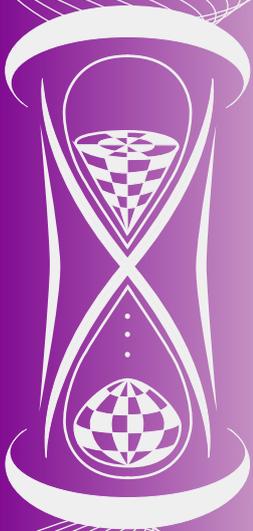


ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 1(49)  
2019**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 1(49)**

Омск  
2019

**Математические структуры и моделирование.** — Омск : Омский государственный университет, 2019. — № 1(49). — 129 с.  
ISSN 2222-8772 (print)  
ISSN 2222-8799 (online)

**Редакционная коллегия**

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневарттовского государственного университета.
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- В. А. Плетюхов** доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского». Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

**Адрес редакции, издателя и типографии**

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а.

**Дата выхода в свет:** 31.03.2019.

**Тираж** 100 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

[guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru)

Электронная почта выпускающего редактора:

[lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

# СОДЕРЖАНИЕ

## Фундаментальная математика и физика

- В.В. Варламов. *Теоретико-групповое описание периодической системы элементов: II. Таблица Сиборга* ..... 5
- А.Г. Гринь. *О локальной предельной теореме для функций от зависимых величин* ..... 22
- В.А. Еровенко. *Существенные спектры обыкновенных дифференциальных операторов. I. Возмущение операторов* ..... 30
- Н.В. Михайлова. *Рациональная сущность математического образования и проблема обособления* ..... 38

## Прикладная математика и моделирование

- Р.Ю. Галимов, А.М. Ахтямов. *Идентификация общих краевых условий оператора диффузии* .. 47
- В.А. Шовин. *Факторный анализ для восстановления пробелов данных артериальной гипертензии* ..... 65
- E. Rodriguez, O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Detecting At-Risk Students: Empirical Results and Their Theoretical Explanation* ..... 73

## Компьютерные науки

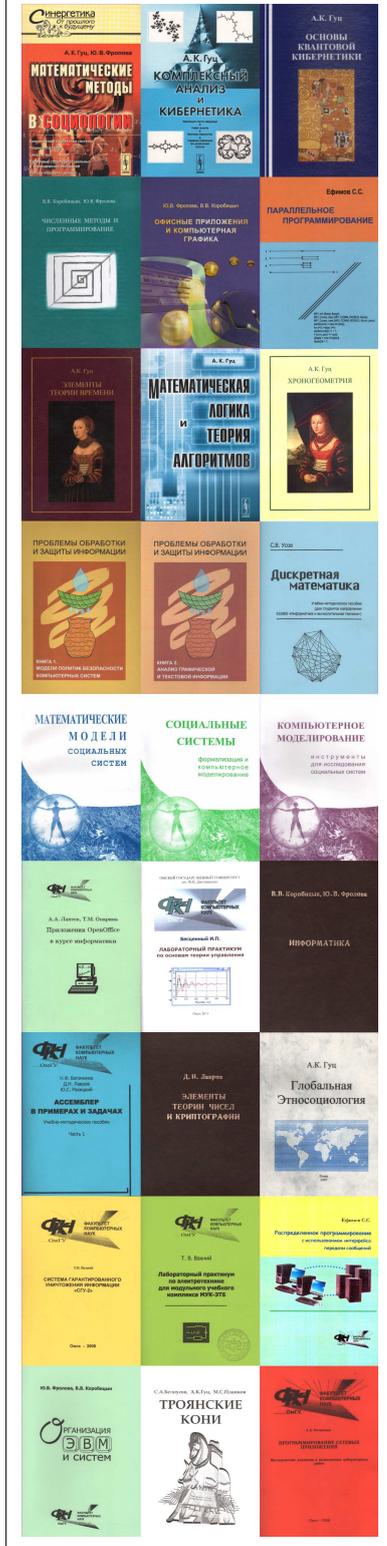
- Н.С. Коваленко. *Модель организации выполнения синхронных процессов в многопроцессорных системах и задачи их оптимизации* ..... 80

## Информационная безопасность

- Н.Ф. Богаченко, А.В. Филиппова. *Ранжирование полномочий на основе анализа иерархии ролей в моделях разграничения доступа* ..... 89
- В.В. Селифанов. *Методика формирования структуры функций управления защитой информации значимых объектов критической информационной инфраструктуры Российской Федерации* ..... 97

*Продолжение на следующей странице*

# Наши публикации



А.К. Гуц, О.В. Матюшина. *Программа, имитирующая сетевые атаки на компьютеры* . . . 108

О. Koshelva, V. Kreinovich. *Secure Multi-Agent Quantum Communication: Towards the Most Efficient Scheme (a Pedagogical Remark)* . . . . . 119

## ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ: II. ТАБЛИЦА СИБОРГА

**В.В. Варламов**

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsui.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

**Аннотация.** Рассматривается теоретико-групповое описание таблицы Сиборга (восьмипериодическое расширение таблицы Менделеева) в рамках модели Румера–Фета. Вводится массовая формула, позволяющая провести поэлементное расщепление масс для основного представления группы Румера–Фета. Вычисляются массы элементов таблицы Сиборга, начиная с атомного номера  $Z = 121$  по  $Z = 220$ . Устанавливается продолжение гомологии Сиборга между лантаноидами и актиноидами до группы суперактиноидов.

**Ключевые слова:** таблица Сиборга, группа Румера–Фета, единая квантовая система, массовые формулы, гомологические ряды.

### 1. Введение

Как известно, периодическая таблица Менделеева включает в себя 120 элементов, из которых в настоящее время открыто 118 (последний открытый элемент **Og** с атомным номером  $Z = 118$  — Оганесон (эка-радон)). Завершают заполнение таблицы Менделеева два ещё не открытых гипотетических элемента **Uue** — Унунений (эка-франций) с  $Z = 119$  и **Ubn** — Унбиниий (эка-радий) с  $Z = 120$ . Согласно модели Бора, оба элемента принадлежат  $s$ -оболочке. Таблица Менделеева содержит семь периодов (строк), включающих в себя  $s$ -,  $p$ -,  $d$ - и  $f$ -семейства (оболочки). Следующий (восьмой) период предполагает начало построения  $g$ -оболочки. В 1969 г. Гленн Сиборг [1] предложил восьмипериодическую таблицу, содержащую  $g$ -оболочку. Первым элементом  $g$ -оболочки является **Ubu** (Унбуний) с атомным номером  $Z = 121$  (с этого элемента также начинается группа суперактиноидов). Полное число элементов таблицы Сиборга равно 220.

Никто не знает, сколько может быть элементов в периодической системе. Структурная модель Резерфорда–Бора, являющаяся полуклассическим паллиативом<sup>1</sup>, приводит к следующему ограничению (так называемое «крахование модели Бора») на число физически возможных элементов. Так, для элементов с

<sup>1</sup>Как известно, модель Бора является развитием планетарной модели Резерфорда, согласно которой электроны (по аналогии с небесной механикой) движутся вокруг ядра атома по классическим траекториям (электронные орбиты). Однако дальнейшее развитие квантовой механики

атомным номером выше 137 «скорость» электрона на  $1s$ -орбитали определяется выражением

$$v = Z\alpha c \approx \frac{Zc}{137,036},$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $c$  — скорость света. Согласно этому приближению, в атомах с  $Z > 137$   $1s$ -электроны «движутся» быстрее скорости света. С другой стороны, как показал Фейнман, релятивистское уравнение Дирака также приводит к проблемам для тяжёлых атомов с  $Z > 137$ , поскольку основное состояние энергии для электрона на  $1s$ -подоболочке даётся выражением  $E = m_0c^2\sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$ , где  $m_0$  — масса покоя электрона. В случае  $Z > 137$  значение энергии становится комплексным числом и, следовательно, волновая функция основного состояния является осциллирующей, т. е. не существует промежутка между положительным и отрицательным энергетическим спектром, что приводит к парадоксу Клейна. По этой причине 137-ой элемент **Uts** (Унтрисептий) был объявлен «концом» периодической системы элементов, а также в честь Фейнмана этот элемент получил неофициальное название Фейнманий (символ **Fy**). Как известно, Фейнман пришёл к этому результату, исходя из предположения, что атомное ядро является точечноподобным<sup>2</sup>. Далее, решение Грейнера–Рейнхардта [8], представляющее атомное ядро заряженным шаром радиуса  $R = 1,2A^{1/3}fm$ , где  $A$  — атомная масса, отодвинуло границу Фейнмана до значения  $Z = 173$ . Считается, что для  $Z \approx 173$   $1s$ -подоболочка под действием электрического поля ядра «погружается» в отри-

---

привело к отказу от понятия электронной орбиты. Электрону как квантовому объекту не присуще понятие классической траектории. С этого момента модель Резерфорда–Бора приобрела ярко выраженный паллиативный характер, представляя атом как классическую составную систему, части которой не описываются законами классической физики. Гейзенберг пишет: «... представление об электронной орбите, связанное с идеей дискретного стационарного состояния, было по ходу дела практически отброшено. Понятие дискретных стационарных состояний, однако, осталось жить. Понятие это было необходимо. Оно имело свою основу в данных наблюдений. Наоборот, электронную орбиту не удалось согласовать с наблюдениями, поэтому от неё отказались, и от неё остались только матрицы для координат» [2, с. 97]. Бор утверждал, что описание результатов квантовомеханических измерений возможно только на языке классической физики. С этим трудно не согласиться, однако, привнесение в квантовомеханические модели понятий и представлений классической физики является спорным (см. [3, 4]). «Мы ведём себя так, словно электрически заряженная частица — ровно настолько же вещь, как электрически заряженная капелька масла или круглая косточка бузины, применявшиеся в старых измерительных приборах. Мы без всякой оглядки применяем понятия классической физики так, словно вообще не слышали об ограниченности её понятий и о принципе неопределённости. Не может ли это привести к ошибкам?» [5, с. 250-251].

<sup>2</sup>Трудностям и противоречиям, к которым приводит точечноподобное представление (а также и другие классические аналогии) в квантовой теории, посвящена статья [6]. М.А. Марков отмечал, что «... понятия обладают, так сказать, известной агрессивностью: они часто претендуют на области, где, по существу, применимость их лишена смысла, т. е. часто наше сознание по привычке, без достаточного основания, расширяет область применимости того или иного понятия и лишь после, иногда долгое время спустя, именно здесь обнаруживаются источники многих недоразумений» [7, с. 17]. И в другом месте: «Мы часто "входим" в микромир с макроскопической невежливостью, "в пальто и калошах"» [7, с. 34]. Не ограничиваясь «пальто» и «калошами», сознание пытается протащить в микромир «столы» и «стулья» (точки, сферы, струны, кварки, ...).

цательный континуум (море Дирака), что приводит к спонтанному рождению электрон-позитронных пар и, как следствие, к отсутствию нейтральных атомов выше элемента **Ust** (Унсепттрий) с  $Z = 173$ . Атомы с  $Z > Z_{cr} \approx 173$  называются *суперкритическими* атомами. Предполагается также, что элементы с  $Z > Z_{cr}$  могут существовать только в качестве ионов.

В настоящей статье рассматривается теоретико-групповое описание таблицы Сиборга в рамках модели Румера–Фета. В отличие от модели Резерфорда–Бора, представляющей каждый атом как составной агрегат из протонов, нейтронов и электронов, модель Румера–Фета отвлекается от внутренней структуры каждого единичного атома<sup>3</sup>, представляя всю совокупность элементов периодической системы как единую квантовую систему. Данный подход, целиком опирающийся на квантовую механику и теорию групп, позволяет обойтись без привлечения классических аналогий при описании периодической системы элементов. Прежде всего, атомы рассматриваются как состояния (дискретные стационарные состояния) *спектра материи*<sup>4</sup>, каждый атом задаётся вектором состояния гильбертова пространства, в котором действует группа симметрии, переводящая одни векторы состояния в другие (т. е. группа, задающая квантовые переходы между элементами периодической системы). Спектр состояний (спектр материи) генерируется операторной  $C^*$ -алгеброй, состоящей из оператора энергии  $H$  и присоединённых к нему генераторов конформной группы посредством конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала (более подробно см. [10]). В п. 2 таблица Сиборга формулируется в рамках основного представления группы Румера–Фета для двух различных цепочек групп, задающих разбиение основного мультиплета на меньшие мультиплеты. Здесь же вычисляются средние массы мультиплетов, входящих в таблицу Сиборга (помимо тех мультиплетов, которые принадлежат таблице Менделеева, за исключением элементов **Uue** и **Ubn**). В п. 3 вводится массовая формула, позволяющая провести поэлементное расщепление масс для основного представления группы Румера–Фета. Вычисляются массы элементов, начиная с атомного номера  $Z = 121$  по  $Z = 220$ . В п. 4 рассматриваются квантовые переходы между векторами состояния физического гильбертова пространства, образованного совокупностью элементов периодической системы.

## 2. Таблица Сиборга

Как уже отмечалось выше, таблица Сиборга является восьмипериодическим расширением таблицы Менделеева, начиная со 121-го элемента по 220-ый. Таблица Сиборга содержит оба «критических» элемента модели Бора: **Uts** (Унтри-

<sup>3</sup>Представление об атоме как о «бесструктурном» состоянии вовсе не означает, что за этим понятием не стоит никакой структуры вообще. Это лишь означает, что эта структура иного порядка, не привнесённая извне, из «репертуара классической физики», а структура, естественно вытекающая из математического аппарата квантовой механики (векторы состояния, группа симметрии, гильбертово пространство, тензорные произведения гильбертовых (Ж-гильбертовых) пространств и т. д.).

<sup>4</sup>Термин, введённый Гейзенбергом в [9] применительно к физике элементарных частиц.

септий,  $Z = 137$ ) и **Ust** (Унсепттрий,  $Z = 173$ ). Согласно модели Бора, со 121-го элемента начинается заполнение  $g$ -оболочки (формирование  $g$ -семейства). В модели Румера–Фета [11]  $g$ -оболочка соответствует квантовым числам  $\nu = 5$  и  $\lambda = 4$  группы симметрии  $SO(2, 4) \otimes SU(2) \otimes SU(2)'$  (см. также [10]). На рис. 1 приведена таблица Сиборга в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета для базиса

$$|\nu, \lambda, \mu, s, s'\rangle, \quad \nu = 1, 2, \dots; \lambda = 0, 1, \dots, \nu - 1; \\ \mu = -\lambda, -\lambda + 1, \dots, \lambda - 1, \lambda; s = -1/2, 1/2, s' = -1/2, 1/2. \quad (1)$$

В свою очередь, базис (1) соответствует следующей цепочке групп:

$$G \supset G_1 \supset G_2 \longmapsto \\ SO(2, 4) \otimes SU(2) \otimes SU(2) \supset SO(4) \otimes SU(2) \supset SO(3) \otimes SU(2), \quad (2)$$

согласно которой осуществляется редукция основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета по подгруппам цепочки, т. е. разбиение основного мультиплетта на меньшие мультиплеты. Пунктирной рамкой на рис. 1 выделена таблица Менделеева. К 20 мультиплетам таблицы Менделеева в рамках восьмипериодического расширения (квантовые числа  $\nu = 5$ ,  $\lambda = 4$ ) добавляется ещё 10 мультиплетов.

Вычислим средние массы этих мультиплетов. С этой целью воспользуемся массовой формулой [11]

$$m = m_0 + a \left[ s'(2\nu - 3) - 5\nu + \frac{11}{2} + 2(\nu^2 - 1) \right] - b \cdot \lambda(\lambda + 1), \quad (3)$$

где  $m_0$ ,  $a$ ,  $b$  — коэффициенты, не выводимые из теории. При  $m_0 = 1$ ,  $a = 17$ ,  $b = 5,5$  из формулы (3) получаем средние массы мультиплетов (см. таб. 1).

**Таб. 1.** Средние массы мультиплетов таблицы Сиборга

	Мультиплет	Масса (теор.)
1.	$(\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4)$	316
2.	$(\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3)$	360
3.	$(\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2)$	393
4.	$(\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1)$	415
5.	$(\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 0)$	426
6.	$(\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4)$	435
7.	$(\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3)$	479
8.	$(\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2)$	512
9.	$(\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1)$	534
10.	$(\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 0)$	545

	$\nu=1$		$\nu=2$		$\nu=3$		$\nu=4$		$\nu=5$		
	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	
$\lambda = 0$	H He	Li Be	Na Mg	K Ca	Rb Sr	Cs Ba	Fr Ra	Uue Ubn	Uhe Usn	Bue Bbn	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=0$
$\lambda = 1$	{	B C	Al Si	Ga Ge	In Sn	Tl Pb	Nh Fl	Uht Uhq	But Buq	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-1$	
		N O	P S	As Se	Sb Te	Bi Po	Mc Lv	Uhp Uhn	Bup Buh	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=0$	
		F Ne	Cl Ar	Br Kr	I Xe	At Rn	Ts Og	Uhs Uho	Bus Buo	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=1$	
$\lambda = 2$	{			Sc Ti	Y Zr	Lu Hf	Lr Rf	Upt Upq	Bnt Bnq	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-2$	
				V Cr	Nb Mo	Ta W	Db Sg	Upp Uph	Bnp Bnh	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-1$	
				Mn Fe	Tc Ru	Re Os	Bh Hs	Ups Upo	Bns Bno	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=0$	
				Co Ni	Rh Pd	Ir Pt	Mt Ds	Upe Uhn	Bne Bun	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=1$	
				Cu Zn	Ag Cd	Au Hg	Rg Cn	Uhu Uhb	Buu Bub	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=2$	
$\lambda = 3$	{					La Ce	Ac Th	Ute Uqn	Uoe Uen	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-3$	
						Pr Nd	Pa U	Uqu Uqb	Ueu Ueb	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-2$	
						Pm Sm	Np Pu	Uqt Uqq	Uet Ueq	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-1$	
						Eu Gd	Am Cm	Uqp Uqh	Uep Ueh	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=0$	
						Tb Dy	Bk Cf	Uqs Uqo	Ues Ueo	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=1$	
						Ho Er	Es Fm	Uqe Upn	Uee Bnn	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=2$	
						Tm Yb	Md No	Upu Upb	Bnu Bnb	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=3$	
$\lambda = 4$	{							Ubu Ubb	Usu Usb	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-4$	
								Ubt Ubq	Ust Usq	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-3$	
								Ubp Ubn	Usp Ush	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-2$	
								Ubs Ubo	Uss Uso	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=-1$	
								Ube Utn	Use Uon	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=0$	
								Utu Utb	Uou Uob	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=1$	
								Utt Utq	Uot Uoq	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=2$	
								Utp Uth	Uop Uoh	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=3$	
								Uts Uto	Uos Uoo	$s=-1/2$ $s=1/2$ } $\mu=4$	

Рис. 1. Таблица Сиборга в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета (базис  $|\nu, \lambda, \mu, s, s'\rangle$ ).

