтобы выиграл игрок, поставивший на другой физический закон. Но никому не дано проникнуть в мысли другого индивидуума. Другими словами, новую партию игры не так просто сыграть. Однажды сыгранная индивидуальными сознаниями, оказавшимися в неорганизованной материальной среде, партия и породила наш Мир.

11. Заключение

Какой смысл в том, что структуры Кулакова проявляют себя в физике, социологии, психологии, микроэкономике и макроэкономике, рынке труда, геоботанике, т. е. во многих значимых разделах знаний человека? Об этом исчерпывающе сказал И.Е. Тамм, слова которого приведены в начале статьи. Говоря же на менее строгом языке, можно сказать, что Конструктор, создавая Мир, в его основу заложил не «первоматерию», т. е. атомы или элементарные частицы, а первичные структуры — эталоны, образцы, иначе говоря, паттерны, по которым строится абсолютно всё, что есть в этом Мире. Иначе говоря, всё состоит не из атомов, а из первоструктур.

Конечно, «первоматерия» «наглядна», хотя приходится вместе с наглядностью нести бремя поиска законов, которым подчиняется существование «первоматерии» и, следовательно, материи. Вроде как Конструктор дал законы, физические законы в частности, по которым существует Мир, как этого и жаждал верующий в него человек. И жажда эта открыла эпоху научного познания, состоящего в мучительном поиске формулировок неявно данных законов:

¹⁰Можно рассмотреть и другое, более сложное условие установления того или иного физического закона.

«Века веры в Бога, "сочетающего личную энергию Яхве с разумностью греческого философа", и породили упования на упорядоченность природы, без которой не родилась бы нынешняя наука. Люди становились учёными, потому что они ждали от природы закона, а ждали потому, что верили в Законодателя» (Уайтхед, цит. по [26, с. 112]).

Но что интересно, «первоструктуры» — это сами законы, но человек, европейский человек, внедривший в человеческую практику науку, не пожелал их принимать. Почему?

Веры у многих учёных такой, какая было на заре научной эры, уже нет; остаётся вера в единообразие природы; интересно, насколько её хватит [26, с. 113]? Переход к «первоструктурам» таит в себе возврат к иррациональному, к вере в Конструктора, а её нет. Так, быть может, Конструктор не вне, а в себе? И тогда можно и перейти от Эйдоса к Логосу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М. : Архимед, 1992.
2. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n_1, 2)$ // СМЖ. 1993. Т. 34, № 2. С. 132–143.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М. : МГУ, 1996.
4. Владимиров Ю.С. Основания физики. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 455 с.
5. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М., 2004. 847 с.
6. Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. Методы и модели управления фирмой. СПб. : Питер, 2001.
7. Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Социальные системы: формализация и компьютерное моделирование. Омск : ОмГУ, 2000.
8. Гуц А.К., Лаптев А.А., Коробицын В.В., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические модели социальных систем : Учебное пособие. Омск : ОмГУ, 2000. 256 с.
9. Хрестоматия по курсу гендерных исследований. М. : Изд-во «Московского центра гендерных исследований», 2000.
10. Российская социологическая энциклопедия / Под ред. Г.В. Осипова. М. : Издательская группа НОРМА–ИНФРА-М, 1998.
11. Коломинский Я.Л. Психология взаимоотношений в малых группах. Минск : ТетраСистемс, 2000.
12. Багрецов С.А., Львов В.М., Наумов В.В. и др. Диагностика социально-психологических характеристик малых групп с внешним статусом. СПб. : Лань / ун-т МВД России, 1999.
13. Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математическая социология : Учебное пособие. Омск : Издательство Наследие. Диалог–Сибирь, 2003. 192 с.
14. Введение в макроэкономику / Под ред. М.Е. Дорошенко. М. : Юнити, 2001.

15. Добренко М.А., Гуц А.К. Первичные структуры отношений Кулакова в микроэкономике // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып. 11. С. 88–96.
16. Добренко М.А., Гуц А.К. Макроэкономические первичные структуры отношений Кулакова // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып. 12. С. 130–133.
17. Добренко М.А., Гуц А.К. Феноменологическая симметрия и структуры Кулакова в экономике // Третья Всероссийская ФАМ'2004 конференция. Программа и тезисы. Красноярск : ИВМ СО РАН, 2004. С. 46–47. (совм. с М.А. Добренко)
18. Гуц А.К., Елкина О.С. Описание равновесий на рынке труда с помощью структур Кулакова–Михайличенко // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С. 112–115.
19. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n_1, 2)$ // СМЖ. 1993. Т. 34, № 2. С. 132–143.
20. Шмидт В.М. Математические методы в ботанике. Л. : Из-во ЛГУ, 1984.
21. Гуц А.К. Формализация Новой космогонии Лема // Математические структуры и моделирование. 2014. № 3(31). С. 48–56
22. Лем С. Новая космогония / Библиотека XXI века. М. : ООО «Издательство АСТ», 2002.
23. Владимиров Ю.С. Основания физики. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
24. Гуц А.К. Квантовое рождение физической реальности и математическое описание осознания // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып. 17. С. 47–52.
25. Матричные игры / Под. ред. Н.Н. Воробьева. М. : ФМ, 1961. 280 с.
26. Льюис К.С. Чудо. М. : Изд-во АСТ, 2019. 384 с.

THE KULAKOV STRUCTURES IN DESCRIPTION OF UNIVERSE

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. It is shown how the idea of the view of the World may proceed not from “what the World is made of”, but from what samples (patterns) it is made of. Such patterns can be so-called physical structures of Novosibirsk physicist V.I. Kulakov, generalized later by G.G. Mikhailichenko and Yu.S. Vladimirov. We show that physical structures detect their presence in socio-psychological relationships of people, in economic relations of people, enterprises and economies, in botany. Moreover, it is shown that the structures of Kulakov-Vladimirov suggest us how we can change the physical laws.

Keywords: Kulakov structures, physics, sociology, psychology, micro-economy, macro-economy, botany, Lem cosmogony.

REFERENCES

1. Kulakov Yu.I., Vladimirov Yu.S., and Karnaukhov A.V. Vvedenie v teoriyu fizicheskikh struktur i binarnuyu geometrofiziku. Moscow, Arkhimed Publ., 1992. (in Russian)

2. Mikhailichenko G.G. Dvumetricheskie fizicheskie struktury ranga $(n_1, 2)$. SMZh, 1993, vol. 34, no.2, pp. 132–143. (in Russian)
3. Vladimirov Yu.S. Relyatsionnaya teoriya prostranstva-vremeni i vzaimodeistvii. Chast' 1. Teoriya sistem otnoshenii. Moscow, MGU Publ., 1996. (in Russian)
4. Vladimirov Yu.S. Osnovaniya fiziki. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanii Publ., 2008, 455 p. (in Russian)
5. Kulakov Yu.I. Teoriya fizicheskikh struktur. Moscow, 2004. 847 p. (in Russian)
6. Kulakov Yu.I., Vladimirov Yu.S., and Karnaukhov A.V. Vvedenie v teoriyu fizicheskikh struktur i binarnuyu geometrofiziku. M.: Arkhimed, 1992. (in Russian)
7. Kuzin B., Yur'ev V., and Shakhdinarov G. Metody i modeli upravleniya firmoi. SPb., Piter Publ., 2001. (in Russian)
8. Guts A.K., Korobitsyn V.V., Laptev A.A., Pautova L.A., and Frolova Yu.V. Sotsial'nye sistemy: formalizatsiya i komp'yuternoe modelirovanie. Omsk, OmGU Publ, 2000. (in Russian)
9. Guts A.K., Laptev A.A., Korobitsyn V.V., Pautova L.A., and Frolova Yu.V. Matematicheskie modeli sotsial'nykh sistem: Uchebnoe posobie. Omsk, OmGU Publ., 2000, 256 p. (in Russian)
10. Khrestomatiya po kursu gendernykh issledovaniy. Moscow, Izd-vo "Moskovskogo tsentra gendernykh issledovaniy", 2000. (in Russian)
11. Rossiiskaya sotsiologicheskaya entsiklopediya. Pod red. G.V. Osipova. Moscow, Izdatel'skaya gruppy NORMA–INFRA-M, 1998. (in Russian)
12. Kolominskii Ya.L. Psikhologiya vzaimootnoshenii v malykh gruppakh. Minsk, Tetra-Sistems Publ., 2000. (in Russian)
13. Bagretsov C.A., L'vov V.M., Naumov V.V. i dr. Diagnostika sotsial'no-psikhologicheskikh kharakteristik malykh grupp s vneshnim statusom. SPb. Lan' / un-t MVD Rossii Publ., 1999. (in Russian)
14. Guts A.K., Pautova L.A., and Frolova Yu.V. Matematicheskaya sotsiologiya: Uchebnoe posobie. Omsk, Nasledie. Dialog–Sibir' Publ., 2003, 192 p. (in Russian)
15. Vvedenie v makroekonomiku. Pod red. M.E. Doroshenko. Moscow, Yuniti Publ., 2001. (in Russian)
16. Dobrenko M.A. and Guts A.K. Pervichnye struktury otnoshenii Kulakova v mikroekonomike. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2003, iss. 11, pp. 88–96. (in Russian)
17. Dobrenko M.A. and Guts A.K. Makroekonomicheskie pervichnye struktury otnoshenii Kulakova. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2003, iss. 12, pp. 130–133. (in Russian)
18. Dobrenko M.A. and Guts A.K. Fenomenologicheskaya simmetriya i struktury Kulakova v ekonomike. Tret'ya Vserossiiskaya FAM'2004 konferentsiya, Programma i tezis, Krasnoyarsk, IVM SO RAN Publ., 2004, pp. 46–47. (sovm. s M.A. Dobrenko). (in Russian)
19. Guts A.K. and Elkina O.S. Opisanie ravnovesii na rynke truda s pomoshch'yu struktur Kulakova-Mikhailichenko. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2005, iss. 15, pp. 112–115. (in Russian)
20. Shmidt V.M. Matematicheskie metody v botanike. Leningrad, LGU Publ., 1984. (in Russian)
21. Guts A.K. Formalizatsiya Novoi kosmogonii Lema. Matematicheskie struktury i mod-

- elirovanie, 2014, no. 3(31), pp. 48–56 (in Russian)
22. Lem S. Novaya kosmogoniya, Biblioteka XXI veka. Moscow, OOO "Izdatel'stvo AST", 2002. (in Russian)
 23. Vladimirov Yu.S. Osnovaniya fiziki. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanii Publ., 2008. (in Russian)
 24. Guts A.K. Kvantovoe rozhdenie fizicheskoi real'nosti i matematicheskoe opisanie oznaniya. *Matematicheskie struktury i modelirovanie.*, 2007, iss. 17, pp. 47–52. (in Russian)
 25. *Matrichnye igry*. Pod. red. N.N. Vorob'eva. Moscow, FM Publ., 1961, 280 p. (in Russian)
 26. L'yuis K.S. *Chudo*. Moscow, Izd-vo ASv., 2019, 384 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.06.2019

SUMMATION OF DIVERGENT INFINITE SERIES: HOW NATURAL ARE THE CURRENT TRICKS

Mourat Tchoshanov

D.Sci. (Pedagogy), Professor, e-mail: mouratt@utep.edu

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Infinities are usually an interesting topic for students, especially when they lead to what seems like paradoxes, when we have two different seemingly correct answers to the same question. One of such cases is summation of divergent infinite sums: on the one hand, the sum is clearly infinite, on the other hand, reasonable ideas lead to a finite value for this same sum. A usual way to come up with a finite sum for a divergent infinite series is to find a 1-parametric family of series that includes the given series for a specific value $p = p_0$ of the corresponding parameter and for which the sum converges for some other values p . For the values p for which this sum converges, we find the expression $s(p)$ for the resulting sum, and then we use the value $s(p_0)$ as the desired sum of the divergent infinite series. To what extent is the result reasonable depends on how reasonable is the corresponding generalizing family. In this paper, we show that from the physical viewpoint, the existing selection of the families is very natural: it is in perfect accordance with the natural symmetries.

Keywords: divergent infinite series, symmetries.

1. Summation of Divergent Infinite Series: An Interesting Topic

Infinities are mysterious. Not surprisingly, topics related to infinities are often exciting for students - especially when it turns out that what seemed simple and straightforward in the finite case is no longer simple and no longer straightforward.

One such case is the summation of infinite series. At first glance, this seems to be a straightforward topic:

- some series converge and have a finite sum, while
- some series diverge – e.g., if the resulting sum is infinite.

However, an interesting part is that often,

- while the usual methods lead to an infinite value of the corresponding sum,
- other techniques lead us to a finite value for the sum of the same series.

Let us start with an example of how we can get such a divergent infinite series with a finite sum.

2. Summation of Divergent Infinite Series: First Example

In many cases, we can get an explicit formula for the sum of an infinite series – by properly manipulating this series. For example, for an infinite geometric progression

$$s = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n + \dots,$$

we can multiply this sum by p , add 0 in front, and get

$$s \cdot p = 0 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n + \dots$$

If we now subtract the new series from the original one term-by-term, all the terms in the right-hand side disappear except for the first terms 1, so we conclude that $s \cdot (1 - p) = 1$ and thus, that

$$s = \frac{1}{1 - p}.$$

So, for the values p from -1 to 1 , for which the sum of the geometric progression converges, we get the correct expression for this sum. For example, for $p = 0.5$, we get $s = \frac{1}{1 - 0.5} = 2$, thus we get

$$1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + \dots + 0.5^n + \dots = 2.$$

Interestingly, the above trick can be applied when the value p is outside the open interval $(-1, 1)$. For example, for $p = 2$, when the above infinite series clearly diverges, we get

$$s = \frac{1}{1 - 2} = -1,$$

thus we get a finite sum for the divergent infinite series:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots = -1.$$

3. Summation of Divergent Infinite Series: General Idea

The above idea shows how, in general, we can come up with a meaningful finite expression for the divergent infinite series:

- We start with a divergent infinite series for which we want to compute the sum

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

- We then find a 1-parametric family of infinite series that includes the desired series as a particular case, and which is convergent for some values of the corresponding parameter p :

$$s(p) = a_0(p) + a_1(p) + a_2(p) + \dots + a_n(p) + \dots$$

- For the cases when the sum converges, we find the explicit expression for $s(p)$, and then apply this expression to the value p_0 corresponding to the original series. The resulting value $s(p_0)$ is then returned as the sum of the original divergent infinite series.

4. First Example Reformulated in These General Terms

Let us show, in detail, that the above derivation is a particular case of this general idea.

