Математические структуры и моделирование
2019. № 2(50). С. 79–84

УДК 004.9 : 631.4 + 519.6
DOI: 10.25513/2222-8772.2019.2.79-84

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА НЕРАЗЛОЖИВШЕГОСЯ ОПАДА В ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМАХ

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье исследуются равновесные состояния Нэша для неразложившегося опада в лесных экосистемах в рамках теории дифференциальных игр. Показано, что в равновесии разложение опада идёт с меньшей скоростью.

Ключевые слова: Равновесие Нэша, лесная экосистема, опад, растительность, дифференциальные игры.

Введение

Динамику различных компонент x (биомасса, опад, грибы, гумус и пр.) лесных экосистем часто описывают системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u_1, ..., u_N), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

с управляющими внешними факторами $u_1, ..., u_N,$.

В качестве внешних управляющих факторов могут браться самые различные характеристики лесных компонент z. Динамика показателя z зависит от того, в каких границах изменяются управляющие факторы, которыми распоряжаются не только люди, но и то, что можно назвать природой.

Наши знания ограничены, поэтому любые математические модели являются упрощённым взглядом на изучаемые зависимости. Чаще всего принимается постоянным, неизменным во времени то, что на языке математиков именуется коэффициентами, входящими в выводимые дифференциальные уравнения.

Как выявить, насколько неточна изучаемая модель? Один из возможных способов предлагается в данной статье. Суть состоит в том, что коэффициенты рассматриваются как управляющие факторы, а управляют ими неизвестные игроки, которые являются агентами природы. В таком случае мы ищем такое оптимальное управление, которое трудно отнести к людям в силу его идеалистичности, неприемлемости для людей. Таким оптимальным управлением являются равновесия Нэша — в них каждый игрок бережно относится к интересам другого.

Затем сравним решение, предлагаемое системой с постоянными коэффициентами, и решение, получаемое в случае оптимального управления.

Для реализации нашего замысла мы найдём *равновесие Нэша* для системы уравнений, описывающих опад[1], используя теорию дифференциальных игр [2].

1. Уравнения, описывающие опад

Пусть L — это свежий неразложившийся опад, F — частично разложившийся опад. Тогда их динамика описывается системой дифференциальных уравнений [1, с. 86]

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -(k_1 + k_3)L, \\ \dfrac{dF}{dt} = k_3 L - k_2 F. \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты k_1, k_2, k_3 описывают функционирование комплекса грибов и микрофауны. Они оценены на основе известных экспериментов литературных данных по лабораторным экспериментам по определению скоростей разложения органических остатков, а также на основе анализа многочисленных экспериментов по разложению опада в контролируемых условиях в лаборатории биохимии почв Биологического института СПбГУ [1, с. 83].

2. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматриваем уравнение (1) как дифференциальную игру с тремя игроками $u_1 = k_1 + k_3, u_2 = k_3, u_3 = k_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -u_1 L, \\ \dfrac{dF}{dt} = u_2 L - u_3 F, \end{cases} \tag{2}$$

Будем рассматривать игру с ненулевой суммой, поскольку по нашему замыслу «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении (L, F) в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, L, F)$, зависящей уже от позиции $\{t, (L, F)\}$, и для $u(t, L, F)$ используется термин *позиционное управление* игрока [3]. Часто пишут просто $u(L, F)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

[1]Опад — отмершие части растений (ветки, листья и др.), опавшие на поверхность почвы или дно водоёма.

Для дифференциальной игры N-игроков

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^{N} g_j(z)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(z, u_1, ..., u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^{N} R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

где числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geqslant 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leqslant J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, ..., u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, ..., N \qquad (3)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения $V_i(z)$ нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби

$$(\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^{N} g_j(z)(R_{jj})^{-1}(g_j(z))^T(\nabla V_j) +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(\nabla V_j)^T g_j(z) R_{ij}[(R_{jj})^{-1}]^2 (g_j(z))^T(\nabla V_j) = 0, \qquad (4)$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [2, Theorem 10.4-2, утверждение b.]:

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2}R_{ii}^{-1}(g_i(z))^T(\nabla V_i), \quad i = 1, ..., N. \qquad (5)$$