Массовая формула (3) соответствует цепочке групп (2). Формула (3) анало-

гична «первому возмущению» в SU(3)- и SU(6)-теориях, которое позволяет вычислить среднюю массу элементов мультиплета<sup>5</sup>.

Чтобы получить аналог «второго возмущения», приводящего к расщеплению масс внутри мультиплетов группы  $G_2 = \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2)$ , требуется найти дальнейшее удлинение цепочки групп  $G \supset G_1 \supset G_2$  (2), т. е. задача сводится к нахождению ещё одной подгруппы  $G_3$ . Тогда  $G_2/G_3$ -редукция даст поэлементное расщепление масс. Как известно, представление  $\{u_O\}$  группы SU(2) сопоставляет каждому вращению  $O$  из SO(3) матрицу  $u_O$  из SU(2) и тем самым пару  $(O, u_O)$ , т. е. элемент группы  $G_2$ . При перемножении  $(O, u_O)$  дают пары того же вида:  $(O_1, u_{O_1})(O_2, u_{O_2}) = (O_1O_2, u_{O_1}u_{O_2}) = (O_1O_2, u_{O_1O_2})$ , обратные пары имеют тот же вид  $(O, u_O)^{-1} = (O^{-1}, u_{O^{-1}})$ . Следовательно, такие пары образуют подгруппу в  $G_2$ , которая и обозначается  $G_3$ . Подгруппа  $G_3$  локально изоморфна SO(3). Следуя Фету, будем обозначать её через  $\text{SO}(3)_c$ . Далее, однопараметрические подгруппы группы SO(3) имеют вид  $\{e^{-i\alpha A_k}\}$  ( $k = 1, 2, 3$ ); так как представление  $\{u_O\}$  переводит их в однопараметрические подгруппы  $\{e^{-i\alpha\tau_k}\}$  группы SU(2), то соответствующие однопараметрические подгруппы в  $\text{SO}(3)_c$  имеют вид

$$(e^{-i\alpha A_k}, e^{-i\alpha\tau_k}) = (e^{-i\alpha A_k}, 1) (1, e^{-i\alpha\tau_k}).$$

Поскольку матрицам  $A_1, A_2, A_3$  соответствуют в группе  $G$  вращения  $\mathbf{L}_{23} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{K}_1, \mathbf{L}_{31} = \mathbf{J}_2 + \mathbf{K}_2, \mathbf{L}_{12} = \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3$  в основном представлении группы  $G$  (см. [10]), пару  $(e^{-i\alpha A_k}, 1)$  изображает оператор  $e^{-i\alpha(\mathbf{J}_k + \mathbf{K}_k)}$ ; пару  $(1, e^{-i\alpha\tau_k})$  изображает оператор  $e^{-i\alpha\tau_k}$ . Таким образом, однопараметрическим подгруппам  $G_3 = \text{SO}(3)_c$  соответствуют подгруппы операторов  $e^{-i\alpha(\mathbf{J}_k + \mathbf{K}_k)} e^{-i\alpha\tau_k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Неприводимые представления группы  $G_2 = \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2)$  нумеруются наборами квантовых чисел  $(\nu, s', \lambda)$  и изображаются прямоугольниками на рис. 1. Каждое из них задаётся фундаментальным представлением SU(2) и  $(2\lambda + 1)$ -мерным неприводимым представлением группы SO(3). При  $G_2/G_3$ -редукции из такого представления получаются неприводимые представления подгруппы  $G_3 = \text{SO}(3)_c$ , для которых последовательность Клебша–Гордана  $|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$  со значениями  $j_1 = 1/2$  и  $j_2 = \lambda$  сводится к двум членам  $\lambda - 1/2, \lambda + 1/2$  при  $\lambda > 0$  и одному члену  $1/2$  при  $\lambda = 0$ . Следовательно, при  $\lambda > 0$  представление  $(\nu, s', \lambda)$  группы  $G_2$  приводится к двум неприводимым представлениям подгруппы  $G_3$  размерностей  $2(\lambda - 1/2) + 1 = 2\lambda$  и

<sup>5</sup>Так, в SU(3)-теории имеет место массовая формула Гелл–Манна–Окубо

$$m = m_0 + \alpha + \beta Y + \gamma \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] + \alpha' - \beta' Q + \gamma' \left[ U(U + 1) - \frac{1}{4} Q^2 \right],$$

в которой, согласно SU(3)/SU(2)-редукции, квантовые числа ( $I$  — изотопический спин,  $Y$  — гиперзаряд), стоящие в первой квадратной скобке, задают «первое возмущение», что приводит к так называемому *гиперзарядовому* расщеплению масс, т. е. разбиению мультиплета группы SU(3) на меньшие мультиплеты подгруппы SU(2). «Второе возмущение» задаётся квантовыми числами, стоящими во второй квадратной скобке ( $Q$  — заряд,  $U$  — изотопический спин, который в отличие от  $I$  соответствует другому выбору базиса в подгруппе SU(2)), что приводит, в свою очередь, к *зарядовому* (поэлементному) расщеплению масс внутри мультиплетов SU(2).

$2(\lambda + 1/2) + 1 = 2\lambda + 2$ , а при  $\lambda = 0$  — к одному двумерному неприводимому представлению. Таким образом, при  $\lambda > 0$  мультиплеты подгруппы  $G_2$  редуцируются к двум мультиплетам подгруппы  $G_3$ .  $G_2/G_3$ -редукция приводит к следующей (удлинённой) цепочке групп:

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \mapsto \text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(4) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2) \supset \text{SO}(3)_c. \quad (4)$$

Удлинение цепочки групп требует введения нового базиса, векторы которого должны принадлежать наименьшим мультиплетам группы симметрии, т. е. мультиплетам подгруппы  $G_3$ . Векторы  $|\nu, \lambda, \mu, s, s'\rangle$  базиса (1), соответствующего цепочке групп (2), уже не составляют выделенный базис, поскольку  $\mu, s$  не являются больше квантовыми числами группы симметрии, т. е. указанные векторы не принадлежат пространствам неприводимых представлений группы  $G_3$ . Новый базис определяется следующим образом. Поскольку  $\nu, s', \lambda$  связаны с группами  $G, G_1, G_2$ , они остаются квантовыми числами цепочки (2), а вместо  $\mu, s$  вводятся новые квантовые числа, связанные с  $G_3$ . Одно из них — это  $\iota_\lambda$ , связанное с оператором Казимира подгруппы  $G_3$ , равно  $\sum_{k=1}^3 (\boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{J}_k + \mathbf{K}_k)^2$ . При этом двум мультиплетам  $G_3$ , на которые разбиваются представления группы  $G_2$ , соответствуют  $\iota_\lambda = \lambda - 1/2$  и  $\iota_\lambda = \lambda + 1/2$ , откуда  $2\lambda = 2\iota_\lambda + 1$ ,  $2\lambda + 2 = 2\iota_\lambda + 1$ . Другое квантовое число  $\kappa$  есть собственное значение оператора  $q_3 = \boldsymbol{\tau}_3 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3$ , принадлежащего алгебре Ли группы  $G_3 = \text{SO}(3)_c$ . Таким образом, новый базис, соответствующий цепочке групп (4), имеет вид

$$|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle, \quad \nu = 1, 2, \dots; \quad s' = -1/2, 1/2; \quad \lambda = 0, 1, \dots, \nu - 1; \\ \iota_\lambda = \lambda - 1/2, \lambda + 1/2; \quad \kappa = -\iota_\lambda, -\iota_\lambda + 1, \dots, \iota_\lambda - 1, \iota_\lambda. \quad (5)$$

Таблица Сиборга в базисе (5) представлена на рис. 2.

### 3. Массы элементов

Удлинённая цепочка групп  $G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3$  (4) позволяет провести поэлементное расщепление масс основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера-Фета. С этой целью введём следующую массовую формулу:

$$m = m_0 + a \left[ s'(2\nu - 3) - 5\nu + \frac{11}{2} + 2(\nu^2 - 1) \right] - b \cdot \lambda(\lambda + 1) + \\ + a' [2\kappa - 0,1666\kappa^3 + 0,0083\kappa^5 - 0,0001\kappa^7] + (b'\iota_\lambda)^p - 1, \quad (6)$$

где

$$p = \begin{cases} 0, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda - 1/2; \\ 1, & \text{если } \iota_\lambda = \lambda + 1/2. \end{cases}$$

	$\nu=1$		$\nu=2$		$\nu=3$		$\nu=4$		$\nu=5$		
	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	$s'=-1/2$	$s'=1/2$	
$\lambda = 0$	H He	Li Be	Na Mg	K Ca	Rb Sr	Cs Ba	Fr Ra	Uue Ubn	Uhe Usn	Bue Bbn	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=1/2$
$\lambda = 1$	{	B C	Al Si	Ga Ge	In Sn	Tl Pb	Nh Fl	Uht Uhq	But Buq	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=1/2$	
		N O	P S	As Se	Sb Te	Bi Po	Mc Lv	Uhp Uhn	Bup Buh	$\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$	
		F Ne	Cl Ar	Br Kr	I Xe	At Rn	Ts Og	Uhs Uho	Bus Buo	$\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$	
$\lambda = 2$	{			Sc Ti	Y Zr	Lu Hf	Lr Rf	Upt Upq	Bnt Bnq	$\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$	
				V Cr	Nb Mo	Ta W	Db Sg	Upp Uph	Bnp Bnh	$\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=3/2$	
				Mn Fe	Tc Ru	Re Os	Bh Hs	Ups Upo	Bns Bno	$\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
				Co Ni	Rh Pd	Ir Pt	Mt Ds	Upe Uhn	Bne Bun	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
				Cu Zn	Ag Cd	Au Hg	Rg Cn	Uhu Uhb	Buu Bub	$\left. \begin{matrix} \kappa=3/2 \\ \kappa=5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
$\lambda = 3$	{					La Ce	Ac Th	Ute Uqn	Uoe Uen	$\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
						Pr Nd	Pa U	Uqu Uqb	Ueu Ueb	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
						Pm Sm	Np Pu	Uqt Uqq	Uet Ueq	$\left. \begin{matrix} \kappa=3/2 \\ \kappa=5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=5/2$	
						Eu Gd	Am Cm	Uqp Uqh	Uep Ueh	$\left. \begin{matrix} \kappa=-7/2 \\ \kappa=-5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
						Tb Dy	Bk Cf	Uqs Uqo	Ues Ueo	$\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
						Ho Er	Es Fm	Uqe Upn	Uee Bnn	$\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
						Tm Yb	Md No	Upu Upb	Bnu Bnb	$\left. \begin{matrix} \kappa=5/2 \\ \kappa=7/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
$\lambda = 4$	{							Ubu Ubb	Usu Usb	$\left. \begin{matrix} \kappa=-7/2 \\ \kappa=-5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
								Ubt Ubq	Ust Usq	$\left. \begin{matrix} \kappa=-3/2 \\ \kappa=-1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
								Ubp Ubn	Usp Ush	$\left. \begin{matrix} \kappa=1/2 \\ \kappa=3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
								Ubs Ubo	Uss Uso	$\left. \begin{matrix} \kappa=5/2 \\ \kappa=7/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=7/2$	
								Ube Utn	Use Uon	$\left. \begin{matrix} \kappa=-9/2 \\ \kappa=-7/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$	
								Utu Utb	Uou Uob	$\left. \begin{matrix} \kappa=-5/2 \\ \kappa=-3/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$	
								Utt Utg	Uot Uoq	$\left. \begin{matrix} \kappa=-1/2 \\ \kappa=1/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$	
								Utp Uth	Uop Uoh	$\left. \begin{matrix} \kappa=3/2 \\ \kappa=5/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$	
								Uts Uto	Uos Uoo	$\left. \begin{matrix} \kappa=7/2 \\ \kappa=9/2 \end{matrix} \right\} \iota_\lambda=9/2$	

**Рис. 2.** Таблица Сиборга в форме основного представления  $F_{ss'}^+$  группы Румера–Фета (базис  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$ ).

Формула (6) в качестве «первого возмущения» содержит формулу Фета (3),

соответствующую цепочке групп (2), согласно которой осуществляется разбиение основного представления  $F_{ss'}^+$  на мультиплеты  $(\nu, s', \lambda)$ , а также вычисляются средние массы мультиплетов  $(\nu, s', \lambda)$ . Аналог «второго возмущения» в формуле (6) задаётся квантовыми числами  $\iota_\lambda, \kappa$ , что, согласно цепочке (4), приводит к разбиению мультиплетов  $(\nu, s', \lambda)$  на пару мультиплетов подгруппы  $G_3$  ( $G_2/G_3$ -редукция), и тем самым осуществляется поэлементное расщепление масс. Массы элементов таблицы Сиборга, начиная с атомного номера  $Z = 121$  по  $Z = 220$ <sup>6</sup>, вычислены согласно массовой формуле (6) при значениях  $m_0 = 1$ ,  $a = 17$ ,  $b = 5,5$ ,  $a' = 2,15$ ,  $b' = 5,3$  (см. таб. 2). Первый столбец таб. 2 содержит атомный номер элемента; во втором столбце находится общепринятое (согласно организации IUPAC<sup>7</sup>) обозначение элемента; в третьем столбце приведены квантовые числа элемента, задающие вектор  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$  базиса (5)<sup>8</sup>; четвёртый столбец содержит массу элемента, вычисленную согласно формуле (6).

**Таб. 2.** Массы элементов таблицы Сиборга.

$Z$	Элемент	Квантовые числа	Масса
121	<b>Ubu</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -7/2$	308,3181
122	<b>Ubb</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -5/2$	309,2352
123	<b>Ubt</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -3/2$	310,6271
124	<b>U bq</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -1/2$	313,8942
125	<b>Ubp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 1/2$	318,1057
126	<b>Ubn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 3/2$	321,3729
127	<b>Ubs</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 5/2$	322,7647
128	<b>Ubo</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 7/2$	323,6818
129	<b>Ube</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = -9/2$	327,2491
130	<b>Utn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = -7/2$	331,1681
131	<b>Utu</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = -5/2$	332,0852
132	<b>Utb</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = -3/2$	333,4771
133	<b>Utt</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = -1/2$	336,7421
134	<b>Utq</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = 1/2$	340,9557
135	<b>Utp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = 3/2$	344,2229
136	<b>Uth</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = 5/2$	345,6147
137	<b>Uts</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = 7/2$	346,5318
138	<b>Uto</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 9/2, \kappa = 9/2$	350,4551

<sup>6</sup>Как уже отмечалось выше, таблица Сиборга является расширением таблицы Менделеева, выделенной на рис. 2 пунктирной рамкой. В таб. 2 приведены массы элементов, находящихся за пределами пунктирной рамки. В свою очередь, таблица Менделеева содержит два ещё не открытых элемента **Uue** ( $Z = 119$ ) и **Ubn** ( $Z = 120$ ), соответствующих базисным векторам  $|4, 1/2, 0, 1/2, -1/2\rangle$  и  $|4, 1/2, 0, 1/2, 1/2\rangle$ . Массы **Uue** и **Ubn**, вычисленные согласно (6), равны соответственно 304,8942 и 309,1057.

<sup>7</sup>IUPAC — International Union of Pure and Applied Chemistry.

<sup>8</sup>Напомним, что согласно теоретико-групповому описанию, каждый элемент периодической системы соответствует вектору  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$  базиса (5), образуя тем самым единую квантовую систему.