In this example, we want to compute the sum

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

This sum is divergent, so we find a family of series that includes this sum as a particular case corresponding to $p_0 = 2$:

$$s(p) = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n + \dots$$

This sum is convergent for some values of the parameter x : namely, for all the values p from -1 to 1 . For these values, $s(p) = \frac{1}{1-p}$. To find the desired value of the sum s , we thus substitute $p_0 = 2$ into this formula and get $s = s(p_0) = s(2) = \frac{1}{1-2} = -1$.

5. Second Example

Let us illustrate the above general idea on another known example of a divergent series: computing the sum of an infinite arithmetic progression

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

To compute this sum, it turned out to be useful to utilize the following family:

$$s = 1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \dots$$

The original sum corresponds to $p_0 = 1$. The new series is convergent for all values $p < -1$, e.g., for $p = -2$.

To compute the value s , instead of multiplying the sum by p as in the first example, let us multiply it by $2 \cdot 2^p$. After the multiplication:

- 1^p becomes $2 \cdot 2^p$,

- 2^p becomes $2 \cdot 4^p$,
- 3^p becomes $2 \cdot 6^p$, etc.

Let us place 0s so that the term $2 \cdot 2^p$ be at the same level as 2^p , etc. Then, we get:

$$2 \cdot 2^p \cdot s = 0 + 2 \cdot 2^p + 0 + 2 \cdot 4^p + \dots$$

Subtracting the new expression from the original series term-by-term, we conclude that

$$c = 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \dots,$$

where we denoted $c \stackrel{\text{def}}{=} s \cdot (1 - 2 \cdot 2^p)$.

Let us now shift the series by adding 0 in front:

$$c = -0^p + 1^p - 2^p + 3^p - \dots$$

By adding the above two expressions for c, we conclude that

$$2c = (1^p - 0^p) - (2^p - 1^p) + (3^p - 2^p) - (4^p - 3^p) + \dots$$

Again, we shift the series by adding 0 in front:

$$2c = 0 + (1^p - 0^p) - (2^p - 1^p) + (3^p - 2^p) - \dots$$

By adding the above two expressions for $2c$, and taking into account that $1^p - 0^p = 1$, we conclude that

$$4c = 1 - (2^p - 2 \cdot 1^p + 0^p) + (3^p - 2 \cdot 2^p + 1^p) - (4^p - 2 \cdot 3^p + 2^p) + \dots$$

The advantage of this formula is that for value p not exceeding 1, the right-hand side is a convergent sum. In particular, for $p = p_0 = 1$, each term $(n + 1)^p - 2 \cdot n^p + (n - 1)^p$ in this sum is equal to

$$(n + 1) - 2 \cdot n + (n - 1) = 0.$$

Thus, in the expression for $4c$, the only non-zero term is the first 1, so $4c = 1$ and thus $c = 0.25$. By definition, $c = s \cdot (1 - 2 \cdot 2^p)$, i.e., for $p = 1$, we get $c = -3s$. Thus, we conclude that:

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = -\frac{1}{12}.$$

6. How Natural Is All This?

A reasonable question is: OK, we used some tricks, and we got some reasonable results. But how natural are these tricks? Maybe if we used different tricks, we would have gotten different results?

In other words, how natural are the families that we chose, families that include the original series as a particular case? In general, we want to extend the family based on a single example. Of course, there are many different families that we could choose. How natural is the selection of the families p_n and n_p that we used in the above two examples?

7. Let Us Go Back to The Physical Meaning of the Series

From the purely mathematical viewpoint, it is difficult to see which families are natural and which are not natural: everything is purely mathematical and thus, seems to be not very natural.

So, to decide which families are natural and which families are not natural, let us take into account that the series are not just an abstract mathematical concept, they are actively used in describing the real world. Typically, infinite series appear when we measure the value $a(t)$ of some physical quantity a at some sequential moments of time

$$t_0, \quad t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h, \quad \dots, \quad t_n = t_{n-1} + h = t_0 + n \cdot h, \quad \dots$$

so that $a_n = a(t_n)$.

So, to find out which series are natural, we need to analyze which function $a(t)$ are natural.

8. Natural Symmetries

To analyze which physical dependencies are natural, let us take into account that the numerical value of a physical quantity depends on the selection of the measuring unit. If instead of the original measuring unit we use another unit which is C times smaller, then all the numerical values get multiplied by this constant C .

For example, if instead of meters we consider centimeter, then all the numerical values get multiplied by 100: e.g., 2 meters becomes 200 centimeters.

From this viewpoint, the function $a(t)$ and the function $C \cdot a(t)$ represent the exact same dependence of the quantity a on time t , but expressed in different measuring units.

For measuring time, we can also select different units. For time, we also have an additional freedom – in addition to selecting a different measuring unit, we can also select a different starting point. For example, during the French revolution, in the revolutionary calendar, the year of the revolution (1789 in the usual calendar) was officially designated as Year 1. In general, if as a new starting point, we select a starting point which is T moments earlier than the previous one, then all numerical values of time are increase by this amount T : $t \rightarrow t + T$.

9. Natural Functions $a(t)$

Physical processes do not change if we simply change measuring units or starting point for measurements. From this viewpoint, it is reasonable to consider a function $a(t)$ natural if the corresponding physical process does not depend on the selection of a measuring unit for time or on the selection of the starting point.

Let us consider these two options one by one.

10. Case When the Relation $a(t)$ Does Not Depend on the Starting Point for Measuring Time

Let us first consider the case when the relation $a(t)$ does not depend on the starting point for measuring time.

If we change the starting point, the value t is replaced by $t + T$, and, correspondingly, the function $a(t)$ get replaced by the new function $a(t + T)$. We want to make sure that both the original function $a(t)$ and the new function $a(t + T)$ represent the same physical process. As we have mentioned earlier, this means that the functions $a(t + T)$ and $a(t)$ differ by a multiplicative constant – representing a change in the unit for measuring a : $a(t + T) = C \cdot a(t)$, for some constant C depending on T .

In particular, for $T = h$, this means that $a_{i+1} = a(t_{i+1}) = a(t_i + h) = C \cdot a(t_i) = C \cdot a_i$. So:

$$a_1 = C \cdot a_0, \quad a_2 = C \cdot a_1 = C^2 \cdot a_0, \quad \text{and, in general, } a_n = C^n \cdot a_0.$$

Thus, we get – modulo a multiplicative constant a_0 – a geometric progression that was used in our first example.

11. Case When the Relation $a(t)$ Does Not Depend on the Selection of a Measuring Unit for Measuring Time

Let us now consider the case when the relation $a(t)$ does not depend on the selection of a measuring unit for measuring time.

Changing such a unit leads to changing t to $c \cdot t$, and $a(t)$ to $a(c \cdot t)$. The fact that these two functions should describe the same physical process means that we should have $a(c \cdot t) = C \cdot a(t)$, for some constant C depending on c , i.e., that we should have

$$a(c \cdot t) = C(c) \cdot a(t).$$

It makes sense to require that the dependence $a(t)$ is described by a measurable (= integrable) function – otherwise, we will not be able to integrate it, while what we usually observe is not the instantaneous value but rather an average (weighted integral) over some time interval including the moment t . For measurable functions, it is known that all solutions of the above functional equation have the form $a(t) = c_0 \cdot t^p$ for some constants c_0 and p ; see, e.g., [1].

By changing the starting point for measuring time, we can always take $t_0 = 0$; then, $t_n = n \cdot h$. Thus, we have:

$$a_n = a(t_n) = a(n \cdot h) = c_0 \cdot (n \cdot h)^p = n^p \cdot (c_0 \cdot h^p).$$

So, modulo a multiplicative constant, we get the dependence np that was used in the second example.

12. Conclusion

Our conclusion is that while generalizations used to compute the above two sums of divergent series sound somewhat arbitrary, in reality, these generalizations are very natural – they follow directly from the requirement that the corresponding physical relation not change if we change:

- either the starting point for measuring time,
- or the measuring unit for time.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. Aczel J. and Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts, 2008.

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ: НАСКОЛЬКО ЕСТЕСТВЕННЫ СУЩЕСТВУЮЩИЕ УЛОВКИ

М. Чошанов

д.пед.н., профессор, e-mail: mouratt@utep.edu

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Бесконечность обычно является интересной темой для студентов, особенно когда она приводит к тому, что кажется парадоксом: когда у нас есть два разных казалося бы правильных ответа на один и тот же вопрос. Одним из таких случаев является суммирование расходящихся бесконечных сумм: с одной стороны, сумма явно бесконечна, с другой стороны, разумные идеи приводят к конечному значению этой же суммы. Обычный способ получить конечную сумму для расходящегося бесконечного ряда состоит в том, чтобы найти 1-параметрическое семейство рядов, которое включает в себя данный ряд для конкретного значения $p = p_0$ соответствующего параметра и для которого сумма сходится для некоторых других значений p . Для значений p , для которых эта сумма сходится, мы находим выражение $s(p)$ полученной суммы, а затем используем значение $s(p_0)$ в качестве

искомой суммы расходящегося бесконечного ряда. Насколько обоснован результат зависит от того, насколько разумно соответствующее обобщающее семейство. В этой статье мы показываем, что с физической точки зрения существующий выбор семейств очень естественен: он полностью соответствует естественным симметриям.

Ключевые слова: расходящиеся бесконечные ряды, симметрии.

Дата поступления в редакцию: 14.01.2019

ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

С.А. Терентьев

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: sa.terentyev@gmail.com

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Электромагнитное поле в задачах электроразведки часто представляется в виде интегралов с быстроосциллирующим ядром. При вычислении этих интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в плоскость комплексного переменного. В статье изучена допустимая область деформации контура интегрирования в случае неоднородной среды. Источник поля — гармонический вертикальный электрический или магнитный диполь.

Ключевые слова: электроразведка, электромагнитное поле вертикального электрического или магнитного диполя, быстроосциллирующие интегралы, деформация контура, комплексная плоскость, отсутствие особых точек, область деформации.

1. Введение

Мы изучаем электромагнитное поле в слоистой горизонтальной среде, заданное интегралом (см. S 5):

$$\int_0^{+\infty} K(x, y, \lambda) u(z, \lambda) d\lambda.$$

Функцию K называем ядром интегрального оператора, а $u(z, \lambda)$ — спектральной плотностью.

Продолжим λ в комплексную плоскость

$$\mathbb{C} = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}\}.$$

Область, лежащую в плоскости \mathbb{C} , в которой плотность $u(z, \lambda)$ не имеет особенностей по λ , будем обозначать через D_λ .

Ядро $K(z, \lambda)$ — это быстро осциллирующая по λ функция. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования

в комплексную область D_λ изменения переменной λ . В связи с этим необходимо прежде всего определить область D_λ , в которой подынтегральная функция $u(z, \lambda)$ не имеет особенностей по D_λ .

В этой статье мы определяем область D_λ для электромагнитного поля, создаваемого вертикальным гармоническим электрическим или магнитным диполем.

Данная статья продолжает исследования, изложенные в статье [1]. Приведённые результаты были анонсированы в [2].

2. Основные уравнения

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{j}^m, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{j}^e, \\ \operatorname{div} \mathcal{D} &= \rho^e, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \rho^m, \end{aligned} \tag{1}$$

где \mathbf{j}^e и \mathbf{j}^m — векторы объёмной плотности электрического и магнитного сторонних токов, которые возбуждаются полями, не учитываемые в искомом электромагнитном поле; ρ^e, ρ^m — объёмные плотности электрического и магнитного зарядов.

Принимаем, что

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{2}$$

Будем изучать гармонические источники и поля, т. е. предполагаем следующую зависимость от времени

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Тогда уравнения (1) с учётом (2), (3) примут вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{j}^m, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (\sigma - i\omega \varepsilon) \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho^e, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = \rho^m. \tag{7}$$

Пусть имеется неоднородная среда, ограниченная плоскими поверхностями раздела $z = z_0, z = z_1$, где $z_0 < z_1$ (ось z направлена вверх, рис. 1). Параметры среды σ, μ, ε будем считать функциями переменной z , т. е.

$$\sigma = \sigma(z), \quad \mu = \mu(z), \quad \varepsilon = \varepsilon(z). \tag{8}$$

$$\sigma, \mu, \varepsilon \in C^1(\mathbb{R}),$$

$\sigma(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$.

При $z > z_1$ и $z < z_0$ среда предполагается однородной с $\sigma = \sigma_i$, $\mu = \mu_i$.

Источник электромагнитного поля находится в точке с декартовыми координатами $(0, 0, 0)$.

На поверхностях раздела $z = z_i$ ($i = 0, 1$) ставим граничные условия для электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} .