3. Нэшевское равновесие системы для опада

В нашем случае $N = 3$, и рассматриваем

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = 1, R_{ij} = 0 \ (i \neq j),$$

$$z = (L, F).$$

Полагая, что

$$V_1(z) = V_2(z) = V_3(z) = \frac{1}{2}(L^2 + F^2) > 0$$

и подставляя эти функции в уравнения Гамильтона–Якоби, получаем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{4}L^4 + \frac{1}{2}L^2F^2 + \frac{1}{2}F^4 > 0, \\ Q_2 &= \frac{1}{2}L^4 + \frac{1}{4}L^2F^2 + \frac{1}{2}F^4 > 0, \\ Q_3 &= \frac{1}{2}L^4 + \frac{1}{2}L^2F^2 + \frac{1}{4}F^4 > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, если Q_i выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона–Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [2] имеем равновесие Нэша

$$u_1^* = \frac{1}{2}L^2, \quad u_2^* = -\frac{1}{2}LF, \quad u_3^* = \frac{1}{2}F^2, \tag{7}$$

найденное по формулам (5).

Выигрышные / проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1(L, F, k_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_1(x) + (k_1 + k_3)^2] dt, \\ J_2(L, F, k_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_2(x) + k_3^2] dt, \\ J_3(L, F_1 + k_3, k_3, k_2) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_3(x) + k_2] dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Эволюция опада L в случае равновесия Нэша (7) находится посредством подстановки (7) в первое уравнение системы (2) с последующим интегрированием:

$$\frac{dL}{dt} = -u_1^* L = -\frac{1}{2}L^3$$

или

$$L(t) = \frac{1}{\sqrt{2(t + const)}}. \tag{9}$$

Если непосредственно проинтегрировать первое уравнение системы (1), то получим, что

$$L(t) = const \cdot e^{-(k_1+k_3)t}. \tag{10}$$

4. Заключение

Из уравнений (9), (10) видим, что в случае равновесного управления Нэша разложение опада идёт по степенному закону, а в случае постоянных коэффициентов по экспоненте, т. е. гораздо быстрее. Другими словами, учёт «интересов» всех игроков:

– игрока k_1 — скорость минерализации свежего органического материала (разложение в органическом горизонте);

– игрока k_2 — скорость минерализации КГВ (комплекс гумусовых веществ);

– игрока k_3 — скорость образования КГВ,

ведёт к замедлению скорости разложения опада. Природа более «милостлива» к опаду — она в каждый момент времени выбирает коэффициенты[2] k_1, k_2, k_3 так, что они коррелируют свои значения с текущим состоянием неразложившейся и разложившейся частей опада.

Литература

1. Моделирование динамики органического вещества в лесных экосистемах / отв. ред. В.Н. Кудеяров: Ин-т физ.-хим. и биолог. проблем почвоведения РАН. М. : Наука, 2007. 380 с.
2. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
3. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3–112.

EQUILIBRIUM DYNAMICS OF UNDECOMPOSED LITTER IN FOREST ECOSYSTEMS

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the Nash equilibrium states for undecomposed litter in forest ecosystems within the framework of the theory differential games are investigated. It is shown that in equilibrium the decay of litter goes at a lower speed.

Keywords: The Nash equilibrium, forest ecosystem, litter, vegetation, differential games.

References

1. Modelirovanie dinamiki organicheskogo veshchestva v lesnykh ekosistemakh. Otv. red. V.N. Kudeyarov, In-t fiz.-khim. i biolog. problem pochvovedeniya RAN, Moscow, Nauka Publ., 2007., 380 p. (in Russian)

[2] В [1, S 2.3.4] косвенным образом это подтверждается в ходе наблюдения зависимости скоростей минерализации и гумификации от содержания азота и зольности в опаде.

2. Lewis F.L., Vrabie D.L., and Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2012, 540 p.
3. Tynyanskii N.T. and Zhukovskii V.I. Differentsial'nye igry s nenulevoi summoi (kooperativnyi variant). Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal., 1979, V. 17, pp. 3–112. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 26.05.2019