$Z$	Элемент	Квантовые числа	Масса
139	<b>Ute</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -5/2$	353,2352
140	<b>Uqn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -3/2$	354,6271
141	<b>Uqu</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -1/2$	357,8942
142	<b>Uqb</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 1/2$	362,1057
143	<b>Uqt</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 3/2$	365,3729
144	<b>Uqq</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 5/2$	366,7647
145	<b>Uqp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -7/2$	369,8681
146	<b>Uqh</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -5/2$	370,7852
147	<b>Uqs</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -3/2$	372,1771
148	<b>Uqo</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -1/2$	375,4442
149	<b>Uqe</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 1/2$	379,6557
150	<b>Upn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 3/2$	382,9229
151	<b>Upu</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 5/2$	384,3147
152	<b>Uqp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 3, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 7/2$	385,2318
153	<b>Upt</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = -3/2$	387,6271
154	<b>Upq</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = -1/2$	390,8942
155	<b>Upp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = 1/2$	395,1057
156	<b>Uph</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = 3/2$	398,3729
157	<b>Ups</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -5/2$	398,4852
158	<b>Upo</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -3/2$	399,8771
159	<b>Upe</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = -1/2$	403,1442
160	<b>Uhn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 1/2$	407,3557
161	<b>Uhu</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 3/2$	410,6229
162	<b>Uhb</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 2, \iota_\lambda = 5/2, \kappa = 5/2$	412,0147
163	<b>Uht</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2, \kappa = -1/2$	412,8942
164	<b>Uhq</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 1/2, \kappa = 1/2$	417,1057
165	<b>Uhp</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = -3/2$	416,5771
166	<b>Uhn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = -1/2$	419,8442
167	<b>Uhs</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = 1/2$	424,0557
168	<b>Uho</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 1, \iota_\lambda = 3/2, \kappa = 3/2$	427,3229
169	<b>Uhe</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2, \kappa = -1/2$	425,5452
170	<b>Usn</b>	$\nu = 5, s' = -1/2, \lambda = 0, \iota_\lambda = 1/2, \kappa = 1/2$	429,7557
171	<b>Usu</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -7/2$	427,3181
172	<b>Usb</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -5/2$	428,2352
173	<b>Ust</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -3/2$	429,6271
174	<b>Usq</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = -1/2$	432,8942
175	<b>Usp</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 1/2$	437,1057
176	<b>Ush</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 3/2$	440,3729
177	<b>Uss</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 5/2$	441,7647
178	<b>Uso</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, \iota_\lambda = 7/2, \kappa = 7/2$	442,6818

$Z$	Элемент	Квантовые числа	Масса
179	<b>Use</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = -9/2$	446,2449
180	<b>Uon</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = -7/2$	450,1681
181	<b>Uou</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = -5/2$	451,0852
182	<b>Uob</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = -3/2$	452,4771
183	<b>Uot</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = -1/2$	455,7442
184	<b>Uoq</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = 1/2$	459,9557
185	<b>Uop</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = 3/2$	463,2229
186	<b>Uoh</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = 5/2$	464,6147
187	<b>Uos</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = 7/2$	465,5318
188	<b>Uoo</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 4, l_\lambda = 9/2, \kappa = 9/2$	469,4551
189	<b>Uoe</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = -5/2$	472,2352
190	<b>Uen</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = -3/2$	473,6271
191	<b>Ueu</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = -1/2$	476,8942
192	<b>Ueb</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = 1/2$	481,1057
193	<b>Uet</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = 3/2$	484,3729
194	<b>Ueq</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 5/2, \kappa = 5/2$	485,7647
195	<b>Uep</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = -7/2$	488,8681
196	<b>Ueh</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = -5/2$	489,7852
197	<b>Ues</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = -3/2$	491,177
198	<b>Ueo</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = -1/2$	494,4442
199	<b>Uee</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = 1/2$	498,6557
200	<b>Bnn</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = 3/2$	501,9229
201	<b>Bnu</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = 5/2$	503,3147
202	<b>Bnb</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 3, l_\lambda = 7/2, \kappa = 7/2$	504,2318
203	<b>Bnt</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 3/2, \kappa = -3/2$	506,6271
204	<b>Bnq</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 3/2, \kappa = -1/2$	509,8942
205	<b>Bnp</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 3/2, \kappa = 1/2$	514,1057
206	<b>Bnh</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 3/2, \kappa = 3/2$	517,3729
207	<b>Bns</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = -5/2$	517,4852
208	<b>Bno</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = -3/2$	518,8771
209	<b>Bne</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = -1/2$	522,1442
210	<b>Bun</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = 1/2$	526,3557
211	<b>Buu</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = 3/2$	529,6229
212	<b>Bub</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 2, l_\lambda = 5/2, \kappa = 5/2$	531,0147
213	<b>But</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 1/2, \kappa = -1/2$	531,8942
214	<b>Buq</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 1/2, \kappa = 1/2$	536,1057
215	<b>Bup</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 3/2, \kappa = -3/2$	535,5771
216	<b>Buh</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 3/2, \kappa = -1/2$	538,8442
217	<b>Bus</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 3/2, \kappa = 1/2$	543,0557
218	<b>Buo</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 1, l_\lambda = 3/2, \kappa = 3/2$	546,3229
219	<b>Bue</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 0, l_\lambda = 1/2, \kappa = -1/2$	544,5442
220	<b>Bbn</b>	$\nu = 5, s' = 1/2, \lambda = 0, l_\lambda = 1/2, \kappa = 1/2$	548,7557

#### 4. Гомологические ряды

Все элементы таблицы Сиборга, начиная с водорода **H** ( $Z = 1$ ) и кончая элементом **Bbn** (Бибинилий) с  $Z = 220$ , образуют единую квантовую систему. Каждый элемент периодической системы соответствует базисному вектору  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$ , где  $\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa$  — квантовые числа группы симметрии  $G$  (группы Румера–Фета). Таким образом, имеем следующую совокупность векторов состояния:

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}\rangle &= \left| 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\mathbf{He}\rangle &= \left| 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\mathbf{Li}\rangle &= \left| 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ &\vdots \\ |\mathbf{Bbn}\rangle &= \left| 5, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно законам квантовой механики, в совокупности (7), образующей гильбертово пространство<sup>9</sup>, должны существовать линейные суперпозиции векторов состояния, а также квантовые переходы между различными векторами состояния, т. е. переходы между элементами периодической системы.

Рассмотрим операторы, задающие квантовый переход между векторами состояния системы (7). В качестве таких следует взять операторы

$$\Gamma_+ = \mathbf{P}_+ + \mathbf{Q}_+, \quad \Gamma_- = \mathbf{P}_- + \mathbf{Q}_-. \quad (8)$$

Операторы (8) соединяют между собой подпространства  $\mathfrak{F}_n$  унитарного представления  $F^+$  конформной группы  $SO(2, 4)$  в пространстве Фока  $\mathfrak{F}$ . Действительно, действие этих операторов на базисные векторы  $|j, \sigma, \tau\rangle$  пространства  $\mathfrak{F}$

<sup>9</sup>Как было показано в [10], группа Румера–Фета  $G$  является динамической симметрией (согласно классификации Гейзенберга). Пусть к оператору энергии  $H$  присоединены генераторы группы  $G$  (аксиома **A.I** в [10]), тогда каждое собственное подпространство  $\mathbf{H}_E$  оператора энергии инвариантно относительно операторов основного представления  $F_{ss'}^+$  группы  $G$ . Это позволяет получить конкретную реализацию операторной алгебры  $\pi(\mathfrak{A}) \rightarrow \pi(H)$ , где  $\pi \equiv F_{ss'}^+$ . Отсюда следует, что каждое возможное значение энергии является векторным состоянием вида (аксиома **A.II**):

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi | \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} = \frac{\langle \Phi | F_{ss'}^+(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle},$$

где  $|\Phi\rangle$  — циклический вектор гильбертова пространства  $\mathbf{H}_\infty$  (конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала). Далее, множество всех чистых состояний  $\omega_\Phi(H)$  при выполнении условия  $\omega_\Phi(H) \geq 0$  образует *физическое гильбертово пространство*  $\mathbf{H}_{\text{phys}}$  (аксиома **A.III**) и, соответственно, *пространство лучей*  $\hat{H} = \mathbf{H}_{\text{phys}}/S^1$ . Все состояния квантовой системы  $\mathbf{U}$  описываются единичными лучами и при данной реализации операторной алгебры соответствуют элементам периодической системы.

имеет вид

$$\Gamma_+|j, \sigma, \tau\rangle = i\sqrt{(j + \sigma + 1)(j - \tau + 1)} \left| j + \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2} \right\rangle - \\ - i\sqrt{(j - \sigma + 1)(j + \tau + 1)} \left| j + \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\Gamma_-|j, \sigma, \tau\rangle = -i\sqrt{(j + \sigma)(j - \tau)} \left| j - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2} \right\rangle + \\ + i\sqrt{(j - \sigma)(j + \tau)} \left| j - \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Отсюда видно, что оператор  $\Gamma_+$  переводит векторы подпространства  $\mathfrak{F}_n$  в векторы подпространства  $\mathfrak{F}_{n+1}$ , поскольку для представления Фока  $\Phi_n = D_{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}$  в подпространстве  $\mathfrak{F}_n$ , где  $j = \frac{n-1}{2}$ , увеличение  $j$  на  $1/2$  означает увеличение  $n$  на 1. Аналогично оператор  $\Gamma_-$  переводит векторы подпространства  $\mathfrak{F}_n$  в векторы подпространства  $\mathfrak{F}_{n-1}$ . Операторы  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  перестановочны с подгруппой  $G_2 = \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2)$ , входящей в цепочку групп (4). Действительно, в силу перестановочных соотношений конформной группы  $\text{SO}(2, 4)$  (см. [10]) следует, что

$$[\mathbf{P}_\pm + \mathbf{Q}_\pm, \mathbf{J}_+ + \mathbf{K}_+] = [\mathbf{P}_\pm + \mathbf{Q}_\pm, \mathbf{J}_- + \mathbf{K}_-] = [\mathbf{P}_\pm + \mathbf{Q}_\pm, \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3] = 0.$$

Следовательно, операторы  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  сохраняют квантовое число  $\mu$ . Далее,  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  перестановочны с оператором Казимира  $(\mathbf{J}_1 + \mathbf{K}_1)^2 + (\mathbf{J}_2 + \mathbf{K}_2)^2 + (\mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3)^2$  подгруппы  $\text{SO}(3)$  и тем самым сохраняют квантовое число  $\lambda$ . Легко видеть, что  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  перестановочны с операторами  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) подгруппы  $\text{SU}(2)$  и, следовательно, сохраняют квантовое число  $s$ . Так как  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  перестановочны с  $\mathbf{J}_k + \mathbf{K}_k$  и  $\tau_k$  в отдельности, они перестановочны с подгруппой  $G_2 = \text{SO}(3) \otimes \text{SU}(2)$ . Далее, операторы  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  перестановочны с подгруппой  $\text{SU}(2)'$ , задающей второе «удвоение», и таким образом сохраняют квантовое число  $s'$ . Поскольку  $\Gamma_+$  переводит  $\mathfrak{F}_n$  в  $\mathfrak{F}_{n+1}$ , а  $\Gamma_-$  —  $\mathfrak{F}_n$  в  $\mathfrak{F}_{n-1}$ , то в пространстве  $\mathfrak{F}^4 = C(2) \otimes \mathfrak{F}^2 = C(2) \otimes [C(2) \otimes \mathfrak{F}]$  представления  $F_{ss'}^+$  оператор  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  повышает, соответственно понижает квантовое число  $\nu$  на 1. Таким образом, для базиса (1) оператор  $\Gamma_+$  сохраняет квантовые числа  $s'$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $s$ , увеличивая  $\nu$  на единицу, следовательно,  $\Gamma_+|\nu, s', \lambda, \mu, s\rangle = \eta|\nu + 1, s', \lambda, \mu, s\rangle$ , где  $\eta \neq 0$ . Аналогично  $\Gamma_-|\nu, s', \lambda, \mu, s\rangle = \eta'|\nu - 1, s', \lambda, \mu, s\rangle$ , где  $\eta' \neq 0$ . Поскольку  $\Gamma_+$  (соответственно  $\Gamma_-$ ) задает изоморфное отображение пространства мультиплета  $(\nu, s', \lambda)$  на пространство  $(\nu + 1, s', \lambda)$  (соотв.  $(\nu - 1, s', \lambda)$ ), то  $\eta$  (соотв.  $\eta'$ ) не зависит от квантовых чисел  $\mu$ ,  $s$ . Следовательно, для векторов  $|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle$  базиса (5) имеем

$$\Gamma_+|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle = \eta|\nu + 1, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle, \tag{9}$$

$$\Gamma_-|\nu, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle = \eta'|\nu - 1, s', \lambda, \iota_\lambda, \kappa\rangle. \tag{10}$$

Равенство (10) справедливо при  $0 \leq \lambda \leq \nu - 2$ . Наглядный смысл операторов  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  состоит в том, что они перемещают базисные векторы, изображаемые клетками на рис. 2, вправо, соответственно влево по горизонтальным столбцам таблицы. При этом  $\Gamma_+$  всегда переводит базисный вектор столбца  $(\nu, s')$  в базисный вектор той же чётности  $(\nu + 1, s')$  с умножением на некоторый ненулевой множитель  $\eta$ . В свою очередь оператор  $\Gamma_-$  переводит базисный вектор столбца  $(\nu, s')$  в базисный вектор той же чётности  $(\nu - 1, s')$  с умножением на ненулевой множитель  $\eta'$ , если только в последнем существует вектор на той же горизонтали (в противном случае получается нуль).

Далее покажем, что операторы  $\tau'_+ = \tau'_1 + i\tau'_2$ ,  $\tau'_- = \tau'_1 - i\tau'_2$  подгруппы  $SU(2)'$  также задают квантовые переходы между векторами состояния (7). Поскольку эти операторы перестановочны с подгруппой  $G_1 = SO(4) \otimes SU(2)$ , они сохраняют квантовые числа  $\nu, \lambda, \iota_\lambda, \kappa$ , связанные с  $G_1$ , и меняют только квантовое число  $s'$ :

$$\tau'_+ \left| \nu, -\frac{1}{2}, \lambda, \iota_\lambda, \kappa \right\rangle = \left| \nu, \frac{1}{2}, \lambda, \iota_\lambda, \kappa \right\rangle, \quad (11)$$

$$\tau'_- \left| \nu, \frac{1}{2}, \lambda, \iota_\lambda, \kappa \right\rangle = \left| \nu, -\frac{1}{2}, \lambda, \iota_\lambda, \kappa \right\rangle. \quad (12)$$

Наглядный смысл операторов  $\tau'_+$ ,  $\tau'_-$  состоит в том, что  $\tau'_+$  перемещает базисные векторы каждого нечётного столбца рис. 2 по горизонтали в базисные векторы соседнего правого столбца; в свою очередь  $\tau'_-$  перемещает базисные векторы каждого чётного столбца по горизонтали в базисные векторы соседнего левого столбца. Таким образом, операторы (9)–(12) задают квантовые переходы между векторами состояния единой квантовой системы (7).

Легко видеть, что на рис. 2 по горизонталям располагаются в точности *менделеевские гомологические ряды*, т. е. семейства элементов с близкими свойствами. Следовательно, операторы (9)–(12) задают квантовые переходы между элементами гомологического ряда. Например,

$$\begin{aligned} \Gamma_+ |\mathbf{H}\rangle &= \Gamma_+ \left| 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \eta_1 |\mathbf{Na}\rangle = \eta_1 \left| 2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \mapsto \\ &\eta_1 \Gamma_+ |\mathbf{Na}\rangle = \eta_1 \eta_2 |\mathbf{Rb}\rangle = \eta_1 \eta_2 \left| 3, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \mapsto \\ &\eta_1 \eta_2 \Gamma_+ |\mathbf{Rb}\rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 |\mathbf{Fr}\rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \left| 4, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \mapsto \\ &\eta_1 \eta_2 \eta_3 \Gamma_+ |\mathbf{Fr}\rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 |\mathbf{Uhe}\rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \left| 5, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее, операторы  $\tau'_+$ ,  $\tau'_-$  устанавливают гомологию между лантаноидами и актиноидами, впервые обнаруженную Сиборгом<sup>10</sup>:

$$\tau'_+ |\mathbf{La}\rangle = \tau'_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = |\mathbf{Ac}\rangle = \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle,$$

<sup>10</sup>Очевидно, что эта гомология является частным случаем гомологии Менделеева.

$$\tau'_+|\mathbf{Ce}\rangle = \tau'_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |\mathbf{Th}\rangle = \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle,$$

⋮

$$\tau'_+|\mathbf{Yb}\rangle = \tau'_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle = |\mathbf{No}\rangle = \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle.$$

С помощью операторов  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  можно продолжить гомологию Сиборга до группы суперактиноидов:

$$\Gamma_+|\mathbf{La}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Ute}\rangle = \eta \left| 5, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle,$$

$$\Gamma_+|\mathbf{Ce}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Uqn}\rangle = \eta \left| 5, -\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle,$$

⋮

$$\Gamma_+|\mathbf{Yb}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, -\frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Upb}\rangle = \eta \left| 5, -\frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle.$$

Соответственно,

$$\Gamma_+|\mathbf{Ac}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Uoe}\rangle = \eta \left| 5, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle,$$

$$\Gamma_+|\mathbf{Th}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Uen}\rangle = \eta \left| 5, \frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle,$$

⋮

$$\Gamma_+|\mathbf{No}\rangle = \Gamma_+ \left| 4, \frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle = \eta|\mathbf{Bnb}\rangle = \eta \left| 5, \frac{1}{2}, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle.$$

В заключении следует коснуться *принципа суперпозиции* применительно к системе (7). По всей видимости, ситуация здесь аналогична *принципу суперотбора* Вигнера [12] в физике частиц, согласно которому не всякая суперпозиция физически возможных состояний приводит опять к физически возможному состоянию. Принцип Вигнера накладывает ограничения (*правила суперотбора*) на существование суперпозиций состояний. Согласно правилам суперотбора, суперпозиции физически возможных состояний существуют только в рамках когерентных подпространств физического гильбертова пространства. Таким образом, возникает задача определения когерентных подпространств для системы состояний (7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сиборг Г. Расширение пределов периодической системы // Сто лет периодического закона химических элементов. М. : Наука, 1971. С. 21–39.
2. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
3. Karakostas V., Hadzidaki P. Realism vs. Constructivism in Contemporary Physics: The Impact of the Debate on the Understanding of Quantum Theory and its Instructional Process // Science & Education. 2005. V. 14. P. 607–629.
4. de Ronde C. Representational Realism, Closed Theories and the Quantum to Classical Limit // arXiv:1602.05405 [quant-ph] (2016).
5. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
6. Baez J.C. Struggles with the Continuum // arXiv:1609.01421 [math-ph] (2016).
7. Марков М.А. О трёх интерпретациях квантовой механики. М. : Наука, 1991.
8. Greiner W., Reinhardt J. Quantum Electrodynamics. Berlin : Springer, 2009.
9. Гейзенберг В. Введение в единую полевою теорию элементарных частиц. М. : Мир, 1968.
10. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
11. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.
12. Wick G.G., Wigner E.P., Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 101.

**GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM  
OF ELEMENTS: II. SEABORG TABLE****V.V. Varlamov**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

**Abstract.** Group theoretical description of Seaborg table (an eight-periodic extension of the Mendeleev table) is considered in the framework of the Rumer-Fet model. The mass formula, which allows one to provide a termwise mass splitting of the basic representation of the Rumer-Fet group, is introduced. Masses of elements of the Seaborg table, beginning from atomic number  $Z = 121$  and finishing by  $Z = 220$ , are calculated. A continuation of the Seaborg homology between lanthanides and actinides is established up to superactinide group.