Из (5) имеем

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)E_z + j_z^e = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (9)$$

Далее будем совершать преобразования Фурье вида

$$\widehat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Тогда (9) перепишем в виде

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e = -i\xi\widehat{H}_y + i\eta\widehat{H}_x. \quad (10)$$

Применяя к (5) операцию div , получим

$$0 = div \operatorname{rot} \mathbf{H} = div(\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + div \mathbf{j}^e = 0$$

или

$$\frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_z}{\partial z} = -div \mathbf{j}^e - \frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_x}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_y}{\partial y}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z &= -\widehat{div} \mathbf{j}^e + i\xi(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_x + i\eta(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_y, \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z \right] &= -\frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{div} \mathbf{j}^e}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \right] + i\xi \frac{d\widehat{E}_x}{dz} + i\eta \frac{d\widehat{E}_y}{dz}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (4)

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x - j_x^m,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y - j_y^m,$$

или

$$-i\eta\widehat{E}_z - \frac{d\widehat{E}_y}{dz} = i\omega\mu\widehat{H}_x - \widehat{j}_x^m,$$

$$\frac{d\widehat{E}_x}{dz} + i\xi\widehat{E}_z = i\omega\mu\widehat{H}_y - \widehat{j}_y^m.$$

Умножая первое из этих уравнений на $(-i\eta)$, а второе на $i\xi$ и складывая полученные уравнения, имеем:

$$i\xi \frac{d\widehat{E}_x}{dz} + i\eta \frac{d\widehat{E}_y}{dz} - (\xi^2 + \eta^2)\widehat{E}_z = i\omega\mu[i\xi\widehat{H}_y - i\eta\widehat{H}_x] + i\eta\widehat{j}_x^m - i\xi\widehat{j}_y^m. \quad (12)$$

Из (10), (11), (12) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z \right] - (\xi^2 + \eta^2)\widehat{E}_z = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^e}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \right] - \\ - i\omega\mu[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e] + i\eta\widehat{j}_x^m - i\xi\widehat{j}_y^m, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{E}_z = \\ = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^e}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \right] - i\omega\mu\widehat{j}_z^e + i\eta\widehat{j}_x^m - i\xi\widehat{j}_y^m, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad k^2 = -(i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu).$$

Получим уравнение для \widehat{E}_z , аналогичное уравнению (13). Из (4) имеем:

$$i\omega\mu H_z - j_z^m = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

или

$$i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m = -i\xi\widehat{E}_y + i\eta\widehat{E}_x. \quad (14)$$

Применяя div к (4),

$$\operatorname{div} i\omega\mu\mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j}^m$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}^m}{i\omega} - \frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y}, \\ \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} = \frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^m}}{i\omega} + i\xi\widehat{H}_x + i\eta\widehat{H}_y, \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} \right] = \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^m}}{\mu} \right] + i\xi \frac{d\widehat{H}_x}{dz} + i\eta \frac{d\widehat{H}_y}{dz}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (5) имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = (\sigma - i\omega\varepsilon)E_x + j_x^e,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = (\sigma - i\omega\varepsilon)E_y + j_y^e$$

или

$$-i\eta\widehat{H}_z - \frac{d\widehat{H}_y}{dz} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_x + \widehat{j}_x^e,$$

$$\frac{d\widehat{H}_x}{dz} + i\xi\widehat{H}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_y + \widehat{j}_y^e.$$

Умножим первое уравнение на $(-i\eta)$, а второе на $i\xi$ и сложим полученные уравнения. Имеем

$$i\xi\frac{d\widehat{H}_x}{dz} + i\eta\frac{d\widehat{H}_y}{dz} - (\xi^2 + \eta^2)\widehat{H}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)[i\xi\widehat{E}_y - i\eta\widehat{E}_x] + i\xi\widehat{j}_y^e - i\eta\widehat{j}_x^e. \quad (16)$$

Из (14), (15), (16) выводим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} \right] - (\xi^2 + \eta^2)\widehat{H}_z &= \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^m}}{\mu} \right] - \\ &- (\sigma - i\omega\varepsilon)[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m] + i\xi\widehat{j}_y^e - i\eta\widehat{j}_x^e \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{H}_z &= \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dz} \left[\frac{\widehat{\operatorname{div} \mathbf{j}^m}}{\mu} \right] + \\ &+ (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{j}_z^m + i\xi\widehat{j}_y^e - i\eta\widehat{j}_x^e. \end{aligned} \quad (17)$$

Осталось найти $\widehat{H}_x, \widehat{H}_y, \widehat{E}_x, \widehat{E}_y$.

Применяя преобразование Фурье к (6), (7), получим

$$i\xi\mu\widehat{H}_x + i\eta\widehat{H}_y = -\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \widehat{\rho}^m, \quad (18)$$

$$i\xi\varepsilon\widehat{E}_x + i\eta\widehat{E}_y = -\frac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \widehat{\rho}^e. \quad (19)$$

Из (10) и (16) получаем

$$(i\xi^2 + i\eta^2)\mu\widehat{H}_y = -\xi\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \xi\widehat{\rho}^m + (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\eta\widehat{E}_z + \mu\eta\widehat{j}_z^e,$$

$$(i\xi^2 + i\eta^2)\mu\widehat{H}_x = -\eta\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \eta\widehat{\rho}^m - (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\xi\widehat{E}_z - \mu\xi\widehat{j}_z^e,$$

то есть

$$\begin{cases} \widehat{H}_x = \frac{1}{i\mu\lambda^2} \left[-\eta\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} - (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\xi\widehat{E}_z + \eta\widehat{\rho}^m - \mu\xi\widehat{j}_z^e \right], \\ \widehat{H}_y = \frac{1}{i\mu\lambda^2} \left[-\xi\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\eta\widehat{E}_z + \xi\widehat{\rho}^m + \mu\eta\widehat{j}_z^e \right]. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично

$$\begin{cases} \widehat{E}_x = \frac{1}{i\varepsilon\lambda^2} \left[-\xi \frac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \xi\widehat{\rho}^e + i\omega\mu\varepsilon\eta\widehat{H}_z - \varepsilon\eta\widehat{j}_z^m \right], \\ \widehat{E}_y = \frac{1}{i\varepsilon\lambda^2} \left[-\eta \frac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \eta\widehat{\rho}^e - i\omega\mu\varepsilon\xi\widehat{H}_z + \varepsilon\xi\widehat{j}_z^m \right]. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, достаточно знать $\widehat{H}_z, \widehat{E}_z$, остальные компоненты вычисляются по формулам (20) и (21).

3. Вертикальный электрический диполь

В этом параграфе подробно изучим электромагнитное поле, создаваемое вертикальным электрическим диполем, находящимся в неоднородной среде.

Для вертикального электрического диполя

$$\mathbf{j}^m = 0, \quad \rho^m = 0, \quad \mathbf{j}^e = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z)).$$

Следовательно, (13) и (17) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{E}_z = \\ = -\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{d\widehat{j}_z^e}{dz} \right] - i\omega\mu\widehat{j}_z^e, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{H}_z = 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) удобно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e] \right] - \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e] = \\ = - \left[i\omega\mu + \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} \right] \widehat{j}_z^e = -\frac{\lambda^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} \widehat{j}_z^e. \end{aligned} \quad (24)$$

Граничные условия здесь такие:

$$\begin{cases} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\frac{d}{dz} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e] \right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \end{cases} \quad (25)$$

(это вытекает из (10)) и

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mu \widehat{H}_z]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\frac{d(\mu \widehat{H}_z)}{dz} \right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \end{array} \right. \quad (26)$$

где квадратные скобки означают скачок

$$[f(z)]_{z=z_i} = f(z_i + 0) - f(z_i - 0).$$

Кроме того, принимаем условия на бесконечности:

$$|\widehat{E}_z|, |\widehat{H}_z| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Из (23), (26), (27) следует, что

$$\mu \widehat{H}_z \equiv 0. \quad (28)$$

Задачу (24), (25), (27) для функции

$$u \equiv (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e \quad (29)$$

заменяем задачей вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{du}{dz} \right] - \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} u = 0, \\ \text{условие (25)} \end{array} \right. \quad (30)$$

с дополнительными граничными условиями

$$[u]_{z=0} = 0, \quad (31)$$

$$\left[\frac{du}{dz} \right]_{z=0} = -\lambda^2 \quad (32)$$

на фиктивной поверхности раздела $z = 0$.

Кроме того, полагаем, что

$$|u| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Умножим (30) на \bar{u} и проинтегрируем по z

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{du}{dz} \right] dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} |u|^2 dz = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \bar{u} \frac{du}{dz} \Big|_{-\infty}^{-\delta} + \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \bar{u} \frac{du}{dz} \Big|_{\delta}^{+\infty} \right\} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon} |u|^2 dz.$$

С учётом (33) получаем

$$\frac{1}{\sigma(0) - i\omega\varepsilon(0)} \left[\bar{u}(-0) \frac{du}{dz}(-0) - \bar{u}(+0) \frac{du}{dz}(+0) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma + i\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 + k^2)(\sigma + i\omega\varepsilon)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} |u|^2 dz.$$

Из (31), (32) следует

$$\frac{\lambda^2}{\sigma(0) - i\omega\varepsilon(0)} \bar{u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma + i\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 + k^2)(\sigma + i\omega\varepsilon)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} |u|^2 dz. \quad (34)$$

Полагаем, что

$$\lambda = \lambda_x + i\lambda_y \quad \text{и} \quad u = u_1 + iu_2.$$

Тогда реальная часть уравнения (34) имеет вид:

$$\frac{(\sigma u_1 + \omega\varepsilon u_2)|_{z=0}(\lambda_x^2 - \lambda_y^2) - 2\lambda_x \lambda_y (\omega\varepsilon u_1 - \sigma u_2)|_{z=0}}{\sigma^2(0) + \omega^2\varepsilon^2(0)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma[\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu] - \omega\varepsilon[2\lambda_x \lambda_y - \sigma\mu]}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} |u|^2 dz. \quad (35)$$

Пусть

$$D_\lambda = \{(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma[\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu] > \omega\varepsilon[2\lambda_x \lambda_y - \sigma\mu] \text{ для } \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Из (35) получаем

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz \leq \alpha^{-1} Q(z) \text{ при } \lambda \in D_\lambda,$$

где

$$\alpha = \inf_{z \in \mathbb{R}} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2},$$

$$Q(\lambda) = \frac{[\sigma(0)u_1(0) + \omega\varepsilon(0)u_2(0)](\lambda_x^2 - \lambda_y^2) - 2\lambda_x\lambda_y[\omega\varepsilon(0)u_1(0) - \sigma(0)u_2(0)]}{\sigma^2(0) + \omega^2\varepsilon^2(0)}, \quad (36)$$

причём

$$Q(\lambda) \geq 0 \text{ при } \lambda \in D_\lambda.$$

Если теперь повторить рассуждения из [1], используя (35) вместо (2.39) и (36) вместо (2.40), то получим, что справедлива

Теорема 1. При условии $\alpha > 0$ классическое решение $u(z, \lambda)$ краевой задачи (30)–(33) не имеет особенностей по переменной $\lambda \in D_\lambda$.

Следствие 1. Электромагнитное поле $\widehat{E}(\xi, \eta, z, \lambda)$, $\widehat{H}(\xi, \eta, z, \lambda)$ не имеет особенностей по λ в области D_λ .

В самом деле, \widehat{j}_z^e не зависит от λ , поэтому из теоремы 1 следует, что $\widehat{E}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)^{-1}[u - \widehat{j}_z^e]$ не имеет особенностей по λ в D_λ . Остальное получаем из (20), (21) и (28).

4. Вертикальный магнитный диполь

Для вертикального магнитного диполя

$$\rho^e = 0, \quad \mathbf{j}^e = 0,$$

$$\mathbf{j}^m = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z)).$$

В таком случае (17) и (13) примут вид:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{H}_z = \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d\widehat{j}_z^m}{dz} \right] + (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{j}_z^m, \quad (37)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{d(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z}{dz} \right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{E}_z = 0. \quad (38)$$

Причём для (38) имеем граничные условия (25) (где уже $\widehat{j}_z^e \equiv 0$).

Из (28), (25) следует

$$\widehat{E}_z \equiv 0. \quad (39)$$

Уравнение (37) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} [i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m] \right] - \frac{\lambda^2 + k^2}{\mu} [i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m] = \frac{\lambda^2}{\mu} \widehat{j}_z^m. \quad (40)$$

Граничные условия для (40) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} [i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\frac{d}{dz} (i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m) \right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \\ |\widehat{H}_z| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (41)$$

Вместо задачи (40), (41) рассмотрим для функции

$$u = i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m$$

следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu} \frac{du}{dz} \right] - \frac{\mu^2 + k^2}{\mu} u = 0, \\ \text{условия(41),} \end{cases} \quad (42)$$

с дополнительными условиями

$$\begin{cases} [u]_{z=0} = 0, \\ \left[\frac{du}{dz} \right]_{z=0} = \lambda^2, \\ |u| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (43)$$

Умножая (42) на \bar{u} и интегрируя, получим

$$-\left[\frac{1}{\mu} \bar{u} \frac{du}{dz} \right]_{z=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 + k^2}{\mu} |u|^2 dz. \quad (44)$$

Полагаем, что

$$\lambda = \lambda_x + i\lambda_y \text{ и } u = u_1 + iu_2.$$

Тогда из (44) с учётом (43) следует

$$-Re \frac{1}{\mu(0)} \bar{u}(0) \lambda^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2 \varepsilon \mu}{\mu} |u|^2 dz. \quad (45)$$

Пусть

$$\tilde{Q}(\lambda) = -Re \frac{1}{\mu(0)} \bar{u}(0) \lambda^2 = -\frac{1}{\mu(0)} [(\lambda_x^2 - \lambda_y^2) u_1(0) + 2\lambda_x \lambda_y u_2(0)].$$

Рассмотрим область

$$\tilde{D}_\lambda = \{(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_x^2 - \lambda_y^2 > \omega^2 \varepsilon \mu \text{ для } \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда из (45) выводим, что

$$\tilde{Q}(\lambda) \geq 0 \text{ для } \lambda \in \tilde{D}_\lambda. \quad (46)$$

Пусть

$$\tilde{\alpha} = \inf_{z \in \mathbb{R}} \frac{1}{\mu(z)} > 0.$$

Тогда из (45) получаем неравенство

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{du}{dz} \right|^2 dz \leq \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{Q}(\lambda) \text{ при } \lambda \in \tilde{D}_\lambda.$$

Теорема 2. При условии $\tilde{\alpha} > 0$ классическое решение $u(z, \lambda)$ краевой задачи (42)–(43) не имеет особенностей по переменной $\lambda \in \tilde{D}_\lambda$.

Следствие 2. Электромагнитное поле $\hat{E}(\xi, \eta, z, \lambda), \hat{H}(\xi, \eta, z, \lambda)$ не имеет особенностей по λ в области \tilde{D}_λ .

Доказательство теоремы 2 и следствия 2 – это повторение рассуждений из статьи [1] (с заменой (2.39) на (45) и (2.40) на (46)).

5. Вычисление электромагнитного поля на ЭВМ

Как следует из S 1 поле f (=E и H) задаётся интегралом

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi, \eta, \zeta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

При этом достаточно знать \hat{E}_z, \hat{H}_z , а остальные компоненты вычисляются по формулам (20), (21). Тогда зависимость \hat{f} от ξ, η выражается либо через $\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2$, либо в виде множителей $i\xi, i\eta$. Характер зависимости от $i\xi, i\eta$ таков, что при переходе от \hat{f} к f от множителей $i\xi, i\eta$ можно избавиться, представив интегралы, например следующего вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi F(\lambda) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

как

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = 2\pi \int_0^{+\infty} F(\lambda) \lambda I_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

то поле f выражается в виде суммы интегралов вида:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^k \hat{f}}{dz^k} \mathcal{D}[\lambda I_0(\lambda r)] d\lambda, \quad k \leq 1, \quad (47)$$

где \mathcal{D} – производная по x или y . Но $\frac{d^k \hat{f}}{dz^k}$ не имеет особенностей по λ при $\lambda \in D_\lambda$. Поэтому можно деформировать контур интегрирования в D_λ . При пренебрежимо малом $\omega\varepsilon$ область D_λ совпадает с

$$\{(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : |\lambda_z| > |\lambda_y|\},$$

которая вполне хороша с точки зрения вычисления интегралов (47) на ЭВМ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев С.А., Гуц А.К. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 61–77.
2. Гуц А.К., Терентьев С.А. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Сб.: Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Омск : ОмПИ, 1982. С. 78–80.
3. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск : Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1975.