**Keywords:** Seaborg table, Rumer-Fet group, unitary quantum system, mass formulas, homological series.

## REFERENCES

1. Siborg G. Rasshirenie predelov periodicheskoi sistemy. Sto let periodicheskogo zakona khimicheskikh elementov, Moscow, Nauka Publ., 1971, pp. 21–39. (in Russian)

2. Geizenberg V. Shagi za gorizont. Moscow, Progress Publ., 1987. (in Russian)
3. Karakostas V. and Hadzidaki P. Realism vs. Constructivism in Contemporary Physics: The Impact of the Debate on the Understanding of Quantum Theory and its Instructional Process. *Science & Education*, 2005, vol. 14, pp. 607–629.
4. de Ronde C. Representational Realism, Closed Theories and the Quantum to Classical Limit. arXiv:1602.05405 [quant-ph] (2016).
5. Geizenberg V. Fizika i filosofiya. Chast' i tseloe. Moscow, Nauka Publ., 1990. (in Russian)
6. Baez J.C. Struggles with the Continuum, arXiv:1609.01421 [math-ph] (2016).
7. Markov M.A. O trekh interpretatsiyakh kvantovoi mekhaniki. Moscow, Nauka Publ., 1991. (in Russian)
8. Greiner W. and Reinhardt J. Quantum Electrodynamics. Berlin, Springer, 2009.
9. Geizenberg V. Vvedenie v edinuyu polevuyu teoriyu elementarnykh chastits. M.: Mir, 1968. (in Russian)
10. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
11. Fet A.I. Gruppy simmetrii khimicheskikh elementov. Novosibirsk, Nauka Publ., 2010. (in Russian)
12. Wick G.G., Wigner E.P. and Wightman A.S. Intrinsic Parity of Elementary Particles. *Phys. Rev.*, 1952, vol. 88, pp. 101.

*Дата поступления в редакцию: 13.01.2019*

## О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Получены необходимые и достаточные условия для справедливости локальной предельной теоремы для функций от зависимых случайных величин. Эти условия содержат в себе так называемые минимальные условия слабой зависимости.

**Ключевые слова:** локальная предельная теорема, симметрические функции от случайных величин, минимальные условия слабой зависимости.

Как и в [1], будем писать  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ ,  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$  и  $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$  в случаях, когда, соответственно, распределения  $\xi$  и  $\eta$  совпадают,  $\{\xi_n\}$  сходится к  $\xi$  по распределению и когда последовательности  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  слабо эквивалентны (см., например, [2, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$  [2, с. 393].

Далее, пусть величины  $\xi_n$ ,  $\eta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и  $\xi$  имеют плотности распределения  $p_{\xi_n}$ ,  $p_{\eta_n}$  и  $p_\xi$  соответственно. Будем писать  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$  и  $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$ , если

$$\sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_\xi(x)| \rightarrow 0 \quad (1)$$

и

$$\sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_{\eta_n}(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

соответственно (здесь и далее — сформулированные утверждения относительно плотностей понимаются так: существуют варианты плотностей, для которых выполняются эти утверждения).

Пусть  $\{\xi_n\} = \{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  — стационарная в узком смысле последовательность и пусть при каждом  $n \in \mathbb{N}$  определена симметрическая вещественнозначная функция  $f$ , то есть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ , для любых  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  для любой перестановки  $\{i_1, \dots, i_n\}$  множества  $\{1, \dots, n\}$  (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость  $f$  от  $n$  какими-либо индексами и называть  $f$  последовательностью).

Будем обозначать  $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ ,  $a_n = \mathbb{E}X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $b_n^2 = \mathbb{D}X_n \rightarrow \infty$ , а через  $\mathcal{N}(0, 1)$  — случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то говорят, что к последовательности  $\{X_n\}$  применима центральная предельная теорема, а если при каждом  $n$  величины  $X_n$  имеют непрерывное распределение и

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{dl} \mathcal{N}(0, 1),$$

то будем говорить, что к последовательности  $\{X_n\}$  применима локальная предельная теорема.

Назовём  $\{b_n\}$  правильно меняющейся последовательностью порядка  $\rho$ , если  $b_{[x]}$  — правильно меняющаяся функция порядка  $\rho$  ( $[x]$  — целая часть  $x$ ).

Через  $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_n$  будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что  $\hat{\eta}_i \stackrel{d}{=} \eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Введём следующие условия для последовательности  $\{\xi_n\}$ :

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \underset{d}{\sim} \frac{\hat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\hat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n + m \rightarrow \infty, \tag{R}$$

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \underset{dl}{\sim} \frac{\hat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\hat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n + m \rightarrow \infty \tag{RL}$$

(символ  $n + m \rightarrow \infty$  означает здесь, что данное соотношение справедливо при  $n \rightarrow \infty$  при любой последовательности  $m = m(n)$ ).

Через  $p_n(x)$  будем обозначать плотность распределения величины  $b_n^{-1}(X_n - a_n)$ .

В работе [1] для случая, когда  $X_n = S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $\mathbb{E}\xi_i = 0, i = 1, 2, \dots$  получен следующий результат:

**Теорема 1.** *Для того чтобы к стационарной последовательности  $\{S_n\}$  была применима локальная предельная теорема и  $\{b_n\}$  была правильно меняющейся последовательностью порядка  $1/2$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (RL), последовательность  $\{b_n^{-2}S_n^2\}$  была равномерно интегрируемой и при некотором натуральном  $n_0$  выполнялось  $\sup_{n \geq n_0} \sup_x p_n(x) < \infty$ .*

Теорема 1 интерпретировалась следующим образом: условие (RL) является минимальным условием слабой зависимости для последовательности  $\{\xi_n\}$ , при котором имеет место локальная предельная теорема.

В данной работе теорема 1 обобщается на случай, когда  $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , где  $f$  — определённая выше симметрическая вещественнозначная функция.

Если  $\{b_n\}$  является правильно меняющейся последовательностью порядка  $1/2$  и  $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(a_n + a_m - a_{n+m}) \rightarrow 0, n + m \rightarrow \infty$ , то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

**Теорема 2.** [3] Пусть  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  — стационарная последовательность и пусть  $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ . Для того чтобы к последовательности  $\{X_n\}$  была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R) и последовательность  $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$  была равномерно интегрируема.

В настоящей работе будет доказан следующий результат:

**Теорема 3.** Для того чтобы к стационарной последовательности  $\{X_n\}$  была применима локальная предельная теорема и выполнялось условие нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (RL), последовательность  $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$  была равномерно интегрируемой и при некотором натуральном  $n_0$  выполнялось  $\sup_{n \geq n_0} \sup_x p_n(x) < \infty$ .

**Замечание 1.** В формулировке теоремы 3 условие (RL) является не только условием слабой зависимости, но и накладывающим ограничения на вид функции  $f$ , заключающиеся, по сути, в том, что распределения функций  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин.

**Замечание 2.** Для сумм зависимых случайных величин не удаётся доказывать локальные предельные теоремы с использованием «общеупотребительных» условий слабой зависимости (сильное и равномерно сильное перемешивание, полная и абсолютная регулярность и пр.). Теоремы 1 и 3 несколько проясняют эту ситуацию: минимальное (самое слабое) условие (RL) является весьма жёстким (не следует, например, из перечисленных выше) и является условием несколько иного типа, чем упомянутые выше.

Приведём сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим  $\varphi_{\xi_n}$ ,  $\varphi_{\eta_n}$  и  $\varphi_\xi$  характеристические функции величин  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  и  $\xi$  соответственно.

- Лемма 1.** а) Из  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ;  
 б) из  $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$  следует  $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ ;  
 в) если  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$  и последовательность  $\{\varphi_{\xi_n}\}$  равномерно интегрируема, то  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$ ;  
 д) если  $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$  и последовательности  $\{\varphi_{\xi_n}\}$  и  $\{\varphi_{\eta_n}\}$  равномерно интегрируемы, то  $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$ ;  
 е) пусть  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$ , плотность  $p_\xi(x)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $a_n \rightarrow a > 0$ ,  $b_n \rightarrow b$ . Тогда  $a_n \xi_n + b_n \xrightarrow{dl} a\xi + b$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;  
 ф) пусть  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$ ,  $\xi_n$  и  $\eta_n$  независимы при  $n = 1, 2, \dots$ , плотность  $p_\xi(x)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $\eta_n \rightarrow 0$  по вероятности. Тогда  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{dl} \xi$ ;  
 г) пусть  $\xi_n \xrightarrow{dl} \xi$ ,  $\eta_n \xrightarrow{dl} \eta$ ,  $\xi_n$  и  $\eta_n$  независимы при  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{dl} \xi + \eta$ ;  
 х) если  $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$ , а  $\{c_n\}$  последовательность действительных чисел, то  $\xi_n + c_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n + c_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Утверждения а) – d), f) и g) доказаны в [1].

Докажем е). Из суммируемости и равномерной непрерывности на  $\mathbb{R}$  плотности  $p_\xi(x)$  следует  $p_\xi(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ . Действительно, если бы существовала последовательность  $x_n \rightarrow \infty$  такая, что  $p_\xi(x_n) \rightarrow c > 0$ , то в силу равномерной непрерывности существовало бы  $\delta > 0$  такое, что  $p_\xi(x) \geq c/2, |x - x_n| < \delta, n = 1, 2, \dots$ , что противоречит суммируемости  $p_\xi(x)$ . Ясно, плотность  $p_\xi(x)$  ограничена (как непрерывная и стремящаяся к нулю на бесконечности), что вместе с (1) даёт нам существование  $C > 0$  и натурального  $n_0$  таких, что  $\sup_{n \geq n_0} \sup_x p_{\xi_n}(x) \leq C$ . Далее, пусть  $N > 0$  таково, что  $p_\xi(x) < \varepsilon, |x| > N$ . В силу равномерной непрерывности  $p_\xi$  существует  $\delta > 0$  такое, что  $|p_\xi(x(1 + \delta') + \delta'') - p_\xi(x)| < \varepsilon, |x| \leq N, \delta' < \delta, \delta'' < \delta$ . Отсюда следует, что если  $\delta'_n \rightarrow 0, \delta''_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то

$$\sup_x |p_\xi(x(1 + \delta'_n) + \delta''_n) - p_\xi(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \tag{3}$$

Далее, плотность величины  $a\xi + b$  равна  $\frac{1}{a}p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sup_x \left| \frac{1}{a_n}p_{\xi_n}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - \frac{1}{a}p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| &\leq \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| \sup_x p_{\xi_n}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) + \\ &+ \frac{1}{a} \sup_x \left| p_{\xi_n}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - p_\xi\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) \right| + \frac{1}{a} \sup_x \left| p_\xi\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|. \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые в правой части последнего соотношения стремятся к нулю по условию, а третье — в силу (3).

Утверждение h) просто следует из определения эквивалентности  $\stackrel{dl}{\sim}$ .

**Лемма 2.** [4]  $b_n$  является правильно меняющейся последовательностью порядка  $1/2$  (а  $b_n^2$  — правильно меняющейся последовательностью порядка 1) тогда и только тогда, когда

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, n + m \rightarrow \infty.$$

**Доказательство теоремы 3.**

Необходимость. Пусть для последовательности  $\{X_n\}$  выполнена локальная предельная теорема и выполняются условия нормировки (N). Тогда очевидно, что существует натуральное  $n_0$  такое, что  $\sup_{n \geq n_0} \sup_x p_n(x) < \infty$ . Далее, в силу леммы 1а) и теоремы 2 имеет место центральная предельная теорема и из теоремы 2 следует, что последовательность  $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$  равномерно интегрируема. Осталось показать справедливость условия (RL). Плотность распределения величины  $b_n^{-1}X_k$  обозначим  $p_{k,n}(x)$ , тогда  $p_n(x) = p_{n,n}(x)$ . Пусть  $m = m(n)$  — последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x |p_{n+m}(x) - (p_{n,n+m} * p_{m,n+m})(x)|,$$

где  $(p_{n,n+m} * p_{m,n+m})(x)$  обозначает свёртку плотностей  $p_{n,n+m}(x)$  и  $p_{m,n+m}(x)$ . Условие (RL) означает, что  $\Delta_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  при любой последовательности  $m = m(n)$ .

Поскольку  $b_n^2$  — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 2

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел  $\{n_1\}$  существуют  $0 \leq c \leq 1$  и подпоследовательность  $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$  такая, что

$$b_{n_2+m_2}^{-2} b_{n_2}^2 \rightarrow c, \quad b_{n_2+m_2}^{-2} b_{m_2}^2 \rightarrow 1 - c, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $m_2 = m(n_2)$ . Если  $c = 0$  ( $c = 1$ ) то при  $n \rightarrow \infty$

$$b_{n_2+m_2}^{-1} (X_{n_2} - a_{n_2}) \xrightarrow{d} 0 \quad (b_{n_2+m_2}^{-1} (X_{m_2} - a_{m_2}) \xrightarrow{d} 0).$$

Плотность величины  $\mathcal{N}(0, 1)$  равномерно непрерывна, так что в силу условия нормировки (N) и утверждений е) и ф) леммы 1 (скажем, при  $c = 0$ ) получаем

$$\frac{\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}}{b_{n_2+m_2}} \stackrel{dl}{\sim} \frac{\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}}{b_{m_2}} \stackrel{dl}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \stackrel{dl}{\sim} \frac{X_{n_2+m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть

$$\frac{\widehat{X}_{n_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{X}_{m_2}}{b_{n_2+m_2}} - \gamma_{n_2} \stackrel{dl}{\sim} \frac{X_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} \quad (4)$$

и, следовательно,  $\Delta(n_2) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Если же  $0 < c < 1$ , то из условия нормировки (N) следует  $b_{n+m}^{-1} (a_n + a_m) = b_{n+m}^{-1} a_{n+m} + o(1)$  и из утверждений е), г) и h) леммы 1 выводим

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{X}_{n_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{X}_{m_2}}{b_{n_2+m_2}} &\stackrel{dl}{\sim} \frac{\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} \stackrel{dl}{\sim} \sqrt{c} \mathcal{N}(0, 1) + \sqrt{1-c} \widehat{\mathcal{N}(0, 1)} + \\ &+ \frac{a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} \stackrel{dl}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) + \frac{a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} \stackrel{dl}{\sim} \frac{X_{n_2+m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} + \frac{a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}} = \frac{X_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}, \end{aligned}$$

то есть снова получаем (4) и  $\Delta(n_2) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, доказано, что из любой последовательности  $\{\Delta(n_1)\}$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к нулю. Это означает, что  $\Delta(n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то есть выполнено условие (RL).

Достаточность. Пусть выполнено условие (RL), последовательность  $\{b_n^{-2} (X_n - a_n)^2\}$  равномерно интегрируема и при некотором натуральном  $n_0$   $\sup_{n \geq n_0} \sup_x p_n(x) \leq C < \infty$ . В силу леммы 1b) из условия (RL) следует условие

(R), так что из теоремы 2 имеем, что  $b_n^{-1} (X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$  и выполнены условия нормировки (N).

Пусть  $n = 2kt + l$ ,  $0 \leq l < 2t$  и пусть  $X_{m,i} \stackrel{d}{=} X_m$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ ,  $X_{l,k+1} \stackrel{d}{=} X_l$ . Последовательность  $k = k(n) \rightarrow \infty$  можно выбрать растущей столь медленно, что из условий (N) и (RL) будет следовать

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \stackrel{dl}{\sim} \frac{\widehat{X}_{m,1} - a_m}{b_n} + \dots + \frac{\widehat{X}_{m,2k} - a_m}{b_n} + \frac{\widehat{X}_{l,k+1} - a_l}{b_n}. \quad (5)$$

Если мы покажем, что

$$\eta_n = \frac{\widehat{X}_{m,1} - a_m}{b_n} + \dots + \frac{\widehat{X}_{m,2k} - a_m}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (6)$$

и  $b_n^{-1}(\widehat{X}_{l,k+1} - a_l) \rightarrow 0$  по вероятности, то в силу леммы 1f) будет выполняться  $b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ , то есть локальная предельная теорема.

Имеем  $l/n < 2/k \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Правильно меняющуюся последовательность положительного порядка без ограничения общности можно считать неубывающей [5, с. 26], так что  $b_n^{-1}b_l \leq b_n^{-1}b_k \rightarrow 0$ , следовательно,  $b_n^{-1}\widehat{X}_{l,k+1} \rightarrow 0$  по вероятности. Так как  $b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ , то

$$\eta_n = \frac{\widehat{X}_{m,1} - a_m}{b_n} + \dots + \frac{\widehat{X}_{m,2k} - a_m}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

и для того, чтобы доказать (6) в силу леммы 1с), достаточно показать равномерную интегрируемость последовательности характеристических функций  $\{\varphi_{\eta_n}\}$ , то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq n_0} \int_{|t| \geq N} |\varphi_{\eta_n}(t)| dt = 0. \quad (7)$$

Будем доказывать (7). Обозначим через  $\tilde{\xi} = \xi - \widehat{\xi}$  — «симметризованную» величину  $\xi$ . При  $m \geq n_0$  плотность  $p_m$  величины  $b_m^{-1}(X_m - a_m)$  ограничена константой  $C$ , следовательно, и  $\sup_x \tilde{p}_m(x) \leq C$ , где  $\tilde{p}_m(x)$  — плотность распределения величины  $b_m^{-1}\tilde{X}_m$ . В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_m(t)|^2 dt \leq 6C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = C', \quad (8)$$

где  $\varphi_m(t)$  — характеристическая функция величины  $b_m^{-1}(X_m - a_m)$  (см., например, [6, с. 247]). Далее  $1 - \cos x \geq \frac{11}{24}x^2$ ,  $|x| \leq 1$ , так что

$$1 - \left| \varphi_m \left( \frac{b_m}{b_n} t \right) \right|^2 = \mathbb{E} \left( 1 - \cos \left( t b_n^{-1} \tilde{X}_m \right) \right) \geq \frac{11}{24} \frac{t^2}{b_n^2} \mathbb{E} \left\{ \tilde{X}_m^2, |t \tilde{X}_m| \leq b_n \right\},$$

где  $\mathbb{E}\{\xi, A\} = \int_A \xi \mathbb{P}(d\omega)$ . Вместе с последовательностью  $\{b_m^{-2}(X_m - a_m)^2\}$  равномерно интегрируемой является последовательность  $\{b_m^{-2}\tilde{X}_m^2\}$ ,  $\mathbb{E}\tilde{X}_m^2 = 2b_m^2$ , так что существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\mathbb{E}\{\tilde{X}_m^2, |\tilde{X}_m| > \varepsilon^{-1}b_m\} \leq b_m^2$  при всех натуральных  $m$ . Тогда если  $|t| \geq \varepsilon b_n b_m^{-1}$ , то

$$1 - \left| \varphi_m \left( \frac{b_m}{b_n} t \right) \right|^2 \geq \frac{11}{24} \varepsilon^2 = \varepsilon'. \quad (9)$$

Если  $k = k(n) \rightarrow \infty$  достаточно медленно, то из леммы 2 и определения правильного изменения порядка 1 следует  $b_n^2 \sim b_{2km}^2 \sim 2kb_m^2$ , так что с помощью (5) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \int_{|t| \geq \varepsilon b_n b_m^{-1}} |\varphi_{\eta_n}(t)| dt &= \int_{|t| \geq \varepsilon b_n b_m^{-1}} \left| \varphi_m \left( \frac{b_m}{b_n} t \right) \right|^{2k} dt \leq \\ &\leq (1 - \varepsilon')^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi_m \left( \frac{b_m}{b_n} t \right) \right|^2 dt \leq C'(1 - \varepsilon')^{k-1} b_n b_m^{-1} \sim \\ &\sim C'(1 - \varepsilon')^{k-1} \sqrt{2k} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда уже следует (7), поскольку здесь  $k = k(n)$  может быть выбрано растущим сколь угодно медленно. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в локальной предельной теореме // Математические структуры и моделирование. 2011. Вып. 24. С. 5–11.
2. Лозв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
3. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 5–11.
4. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М : Наука, 1969. 400 с.