THE SPECTRAL DENSITY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD FOR ELECTRICAL AND MAGNETIC DIPOLES IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS CONDUCTIVE MEDIUM

S.A. Terentyev

PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: sa.terentyev@gmail.com

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The electromagnetic field in electrical exploration problems is often represented as integrals with a fast-oscillating nucleus. When calculating these integrals on a computer, it is necessary to deform the contour of integration into the plane of the complex variable. The article studies the allowable deformation region of the integration contour in the case of a non-uniform medium. The source of the field is a vertical dipole. A similar problem was solved for a horizontally layered medium with a harmonious electrical or magnetic dipole as a source.

Keywords: Electrical exploration, electromagnetic field of vertical electric or magnetic dipole, fast-oscillating integrals, deformation contour, complex plane, absence of singular points, deformation domain.

REFERENCES

1. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Issledovaniya osobennosti spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 4(48), pp. 61–77. (in Russian)
2. Guts A.K. and Terent'ev S.A. Issledovaniya osobennosti spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Sb.: Avtomatizatsiya analiza i sinteza struktur EVM i vychislitel'nykh algoritmov, Omsk, OmPI Publ., 1982, pp. 78–80. (in Russian)
3. Tabarovskii L.A. Primenenie metoda integral'nykh uravnenii v zadachakh geoelektriki. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otделение, 1975. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 23.05.2019

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА НЕРАЗЛОЖИВШЕГОСЯ ОПАДА В ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМАХ

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье исследуются равновесные состояния Нэша для неразложившегося опада в лесных экосистемах в рамках теории дифференциальных игр. Показано, что в равновесии разложение опада идёт с меньшей скоростью.

Ключевые слова: Равновесие Нэша, лесная экосистема, опад, растительность, дифференциальные игры.

Введение

Динамику различных компонент x (биомасса, опад, грибы, гумус и пр.) лесных экосистем часто описывают системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u_1, \dots, u_N), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

с управляющими внешними факторами u_1, \dots, u_N .

В качестве внешних управляющих факторов могут браться самые различные характеристики лесных компонент z . Динамика показателя z зависит от того, в каких границах изменяются управляющие факторы, которыми распоряжаются не только люди, но и то, что можно назвать природой.

Наши знания ограничены, поэтому любые математические модели являются упрощённым взглядом на изучаемые зависимости. Чаще всего принимается постоянным, неизменным во времени то, что на языке математиков именуется коэффициентами, входящими в выводимые дифференциальные уравнения.

Как выявить, насколько неточна изучаемая модель? Один из возможных способов предлагается в данной статье. Суть состоит в том, что коэффициенты рассматриваются как управляющие факторы, а управляют ими неизвестные игроки, которые являются агентами природы. В таком случае мы ищем такое оптимальное управление, которое трудно отнести к людям в силу его идеальности, неприемлемости для людей. Таким оптимальным управлением являются равновесия Нэша — в них каждый игрок бережно относится к интересам другого.

Затем сравним решение, предлагаемое системой с постоянными коэффициентами, и решение, получаемое в случае оптимального управления.

Для реализации нашего замысла мы найдём *равновесие Нэша* для системы уравнений, описывающих опад¹, используя теорию дифференциальных игр [2].

1. Уравнения, описывающие опад

Пусть L — это свежий неразложившийся опад, F — частично разложившийся опад. Тогда их динамика описывается системой дифференциальных уравнений [1, с. 86]

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -(k_1 + k_3)L, \\ \frac{dF}{dt} = k_3L - k_2F. \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты k_1, k_2, k_3 описывают функционирование комплекса грибов и микрофауны. Они оценены на основе известных экспериментов литературных данных по лабораторным экспериментам по определению скоростей разложения органических остатков, а также на основе анализа многочисленных экспериментов по разложению опада в контролируемых условиях в лаборатории биохимии почв Биологического института СПбГУ [1, с. 83].

2. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматриваем уравнение (1) как дифференциальную игру с тремя игроками $u_1 = k_1 + k_3, u_2 = k_3, u_3 = k_2$:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -u_1L, \\ \frac{dF}{dt} = u_2L - u_3F, \end{cases} \quad (2)$$

Будем рассматривать игру с ненулевой суммой, поскольку по нашему замыслу «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении (L, F) в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, L, F)$, зависящей уже от позиции $\{t, (L, F)\}$, и для $u(t, L, F)$ используется термин *позиционное управление* игрока [3]. Часто пишут просто $u(L, F)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

¹Опад — отмершие части растений (ветки, листья и др.), опавшие на поверхность почвы или дно водоёма.

Для дифференциальной игры N -игроков

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^N g_j(z)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(z, u_1, \dots, u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^N R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, N),$$

где числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения $V_i(z)$ нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби

$$\begin{aligned} (\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2} (\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^N g_j(z) (R_{jj})^{-1} (g_j(z))^T (\nabla V_j) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (\nabla V_j)^T g_j(z) R_{ij} [(R_{jj})^{-1}]^2 (g_j(z))^T (\nabla V_j) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [2, Theorem 10.4-2, утверждение b.):

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2} R_{ii}^{-1} (g_i(z))^T (\nabla V_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

3. Нэшевское равновесие системы для опада

В нашем случае $N = 3$, и рассматриваем

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = 1, \quad R_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$z = (L, F).$$

Полагая, что

$$V_1(z) = V_2(z) = V_3(z) = \frac{1}{2}(L^2 + F^2) > 0$$

и подставляя эти функции в уравнения Гамильтона–Якоби, получаем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{4}L^4 + \frac{1}{2}L^2F^2 + \frac{1}{2}F^4 > 0, \\ Q_2 &= \frac{1}{2}L^4 + \frac{1}{4}L^2F^2 + \frac{1}{2}F^4 > 0, \\ Q_3 &= \frac{1}{2}L^4 + \frac{1}{2}L^2F^2 + \frac{1}{4}F^4 > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, если Q_i выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона–Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [2] имеем равновесие Нэша

$$u_1^* = \frac{1}{2}L^2, \quad u_2^* = -\frac{1}{2}LF, \quad u_3^* = \frac{1}{2}F^2, \quad (7)$$

найденное по формулам (5).

Выигрышные / проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1(L, F, k_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int_0^{+\infty} [Q_1(x) + (k_1 + k_3)^2] dt, \\ J_2(L, F, k_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int_0^{+\infty} [Q_2(x) + k_3^2] dt, \\ J_3(L, F, k_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int_0^{+\infty} [Q_3(x) + k_2] dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Эволюция опада L в случае равновесия Нэша (7) находится посредством подстановки (7) в первое уравнение системы (2) с последующим интегрированием:

$$\frac{dL}{dt} = -u_1^*L = -\frac{1}{2}L^3$$

или

$$L(t) = \frac{1}{\sqrt{2(t + const)}}. \quad (9)$$

Если непосредственно проинтегрировать первое уравнение системы (1), то получим, что

$$L(t) = const \cdot e^{-(k_1+k_3)t}. \quad (10)$$

4. Заключение

Из уравнений (9), (10) видим, что в случае равновесного управления Нэша разложение опада идёт по степенному закону, а в случае постоянных коэффициентов по экспоненте, т. е. гораздо быстрее. Другими словами, учёт «интересов» всех игроков:

– игрока k_1 — скорость минерализации свежего органического материала (разложение в органическом горизонте);
– игрока k_2 — скорость минерализации КГВ (комплекс гумусовых веществ);
– игрока k_3 — скорость образования КГВ,
ведёт к замедлению скорости разложения опада. Природа более «милостлива» к опаду — она в каждый момент времени выбирает коэффициенты² k_1, k_2, k_3 так, что они коррелируют свои значения с текущим состоянием неразложившейся и разложившейся частей опада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование динамики органического вещества в лесных экосистемах / отв. ред. В.Н. Кудеяров: Ин-т физ.-хим. и биолог. проблем почвоведения РАН. М. : Наука, 2007. 380 с.
2. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
3. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.

EQUILIBRIUM DYNAMICS OF UNDECOMPOSED LITTER IN FOREST ECOSYSTEMS

L.A. Volodchenkova

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the Nash equilibrium states for undecomposed litter in forest ecosystems within the framework of the theory differential games are investigated. It is shown that in equilibrium the decay of litter goes at a lower speed.

Keywords: The Nash equilibrium, forest ecosystem, litter, vegetation, differential games.

REFERENCES

1. Modelirovanie dinamiki organicheskogo veshchestva v lesnykh ekosistemakh. Otv. red. V.N. Kudeyarov, In-t fiz.-khim. i biolog. problem pochvovedeniya RAN, Moscow, Nauka Publ., 2007., 380 p. (in Russian)

²В [1, S 2.3.4] косвенным образом это подтверждается в ходе наблюдения зависимости скоростей минерализации и гумификации от содержания азота и зольности в опаде.

2. Lewis F.L., Vrabie D.L., and Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2012, 540 p.
3. Tynyanskii N.T. and Zhukovskii V.I. Differentsial'nye igry s nenulevoi summoi (kooperativnyi variant). Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal., 1979, V. 17, pp. 3–112. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 26.05.2019

АНАЛИЗ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАБОЧИХ УЧЕБНЫХ ПЛАНОВ

А.А. Сеньковская¹

аспирант, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

И.И. Фураева²

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: furig@mail.ru

¹Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского, Омск, Россия

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Аннотация. Представлены принципы влияния рабочих учебных планов на педагогическую нагрузку в целом и на конечное расписание занятий в итоге, а также необходимость их оптимизации. Показано, что предварительный анализ исходных данных позволяет сократить количество исследуемых переменных. Осуществляется выбор алгоритма для последующего анализа рабочих учебных планов.

Ключевые слова: оптимизация учебных планов, моделирование, уменьшение числа переменных.

Формирование педагогической нагрузки вуза происходит в первую очередь на основе рабочих учебных планов специальностей (РУП), но также немаловажным фактором является имеющийся аудиторный фонд, как специализированный так и общего пользования. Кроме того, распределение учебной нагрузки на кафедрах оказывает влияние на расписание учебных занятий. Причём расписание должно удовлетворять многочисленным требованиям организационного и методического характера, имеющим различные степени обязательности, часто противоречивым или даже взаимоисключаемым.

Для повышения эффективности процесса формирования педагогической нагрузки необходимо проведение предварительного анализа рабочих учебных планов. Более того, в задаче анализа и оптимизации учебных планов целесообразно применение математических методов не только для оценки самого учебного плана по заданным критериям оптимальности, но и оптимизация исходных данных. Все компоненты, такие как рабочие учебные планы, распределение нагрузки на кафедре, количество специализированных аудиторий в конечном счёте оказывают влияние на качество организационных процессов вуза, таких, например, как составление учебного расписания. Если педагогическая нагрузка кафедры распределена равномерно по семестрам, то это существенно облегчает процесс составления расписания. Особенно важно это в том случае, когда речь идёт о сервисной кафедре, использующей учебные аудитории не общего, а специального назначения, такие как компьютерные классы, физические или химические лаборатории. Равномерность использования аудиторий по семестрам на

каждом факультете может быть достигнута с помощью управления процессом формирования рабочего учебного плана (РУП).

Поэтому анализ рабочих учебных планов в первую очередь направлен на их оптимизацию с целью равномерного распределения педагогической нагрузки, а следовательно, с учётом студенческого контингента. Рассмотрим некоторые особенности процесса анализа на примере рабочих учебных планов Казахского университета экономики, финансов и международной торговли. Поскольку основной контингент студентов составляют обучающиеся по программам бакалавриата, основная часть педагогической нагрузки, а также загруженность специализированных аудиторий зависит от оптимизации рабочих учебных планов бакалавриата. Поэтому процесс анализа целесообразно осуществлять именно с учебными планами бакалавриата, хотя обучение ведётся также по программам магистратуры.

В рассматриваемом университете имеется три основных направления подготовки специалистов: искусство, экономика и прикладные науки. По данным трём направлениям ведётся подготовка по 17 специальностям. При этом основные проблемы при формировании педагогической нагрузки возникают с распределением сервисных дисциплин, поскольку именно они ведутся на потоке для всех специальностей и нагрузка по этим дисциплинам может быть распределена таким образом, что задача составления расписания не будет иметь решения. Анализ нагрузки проводится как для каждого потока студентов, так и для общей нагрузки выпускающей кафедры. Такой анализ позволяет на ранних этапах обнаружить такие несоответствия в распределении учебной нагрузки, которые приводят к некорректности постановки задачи расписания учебных занятий.

Рассмотрим, например, распределение нагрузки по сервисным дисциплинам для потоков студентов, обучающихся на первом курсе. В целом анализ рабочих учебных планов с целью оптимизации учебной нагрузки направлен на рассмотрение и работу с учебными планами 1 курса по той причине, что именно для студентов 1 курса осуществляется ведение дисциплин сервисных кафедр, объединённых в потоки по направлениям обучения. В течение учебного года согласно рабочему учебному плану студент должен освоить 36-40 кредитов, что примерно составляет 14-16 дисциплин.

Равномерность распределения учебной нагрузки сервисных кафедр по семестрам — это не просто благопожелание учебной части, а наиважнейшее требование управления учебным процессом. Одному из авторов пришлось не просто узнать о такой ситуации, когда невнимание к этому требованию привело к проблемам неодолимой силы при составлении расписания учебных занятий, но принимать участие в экстренном поиске выхода из создавшегося положения [1].

Рассмотрим математическую модель исследуемого процесса. Имеется N кафедр, которые ведут сервисные дисциплины. РУП по всем специальностям 1 курса, на котором и проводятся занятия по сервисным дисциплинам, уже сформированы. Нагрузка по каждой дисциплине на каждом факультете известна. Нагрузка по каждой кафедре должна быть распределена равномерно по се-

местрам. Чтобы получить не N отдельных целевых функций, а одну, следует выполнить операцию сложения с некоторым весом. В качестве веса можно использовать нагрузку кафедры по рассматриваемым сервисным дисциплинам на каждом факультете, тогда целевая функция примет вид (1):

$$\sum_{j=1}^N (V_j * |\sum_{t=1}^M (RP_{tj}^1 - RP_{tj}^2)|) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где V_j — вес для j -ой кафедры, представляющий собой исходную нагрузку кафедры до начала всех перемещений, RP_{tj}^1, RP_{tj}^2 — нагрузка j -той кафедры по сервисным дисциплинам на t -том факультете за первый и второй семестр соответственно.