## ON A LOCAL LIMIT THEOREM FOR FUNCTIONS OF DEPENDENT VARIABLES

**A.G. Grin'**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The necessary and sufficient conditions for the validity of the local limit theorem for functions of dependent random variables is obtained. These conditions contain so-called minimal conditions of weak dependence.

**Keywords:** local limit theorem, symmetric functions of random variables, minimal conditions of weak dependence.

REFERENCES

1. Grin' A.G. Minimal'nye usloviya slaboi zavisimosti v lokal'noi predel'noi teoreme. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2011, vol. 24, pp. 5–11. (in Russian)
2. Loev M. *Teoriya veroyatnostoni*. Moscow, IL Publ., 1962, 719 p. (in Russian)
3. Grin' A.G. O tsentral'noi predel'noi teoreme dlya simmetricheskikh funktsii ot zavisimykh velichin. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2017, no. 1(41), pp.5–11. (in Russian)
4. Grin' A.G. O minimal'nom uslovii slaboi zavisimosti v tsentral'noi predel'noi teoreme dlya statsionarnykh posledovatel'nostei. *Teoriya veroyatn. i eyo primen.*, 2002, vol. 47, no. 3, pp. 554–558. (in Russian)
5. Seneta E. *Pravil'no menyayushchiesya funktsii*. Moscow, Nauka Publ., 1985, 141 p. (in Russian)
6. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostoni*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 400 p. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 07.02.2019*

# СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. I. ВОЗМУЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

**В.А. Еровенко**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: [erovenko@bsu.by](mailto:erovenko@bsu.by)

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** В настоящей работе проведено исследование различных существенных спектров минимальных, максимальных и промежуточных обыкновенных дифференциальных операторов в лебеговых пространствах  $L^p$ , полученных относительно малыми возмущениями дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Эти результаты позволяют доказать аналоги классической теоремы Вейля.

**Ключевые слова:** теория возмущений операторов, существенные спектры, обыкновенные дифференциальные операторы.

## Введение

В современной математической литературе под «теоремой Вейля о существенном спектре» понимают несколько утверждений (см., например обзор, [1]). В классической теореме Вейля утверждается, что если  $A$  и  $B$  — самосопряжённые и  $A - B$  — компактный, то  $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$ , где  $\sigma_e$  — существенный спектр оператора. Обобщению теоремы Вейля на различные существенные спектры для замкнутых операторов в банаховых пространствах и специальные классы возмущений посвящены работы [2-4].

## 1. Основная часть

Пусть  $T$  — замкнутый линейный оператор на комплексном банаховом пространстве  $X$ . Существенные спектры оператора  $T$  можно определить как дополнения в комплексной плоскости  $\mathbf{C}$  множеств, задаваемых различными фредгольмовыми свойствами семейства операторов  $T - \lambda I$ :

$$\sigma_{ek}(T) := \mathbf{C} \setminus \Delta_k(T), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$\sigma_{e2}^+(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^+(T), \quad \sigma_{e2}^-(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^-(T),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1(T) &:= \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\}, \\ \Phi^+(T) &:= \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{nul}(T - \lambda I) < \infty\}, \\ \Phi^-(T) &:= \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{def}(T - \lambda I) < \infty\}, \\ \Delta_2(T) &:= \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s - \Phi(T), \\ \Delta_3(T) &:= \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T), \\ \Delta_4(T) &:= \{\lambda \in \Delta_3(T) : \text{ind}(T - \lambda I) = 0\} = \Phi_0(T), \\ \Delta_5(T) &:= \{\lambda \in \Delta_4(T) : \text{проколота́я окрестность точки } \lambda \\ &\text{лежит в резольвентном множестве оператора } T, \rho(T)\}. \end{aligned}$$

Каждое из множеств  $\sigma_{ek}(T), k = \overline{1, 5}$ , и  $\sigma_{e2}^\pm(T)$  называется *существенным спектром*, ясно, что  $\sigma_{ek}(T) \subseteq \sigma_{el}(T)$  для  $k \leq l$  и  $\sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e2}^\pm(T) \subseteq \sigma_{e3}(T)$ , причём включения могут быть, вообще говоря, собственными. Существенные спектры в смысле Голдберга  $\sigma_{e1}(T)$ , Като  $\sigma_{e2}(T)$ , Вольфа  $\sigma_{e2}^\pm(T)$ , Густафсона–Вейдмана  $\sigma_{e2}^-(T)$ , Фредгольма  $\sigma_{e3}(T)$ , Вейля или Шехтера  $\sigma_{e4}(T)$  и Браудера  $\sigma_{e5}(T)$  можно описать другими эквивалентными способами, которые от части являются мотивировками для изучения фредгольмовых свойств различных классов дифференциальных операторов [5-8].

Рассмотрим формальное дифференциальное выражение

$$\tau := \sum_{k=0}^n a_k(t) D^k, \quad a \leq t < \infty, \tag{1}$$

где  $a_k(t)$  — комплекснозначные функции такие, что  $a_k(t) \in C^k[a, \infty)$ ,  $a_n(t) \neq 0$ ,  $1/a_n, a_k \in L^\infty(a, \infty)$ ,  $0 \leq k \leq n$  и  $D := d/dt$ . Обозначим через  $T(\tau, p, [a, \infty))$ ,  $-\infty < a < \infty$ , *максимальный оператор*, отвечающий  $(\tau, p, [a, \infty))$ , который определён на  $L^p(a, \infty)$  и задаётся следующим образом:

$$D[T(\tau, p, [a, \infty))] := \{f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a, \infty); f, \tau f \in L^p(a, \infty)\},$$

где  $AC_{loc}[a, \infty)$  — множество комплекснозначных функций  $f$ , абсолютно непрерывных на каждом компактном подынтервале из  $[a, \infty)$ , и

$$T(\tau, p, [a, \infty))f := \tau f \quad f \in D[T(\tau, p, [a, \infty))].$$

Обозначим через  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$ ,  $-\infty < a < \infty$ , *минимальный оператор*, определённый на  $L^p(a, \infty)$  для  $1 \leq p < \infty$  как замыкание сужения максимального оператора  $T(\tau, p, [a, \infty))$  на множество функций из  $D[T(\tau, p, [a, \infty))]$ , имеющих компактный носитель в  $(a, \infty)$ , и для  $1 < p \leq \infty$ , определённый через банаховый сопряжённый  $T'(\tau^*, p', [a, \infty))$ , где  $\tau^*$  — формально сопряжённая дифференциальная операция  $\tau^*g := \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k(a_k g)$ , и  $1/p + 1/p' = 1$ , если  $1 < p < \infty$ ;  $p' = \infty$ , если  $p = 1$ ;  $p' = 1$ , если  $p = \infty$ . Различные свойства существенных спектров минимальных и максимальных обыкновенных дифференциальных операторов исследованы в [9]. Точные формулы для вычисления

всех указанных выше существенных спектров различных классов дифференциальных операторов получены в работе [10].

Пусть  $S(\tau, p, [a, \infty))$ ,  $-\infty < a < \infty$  — замкнутый линейный дифференциальный оператор в  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , являющийся расширением минимального оператора  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$  и сужением максимального оператора  $T(\tau, p, [a, \infty))$ , порождённый дифференциальной операцией  $\tau$  (1).

**Теорема 1.** *Для любого  $b \in (a, \infty)$  и пяти версий существенных спектров дифференциальных операторов  $S(\tau, p, [a, \infty))$  и  $S(\tau, p, [b, \infty))$  справедливы равенства*

$$\sigma_{ek}[S(\tau, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[S(\tau, p, [b, \infty))], \quad k = 1, 2, 2^\pm, 3. \quad (2)$$

А для спектра Вейля  $\sigma_{e4}$  минимального и максимального дифференциальных операторов выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{e4}[T_0(\tau, p, [a, \infty))] &= \sigma_{e4}[T_0(\tau, p, [b, \infty))], \\ \sigma_{e4}[T(\tau, p, [a, \infty))] &= \sigma_{e4}[T(\tau, p, [b, \infty))]. \end{aligned} \quad (3)$$

*Доказательство.* Рассмотрим ключевые моменты доказательства теоремы. Для проверки формул (2) достаточно рассмотреть только равенство для спектра Фредгольма  $\sigma_{e3}$ , так как спектры  $\sigma_{ek}$ ,  $k = 1, 2, 2^\pm, 3$  совпадают для минимального  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$  и максимального  $T(\tau, p, [a, \infty))$  операторов [9]. Оператор  $T_{0b}$ , для которого  $D[T_{0b}] := \{f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a, \infty); f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, n-1}; f, \tau f \in L^p(a, \infty)\}$  и  $T_{0b}f := \tau f$ , в прямой сумме банаховых пространств  $L^p(a, \infty) = L^p(a, b) \oplus L^p(b, \infty)$  можно записать в виде разложения  $T_{0b} = T_0(\tau, p, [a, b]) \oplus T_0(\tau, p, [b, \infty))$ . Из этого представления следует равенство для спектров Фредгольма

$$\sigma_{e3}[T_{0b}] = \sigma_{e3}[T_0(\tau, p, [a, b])] \cup \sigma_{e3}[T_0(\tau, p, [b, \infty))]. \quad (4)$$

Так как  $\sigma_{e3}[T_0(\tau, p, [a, b])] = \emptyset$  и минимальный оператор  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$  является конечномерным порядка  $n$  расширением оператора  $T_{0b}$  и, следовательно, их спектры Фредгольма совпадают, то из равенства (4) следует, что  $\sigma_{e3}[T_0(\tau, p, [a, \infty))] = \sigma_{e3}[T_0(\tau, p, [b, \infty))]$ . Соответствующее равенство (2) для спектра Фредгольма дифференциальных операторов  $S(\tau, p, [a, \infty))$  и  $S(\tau, p, [b, \infty))$  вытекает из предыдущего равенства, так как операторы  $S$  являются конечномерными расширениями соответствующих минимальных операторов  $T_0$ .

Для доказательства равенств (3) введём вспомогательный оператор  $T_r$ , определённый на  $L^p(a, b)$ , для которого  $D[T_r] := \{f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a, b]; f^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, n-1}\}$  и  $T_r f := \tau f$ . Определим в прямой сумме банаховых пространств  $L^p(a, \infty) = L^p(a, b) \oplus L^p(b, \infty)$  оператор  $R$  по формуле  $R := T_r \oplus T_0(\tau, p, [b, \infty))$ . Спектр Вейля от прямой суммы операторов, вообще говоря, не равен объединению спектров Вейля от слагаемых. Но так как ограниченный обратный  $T_r^{-1}$  компактен в  $L^p(a, b)$  [9], то тождественный оператор

$I$  является  $T_r$ -компактным и, в силу того, что  $\rho(T_r) \neq \emptyset$ , имеем  $\sigma_{e4}[T_r] = \emptyset$ . Поэтому справедливо равенство

$$\sigma_{e4}[R] = \sigma_{e4}[T_0(\tau, p, [b, \infty))]. \quad (5)$$

Заметим, что оператор  $R$  является конечномерным порядка  $n$  расширением оператора  $T_{0b}$ , поскольку оператор  $T_r$  является конечномерным порядка  $n$  расширением оператора  $T_0(\tau, p, [a, b])$ . С другой стороны, минимальный оператор  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$  является конечномерным порядка  $n$  расширением оператора  $T_{0b}$  и, следовательно,  $\text{ind}[R - \lambda I] = \text{ind}[T_0(\tau, p, [a, \infty)) - \lambda I]$ . Поэтому из соотношения (5) следует равенство (3) для спектра Вейля минимальных операторов. Равенство (3) для спектра Вейля максимальных операторов получается с помощью формул двойственности для банахова сопряжённого, т.е.  $T'(\tau, p, [a, \infty)) = T_0(\tau^*, p', [a, \infty))$  для  $1 \leq p < \infty$  и  $T(\tau, p, [a, \infty)) = T'_0(\tau^*, p', [a, \infty))$  для  $1 < p \leq \infty$ , из равенства для минимальных операторов. Теорема доказана. ■

Обозначим через  $B(\nu, p, [a, \infty))$  (соответственно  $B_0(\nu, p, [a, \infty))$ ) для  $-\infty < a < \infty$  максимальный (минимальный) дифференциальный оператор, порождённый в  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  формальной дифференциальной операцией

$$\nu := \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t) D^k, \quad (6)$$

где комплекснозначные функции  $b_k \in C^k[a, \infty)$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ , а через  $T(\tau + \nu, p, [a, \infty))$  (соответственно  $T_0(\tau + \nu, p, [a, \infty))$ ) — максимальный (минимальный) оператор, порождённый в  $L^p(a, \infty)$ ,  $-\infty < a < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  формальной дифференциальной операцией  $\tau + \nu$ , где  $\tau$  и  $\nu$  задаются формулами (1) и (6). Операторы  $B(\nu, p, [a, \infty))$ ,  $B_0(\nu, p, [a, \infty))$  и  $T(\tau + \nu, p, [a, \infty))$ ,  $T_0(\tau + \nu, p, [a, \infty))$  определяются аналогично тому, как были определены максимальный и минимальный дифференциальные операторы, порождённые операцией  $\tau$ .

Напомним, что линейный плотно определённый на банаховом пространстве  $X$  оператор  $B$  с областью определения  $D(B) \supseteq D(T)$  называется  $T$ -ограниченным, если  $\| Bx \| \leq b \| Tx \| + a \| x \|$  для всех  $x \in D(T)$ , и оператор  $B$  называется  $T$ -компактным, если для любой последовательности  $(x_n) \subset D(T)$ , ограниченной в норме графика,  $\|x_n\| + \|Tx_n\| \leq \text{Const}$ , последовательность  $(Bx_n)$  содержит сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема 2.** Максимальный оператор  $B(\nu, p, [a, \infty))$  (минимальный оператор  $B_0(\nu, p, [a, \infty))$ ) является  $T(\tau, p, [a, \infty))$ -ограниченным (соответственно  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$ -ограниченным), если  $b_k \in L^p_{loc}(a, \infty)$  и

$$\sup_{m \leq s < \infty} \int_s^{s+1} |b_k(t)|^p dt \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (7)$$

Кроме того, при достаточно больших  $a \in (0, \infty)$  для рассматриваемых дифференциальных операторов справедливы равенства

$$T(\tau + \nu, p, [a, \infty)) = T(\tau, p, [a, \infty)) + B(\nu, p, [a, \infty)), \quad (8)$$

$$T_0(\tau + \nu, p, [a, \infty)) = T_0(\tau, p, [a, \infty)) + B_0(\nu, p, [a, \infty)), \quad (9)$$

$a$  относительно граница дифференциальных операторов  $B(\nu, p, [a, \infty))$  и  $B_0(\nu, p, [a, \infty))$  строго меньше единицы.

*Доказательство.* Обозначим для простоты  $T(\tau + \nu) := T(\tau + \nu, p, [a, \infty))$ ,  $T_0(\tau + \nu) := T_0(\tau + \nu, p, [a, \infty))$ ,  $T(\tau) := T(\tau, p, [a, \infty))$ ,  $T_0(\tau) := T_0(\tau, p, [a, \infty))$ ,  $B(\nu) := B(\nu, p, [a, \infty))$ ,  $B_0(\nu) := B_0(\nu, p, [a, \infty))$ . Для доказательства равенства (8) достаточно проверить справедливость равенства для областей определения  $D(T(\tau + \nu)) = D(T(\tau))$ . Из условия (7) теоремы следует, что  $\forall \varepsilon > 0$  найдётся такое число  $a \in (0, \infty)$ , что

$$\int_s^{s+1} |b_k(t)|^p dt < \varepsilon^p \quad \text{для} \quad [s, s+1] \subset [a, \infty), \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (10)$$

Покажем, что из оценок (10) для коэффициентов возмущающей дифференциальной операции  $\nu(6)$  следует относительная ограниченность операторов  $B(\nu)$  (соответственно  $B_0(\nu)$ ) относительно  $T(\tau)$  (соответственно  $T_0(\tau)$ ).

Для функций  $f \in W_p^n(a, \infty) := \{f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a, \infty), f^{(i)} \in L^p[a, \infty), 0 \leq i \leq n\}$ , где  $1 \leq p < \infty$ , и для  $0 \leq k \leq n-1$  справедливо неравенство вида

$$\|b_k f^{(k)}\|_p^p \leq C \left( \|f^{(k+1)}\|_p^p + \|f^{(k)}\|_p^p \right) \sup_{s \in [a, \infty)} \int_s^{s+1} |b_k(t)|^p dt, \quad (11)$$

где  $\|\cdot\|_p$  — норма в  $L^p(a, \infty)$ . Действительно, пусть  $0 < \xi \leq 1$  и  $\varphi$  — произвольная фиксированная функция такая, что  $\varphi \in C^1([0, \xi])$ ,  $0 \leq \varphi(t) \leq 1$  на  $[0, \xi]$  и  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(\xi) = 0$ . Для  $f \in W_p^n(a, \infty)$  из равенства

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t) &= - \int_0^\xi \frac{d}{ds} (\varphi(s) f^{(k)}(t+s)) ds = \\ &= - \int_0^\xi \varphi(s) f^{(k+1)}(t+s) ds - \int_0^\xi \varphi'(s) f^{(k)}(t+s) ds \end{aligned}$$

следует, что найдётся такая константа  $C > 0$ , при которой справедливо неравенство для  $1 \leq p < \infty$  и  $t \in [a, \infty)$  вида

$$|f^{(k)}(t)|^p \leq C \left( \int_t^{t+\xi} |f^{(k+1)}(s)|^p ds + \int_t^{t+\xi} |f^{(k)}(s)|^p ds \right),$$

полученного в случае  $1 < p < \infty$  с помощью неравенства Гельдера, где  $C$  — константа, зависящая от числа  $\max\{|\varphi'(s)| : 0 \leq s \leq \xi\}$ . Из этого

неравенства и теоремы Фубини следует оценка по норме для слагаемого  $b_k f^{(k)}$  в дифференциальной операции  $\nu$  (6)

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty |b_k(t) f^{(k)}(t)|^p dt \leq \\ & \leq \int_a^\infty C \left( |f^{(k+1)}(s)|^p + |f^{(k)}(s)|^p \right) \int_{\max(s-\xi, a)}^s |b_k(t)|^p dt ds, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (11).