Рассмотрим ограничения для задачи, которые связаны с переносом дисциплин в РУП из одного семестра в другой. Наилучшим вариантом, конечно, является такой перенос, при котором не изменяется количество кредитов в семестре. Но для общего случая в формуле (2) указано, что перенос приводит к изменению не более, чем на 1 кредит в каждом семестре.

$$-1 \leq \sum_{k=1}^{K_i^1} \delta_{ijk}^1 * Kr(D_{ijk}^1) + \sum_{k=1}^{K_i^2} \delta_{ijk}^2 * Kr(D_{ijk}^2) \leq 1, \quad (2)$$

где $Kr(D_{ijk})$ — количество кредитов дисциплины D_{ijk} в рабочем учебном плане. Хотя количество таких ограничений пропорционально количеству РУП и количеству вариантов переноса.

Следует отметить, что необходимо учесть ещё ограничение на равномерность использования специализированных аудиторий. Кажется, что это ограничение избыточно, оно уже в основном учтено при анализе нагрузки по таким дисциплинам. Но как это часто бывает при моделировании каких-либо процессов, введение дополнительных ограничений не только не усложняет получение приемлемого или оптимального решения задачи, но и значительно его облегчает. Тогда ограничение потребности в специализированных аудиториях для проведения занятий примет вид (3):

$$S_1 \leq S\Delta_1, S_2 \leq S\Delta_2. \quad (3)$$

Рассмотрим структуру РУП. Как видно из рисунка 1, в учебном плане для студентов 1 курса по направлению «Искусство» предусмотрено освоение 16 дисциплин. Если факультетов 10, тогда придётся рассматривать 16×10 переменных и выбирать для них подходящие семестры по каким-то критериям. В статье рассматривается задача для трёх факультетов конкретного университета, но предложенный алгоритм применим для любого количества факультетов. Прежде чем рассматривать алгоритм решения задачи, попытаемся уменьшить количество независимых переменных. Для этого используем особенности постановки задачи. Так, например, дисциплины «Казахский / русский язык» и «Иностранный язык» преподаются в обоих семестрах учебного года, поэтому не влияют

на равномерность распределения нагрузки для кафедры, осуществляющей преподавание данных дисциплин, и их можно не учитывать. Также исключаются из рассмотрения специализированные дисциплины по каждой специальности, ведение которых закреплено за выпускающей кафедрой. Таким образом, за два семестра в среднем по каждому из направлений осуществляется проведение занятий по 10 сервисным дисциплинам.

Академическая степень: Бакалавр

Наименование модуля	Код дисциплины	Наименование дисциплины	компонент и инкл	семестр	Кредиты РУ	ECTS credits
Общий обязательный модуль ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ	Inf 1101	Информатика	ООД (ОК)	2	3	5
	IYa 1102	Иностранный язык	ООД (ОК)	1	3	5
	K(R)Ya 1103	Казахский (Русский) язык	ООД (ОК)	1	3	5
Общий обязательный модуль ЭКОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ	Soc 1104	Социология	ООД (ОК)	1	2	3
	EUR 1105	Экология и устойчивое развитие	ООД (ОК)	1	2	3
	OBZh 1106	Основы безопасности жизнедеятельности	ООД (ОК)	2	2	3
Обязательный модуль по специальности ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ	IG 1201	Инженерная графика 1	БД (ОК)	1	2	3
	Cve 1202	Цветоведение	БД (ОК)	2	3	5
Общий обязательный модуль ИСТОРИЧЕСКИЙ	IK 1107	История Казахстана	ООД (ОК)	2	3	5
	Rved 1108	Религиоведение	ООД (КВ)	1	2	3
Общий обязательный модуль ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ 2	IYa 1109	Иностранный язык	ООД (ОК)	2	3	5
	K(R)Ya 1110	Казахский (Русский) язык	ООД (ОК)	2	3	5
	OP 1111	Основы права	ООД (ОК)	2	2	3
Общий обязательный модуль МИРОВОЗРЕНЧЕСКИЙ	OET 1112	Основы экономической теории	ООД (ОК)	2	2	3
	Fi 1113	Философия	ООД (ОК)	1	3	5
	Pol 1114	Политология	ООД (ОК)	1	2	3
			Итого за 1 семестр:	19	30	
			Итого за 2 семестр:	21	34	
			Итого за 1 год обучения:	40	64	
Дополнительные виды обучения						
	Fiz	Физическая культура	ДВО (ОК)	1,2	8	12
	UP	Учебная практика (Планёр)	ДВО (ОК)	2	2	1
			Итого по ДВО	10	13	
			Итого по теоретическому обучению:	40	64	

Рис. 1. Образец рабочего учебного плана для 1 курса

Особенность преподавания сервисных дисциплин в вузе состоит в том, что для всех специальностей факультета сервисная дисциплина проводится в одном и том же семестре. Это позволяет не рассматривать каждый РУП отдельно, а проводить суммарные оценки по каждой дисциплине на факультете.

На рисунке 2 представлена сформированная последовательность исходных дисциплин, где 1 обозначает проведение дисциплины в первом семестре, 0 — во втором семестре.

Введём обозначение $k = \{0, 1\}$, то есть возможное расположение дисциплины в рабочем учебном плане по семестрам.

Если рассматривать все возможные варианты распределения дисциплин по семестрам, то задача сводится к задаче комбинаторики о размещениях с повторениями. Тогда при длине блока исходных данных $n = 30$ общее число всех возможных вариантов составляет $k^n = 2^{30}$ или 1 073 741 824 варианта.

Исследуем дополнительные способы уменьшения количества переменных для задачи анализа распределения нагрузки. Для этой цели проведём эври-

140939	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	
# направления	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
Кол-во кредитов	3	3	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2	2	
№ варианта / дисциплина	Информатика	История Казахстана	Основы безопасности жизнедеятельности	Основы экономической теории	Религиоведение	Социология	Философия	Экология и устойчивое развитие	Информатика	История Казахстана	Математика в экономике	Основы безопасности жизнедеятельности	Религиоведение	Социология	Философия	Экология и устойчивое развитие	Информатика	История Казахстана	Основы безопасности жизнедеятельности	Основы экономической теории	Религиоведение	Социология	Философия	Экология и устойчивое развитие
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
3	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
18.04.2019 14:11																								
18.04.2019 14:11																								

Рис. 2. Блок исходных данных с вариантами решения при полном переборе

стический анализ данных. Так, дисциплина «Информатика» требует для проведения практических занятий специализированных аудиторий. Кроме этого, оказалось стратегически важным для исследуемого вуза проводить занятия по этой дисциплине в осеннем семестре, как и по дисциплине «История Казахстана».

Кроме того, преподавание дисциплин «Основы права» и «Политология», находящихся в разных семестрах и составляющих по объёму часов 2 кредита, закреплено за одной кафедрой, поэтому перенос в другие семестры не даст улучшения кафедрального объёма часов. Следовательно, и рассматривать их в общем блоке анализируемых данных не имеет смысла.

Тогда длина блока исследуемых данных сокращается до $n = 18$ (по 6 на каждом направлении), а общее число всех возможных вариантов составит $k^n = 2^{18}$ или 262 144 варианта.

Наиболее простым способом анализа всех возможных вариантов является метод полного перебора, причём будут рассмотрены и исследованы даже все тривиальные решения. Блок-схема алгоритма с использованием метода полного перебора и выявления оптимального значения целевой функции представлена на рисунке 3. Этот метод был реализован с целью получения всех вариантов изменения семестра и получения количества оптимальных решений и их анализа.

В результате было получено 3 оптимальных последовательности при значении целевой функции $F = 140\ 939$ (рисунок 2). Кроме того, планировалось определить время работы программы, но для такого небольшого количества переменных оно оказалось незначительным. Ещё одной задачей при проведении полного перебора являлась проверка изменений в РУП на предмет ограничений в виде равенства нулю или неравенства. Оказалось, что все оптимальные решения достигаются при выполнении ограничения (2) в виде равенства нулю:

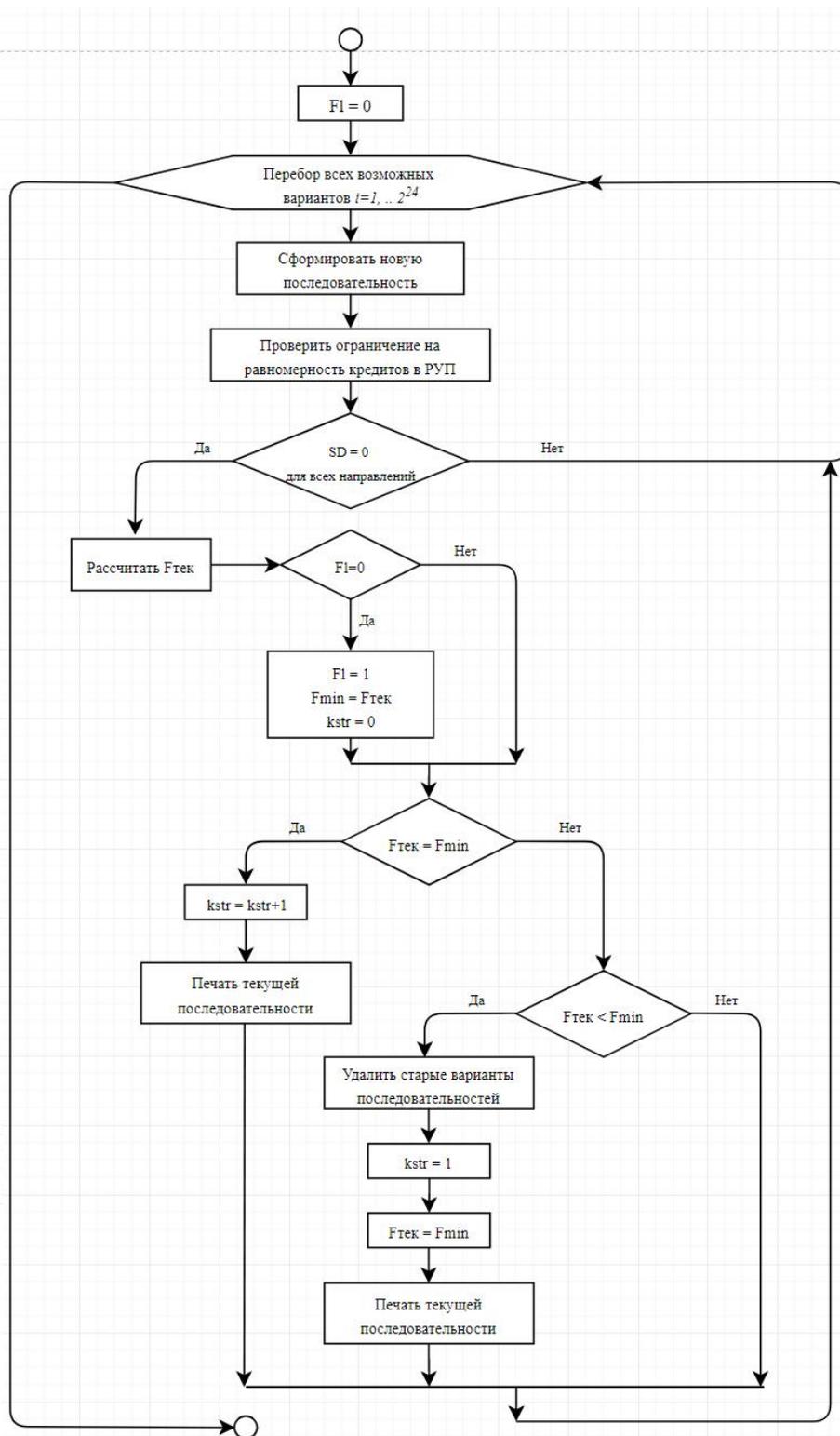


Рис. 3. Блок-схема алгоритма полного перебора вариантов с поиском оптимального значения целевой функции

$$\sum_{k=1}^{K_i^1} \delta_{ijk}^1 * Kr(D_{ijk}^1) + \sum_{k=1}^{K_i^2} \delta_{ijk}^2 * Kr(D_{ijk}^2) = 0. \quad (4)$$

Изменение ограничения позволило применить другой подход к поиску оптимального решения.

Кроме этого, рассматривалась задача с учётом ограничений на аудиторный фонд и без него. Как и ожидалось, учёт этого ограничения приводит к большему значению целевой функции.

Итак, окончательный алгоритм сформировался после анализа полного перебора. И выполняется он следующим образом.

1. Вначале распределяем по семестрам дисциплину «Информатика», для которой задаётся условие на аудиторный фонд.

2. Затем рассматриваются суммарные РУП на каждом направлении для оставшихся дисциплин и производится поиск подходящих переносов дисциплин по семестрам. При этом ограничения на изменение количества кредитов в РУП выполняются автоматически, т. к. изменений нет.

3. Формируются подходящие варианты для каждого направления.

4. Определяется оптимальное решение при сочетании этих вариантов.

Первый шаг фактически сводится к задаче разделения одномерного массива на 2 части с одинаковыми суммами.

После выполнения 1 шага система сильно выведена из состояния равновесия тем, что для одной дисциплины уже точно известно её распределение по семестрам. Это приводит к значительному снижению вариантов при выполнении 2 шага [2].

В данном алгоритме также предусмотрен обмен двух и трёх пар дисциплин с одинаковым количеством кредитов, а также двух дисциплин по 3 кредита в одном семестре на три дисциплины по 2 кредита в другом семестре, что по сумме составляет по 6 кредитов.

Блок-схема алгоритма с использованием сформулированного подхода представлена на рисунке 4.

В результате выполнения представленного алгоритма для каждого из направлений сформулировано следующее количество вариантов: «Искусство» — 1 вариант, «Экономика» — 63 варианта, «Прикладные науки» — 18 вариантов. Один вариант для направления «Искусство» обусловлен строгим закреплением дисциплин «Информатика» и «История Казахстана» в первом семестре. Тогда общее количество всех возможных перемещений в общем случае составит $1 \times 63 \times 18$, что составляет 1 134 варианта, что значительно меньше предполагаемого количества на начальном этапе.

Полученные комбинации последовательности необходимо оценить с точки зрения оптимальности значения целевой функции. Поиск минимального значения целевой функции осуществляется аналогично методу полного перебора. В результате было получено 567 возможных вариантов последовательности при значении целевой функции $F = 99\,781$. Однако в данном случае не было учтено ограничение (3) потребности в специализированных аудиториях.

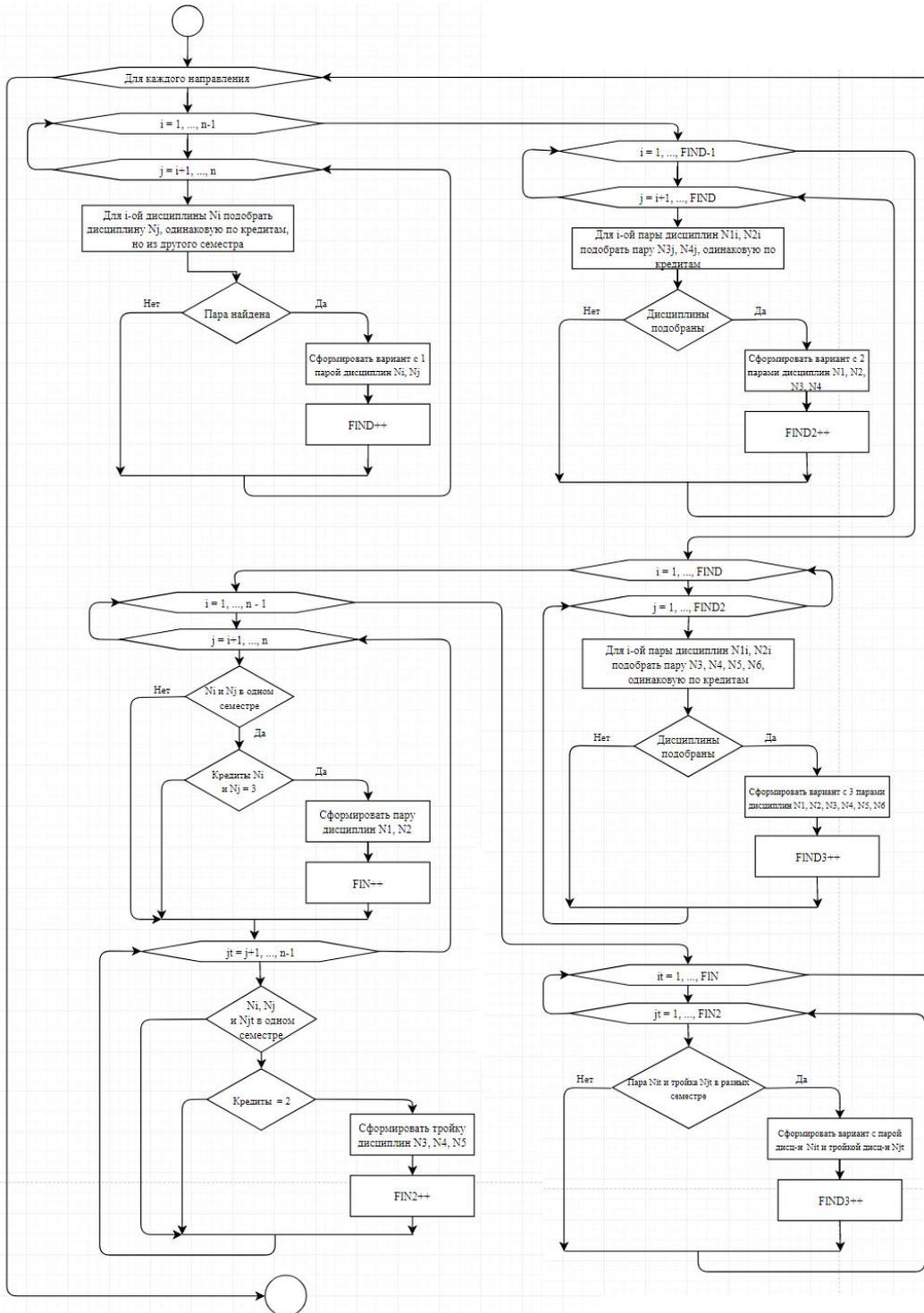


Рис. 4. Блок-схема алгоритма подбора дисциплин

Если же рассматривать задачу с учётом ограниченности аудиторного фонда, в результате анализа сформированных на данном этапе комбинаций также получается всего 3 варианта при значении целевой функции $F = 140\,939$, что совпадает с вариантами последовательности, полученными с помощью полного перебора, как продемонстрировано на рисунке 2.

Сведение задачи к анализу всего лишь 1134 возможных комбинаций последовательности для формирования оптимального распределения сервисных дисциплин в частном случае для длины блока исходных данных $n = 24$ значительно упрощает процесс анализа.

Анализ рабочих учебных планов является важной составляющей процесса распределения нагрузки, что в конечном итоге является исходными данными для задачи составления расписания занятий. Если анализировать учебные планы всех специальностей по всем направлениям сразу, тогда блок исходных данных будет избыточным с большим количеством повторяющихся переменных. Однако поскольку ведение занятий по сервисным дисциплинам осуществляется в потоке на каждом из факультетов, а не в отдельных группах специальности, имеет смысл определять один основной учебный план для каждого из направлений, данные из которых анализируются, а остальные учебные планы направления ссылаются на основной. Далее непосредственный анализ учебных планов с целью их оптимизации уже осуществляется согласно алгоритму, описанному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фураева И.И. Анализ исходных данных для задачи составления расписания // *Materialy czwartej miedzynarodowej naukowo-hractorycznej konferencji "Nauka: teoria i praktyka-2007"*. Tom 7 pedagogiczne nauki. Przemysl. 2007. S. 47-49.
2. Сеньковская А.А., Фураева И.И. Алгоритмы оптимизации рабочих учебных планов // *Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов IV Международной научной конференции*. Омск : ОмГУ, 2016. С. 91-93.

ANALYSIS OF THE SOURCE DATA IN THE TASK OF CURRICULUM OPTIMIZATION

A.A. Senkovskaya¹

Graduate Student, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

I.I. Furayeva²

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: furir@mail.ru

¹Dostoevsky Omsk State University

²Eurasian National University n.a. L.N. Gumilyov

Abstract. The principles of the influence of working curricula on the teaching load as a whole and on the final schedule of classes in the end, as well as the need to optimize

them are presented. It is shown that a preliminary analysis of the source data reduces the number of variables studied. The selection of the algorithm is carried out for the subsequent analysis of the working curricula.

Keywords: curriculum optimization, modeling, reducing the number of variables.

REFERENCES

1. Furaeva I.I. Analiz iskhodnykh dannykh dlya zadachi sostavleniya raspisaniya. Materialy czwartej miedzynarodowej naukowi–hraktycznej konferencji "Nauka: teoria i praktyka–2007", Тум 7 pedagogiczne nauki, Przemysl, 2007, pp. 47–49. (in Russian) (in Russian)
2. Sen'kovskaya A.A. and Furaeva I.I. Algoritmy optimizatsii rabochikh uchebnykh planov. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sbornik materialov IV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, Omsk, OmGU Publ., 2016, pp. 91–93. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 20.04.2019

WAS THERE A PRE-BIBLICAL 9-ARY NUMBER SYSTEM?

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In the Biblical Hebrew, in general, numbers were represented in decimal form. For example, a representation of 123 consists of three symbols that represent 100, 20, and 3. However, there are exceptions to this rule: for two numbers, 15 and 16, representation involve number 9, not number 10: 15 is represented as $9 + 6$, and 16 as $9 + 7$. Maybe this means that in the past, people used a 9-ary number system? In this paper, we explain why this hypothesis makes sense, how it explains that this system disappeared, and how we can use this hypothesis to further “spice up” the teaching of different number systems.

Keywords: 9-ary system, seven plus minus two law, ternary number system, Biblical mathematics, teaching number systems.

1. How Numbers Are Represented in the Bible: A Brief Reminder

In the Biblical Hebrew, numbers were represented by combinations of letters:

- aleph (א), the first letter of the alphabet, had the value 1,
- beth (ב), the second letter, had the value 2, etc.,
- ...
- until we reach the tenth letter, which has the value 10.

Consequent letters have values 20, 30, ..., 90, then 100, 200, 300, etc.

2. Exceptions

In general, this system was decimal. For example, to form a number

$$123 = 100 + 20 + 3,$$

we needed to write down letters corresponding to 100, 20, and 3.

There were, however, two exceptions – numbers 15 and 16 were represented in an unusual way:

- 15 was represented as $9 + 6$ and
- 16 was represented as $9 + 7$.

3. Traditional Explanation of the Above Two Exceptions

Traditionally, there is a theological explanation for this:

- Letters corresponding to a more standard representation $10 + 5$ or $10 + 6$ also form the name of God.
- Thus, using such a decimal representation would have contradicted the commandment not to use God's name in vain.

4. Possible Mathematical Explanation

However, maybe there is a mathematical explanation for these exceptions? Just like:

- the fact that in modern French and Spanish, there are special words for 20, words which are different from the usual words for multiples of ten, indicates that their ancestors use base-20 system,
- maybe the ancient Hebrews used base-9 number system?

5. This Explanation Makes Psychological Sense

Base-9 system actually makes sense: indeed, in psychology, there is a famous "seven plus minus two law", according to which we can simultaneously keep in mind between 5 and 9 items – the actual number depends on the individual; see, e.g., [4,5].

- From this viewpoint, it makes sense to have a base-5 system: since everyone can keep 5 different items in their mind. Such a system was indeed used, e.g., by the Mayans; see, e.g., [1–3].
- Base-9 numbers also make sense: they correspond to number for which some people can still keep that many items in their mind.

Here:

- while base-5 numbers can be viewed as universal – for everybody,
- base-9 numbers can be viewed as special numbers for those who can master them, for the skilled elite.

6. This May Explain Why 9-Ary System Was Forgotten

9-ary numbers are as elitist as we can have – 10 items are already impossible to remember. This elite character of the base-9 numbers may be the reason why this system – provided that it was actually used – was largely forgotten and only traces of it remain.

7. Base-9 Numbers Make Sense Computationally

Base-9 numbers are, in effect, ternary (base-3) numbers if we combine every pair of consecutive ternary digits into a single 9-ary digit, just like:

- we combine a triple of binary digits into an octal number, and
- we combine a quadruple of binary digits into a hex (base-16) number.

This is interesting, because ternary numbers are actually provably the most adequate for computations; see, e.g., [2]. Because of this, in the past, there were even computers that used ternary numbers, not the usually binary digits 0 and 1 [2].

8. What Can We Do With This Suggestion?

From the viewpoint of history of science, what we are doing is a speculation. We have to wait for a more serious evidence for this suggestion to be taken seriously by historians.

However, speculation or not, nothing prevents us from using this suggestion when teaching students different number bases:

- just like the Mayan reference helps to spice up this material,
- the Biblical hypothesis may need to further increase in interest, especially in Christian and Jewish religious schools, where the Biblical references will definitely resonate with the students.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are thankful to Drs. Larry Lesser and Mourat Tchoshanov for their encouragement and valuable suggestions.

REFERENCES

1. Boyer C.B. and Merzbach U.C. History of Mathematics. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2011.
2. Knuth D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 2: Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley, Boston, Massachusetts, 1980.

3. Kosheleva O. and Villaverde K. How Interval and Fuzzy Techniques Can Improve Data. Springer, Cham, Switzerland, 2018.
4. Miller G.A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 1956, V. 63, no. 2, pp. 81–97.
5. Reed S.K. Cognition: Theories and Application. Wadsworth Cengage Learning, Belmont, California, 2010.

СУЩЕСТВОВАЛА ЛИ ДОБИБЛЕЙСКАЯ 9-РИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ?

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В древнееврейском языке числа в общем были представлены в десятичной форме. Например, представление числа 123 состоит из трёх символов, которые представляют 100, 20 и 3. Однако, из этого правила есть исключения: для двух чисел, 15 и 16, представление включает в себя число 9, а не 10 - 15 представляется как $9 + 6$, а 16 как $9 + 7$. Может быть, это означает, что в прошлом люди использовали 9-ричную систему счисления? В этой статье мы объясняем, почему эта гипотеза имеет смысл, как объясняется исчезновение этой системы и как мы можем использовать эту гипотезу, чтобы в дальнейшем «оживить» изучение различных систем счисления.

Ключевые слова: 9-ричная система, закон «семь плюс минус два», троичная система счисления, библейская математика, изучение систем счисления.

Дата поступления в редакцию: 20.04.2019

WHY STEM?

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Is the idea of combining science, technology, engineering, and mathematics into a single STEM complex a fashionable tendency, as some educators think — or is there a deep reason behind this combination? In this paper, we show that the latest developments in Theory of Computation make such a union necessary and desirable.

Keywords: STEM, theory of computation, feasible algorithms, NP-complete problems.

1. Why STEM?

In the past, teaching math and teaching science were different topics, somewhat related, but largely independent. Nowadays, however, it is fashionable to consider teaching all STEM disciplines — science, technology, engineering, and math — as a whole.

But why? Is there a real reason why, e.g., science and math should be studied together — or it is simply fashion, and in a few years, a new trend will replace this one?

In this paper, we show that there is actually a good reason to combine different disciplines, and this reason comes from the latest developments in theory of computation.

2. What Is Theory of Computation: A Brief Reminder

To explain the relation, let us briefly describe what theory of computation is about; see, e.g., [1,2].

Computations research is, by definition, an applied discipline. The ultimate goal of designing new computers and new algorithms is to solve real-life problems.

Whenever a researcher comes up with a new algorithm, he or she tries to make it as general as possible, so that this algorithm can be used in other (similar) situations as well. This tendency can be traced in all aspects of human activity:

- People did not invent a car just to go from a specific place A to a specific place B : the purpose of the car is to bring us from any point to any other point — as long as there is a road.

- Similarly, Edison did not just invent a lamp to light his own desk — his lamps could be used everywhere.

This desire for generality is reasonable but, if we generalize too much, we end up with a problem which may be impossible to solve at a current technological level. A car that travels along any road is possible to make, but if we want it also to connect points across the ocean (or even get to any place on the Moon), that would doom the car-design project.

Because of this danger, it is very important to find out which problems can be solved and which cannot be solved — so that we do not doom our design project from the very beginning by making it impossibly complex. In terms of algorithms, this means that we need to find out when problems can be algorithmically solved and when they cannot. This is one of the main tasks of theory of computation.

This is a difficult task, and it is made even more difficult if we take into account that the mere existence of an algorithm is not enough: if this algorithm requires several billions years to run on a reasonable-size input, this algorithm is of no practical use. What we need is not just algorithms, we need algorithms which are *feasible*.