При условиях на коэффициенты  $a_k$  дифференциальной операции  $\tau(1)$  найдётся константа  $K$ , зависящая от  $p, n$ , длины интервала  $I$  и наибольшего из чисел  $\|1/a_n\|_{\infty, I}$  и  $\|a_k\|_{\infty, I}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , такая, что для  $f \in D(T(\tau, p, I))$  выполняется неравенство из [11]

$$\|f^{(k)}\|_{p, I}^p \leq K \left( \|\tau f\|_{p, I}^p + \|f\|_{p, I}^p \right), \quad 0 \leq k \leq n, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (12)$$

В силу оценки (12) из неравенств (10) и (11) непосредственно следует, что найдутся константа  $M$  и  $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$  такие, что для  $f \in D(T(\tau))$  справедливо неравенство

$$\|\nu f\|_p \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|b_k f^{(k)}\|_p \leq \varepsilon M (\|\tau f\|_p + \|f\|_p). \quad (13)$$

Если  $f \in D(T(\tau))$ , то по определению  $\tau f \in L^p(a, \infty)$ , поэтому из неравенства (9) следует  $\nu f \in L^p(a, \infty)$  и, следовательно,  $f \in D(T(\tau + \nu))$ . Таким образом доказано включение  $D(T(\tau)) \subseteq D(T(\tau + \nu))$ . Докажем обратное включение  $D(T(\tau + \nu)) \subseteq D(T(\tau))$ . Пусть  $f \in D(T(\tau + \nu))$ , тогда  $(\tau + \nu)f \in L^p(a, \infty)$  и  $f^{(k)}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , — непрерывные функции на каждом компактном интервале  $J \subset [a, \infty)$  длины не меньше 1, поэтому  $\nu f \in L^p(J)$  и, следовательно,  $\tau f = (\tau + \nu)f - \nu f \in L^p(J)$ . Из неравенства  $\|\tau f\|_{p, J} \leq \|(\tau + \nu)f\|_{p, J} + \|\nu f\|_{p, J}$  и неравенства (13), справедливого и для нормы  $\|\cdot\|_{p, J}$  в пространстве  $L^p(J)$ , следует для  $0 < \varepsilon M < 1$  оценка

$$\|\nu f\|_{p, J} \leq \frac{\varepsilon M}{1 - \varepsilon M} \left( \|(\tau + \nu)f\|_p + \|f\|_p \right). \quad (14)$$

Так как неравенство (14) выполняется для любого подынтервала  $J \subset [a, \infty)$ , то  $\nu f \in L^p(a, \infty)$  и, следовательно,  $\tau f = (\tau + \nu)f - \nu f \in L^p(a, \infty)$ , т.е.  $f \in D(T(\tau))$ , поэтому  $D(T(\tau + \nu)) = D(T(\tau))$  и равенство (8) доказано.

Для доказательства равенства (9) достаточно показать, что  $D(T_0(\tau + \nu)) = D(T_0(\tau))$ , причём включение  $D(T_0(\tau)) \subseteq D(T_0(\tau + \nu))$  проверяется так же, как и для максимальных операторов, а для обратного включения используются неравенство (13) и непосредственно определение минимальных операторов. Теорема доказана. ■

Заметим, что условие (7) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы оператор  $B$  (соответственно  $B_0$ ) являлся  $T$ -компактным (соответственно  $T_0$ -компактным) оператором в пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 < p < \infty$ . Поэтому в определённом смысле это условие является точным и для относительной ограниченности в указанных лебеговых пространствах для  $1 \leq p \leq \infty$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gustafson K. Weyl's theorem // Proc. Oberwolfach Conf. on Linear Operators and Approximation. Basel, 1972. Vol. 20. P. 80–93.
2. Gustafson K., Weidmann J. On the essential spectrum // J. Math. Anal. Appl. 1969. Vol. 25, no. 1. P. 121–127.
3. Schechter M. On the essential spectrum of an arbitrary operator // J. Math. Anal. Appl. 1966. Vol. 13, no. 2. P. 205–215.
4. Williams V. Closed Fredholm and semi-Fredholm operators, essential spectrum and perturbations // J. Funct. Anal. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 1–25.
5. Schechter M. Spectra of partial differential operators. Amsterdam : North-Holland, 1971.
6. Edmunds D.E., Evans W.D. Spectral theory and differential operators. Oxford : Clarendon Press, 1987.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972.
8. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М. : Физматгиз, 1963.
9. Еровенко В.А. О  $L^p$  — существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов I. Операторы с достаточно гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1024–1034.
10. Еровенко В.А. О  $L^p$  — существенных спектрах некоторых классов несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов II. Операторы с постоянными коэффициентами и операторы Эйлера // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1162–1170.
11. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y. : McGraw-Hill, 1966.

**ESSENTIAL SPECTRA OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS.  
I. PERTURBATION OF OPERATORS**

**V.A. Erovenko**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: [erovenko@bsu.by](mailto:erovenko@bsu.by)

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** The article investigates various essential spectra of minimum, maximal and intermediate ordinary differential operators in Lebesgue spaces of  $L^p$  that are received by rather small indignations of differential operators with constant coefficients. These results allow to prove analogs of the classical theorem of Weyl.

**Keywords:** perturbation theory of operators, essential spectra, ordinary differential operators.

## REFERENCES

1. Gustafson K. Weyl's theorem. Proc. Oberwolfach Conf. on Linear Operators and Approximation, Basel, 1972, vol. 20, pp. 80–93.
2. Gustafson K. and Weidmann J. On the essential spectrum. J. Math. Anal. Appl., 1969, vol. 25, no. 1, pp. 121–127.
3. Schechter M. On the essential spectrum of an arbitrary operator. J. Math. Anal. Appl., 1966, vol. 13, no. 2, pp. 205–215.
4. Williams V. Closed Fredholm and semi-Fredholm operators, essential spectrum and perturbations. J. Funct. Anal., 1975, vol. 20, no. 1, pp. 1–25.
5. Schechter M. Spectra of partial differential operators. Amsterdam, North-Holland, 1971.
6. Edmunds D.E. and Evans W.D. Spectral theory and differential operators. Oxford, Clarendon Press, 1987.
7. Kato T. Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov. Moscow, Mir Publ., 1972. (in Russian)
8. Glazman I.M. Pryamye metody kachestvennogo spektral'nogo analiza singulyarnykh differentsial'nykh operatorov. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. (in Russian)
9. Erovenko V.A. O  $L^p$  — sushchestvennykh spektrakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov I. Operatory s dostatochno gladkimi koefitsientami. Differents. uravneniya, 1996, vol. 32, no. 8, pp. 1024–1034. (in Russian)
10. Erovenko V.A. O  $L^p$  — sushchestvennykh spektrakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov II. Operatory s postoyannymi koefitsientami i operatory Eilera. Differents. uravneniya, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1162–1170. (in Russian)
11. Golgberg S. Unbounded linear operators. Theory and application. N.Y., McGraw-Hill, 1966.

*Дата поступления в редакцию: 18.12.2018*

## **РАЦИОНАЛЬНАЯ СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ**

**Н.В. Михайлова**

к.ф.н., доцент, e-mail: [michailova\\_mshrc@mail.ru](mailto:michailova_mshrc@mail.ru)

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** Любая программа обоснования математики содержит в себе как рациональные, так и иррациональные допущения. В статье показано, что философско-методологические проблемы современного математического образования различного уровня строгости допускают вполне рациональное обоснование или объяснение математических утверждений.

**Ключевые слова:** математическое образование, проблема обоснования математики, рациональность в математике.

### **Введение**

Рациональное знание, наиболее совершенным образцом которого является математическая теория, даёт возможность понять не только окружающий нас мир, но и реальные возможности обоснования знания. Но для понимания проблемы обоснования математики следует уяснить смысл самого этого понятия. В разные периоды под обоснованием математики понимались соответствующие становлению математики как строгой науки философско-методологические проблемы. Например, для древнегреческой математики это была проблема неизмеримых величин, для математики XVII века — проблема интерпретации иррациональных и мнимых чисел, для математики XVIII века — актуальная проблема строгости доказательства в теории дифференциального исчисления. На рубеже XIX и XX веков Г. Кантор и Д. Гильберт впервые сформулировали совершенно новое понимание программы обоснования математики, рассматривая её как проблему непротиворечивости новых математических теорий.

В такой постановке решение задачи обоснования как новой философско-методологической проблемы математики зависит также от выбора методологических и философских оснований математической теории. Начиная с неверного толкования одним из основоположников новой научной методологии — английским философом XVII века Фрэнсисом Бэконом — истинных перспектив новой науки, многие исследователи соблазнились «благостными» перспективами грядущего «века рациональности», хотя понятие рациональности неоднозначно. Так, современный рационализм не признает никаких догматов, но в философско-методологическом значении сам термин «рациональность» характеризует определённые структуры человеческого мышления, а с точки зрения проблем обоснования математики — выразимость математических концепций

в языке. Однако представление о рациональности со временем было в значительной степени искажено и стало отождествляться с логичностью. Попытка вывести критерии рациональности исходя только из внешних факторов, таких, например, как общественные и культурные традиции, может привести к логическому кругу.

### Основная часть

Каким бы ни было множество внешних факторов, используемых при определении рациональности, оно само, в свою очередь, тоже требует рационального анализа, как требуют анализа и связи между исходными факторами и определяемыми с их помощью принципами рациональности. Подобного рода затруднения побуждают некоторых философов науки вообще отказаться от содержательного определения даже научной рациональности. «Понятие рациональности является типично философским, — считает авторитетный философ науки В.В. Целищев, — и отождествлению этого понятия с математической практикой способствовало то историческое обстоятельство, что философия долгое время формировала себя по математическому образу и подобию» [1, с. 14]. Философ Иммануил Кант понимал «рацио» как что-то, что является «пониманием», хотя это не всегда можно высказать в наглядных терминах. Например, определённая часть некоторых методологических трудностей, связанных с философско-методологической проблемой «дискурсивное — интуитивное», была сформулирована Кантом в его знаменитых «антиномиях чистого разума».

Анализируя антиномии разума, в частности, противоречие между причинностью и свободой, Иммануил Кант обнаружил также пределы рационального мышления. Исследуя содержимое априорного знания, в отличие от Рене Декарта, он пришёл к выводу, что определённые истины находятся за пределами рационального понимания. Продолжая традицию Аристотеля, он определил специфические априорные формы и категории, например, пространство и время, единство и множественность. В критике рационального мышления Кант, по сути парадоксальным образом, подтвердил именно рациональный, научный подход к добыванию истин, поскольку происхождение антиномий разума, считал он, следует искать в сложной природе априорного знания. Следуя Канту, можно констатировать, что имеются определённые цели рационального исследования, состоящие в достижении истины и понимания. Даже определённый стиль доказательства новой теории принимается математиками потому, что данный образец доказательства, согласно мнению авторитетов в этой области математики, соответствует задаче получения истинных следствий и согласуется с современным уровнем знаний, несмотря на кризисы в проблеме обоснования математики, поскольку последние порождаются рационалистической критикой самих математиков и невероятным переплетением в человеке разумного, или рационального, и иррационального начал.

Противопоставление рационализма и иррационализма в философии имеет много различных смыслов. Первый фундаментальный смысл идёт от математического образа соотношения рациональных и иррациональных чисел. Мыс-

лительные процессы с мгновениями гениальных озарений трудно поддаются рациональному объяснению, что можно пояснить на примере построения и обоснования иррациональных чисел. Вместо понятий «рациональный метод» или «рациональное суждение» многие исследователи после фундаментальных результатов Курта Гёделя предпочитают говорить о полноте, непротиворечивости, простоте и других, лучше определяемых терминах. При становлении математического знания стало явно проявляться внутреннее противоречие между его эффективной способностью получать конкретные математические результаты и философско-методологическими трудностями их обоснования [2]. Но идея окончательности математического результата противоречит современной теории познания, акцентирующей внимание на относительности результатов человеческого мышления. Такого рода представления идут от сопоставления математики с физикой, а также от рационалистических взглядов на математику, иногда игнорирующих, например, важнейшую математическую деятельность по конструированию математических структур и моделированию, позволяющих устанавливать связи, которые поддаются проверке с помощью конечных процедур.

Рассмотрим, например, такое известное иррациональное число как  $\sqrt{2}$ . Используя доказательство от противного, древние греки сумели доказать, что число  $\sqrt{2}$  не представимо в виде обыкновенной дроби. Ранее все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа кратко описать число, равное корню из 2, как записать его в виде  $\sqrt{2}$ , так как любая попытка записать  $\sqrt{2}$  не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, такого как 1,414213562373... С точки зрения математики, но не здравого смысла, математически тривиально утверждение о том, что произведение двух иррациональных чисел может быть равно рациональному числу. Действительно, например,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ . В то же время доказательство того, что иррациональное число в иррациональной степени тоже может быть рациональным числом, уже не столь математически конструктивно.

Так, если бы  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  — было рациональным числом, то искомая пара иррациональных чисел была бы найдена. Теперь пусть оно иррациональное, тогда его степень  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$  — рациональное число. Приведённый в этом примере способ доказательства — разбор случаев — был известен уже в XIX веке, хотя в то время ещё не было известно: является ли число  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  рациональным. Только в 30-е годы XX века было дано довольно сложное доказательство того, что это число иррационально. В рассмотренных выше примерах мы по существу не пользовались никакой математической техникой. На первый взгляд более простым кажется следующий вопрос: «Является ли число  $2^{\sqrt{2}}$  рациональным или иррациональным?» Он известен под названием «7-я проблема Гильберта». Хотя она была поставлена Давидом Гильбертом в более общей формулировке, сам он считал, вопрос о числе  $2^{\sqrt{2}}$  в ней, можно сказать, наиболее показательным. Ответ на этот вопрос удалось найти не сразу, а спустя три десятка лет, ещё при

жизни Гильберта, известному русскому математику Р.О. Кузьмину. Он доказал иррациональность числа  $2^{\sqrt{2}}$ . С точки зрения рациональной сущности математического образования непонимание математики происходит иногда оттого, что в ней пытаются найти что-то сверхъестественное, а надо пытаться искать в ней именно естественное, не только вне себя, а что-то и в себе, чего мы, несмотря на естественность математики, часто не понимаем.

Нестандартные математические примеры не только стимулируют творческую активность, но и дают нам прочувствовать сущность математики. Например, сложные «нефинитные» доказательства лишь математически идеальны и как таковые не имеют практического смысла, однако ими можно манипулировать абстрактно, а именно точно так же, как  $i$  не является вещественным числом, но им можно оперировать алгебраически. Современный рационализм в математике сейчас гораздо более сложный, чем рационализм эпохи Просвещения. Но, как отмечал академик В.И. Арнольд: «Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Наиболее характерными приметами формализованного преподавания является изобилие немотивированных определений и непонятных (хотя логически безупречных) доказательств» [3, с. 109]. Более того, сколько-нибудь содержательная часть современной математики не является полностью формализованной, хотя для той её части, которая уже формализована, её непротиворечивость нельзя окончательно доказать в методологически ограничительных рамках самой формализованной системы. Кроме доказательств непротиворечивости наибольший интерес представляют успешно проводимые формальные рассуждения, являющиеся в понимаемой математике критерием полезности и убедительности любого математического понятия или теории.

Например, для определения показательной функции комплексного переменного  $z = x + iy$ , где  $i$  — мнимая единица,  $i^2 = -1$ , и которую обозначают  $e^z$ , существует несколько технически разноплановых математических определений. Показательную функцию можно определить с помощью равенства  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , рассматриваемого для всех комплексных чисел  $z$ . Другой способ — это определение показательной функции как единственного решения задачи Коши для дифференциального уравнения  $df(z)/dz = f(z)$ , удовлетворяющего начальному условию  $f(0) = 1$ , имеющего вид  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ . Заметим, что на понимании того, что сумма функционального ряда также опять является функцией, основано определение показательной функции с помощью ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , который для каждого комплексного  $z$  сходится абсолютно и его сумма равна  $e^x(\cos y + i \sin y)$ .

По аналогии с определением показательной функции действительного переменного полагают, что  $e^z = \lim(1 + z/n)^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этот предел существует для всех  $z$  и равен  $e^x(\cos y + i \sin y)$ . Показательную функцию  $f(z) = e^z$  можно задать ещё и аксиоматически, предписав ей следующие свойства: функция  $f$  однозначно определена для всех комплексных чисел  $z$ , причём для действительного значения  $z = x$  функция  $f$  также принимает действительные значения и  $f(1) = e$ ; кроме того, для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  справедливо

равенство  $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$ ; и функция  $f$  дифференцируема в точке  $z = 0$ . Возможно, комплексные числа, играющие важную роль во всей понятийной системе квантовой механики, заслуживают с этой точки зрения наиболее пристального внимания. Даже Давид Гильберт, предложивший современную концепцию идеи «существования в математике», привлекал для её иллюстрации выражение  $\sqrt{-1}$ . Двойственность реального и идеального выражена даже в этимологии терминов, связанных с комплексными числами, а именно, в названиях «действительная» и «мнимая» часть.

Хотя математически не существует вещественного числа, квадрат которого равен  $-1$ , но если удаётся доказать, что некоторое формальное понятие обладает свойствами, которые с помощью конечного числа умозаключений никогда не приведут к противоречию, то он считал, что его существование доказано. С такой философской точки зрения доказательство непротиворечивости аксиом арифметики вещественных чисел равносильно доказательству математического существования понятия вещественных, в том числе иррациональных, чисел, или континуума. Многие математические объекты содержат в себе одну из фундаментальных математических двойственностей — это конечное и бесконечное. Но чтобы обнаружить математические объекты, которые как бы указывают на пробелы в казуальности, то есть случайности, нашего мышления, несомненно, нужна природная наблюдательность и математическая смелость восприятия.