3. What Is a Feasible Algorithm: Discussion

This natural and seemingly simple question does not have a good answer yet. What is clear is that for a given algorithm, whether this algorithm is feasible or not depends on its *worst-case complexity* $t(n)$, i.e., on the largest number of its computational steps for all inputs of size n . If this complexity increases too fast when the size n increases, the algorithm is not feasible; otherwise, it is feasible.

If the time $t(n)$ grows exponentially, e.g., as 2^n , then even for reasonable size inputs $n = 300$, the number of computational steps becomes so huge that even if we assume that each computational step takes the smallest physically possible time — e.g., the time during which the world's fastest possible process (light) goes through the smallest possible object (elementary particle) — we will still take much more time than the lifetime of the Universe. Clearly, such algorithms are not feasible.

On the other hand, for most known feasible algorithms, the time $t(n)$ is bounded by some polynomial of n : e.g., by a linear function $C \cdot n$, or by a quadratic function $C \cdot n^2$, or by a cubic function $C \cdot n^3$.

4. What Is a Feasible Algorithm: Resulting Definition

These examples led to the current formal definition of feasibility [1, 2]: *an algorithm is called feasible if there exists a polynomial $P(n)$ for which $t(n) \leq P(n)$ for all n .*

5. This Definition Is Not Perfect

The above definition sounds very reasonable, so why did we say that there is no good answer yet? Because a deeper analysis shows that this definition is not perfect.

- Indeed, e.g., $t(n) = 10^{100} \cdot n$ is clearly a polynomial, but clearly not feasible.
- On the other hand, the function $t(n) = \exp(10^{-100} \cdot n)$ grows faster than a polynomial, but it is clearly feasible for all realistic sizes n .

The current formal definition of feasibility is not perfect, but it is the best we have — so we will use it in this text.

6. What Is a “Problem”?

As we have mentioned earlier, the main purpose of an algorithm is to solve problems. So, the next natural question is: what is a problem? To answer this question, let us describe problems from different disciplines.

What do mathematicians do? A professional *mathematician* proves theorems. To a mathematician, a problem is:

- given a statement x ,
- find a proof of either the original hypothesis y , or of its negation $\neg y$.

Once a proof is presented, it is feasible to check it — of course, this requires it to be a full proof, not a sketch filled with statements “it is not that difficult to prove that”. Once we have a full proof, all we need to do is check each step. Humans can do it, even computers can do it — already in the 1960s, when computers were much slower, they were successfully used to check the proofs. In other words, we have a feasible checking algorithm $C(x, y)$, that:

- given x and y ,
- checks whether y is indeed a proof — i.e., whether y is indeed a solution to the original problem.

Another requirement is that for a proof to be meaningful, it cannot be too long. This was the problem with the first computer-generated proofs: they were so long that no one could check them. What does “not too long” mean? Same as what feasible computations mean — that the length $\text{len}(y)$ of y cannot exceed some polynomial of the length of x : $\text{len}(y) \leq L(\text{len}(x))$, for some polynomial $L(n)$.

What do physicists do? In a nutshell:

- physicists are given the data x , and
- they want to find a law y that explains all this data.

This is what Newton did when we came up with a formula that explains all gravity effects, this is what Ohm did when he came up with his famous Ohm's law. Once the law is found, it is relatively easy to check that all the given data fit this law — it may be cumbersome but it is definitely doable, and computers can sure do it. So, in this case, we also have a feasible algorithm $C(x, y)$ for checking whether y is a solution. We also have a limitation of the length of y : namely, we must have $\text{len}(y) < \text{len}(x)$, because otherwise, we can simply list all the data x and call it a law.

What do engineers do?

- Engineers are given specifications x , e.g., specifications for a bridge, and
- they need to find a design y that satisfies all these specifications.

Nowadays, checking that all specifications are satisfied — e.g., that the bridge will not collapse under a hurricane-strength winds — is feasible: just run a simulation program. This does not mean that engineer's work is easy:

- while checking a design is relatively easy,
- coming up with the design is often very difficult — especially taking into account that there are usually severe constraints on the cost.

Here also, there is a limitation on the length of y , this time caused by the fact that this design has to be practically implemented.

Summarizing. These and other examples lead to the following formal definition of a problem (see, e.g., [1, 2]).

7. A Formal Definition of a (General) Problem

- A general problem *can be defined as a pair (C, L) , where C is a feasible algorithm, and L is a polynomial.*
- An instance of this problem is:
 - Given a string x ,
 - Find a string y for which $C(x, y)$ is true and $\text{len}(y) \leq L(\text{len}(x))$.

8. Terminological Comment

In theory of computation, general problems have a special (somewhat weird) name, motivated by the fact that in this theory, in addition to normal (deterministic) computational devices like finite automata, it is often useful to consider fictitious “non-deterministic” devices, in which as part of a computation, we are allowed to make guesses.

In these terms, solving a general problem is a good example of non-deterministic polynomial-time computations:

- once we have guessed a solution y ,
- we can check, in polynomial (= feasible) time that our guess is indeed a solution.

As a result, the class of all general problems is denoted NP, short for Non-deterministic Polynomial.

9. Additional Comment

Are there problems outside the class NP? Definitely.

One example is *optimization* problems, when we are not just looking for a design that satisfies the given specification, but we are instead looking for the cheapest of such designs. There is often no easy way to check that the presented design y is indeed the cheapest. The only practical way is to try all possible designs — but there are usually astronomically many of them.

Another case is *games* like chess. What we want in such games is not a simple design, but a strategy that will enable us to win no matter what moves the opponent makes. There is no easy way to check that, short of trying all possible opponent's strategies — and there are unrealistically many of them.

So yes, there are real-life problems outside the class NP. However, most real-life practical problems are in NP.

10. Which Problems Are Tractable And Which Are Not?

Some problems from the class NP can be solved by a feasible (i.e., polynomial-time) algorithm. For example, if we have a list of numbers, we can sort it in increasing order by using a simple polynomial-time algorithm. The class of all such *tractable* problems is usually denoted by P, short for Polynomial-time.

Interestingly, no one was able to prove that there exist problems which are not in the class P, i.e., that the class NP is indeed different from its tractable subclass P. This is the famous “is $P = NP$ ” question.

Most computer scientists, however, believe that these two classes are different, so we will follow this belief in this paper. While we *do not know* whether any of the problems from the class NP are more difficult than P, we *do know* that some problems from the class NP are the most difficult in this class — namely, that every problem from the class NP can be reduced to this particular problem. Such problems are known as *NP-complete*, or *intractable*.

11. General Problems of Mathematics, Physics, Engineering Are All Provably Intractable

Many practice-related general problems have been proven to be NP-complete (intractable). For example,

- while there exist feasible algorithms for solving systems of linear equations,

- solving systems of quadratic equations is already known to be intractable.

Similarly, general problems of:

- mathematics (proving theorems),
- physics (finding a law that matches all the data),
- engineering (finding a design that satisfies all the specifications)

— all these general problems have been proven to be NP-complete.

12. What Is The Practical Consequence of This NP-Completeness?

OK, we have a nice and somewhat gloomy theoretical result. Can we conclude anything from this result other than that life is tough?

Actually, we can. Remember that NP-completeness of a problem means that every other problem from the class NP can be reduced to this problem. So, if we have an efficient algorithm for solving one NP-complete problem, then, by reducing all other problems to this one, we can get a feasible algorithm for solving all other problems.

For example, if we are good in solving math problems, we can thus solve problems from physics and from engineering. This is not as counter-intuitive as it may seem: this is what scientists have been doing for centuries: using math to solve physical problems.

Vice versa, if we are good in solving physics problems, we can thus solve problems from mathematics. This may sound even less intuitive, but again, engineers have been doing this for decades: to solve a mathematical problem, we can emulate it by real physical processes. Such analog computers have indeed been very successful.

13. So We Need STEM!

All this brings us back to the original question: do we need STEM combination? Is it a natural combination? In pragmatic terms, does it help us solve problems?

As we can see from the above text, our answer is enthusiastically *Yes!*

- Once we have mastered solving mathematical problems, due to NP-completeness, we thus gain a new way to solve problems in physics and engineering.
- Once we have mastered solving physics problems, due to NP-completeness, we thus gain a new way to solve problems in mathematics and engineering.
- Once we have mastered solving engineering problems, due to NP-completeness, we thus gain a new way to solve problems in physics and mathematics.

It thus makes sense to study all these subjects in coordination, emphasizing the relation between them, emphasizing how they help each other.

14. On Second Thought, Did We Say Anything New?

Such inter-twining of physics, mathematics, and engineering is already well known and well used in teaching: for example,

- some calculus problems are easier to solve by symbolic manipulations, while
- other problems become easier to solve if we realize that these seemingly abstract mathematical problems can be reformulated in intuitively understandable physical terms.

Similarly:

- some physical problems are easier to solve by considering the corresponding physics, while
- for other problems, it is easy to write down and solve the corresponding equations.

So, did we say anything new? Or did we use complex notions from theory of computation to confirm that two plus two is four?

15. Yes, We Did

At first glance, it may sound as if theory of computation just provides a fancy and unnecessarily complex way to saying what we knew from the very beginning: that, e.g., math and physics can help each other.

But a deeper analysis of NP-completeness shows that its consequences go way beyond this simple conclusion:

- Yes, we know that *sometimes*, reformulating a math problem in physics terms (or vice versa) helps. In teaching terms, this means that sometimes, it is nice to cross-reference the corresponding classes.
- On the other hand, NP-completeness results means that once we have an efficient algorithm for solving problems from one class, we automatically get a new algorithm for solving problems from other class as well. In other words, by using a slight exaggeration, we can say that reformulating a math problem in physics terms (or vice versa) *always* (and not just sometimes) helps — at least potentially. In teaching terms, this means that it makes sense to consider teaching mathematics, physics, and engineering together, as a single entity.

16. What Needs to Be Done

We have shown:

- that the STEM combination is based on a natural idea,
- that this combination is potentially very helpful to all the related disciplines, and
- that there are indeed examples of such help.

What we need to do is to explore this potential even more, to provide new examples showing the students how their progress in one of these disciplines helps them solve problems in all other related areas.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are thankful to Dr. Mourat Tchoshanov for his encouragement and valuable discussions.

REFERENCES

1. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., and Kahl P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Kluwer, Dordrecht, 1998.
2. Papadimitriou C.H. Computational Complexity. Pearson, Boston, Massachusetts, 1994.

ПОЧЕМУ STEM?

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Является ли идея объединения науки, технологии, инженерии и математики в единый комплекс STEM модной тенденцией, как думают некоторые педагоги, или за этим стоит глубокий смысл? В этой статье мы показываем, что последние разработки в теории вычислений делают такой союз необходимым и желательным.

Ключевые слова: STEM, теория вычислений, выполнимые алгоритмы, NP-полные задачи.

Дата поступления в редакцию: 14.01.2019

FROM GIG ECONOMY TO GIG EDUCATION

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Julian Viera

Ph.D. (Pedagogy), Lecturer, e-mail: jviera1@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Modern economy has benefited from gig economy idea, where, instead of hiring permanent employees, a company assigns each task to the person who is the most efficient in performing this task. This way, each task is performed in the best possible way — by a person who is the most suited for this job. Why not extend this idea to education? Every student deserves the best possible teacher in every topic. So why not have a teacher who is the best in town in explaining quadratic equations teach quadratic equations to all the students from the town? In this paper, we describe this proposal and its logistics in some detail.

Keywords: gig economy, sharing economy, gig education.

1. What Is Gig Economy

Traditionally, a company would hire employees, and these employees would perform all the necessary tasks. For example, our university would hire not only instructors to teach, it would also hire janitors to clean the rooms, cooks to prepare food at the university cafeterias, nurses to help students at the health center, police officers to maintain order, etc.

The advantage of this approach is that the university has a complete control over all these auxiliary activities. However, this approach also come with disadvantages: a university, by definition, knows how to teach students. However, it does not have experience neither in cooking food, nor in supervising food services. As a result, such services were costly and often not of very high quality.

The situation improved a lot when our university — as well as many other places — decided to outsource auxiliary services. As a result, these services are now run more professionally, and — since there is a competition for the corresponding contracts — the cost of these services went down, often drastically.

Our university was just a small example. Outsourcing is a general trend in economy, when a service which is auxiliary to the main mission of the company is often outsourced to a company that specializes in this particular types of service.

There is one minor disadvantage of outsourcing: when everyone was working for the same company, all job tasks and all payments were easy to monitor and easy to handle through the same company-wide system. Now, many services are outsourced to different companies, companies that use different financial and other systems. As a result, outsourcing requires a lot of paperwork — actually, until a few years ago, the need for all this paperwork was one of the main factors limiting further outsourcing, even when potentially such an additional outsourcing was beneficial.

What happened a few years ago was a proliferation of easy-to-use and flexible computer-based systems that made such outsourcing easy. As a result, instead of outsourcing to a company, it has become feasible to outsource to an individual for each individual task — namely, to the individual who is the best for the given job.

This makes sense, and to some extent, this has happened before. For example, most people do not sign a contract with a dealership to possible repairs of their car: every time the car has a problem, we find the best repair folks and contact them. Who we contact depends on the level of repairs: if it is a small thing, it is often easier to go to some folks who are the closest — or who are the fastest. On the other hand, if we are talking about serious repairs, then we probably do not care that much about distance and repair time, we go to a shop which has the best quality for this type of repairs — and for different types of repairs, different shops may be the best.

Similarly, in the US, a person can select a medical doctor — and this person can select different doctors depending on a situation. Usually, we all have regular doctors to whom we go for annual check-ups and for serious problems. However, when a person has a severe debilitating cough on Saturday, it is easier to go to one of the clinics which are open on weekends to get a prescription for the corresponding medicine than to wait until Monday for a regular doctor's visit. Similarly, if a person has a skin problem or a foot problem, this person goes to a specialist — not to the regular doctor.

In the university, sometimes we need to teach a special topics course for a topic in which none of the faculty is a specialist. In this case, we hire a specialist — e.g., a person working at a local company — to teach just this one course.

In the past, such person-to-person contracts were limited to individuals, they were not typical for economy as a whole. Nowadays, the situation has drastically changed, such arrangements are ubiquitous — because newly designed computer systems make such arrangements easy.

For example, when many of our professors go to out-of-town conferences, they use Uber to get from the airport to the conference hotel and back. Similarly, when one of us (VK) was invited to spend a month in Hannover, Germany, he did not reserve a hotel room for his stay — he used Airbnb which connected him to people willing to rent their apartment.

Uber is not a company with employees, it is, in fact, a network that connect requests for transportation with drivers willing to help. These drivers may have different jobs, this is just their way to supplement their living. Similarly, people who rent apartments via Airbnb are not employees of this company, and this rent

is not their main income. This is what is called *gig economy*, when instead of hiring employees or outsourcing its tasks to another company, the company hires individuals for individual tasks; see, e.g., [2–5].

Economists' studies show that overall, gig economy improves productivity. This is easy to explain. For each task, we want the most efficient way to perform it. If we only give the tasks to people within the company — be it the main company or the company to which we outsource — we are limiting the pool of possible workers. In many cases, for a given task, the best person to perform it is outside the company — and in the gig economy, this very best person is who will be assigned for this task.

This is somewhat related to how faculty positions are filled in the US: by law, the university is required to hire the best applicant, irrespective of whether the applicants are from the US or from any other country.

2. Mathematical Model

The mathematical model behind gig economy is what is called an *assignment problem*; see, e.g., [1]:

- For each task t and for each person p , we know the efficiency $E(t, p)$ of person p performing this task.
- We want to assign, to each task t , a person $p = a(t)$ so that the overall efficiency — i.e., the sum

$$\sum_t E(t, a(t))$$

of all the values $E(t, a(t))$ — is the largest possible.

In situations in which there are no limitations, the solution to this problem is straightforward: each task is assigned to the best person to perform this task:

$$E(t, a(t)) = \max_p E(a, p).$$

This is exactly what gig economy provides.

3. From Gig Economy to Gig Education

The same logic can be applied to education. For each topic, each student deserves the teacher who is the best in teaching this topic. For example, among all the teachers in a city, there should be one or two who are the best in teaching quadratic equations. So why not have this exceptional teacher or teachers teach quadratic equations to all the schools of this city?

The same assignment problem works here, and shows that this will lead to an increase in efficiency.

Such a gig arrangement is not possible at present, because most of the schools in the school district follow practically the same week-by-week schedule, but why

not add flexibility? At the beginning of the semester, the Quadratic Equations teachers teaches non-stop in the first school, meanwhile students in other school study something else, then she moves to another school etc. At the end, with all this reshuffling, every student will still study all the topics from the program — but this time, each student will learn each topic from a teacher who is the best (at least the best in the city) in explaining this particular topic.

This idea of *gig education*, when teachers are not employed by individual schools, but rather by the whole school district, may sound unusual, but it is a natural continuation of a general tendency. In the distant past (and even now in small rural schools), we used to have one teacher teaching everything, from history to mathematics. Nowadays, teachers specialize: we have math teacher, science teachers, history teachers, etc. So why not go further and subdivide this even more: why not have one teacher for linear equations, another for quadratic equations?

To some extent, we already have this at a university level: each instructor teaches a few classes, and sometimes, when there is a topic in which another instructor is a good specialist, that second instructor gives a guest lecture. Why not go further and make similar arrangements between universities — at least in big cities where there are many options. Some universities in the US already have such agreements: e.g., Harvard and MIT have a long-standing agreement that Harvard professors teach some humanities classes to MIT students and MIT professors teach some technical topics to Harvard students. There is a similar arrangement between several schools in Texas Medical Center in Houston: e.g., professors from Rice University teach statistical methods to students from Baylor School of Medicine.

We believe that a transition to such gig education will be as beneficial to teaching as gig economy is to economic efficiency and prosperity.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. R. Burkard, M. Dell’Amico, and S. Martello, *Assignment Problems*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 2012.
2. M. McGovern, *Thriving in the Gig Economy: How to Capitalize and Compete in the New World of Work*, The Career Press, Wayne, New Jersey, 2017.
3. O. Mizrahi, *Gig Is Up: Thrive in the Gig Economy, Where Old Jobs Are Obsolete and Freelancing Is the Future*, Greenleaf Book Group Press, Austin, Texas, 2018.
4. D. Mulcahy, *The Gig Economy: The Complete Guide to Getting Better Work, Taking More Time Off, and Financing the Life You Want*, American Management Association, New York, 2016.

5. A. Sundararajan, *The Sharing Economy: The End of Employment and the Rise of Crowd-Based Capitalism*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2017.

ОТ ГИГ-ЭКОНОМИКИ К ГИГ-ОБРАЗОВАНИЮ

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

Дж. Виера

к.пед.н., преподаватель, e-mail: jviera1@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Современная экономика извлекла выгоду из идеи гиг-экономики, где вместо того, чтобы нанимать постоянных сотрудников, компания поручает каждую задачу человеку, который наиболее эффективно выполняет эту задачу. Таким образом, каждое задание выполняется наилучшим образом — человеком, наиболее подходящим для этой работы. Почему бы не распространить эту идею на образование? Каждый ученик заслуживает самого лучшего учителя по каждой теме. Так почему бы не нанять учителя, который лучше всех в городе объясняет квадратные уравнения, преподавать квадратные уравнения всем ученикам в городе? В этой статье мы опишем это предложение и его логику в некоторых деталях.

Ключевые слова: гиг-экономика, совместное потребление, гиг-образование.

Дата поступления в редакцию: 14.01.2019

SHOULD SCHOOL FEEL LIKE A FAMILY: LESSONS FROM BUSINESS CONTROVERSY AS INTERPRETED BY DECISION MAKING THEORY

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Julian Viera

Ph.D. (Pedagogy), Lecturer, e-mail: jviera1@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Traditional business theory promoted the ideal of business as a family: everyone should feel good about each other, all employees should feel good working together towards a joint goal. Recently, however, researchers claim that this well-promoted ideal is unattainable, it is a ruse causing everyone to overwork. Instead, these researchers propose a non-emotional collaboration of adults working temporarily on a joint project. In this paper, we show that this new trend is not just based on anecdotal evidence, it actually has a solid foundation in decision theory. So maybe we should apply this new trend to teaching too — and place less emphasis on the need for everyone to become friends and for team-building? Maybe — like the new business trend suggests — we should reserve our feeling for our real families?

Keywords: decision making theory, emotions, business practices, education.

1. Should Business Feel Like a Family: A Current Business Controversy

The traditional approach to managing a successful business used to always emphasize the desirability of having good feeling about each other, behaving like a group of friends. Numerous team-building exercises were used to bring people closer together.

An ideal company was viewed as a place where everyone is passionate and empathetic about everyone else, where there is no rivalry or indifference, and everyone happily strives towards a common goal — working overtime if necessary.

No company has yet reached this perfect goal, but many are trying, and people are inspired by this great vision and work harder and better.

Teaching usually follows the same ideal: teachers and students should feel like a big family, caring about each other, helping each other, working together towards the same goal: learning.

All this sounds reasonable and familiar, but recently, a new trend of research appeared that claims that this idea is unattainable, that this is just a ruse to make people work overtime — and that the employees' attachment to the workplace "family" comes at the expense of attachment to (and time spent with) their real family, at the expense of their own happiness.

Moreover, the new research claims that this desire to make work feel like a living family is actually counterproductive to the companies themselves: overworked, over-stressed employees make mistakes and are not as productive as they could be; see, e.g., [5].

They cite examples of unorthodox — and very successful — companies that abandoned this quest for the unattainable ideal, companies that promote purely professional no-emotions relations between colleagues, without rah-rah-rah cheering, without team building, just a group of adults coming together for a reasonable time to do something which is beneficial to everyone involved.

2. What Does Decision Theory Say About It

One can cite — as business books usually do — examples of billions of dollars gained and lost by companies of different types, one can cite research about overworked Japanese salarymen and their high suicide rate — or interviews with happy employees of big software companies enjoying their free lunches and yoga studios. However, this is all anecdotal evidence.

To get to the bottom of this controversy, let us analyze this situation from a more solid, more theoretical viewpoint. It all largely boils down to one major question: is the ideal company — as described above — attainable?

Definitely in some places, this has been attained to some extent, but no one would argue that it has been attained perfectly already. So is it an ideal worth fighting for, as the traditional management theories claim — or is it an impossible ruse, as claimed by the new unorthodox (but already very popular) theories.

So let us get to the crux of the matter and analyze, from the decision theory viewpoint, whether the above ideal is attainable.

To perform this analysis, let us recall how mutual feelings are described in the modern decision theory. The main idea behind this description was first proposed in [10, 11]. It was then further developed by the Nobelist Gary Becker [1] and by many others; see, e.g., [2–4, 6–9, 12].

In this description, the happiness $h(i)$ (to be more precise, the utility) of each person i is determined by this person's objective conditions $c(i)$ and the happiness of other people:

$$h(i) = c(i) + a(i, 1) \cdot h(1) + \dots + a(i, n) \cdot h(n),$$

where each coefficient $a(i, j)$ describes to what extent the person i is passionate about the person j . This coefficient is:

- equal to 0 if i is indifferent towards j ,
- positive if i cares about j ,

- and, of course, is negative if i hates j , to the extent that i feels good if j is miserable (“these are your just deserves”).

From this viewpoint, let us analyze the supposedly ideal company with n employees. In this ideal case, everyone is equally feeling good about others, so all the values $a(i, j)$ are equal to the same positive number $a(i, j) = a > 0$ — a number significantly larger than 0. In the ideal company, everyone should also be treated equally well, so we can also assume that all the objective conditions are also equally good: $c(i) = c$ for some $c > 0$.

In this case, the above equation takes the form

$$h = c + (n - 1) \cdot a \cdot h.$$

By moving all the terms containing h into the left-hand side, we conclude that

$$h \cdot (1 - (n - 1) \cdot a) = c.$$

And here we have a problem. The value n is large, the value a is reasonably positive. Thus, we have $(n - 1) \cdot a > 1$. So, the difference in the parentheses in the left-hand side is negative — and thus, since $h > 0$, the whole left-hand is negative. But the right-hand side c is positive! This contradiction seems to confirm that the ideal situation is indeed not possible.

So how do we make sure that with $c > 0$, everyone is happy? In view of the above formula, the only way to achieve this is to make sure that $(n - 1) \cdot a < 1$, i.e., that $a < \frac{1}{n - 1}$. For large n , this means, in effect, that a should be either 0 or negative.

Of course, no one advocates hating each other as a way to a productive business — so the conclusion is that we should have $a = 0$. In other words, we should not try to entice warm feelings between employees, we should not try to make them feel like a family — it is much better to have a group of willing adults who rationally decided to work together on a common goal.

Let us keep emotions where they belong: in the actual family.

3. Should School Feel Like a Family: Probably Not Too

The same conclusion can be made about a school. It seems like attempts to make a school feel like a family, both to teachers and to students, may be somewhat misguided. Yes, we all work towards the same goal, but there is no need to develop an emotional attachment to your classmates, to your teacher, to your school — such an attachment, as the above analysis (and anecdotal evidence) shows, can lead to unhappiness and negative feeling. Our common goal is learning, let us approach it rationally, as a group of rational kids and adults, and let this strategy lead us to new successes.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. Becker G. A Treatise on the Family. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.
2. Bergstrom T. Love and spaghetti, the opportunity cost of virtue. Journal of Economic Perspectives, 1989, Vol. 3, pp. 165–173.
3. Bergstrom T. Systems of benevolent utility interdependence. University of Michigan, Technical Report, 1991.
4. Bernheim B.D., Stark O. Altruism within the family reconsidered: do nice guys finish last? American Economic Review, 1988, Vol. 78, no. 5, pp. 1034–1045.
5. Fried J., Hansson D.H. It Doesn't Have to Be Crazy at Work. HarperBusiness, New York, 2018.
6. Friedman D.D. Price Theory. South-Western Publ., Cincinnati, Ohio, 1986.
7. Hori H., Kanaya S. Utility functionals with nonpaternalistic intergenerational altruism. Journal of Economic Theory, 1989, Vol. 49, pp. 241–265.
8. Kreinovich V. Paradoxes of Love: Game-Theoretic Explanation. University of Texas at El Paso, Department of Computer Science, Technical Report UTEP-CS-90-16, July 1990.
9. Nguyen H.T., Kosheleva O., Kreinovich V. Decision making beyond Arrow's Impossibility Theorem, with the analysis of effects of collusion and mutual attraction. International Journal of Intelligent Systems, 2009, Vol. 24, no. 1, pp. 27–47.
10. Rapoport A. Some game theoretic aspects of parasitism and symbiosis. Bulletin of Mathematical Biophysics, 1956, Vol. 18, pp. 15–30.
11. Rapoport A. Strategy and Conscience. Schocken Books, New York, 1969.
12. Tipler F.J. The Physics of Immortality. Doubleday, New York, 1994.

НУЖНО ЛИ ЧУВСТВОВАТЬ СЕБЯ В ШКОЛЕ КАК В СЕМЬЕ: ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПОМОГАЕТ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ОПЫТ БИЗНЕСА**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

Дж. Виера

к.пед.н., преподаватель, e-mail: jvieral@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Традиционная теория бизнеса продвигала идеал бизнеса как семьи: каждый должен чувствовать себя хорошо друг с другом, все сотрудники должны чувствовать себя хорошо, работая вместе для достижения общей цели. Однако, в последнее время исследователи утверждают, что этот активно пропагандируемый идеал недостижим, это уловка, заставляющая всех работать сверхурочно. Вместо этого эти исследователи предлагают неэмоциональное сотрудничество взрослых людей, временно работающих над совместным проектом. В этой статье мы показываем, что эта новая тенденция основана не только на отдельных случаях, но на

самом деле имеет прочную основу в теории принятия решений. Так что, возможно, нам следует применить эту новую тенденцию и к преподаванию — и уделять меньше внимания тимбилдингу и необходимости того, чтобы все стали друзьями? Может быть, — как предлагает новая тенденция в бизнесе, — мы должны оставить наши чувства для наших настоящих семей?

Ключевые слова: теория принятия решений, эмоции, бизнес-практики, образование.

Дата поступления в редакцию: 14.01.2019

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате \LaTeX (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета \LaTeX и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор MiKTeX , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду $\text{\tbox{...}}$.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды $\text{\caption{...}}$.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: \mathfrak , \mathcal и \mathbb .

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлекцией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры И моделирование

№2(50)

Главный редактор
А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор
Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор
Н.Ф. Богаченко

Корректор:
И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:
А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

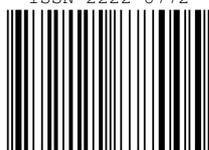
<http://msm.omsu.ru>



Подписано в печать 26.06.2019. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95. Тираж 100 экз. Заказ № 206.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



19050 >