Когда мы оперируем иррациональными и комплексными числами в рамках существующих математических формализмов, то они кажутся вполне естественными, но когда мы смотрим на их «странности» непосредственно, то они иногда кажутся невыносимыми. Традиционный рационализм объявлял основным источником знания интуицию. Например, несмотря на то, что большинство математиков не слишком много знают об аксиомах арифметики, все они сходятся во мнении относительно того, какие же рассуждения о полезных свойствах натуральных чисел следует признать доказательными, а какие могут привести лишь к гипотезам или ошибкам. Даже когда теория вроде бы основательно построена на аксиомах, в её рассуждениях могут быть обнаружены пробелы, не отражённые в аксиомах, но не вызывающие разногласий относительно их справедливости. Немецкий математик Мориц Паш, одним из первых исследовавший аксиоматические основы геометрии, только в XIX веке ввёл понятие «аксиомы порядка», отсутствовавшее в геометрии Евклида и используемое ранее без всякого обоснования. Пытаясь объяснить такого рода явления, обычно приходят к понятию интуиции, связывая её с «непосредственным постижением истины» или с феноменом «математического творческого мышления».

В понятийном арсенале математики мнимые и иррациональные величины апеллируют к методам, которые, на первый взгляд, кажутся «авантюжными» и «фантастическими». На начальных ступенях обучения очень трудно дать всему этому верное объяснение, поскольку математика — это особый «мир», в котором надо довольно долго прожить по эту сторону строгих границ разума, чтобы прочувствовать всё, что в нём происходит. «Мир математики» отличается от мира, в котором мы живём. Поэтому обоснование математики необходимо

для того, чтобы найти средства, гарантирующие надёжность математических доказательств и рассуждений, включающие разные аспекты практики и приложений [4]. Значимость абстрактных математических результатов определяется будущим развитием науки, но у нас нет рациональных способов заглянуть в него, поскольку обращения к экспертам, включают в себя иррациональный элемент.

Даже если роль интуиции иногда переоценивалась, нельзя отрицать, что она всё же является источником многих формальных истин нашего знания. Математики уже сталкивались с такими феноменами в обосновании своей науки, для понимания которых они нуждаются в какой-то другой, более глубокой уверенности. Тогда они обращались к религиозным точкам зрения, к божественной и трансцендентной сущностям. Так, математиков иногда упрекают в том, что они присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных множествах справедливы, поставив себя на место, с которого эти множества можно созерцать. В качестве наиболее впечатляющего примера подобной смелости можно привести работу Георга Кантора над теорией бесконечных множеств, проблемы которой так и не удалось полностью решить в прошедшем веке науки. Например, антитеза актуальной и потенциальной бесконечностей поставила перед математикой того времени, наряду с логическими и философскими, также и богословские проблемы. Даже несмотря на всевозможные философско-теологические предубеждения и возражения, необходимость оперирования бесконечностью в различных формах, в том числе и в форме актуальной бесконечности, появилась с самого начала возникновения древнегреческой математики.

Продемонстрируем простейшую конечно-бесконечную ситуацию на примере только одного математического объекта, доступного пониманию студентов младших курсов, а именно — степени с произвольным показателем,  $a^b$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные комплексные числа. Это выражение определяют с помощью многозначной логарифмической функции, то есть  $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$ . Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение  $a^b$  имеет бесконечное множество значений. Однако в частных случаях среди них может быть только конечное число различных значений, если  $b$  — дробное число, или они могут все совпадать, если  $b$  — целое число. Удивительно то, что с мнимыми или ещё какими-либо «невозможными» величинами можно производить вычисления, дающие осязаемый, точнее действительный, результат. Некоторые основные математические понятия, в том числе мнимые числа, тоже трудно объяснить неподготовленному уму, и чтобы восполнить пробелы нашего мышления, мы иногда нуждаемся в другой, более глубокой уверенности, чем чисто рациональные объяснения. Математические утверждения, с точки зрения здравого смысла, изобилуют «бессмыслицами» и «нелепостями», в которых в большинстве случаев повинна бесконечность. Поэтому высказывались такие мнения, что если даже новое понятие вводится без риска получить противоречие и если это может быть доказано, то и тогда оно не считается вполне оправданным.

Такого рода возражения в своё время выдвигались против комплексных

чисел. Многие учёные, в том числе и математик Блез Паскаль, не верили в «отрицательные» и «мнимые» числа, которые не признавались за реальные объекты, несмотря на то, что из-за них не возникало никаких противоречий. Совершенно неожиданный для непосвящённых факт состоит в том, что все значения выражения  $i^i$  — это действительные числа,  $i^i = e^{i \cdot \text{Ln } i} = e^{(\pi/2) + 2k\pi}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и, например, для  $k = 0$  имеем, что  $i^i = e^{\pi/2} = 0,2\dots$ . Последний пример встречается в упоминаемой выше 7-й проблеме Гильберта. Поскольку  $i^i$  — действительные числа, то можно задать такой совершенно неожиданный, с точки зрения их вида, вопрос: являются они рациональными или иррациональными? В проблеме Гильберта как раз и записано выражение  $i^{-2i}$ , которое равно  $e^\pi$ . Вот её полная формулировка: «Доказать, что степень  $\alpha^\beta$  при алгебраическом основании  $\alpha$  и алгебраическом иррациональном показателе  $\beta$  как, например, число  $2^{\sqrt{2}}$  или  $e^\pi = i^{-2i}$  — есть всегда или трансцендентное число, или, по крайней мере, иррациональное».

Давид Гильберт выражал надежду на то, что решение этой, а также аналогичных ей проблем приведёт к новым методам и новым точкам зрения на сущность понимания иррациональных и трансцендентных чисел. В 1934 году высказанную Гильбертом общую гипотезу о трансцендентности чисел вида  $\alpha^\beta$  независимо доказали А.О. Гельфонд и Т. Шнайдер. Именно рациональности, сильно связанной с традициями науки на протяжении последних трёх столетий, мы обязаны тем, что, в конце концов, находим понимаемое объяснение чего-либо. Поразительно, что в столь строгой и рационалистической науке как математика, залогом точности могут стать операции с мнимыми и иррациональными числами. Одно из равенств, тривиальное с математической точки зрения, содержит в себе важнейшие трансцендентные иррациональные числа  $e$ ,  $\pi$ , а также действительную, мнимую единицы  $1$ ,  $i$  и число  $0$  — это пять фундаментальных математических констант, каждая из которых была введена в математику в особом специфическом контексте, то есть это равенство вида:  $e^{i\pi} = -1$ . Математик и механик академик А.Н. Крылов видел в этой формуле удивительный символ единства всей математики, так как число  $-1$  представляет в ней арифметику,  $i$  — алгебру,  $\pi$  — геометрию и  $e$  — математический анализ.

## Заключение

Могут ли в научном познании скрываться элементы иррационализма? Если рациональность состоит в том, чтобы верить только в то, про что мы можем разумно предполагать, что оно является истинным, то наука была и всегда будет иррациональной. Но одной из целей математики, отличающей её от других наук, является методологическая значимость обоснования, раскрывающая рациональную сущность математического образования. «Именно здесь и вступают в силу методологические (философские) установки, которые существенны особенно тогда, когда общая задача обоснования определилась и вопрос только в форме этого обоснования» [5, с. 111]. Математики XX и XXI веков активно и плодотворно используют в своих выводах теорию бесконечных множеств,

опираясь на неё как наиболее фундаментальную структуру при обосновании математики, несмотря на некоторые её парадоксы. Этот иррациональный факт философии математики имеет вполне рациональное объяснение в поведении математиков, поскольку внутренние проблемы теории не являются причиной отказа от неё, если она не исчерпала все свои эвристические возможности. Сила рационального мышления в проблемно-ориентированном обосновании математики состоит в том, что оно позволяет сделать аргументы ясными даже для тех, кто не искущён в данной области математического знания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Целищев В.В. Возможна ли иррациональная математика // *Философия науки*. 2000. № 1. С. 14–21.
2. Михайлова Н.В. Методологический прагматизм проблемно-ориентированного обучения математике // *Математические структуры и моделирование*. 2018. № 1. С. 30–36.
3. Арнольд В.И. Математика и математическое образование в современном мире // *Математическое образование*. 1997. Вып. 2. С. 109–112.
4. Михайлова Н.В. Проблемно-ориентированное обоснование в философии математического образования // *Философия образования*. 2018. № 75, вып. 2. С. 124–129.
5. Новоселов М.М. Аргументация, абстракция и логика обоснования (заметки на полях) // *Теория и практика аргументации*. М. : ИФ РАН, 2001. С. 109–129.

## RATIONAL ESSENCE OF MATHEMATICAL EDUCATIONS AND JUSTIFICATION PROBLEM

**N.V. Michailova**

Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, e-mail: michailova.n@bntu.by

Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** Any program of mathematical justification comprises rational and irrational assumptions. Philosophical and methodological problems of modern mathematical formation of different severity level allow rational justification or an explanation of mathematical statements.

**Keywords:** mathematical education, the problem of substantiation of mathematics, rationality in mathematics.

## REFERENCES

1. Tselishchev V.V. Vozmozhna li irratsional'naya matematika, *Filosofiya nauki*, 2000, no. 1, pp. 14–21. (in Russian)

2. Mikhailova N.V. Metodologicheskii pragmatizm problemno-orientirovannogo obucheniya matematike. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 1, pp. 30–36. (in Russian)
3. Arnol'd V.I. Matematika i matematicheskoe obrazovanie v sovremennom mire. *Matematicheskoe obrazovanie*, 1997, iss. 2, pp. 109–112. (in Russian)
4. Mikhailova N.V. Problemno-orientirovannoe obosnovanie v filosofii matematicheskogo obrazovaniya. *Filosofiya obrazovaniya*, 2018, no. 75, iss. 2, pp. 124–129. (in Russian)
5. Novoselov M.M. Argumentatsiya, abstraktsiya i logika obosnovaniya (zametki na polyakh). *Teoriya i praktika argumentatsii*, Moscow, IF RAN Publ., 2001, pp. 109–129. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 29.12.2018*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЩИХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ

**Р.Ю. Галимов**<sup>1</sup>

старший преподаватель, e-mail: galimovry@mail.ru

**А.М. Ахтямов**<sup>1,2</sup>

д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник, e-mail: akhtyamovam@mail.ru

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

**Аннотация.** Исследуются задачи идентификации как общих, так и распадающихся краевых условий оператора диффузии по его собственным значениям. Для общих краевых условий показано, что если хотя бы одна из функций-коэффициентов в дифференциальном уравнении является несимметрической, то задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет два решения, а если оба коэффициента являются симметрическими функциями, то задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет бесконечно много решений. Доказано также, что если хотя бы один из коэффициентов в дифференциальном уравнении является несимметрической функцией, то два решения могут быть получены и по четырем собственным значениям, если ранг некоторой матрицы равен четырем. Для распадающихся краевых условий показано, что если хотя бы один из коэффициентов в дифференциальном уравнении является несимметрической функцией, то задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет единственное решение, а если оба коэффициента являются симметрическими функциями, то задача идентификации краевых условий имеет два решения. Показано также, что при определенных условиях единственное решение может быть получено по трем собственным значениям, а два решения — по двум собственным значениям. Рассмотрены соответствующие примеры.

**Ключевые слова:** оператор диффузии, идентификация краевых условий, обратная спектральная задача, собственные значения.

### Введение

Обозначим через  $L$  следующую задачу для оператора диффузии:

$$ly = y'' + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))y = 0, \quad (1)$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(\pi) + a_{i4}y'(\pi) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где вещественные функции  $p(x) \in W_2^1(0, \pi)$ ,  $q(x) \in L_2(0, \pi)$ ;  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  — комплексные постоянные.

Обратная задача для  $L$  с распадающимися краевыми условиями ( $a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$ ) достаточно хорошо изучена (см., например, [1]–[7]). Обратная для  $L$  с нераспадающимися краевыми условиями изучалась в работах [8]–[14]. В этих работах восстанавливались коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  из дифференциального уравнения (1), а также краевые условия (2). При этом для восстановления использовались несколько спектров, спектральные данные (спектр и нормировочные числа), функция Вейля и т. п. То есть данные восстановления содержали в себе большую информацию, чем только сам спектр задачи  $L$ . Задача, решаемая в настоящей статье, отличается от этих работ тем, что здесь восстанавливаются лишь краевые условия, а дифференциальное уравнение считаем известным.

### Идентификация общих краевых условий

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов  $a_{lk}$  краевых условий (2) через  $A$ , а её миноры, составленные из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов, через  $M_{ij}$ :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

На протяжении всей статьи будем считать, что ранг матрицы  $A$  равен двум:  $\text{rank } A = 2$ .

В дальнейшем задачу типа  $L$ , но с другими коэффициентами в уравнении и с другими параметрами в граничных формах обозначать  $\tilde{L}$ . Будем считать, что если некоторый символ обозначает объект из задачи  $L$ , то символ с волной  $\tilde{\phantom{x}}$  наверху обозначает аналогичный объект задачи  $\tilde{L}$ .

Краевые условия задач  $L$  и  $\tilde{L}$  назовём  $(kl$  и  $mn)$ -смежными, если для миноров  $M_{kl}$  и  $M_{mn}$  выполняются равенства  $M_{kl} = C \tilde{M}_{mn}$ ,  $M_{mn} = C \tilde{M}_{kl}$ , а для всех остальных миноров выполнены равенства  $M_{ij} = C \tilde{M}_{ij}$ .

Так, краевые условия задач  $L$  и  $\tilde{L}$  являются  $(12$  и  $34)$ -смежными, если миноры  $M_{ij}$  и  $\tilde{M}_{ij}$  матриц коэффициентов краевых условий  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  и  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2 \times 4}$  связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} M_{12} &= C \tilde{M}_{34}, & M_{32} &= C \tilde{M}_{32}, & M_{42} &= C \tilde{M}_{42}, \\ M_{13} &= C \tilde{M}_{13}, & M_{14} &= C \tilde{M}_{14}, & M_{34} &= C \tilde{M}_{12}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть  $L$  и  $\tilde{L}$  имеют дискретный спектр, спектры задач  $L$  и  $\tilde{L}$  совпадают с учётом их алгебраических кратностей,  $\text{rank } A = 2$ . Тогда:

1. Если  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$ , то либо матрицы коэффициентов краевых условий  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  и  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2 \times 4}$  совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо являются  $(12$  и  $34)$ -смежными. То есть задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет два решения.

2. Если  $p(x) = p(\pi - x)$  и  $q(x) = q(\pi - x)$ , то миноры  $M_{ij}$  и  $\widetilde{M}_{ij}$  матриц коэффициентов краевых условий  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  и  $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{2 \times 4}$  связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{2} C \left( (\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \pm \sqrt{(\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34})^2 - C_1} \right), \\ M_{34} &= \frac{1}{2} C \left( (\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \mp \sqrt{(\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34})^2 - C_1} \right), \\ M_{42} &= C \widetilde{M}_{42}, \quad M_{13} = C \widetilde{M}_{13}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} M_{14} &= \frac{1}{2} C \left( (\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{32}) \pm \sqrt{(\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{32})^2 + 4 \widetilde{M}_{13} \widetilde{M}_{24} - C_1} \right), \\ M_{23} &= \frac{1}{2} C \left( (\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \mp \sqrt{(\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{23})^2 + 4 \widetilde{M}_{13} \widetilde{M}_{24} - C_1} \right), \end{aligned}$$

где  $C$  и  $C_2$  — некоторые произвольные константы, а  $C_1 = 4C_2/C^2$ . То есть задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет бесконечное число решений.

*Доказательство.* Собственные значения задачи  $L$  являются корнями следующей целой функции ([1, с. 33–36], [2, с. 29])

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M_{12} + M_{34} + M_{32} y_1(\pi, \lambda) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda) + \\ &+ M_{13} y_2(\pi, \lambda) + M_{14} y_2'(\pi, \lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  — линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.$$

Если  $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$  (спектр краевой задачи дискретен), то из теоремы Адамара получаем, что функция  $\Delta(\lambda)$  (которая является целой порядка  $1/2$ ) восстанавливается по своим нулям с точностью до множителя  $C \neq 0$ . Следовательно, функции  $\Delta(\lambda)$  и  $\widetilde{\Delta}(\lambda)$  связаны следующим тождеством:

$$\Delta(\lambda) \equiv C \widetilde{\Delta}(\lambda), \tag{6}$$

где  $C$  — некоторая константа, отличная от нуля.

Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
 y_1(x, \lambda) &= \cos \pi (\lambda - a) - a_1 \frac{\cos \pi (\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi (\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt, \\
 y_2(x, \lambda) &= \frac{\sin \pi (\lambda - a)}{\lambda} + a_0 \frac{\sin \pi (\lambda - a)}{\lambda^2} - \pi c_1 \frac{\cos \pi (\lambda - a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt, \\
 y_1'(x, \lambda) &= -\lambda \sin \pi (\lambda - a) + a_0 \sin \pi (\lambda - a) + \pi c_1 \cos \pi (\lambda - a) + \int_{-\pi}^{\pi} \psi_3(t) e^{i\lambda t} dt, \\
 y_2'(x, \lambda) &= \cos \pi (\lambda - a) + a_1 \frac{\cos \pi (\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi (\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_4(t) e^{i\lambda t} dt,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(t) dt$ ,  $a_0 = \frac{1}{2} (p(0) + p(\pi))$ ,  $a_1 = \frac{1}{2} (p(0) - p(\pi))$ ,  $c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (q(t) + p^2(t)) dt$ ,  $\psi_i(t) \in L_2[0, \pi]$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  для достаточно большого  $\lambda \in \mathbb{R}$  ([6, 14]).

Из этих соотношений следует, что линейно независимы функции  $y_1(\pi, \lambda)$ ,  $y_1'(\pi, \lambda)$ ,  $y_2(\pi, \lambda)$ ,  $1$ , входящие в разложение функции  $\Delta(\lambda)$ . Если добавить к этим функциям ещё и функцию  $y_2'(\pi, \lambda)$ , то соответствующая система функций является линейно независимой тогда и только тогда, когда  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$  на некотором интервале из отрезка  $[0, \pi]$ . Это следует из того, что тождество  $y_1(\pi, \lambda) \equiv y_2'(\pi, \lambda)$  верно тогда и только тогда, когда  $p(x) = p(\pi - x)$  и  $q(x) = q(\pi - x)$  [7, Лемма 3] (равенства функций понимаются в смысле равенств в пространствах функций, в которых они заданы).

Пусть  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$ . Тогда из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства

$$\begin{aligned}
 M_{12} + M_{34} &= C (\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}), & M_{32} &= C \widetilde{M}_{32}, & M_{42} &= C \widetilde{M}_{42}, \\
 M_{13} &= C \widetilde{M}_{13}, & M_{14} &= C \widetilde{M}_{14}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для нахождения миноров  $M_{12}$  и  $M_{34}$  воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того чтобы числа  $M_{12}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{34}$  были минорами матрицы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Пюккера:

$$M_{12} M_{34} - M_{13} M_{24} + M_{14} M_{23} = 0. \tag{9}$$

$$\widetilde{M}_{12} \widetilde{M}_{34} - \widetilde{M}_{13} \widetilde{M}_{24} + \widetilde{M}_{14} \widetilde{M}_{23} = 0. \tag{10}$$

(Миноры  $M_{23}$ ,  $M_{24}$  из равенств (9) отличаются от миноров  $M_{32}$ ,  $M_{42}$  из равенств (8) только знаком). Из (8), (9), (10) и обратной теоремы Виета получаем два набора равенств

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= C \widetilde{M}_{12}, & M_{32} &= C \widetilde{M}_{32}, & M_{42} &= C \widetilde{M}_{42}, \\
 M_{13} &= C \widetilde{M}_{13}, & M_{14} &= C \widetilde{M}_{14}, & M_{34} &= C \widetilde{M}_{34}
 \end{aligned} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= C \widetilde{M}_{34}, & M_{32} &= C \widetilde{M}_{32}, & M_{42} &= C \widetilde{M}_{42}, \\
 M_{13} &= C \widetilde{M}_{13}, & M_{14} &= C \widetilde{M}_{14}, & M_{34} &= C \widetilde{M}_{12}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда следует, что краевые условия задач  $L$  и  $\tilde{L}$  либо совпадают (с точностью до линейных преобразований строк), либо являются (12 и 34)-смежными.

Пусть теперь  $p(x) = p(\pi - x)$  и  $q(x) = q(\pi - x)$ . Тогда  $y_1(\pi, \lambda) \equiv y_2'(\pi, \lambda)$  и из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства

$$\begin{aligned} M_{12} + M_{34} &= C (\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34}), & M_{32} + M_{14} &= C (\tilde{M}_{32} + \tilde{M}_{14}), \\ M_{42} &= C \tilde{M}_{42}, & M_{13} &= C \tilde{M}_{13}. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим произведение  $M_{12} M_{34}$  через  $C_2$ . Отсюда, из (13) и обратной теоремы Виета следует, что миноры  $M_{12}$  и  $M_{34}$  являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - C (\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34}) x + C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{2} C \left( (\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34}) \pm \sqrt{(\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34})^2 - C_1} \right), \\ M_{34} &= \frac{1}{2} C \left( (\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34}) \mp \sqrt{(\tilde{M}_{12} + \tilde{M}_{34})^2 - C_1} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_1 = 4 C_2 / C^2$ .

Для нахождения миноров  $M_{14}$  и  $M_{23}$  воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того чтобы числа  $M_{12}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{34}$  были минорами матрицы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения Плюккера (9) и (10). Тогда из (9) и (13) следует, что

$$-M_{14} M_{32} = M_{14} M_{23} = M_{13} M_{24} - C_2 = C^2 \tilde{M}_{13} \tilde{M}_{24} - C_2. \quad (15)$$

Отсюда, из (13) и обратной теоремы Виета следует, что миноры  $M_{14}$  и  $M_{32}$  являются корнями квадратного уравнения

$$y^2 - C (\tilde{M}_{14} + \tilde{M}_{32}) y - \tilde{M}_{14} \tilde{M}_{32} + C_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{14} &= \frac{1}{2} C \left( (\tilde{M}_{14} + \tilde{M}_{32}) \pm \sqrt{(\tilde{M}_{14} + \tilde{M}_{32})^2 + 4 \tilde{M}_{13} \tilde{M}_{24} - C_1} \right), \\ M_{23} &= \frac{1}{2} C \left( (\tilde{M}_{14} + \tilde{M}_{32}) \mp \sqrt{(\tilde{M}_{14} + \tilde{M}_{32})^2 + 4 \tilde{M}_{13} \tilde{M}_{24} - C_1} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

и теорема доказана. ■

Обозначим через  $F$  матрицу следующего вида:

$$F = \begin{vmatrix} 1 & y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) & y_2'(\pi, \lambda_1) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) & y_2'(\pi, \lambda_2) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_3) & y_1'(\pi, \lambda_3) & y_2(\pi, \lambda_3) & y_2'(\pi, \lambda_3) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_4) & y_1'(\pi, \lambda_4) & y_2(\pi, \lambda_4) & y_2'(\pi, \lambda_4) \end{vmatrix}, \quad (17)$$

через  $F_j$  обозначим минор матрицы  $F$ , полученный вычёркиванием  $j$ -го столбца матрицы  $F$ .

**Теорема 2.** Если  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$ ,  $\text{rank } A = 2$ , четыре собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) задачи  $L$  удовлетворяют условию:

$$\text{rank } F = 4, \quad (18)$$

то задача идентификации краевых условий по этим четырём собственным значениям имеет два решения.

Причём миноры матрицы  $A$  этих двух видов краевых условий связаны следующими равенствами:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{t}{2} \left( F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right), \\ M_{34} &= \frac{t}{2} \left( F_1 \mp \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right), \\ M_{32} &= -t F_2, \quad M_{42} = t F_3, \\ M_{13} &= -t F_4, \quad M_{14} = t F_5. \end{aligned} \quad (19)$$

А соответствующая смежная пара матриц  $A$  с помощью миноров (19) в явном виде выписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \text{ если } M_{12} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{M_{23}}{M_{12}} & -\frac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix}; \\ 2) \text{ если } M_{13} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{M_{23}}{M_{13}} & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{13}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix}; \\ 3) \text{ если } M_{14} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{M_{24}}{M_{14}} & \frac{M_{34}}{M_{14}} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix}; \\ 4) \text{ если } M_{23} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} \frac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{vmatrix}; \\ 5) \text{ если } M_{24} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{24}} & 1 & \frac{M_{34}}{M_{24}} & 0 \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{vmatrix}; \\ 6) \text{ если } M_{34} \neq 0, \text{ то } A &= \begin{vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{34}} & \frac{M_{24}}{M_{34}} & 1 & 0 \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & M_{34} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В частном случае, при  $F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5) = 0$ , задача идентификации краевых условий по четырём собственным значениям  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) имеет единственное решение (смежные решения совпадают).

*Доказательство.* Четыре собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) задачи  $L$  являются корнями функции (5). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных  $x_1 = M_{12} + M_{34}$ ,  $x_2 = M_{32}$ ,  $x_3 = M_{42}$ ,  $x_4 = M_{13}$ ,  $x_5 = M_{14}$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_j) &= M_{12} + M_{34} + M_{32} y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda_j) + \\ &+ M_{13} y_2(\pi, \lambda_j) + M_{14} y_2'(\pi, \lambda_j) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Матрица этой системы совпадает с матрицей  $F$  (17). Согласно условию теоремы, ранг матрицы  $F$  равен четырём. Поэтому система уравнений (17) имеет единственное с точностью до ненулевого множителя решение:

$$\begin{aligned} M_{12} + M_{34} &= t F_1, & M_{32} &= -t F_2, & M_{42} &= t F_3, \\ M_{13} &= -t F_4, & M_{14} &= t F_5, \end{aligned} \tag{21}$$

где через  $F_j$  обозначен минор матрицы  $F$ , полученный вычёркиванием  $j$ -го столбца матрицы  $F$ .

Из соотношений Пюккера (9) и (21) получаем

$$M_{12} M_{34} = t^2 (F_3 F_4 - F_2 F_5). \tag{22}$$

Из равенств (21), (22) и обратной теоремы Виета следует, что  $M_{12}$  и  $M_{34}$  являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - t F_1 z + t^2 (F_3 F_4 - F_2 F_5) = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{t}{2} \left( F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right), \\ M_{34} &= \frac{t}{2} \left( F_1 \mp \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Из (21) и (23) вытекают равенства (19), из которых с помощью методов идентификации матрицы [18, с. 34,35] по её минорам находятся пары смежных матриц, выписанные в заключении теоремы. Покажем это для случая 1)  $M_{12} \neq 0$ . Пусть вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  — произвольный вектор линейной оболочки, построенной на векторах  $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$  и  $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$  (или другими словами, пусть  $\mathbf{x}$  — вектор-строка матрицы  $A$ ). Тогда координаты вектора  $\mathbf{x}$  удовлетворяют условию

$$\text{rank} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 2.$$

Поскольку  $M_{12} \neq 0$ , то последнее условие эквивалентно выполнению следующих двух равенств

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

(Все окаймляющие  $M_{12}$  миноры должны быть равны нулю.)

Разлагая определители (24) по третьей строке, получаем

$$x_1 \cdot M_{23} - x_2 \cdot M_{13} + x_3 \cdot M_{12} = 0, \quad x_1 \cdot M_{24} - x_2 \cdot M_{14} + x_4 \cdot M_{12} = 0. \tag{25}$$

Базисные векторы искомой линейной оболочки можно найти, положив для первого вектора  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ , а для второго —  $x_1 = 0$  и  $x_2 = M_{12} \neq 0$ . Если  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ , то из равенств (24) находим  $x_3 = -\frac{M_{23}}{M_{12}}$ ,  $x_4 = -\frac{M_{24}}{M_{12}}$ . Если  $x_1 = 0$  и  $x_2 = M_{12} \neq 0$ , то из равенств (24) находим  $x_3 = M_{13}$ ,  $x_4 = M_{14}$ . Следовательно, если  $M_{12} \neq 0$ , то матрица  $A$  с точностью до линейной эквивалентности совпадает с матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{M_{23}}{M_{12}} & -\frac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix}.$$

Для случаев 2)–6) матрица  $A$  выписывается аналогично. Теорема доказана. ■

### Пример 1

Пусть собственные значения задачи (1), (2) с  $p(x) = x$  и  $q(x) = x^2$ ,  $\lambda_1 = 2,8868$ ,  $\lambda_2 = 4,4143$ ,  $\lambda_3 = 4,7499$ ,  $\lambda_4 = 21,93794$ . Разложив линейно независимые решения  $y_1(\pi, \lambda)$  и  $y_2(\pi, \lambda)$  в ряд Тейлора по  $x$  и  $\lambda$ , подставив частичную сумму ряда из первых 50 членов ряда в (17), вычислив соответствующие миноры  $F_j$  с точностью до пяти значащих цифр (в действительности вычисления проводились с точностью до 50 значащих цифр), получим:  $F_1 = -1,3253 \cdot 10^{14}$ ,  $F_2 = 0$ ,  $F_3 = 0$ ,  $F_4 = 0$ ,  $F_5 = 1,3253 \cdot 10^{14}$ . (Заметим, что остатком ряда Тейлора в этом случае можно пренебречь, т. к. ряд Тейлора получается знакоперевающимся и его остаток  $R_{50}$  может быть оценён модулем последнего слагаемого частичной суммы, который является малым числом.)

Отсюда и из (19) получаем два решения

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{t}{2} \left( F_1 + \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right) = 0, \\ M_{34} &= \frac{t}{2} \left( F_1 - \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right) = -1,3253 \cdot 10^{14} t, \\ M_{32} &= -t F_2 = 0, \quad M_{42} = t F_3 = 0, \quad M_{13} = -t F_4 = 0, \quad M_{14} = t F_5 = 1,3253 \cdot 10^{14} t, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{t}{2} \left( F_1 - \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right) = -1,3253 \cdot 10^{14} t, \\ M_{34} &= \frac{t}{2} \left( F_1 + \sqrt{F_1^2 - 4(F_3 F_4 - F_2 F_5)} \right) = 0, \\ M_{32} &= -t F_2 = 0, \quad M_{42} = t F_3 = 0, \quad M_{13} = -t F_4 = 0, \quad M_{14} = t F_5 = 1,3253 \cdot 10^{14} t. \end{aligned}$$

Положив  $t = -\frac{1}{1,3253 \cdot 10^{14}}$ , получим более простые представления для миноров:

$$M_{12} = -M_{14} = 1; \quad M_{32} = M_{42} = M_{13} = M_{34} = 0$$

и

$$M_{34} = -M_{14} = 1; \quad M_{32} = M_{42} = M_{13} = M_{12} = 0.$$

Так как  $M_{12} = 1 \neq 0$ , то первое решение для матрицы  $A$  с точностью до линейной эквивалентности совпадает с матрицей

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{M_{23}}{M_{12}} & -\frac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\|,$$

а второе решение для матрицы  $A$  с точностью до линейной эквивалентности совпадает с матрицей

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{M_{14}}{M_{34}} & \frac{M_{24}}{M_{34}} & 1 & 0 \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & M_{34} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет два решения:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) \quad \text{и} \quad y(0) - y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Обозначим через  $G$  матрицу следующего вида:

$$G = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_3) & y_1'(\pi, \lambda_3) & y_2(\pi, \lambda_3) \end{array} \right\|; \quad (26)$$

через  $G_j$  обозначим минор матрицы  $G$ , полученный вычёркиванием  $j$ -го столбца матрицы  $G$ .

**Теорема 3.** Если  $q(x) = q(\pi - x)$ ,  $\text{rank } A = 2$ , три собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) задачи  $L$  удовлетворяют условию:

$$\text{rank} \|1, y_1(\pi, \lambda_j), y_1'(\pi, \lambda_j), y_2(\pi, \lambda_j)\|_{j=1,2,3} = 3, \quad (27)$$

то задача идентификации краевых условий по этим трём собственным значениям имеет бесконечное число решений.

Причём миноры матрицы  $A$  представляются следующим образом:

$$M_{12} = \frac{1}{2} (t G_1 \pm S_1), \quad M_{34} = \frac{1}{2} (t G_1 \mp S_1), \quad M_{42} = t G_3, \quad (28)$$

$$M_{13} = t G_4, \quad M_{14} = \frac{1}{2} (-t G_2 \pm S_2), \quad M_{32} = \frac{1}{2} (-t G_2 \mp S_2),$$

где  $S_1 = \sqrt{(t G_1)^2 - t_1}$ ,  $S_2 = \sqrt{t^2 G_2^2 + 4 t^2 G_3 G_4 - t_1}$ , а  $t$  и  $t_1$  — произвольные числа. Соответствующие матрицы  $A$  с помощью этих миноров в явном виде выписывается по формулам 1)–6) из формулировки теоремы 2.

*Доказательство.* Пять собственных значений  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) задачи  $L$  являются корнями функции (5). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$M_{12} + M_{34} + (M_{32} + M_{14}) y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda_j) + M_{13} y_2(\pi, \lambda_j) = 0. \quad (29)$$

Эта система имеет бесконечное число решений:

$$M_{12} + M_{34} = t G_1, \quad M_{32} + M_{14} = -t G_2, \quad M_{42} = t G_3, \quad M_{13} = -t G_4. \quad (30)$$

Обозначим произведение  $M_{12} M_{34}$  через  $t_2$ . Отсюда, из (30) и обратной теоремы Виета следует, что миноры  $M_{12}$  и  $M_{34}$  являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - t G_1 x + t_2 = 0.$$

Следовательно,

$$M_{12} = \frac{1}{2} \left( t G_1 \pm \sqrt{(t G_1)^2 - t_1} \right), \quad (31)$$

$$M_{34} = \frac{1}{2} \left( t G_1 \mp \sqrt{(t G_1)^2 - t_1} \right),$$

где  $t_1 = 4 t_2$ . Тогда из соотношений Пюккера (9) получаем

$$M_{14} M_{32} = -t^2 G_3 G_4 + \frac{1}{4} t_1.$$

Отсюда, из (30) и обратной теоремы Виета следует, что миноры  $M_{14}$  и  $M_{32}$  являются корнями квадратного уравнения

$$y^2 + t G_2 y - t^2 G_3 G_4 + \frac{1}{4} t_1 = 0.$$

Следовательно,

$$M_{14} = \frac{1}{2} \left( -t G_2 \pm \sqrt{t^2 G_2^2 + 4 t^2 G_3 G_4 - t_1} \right), \quad (32)$$

$$M_{32} = \frac{1}{2} \left( -t G_2 \mp \sqrt{t^2 G_2^2 + 4 t^2 G_3 G_4 - t_1} \right)$$

и теорема доказана. ■

### **Идентификация распадающихся краевых условий**

Рассмотрим теперь частный случай задачи  $L$  — задачу  $L_0$  для уравнения (1) со следующими распадающимися краевыми условиями:

$$U_1(y) = a_{11} y(0) + a_{12} y'(0) = 0, \quad (33)$$

$$U_2(y) = a_{23} y(\pi) + a_{24} y'(\pi) = 0. \quad (34)$$

Для задачи (1), (33), (34) ( $L_0$ ) миноры  $M_{12}$  и  $M_{34}$  обращаются в нуль:

$$M_{12} = 0, \quad M_{34} = 0. \quad (35)$$

Отсюда и из (5) получаем:

$$\Delta(\lambda) = M_{32} y_1(\pi, \lambda) + M_{42} y'_1(\pi, \lambda) + M_{13} y_2(\pi, \lambda) + M_{14} y'_2(\pi, \lambda). \quad (36)$$

Пусть  $q(x) \neq q(\pi - x)$ ,  $\tilde{q}(x) \neq \tilde{q}(\pi - x)$ . Тогда, также как при доказательстве равенств (8) (см. теорему 1), получаем равенства:

$$M_{32} = C \tilde{M}_{32}, \quad M_{42} = C \tilde{M}_{42}, \quad M_{13} = C \tilde{M}_{13}, \quad M_{14} = C \tilde{M}_{14}. \quad (37)$$

Отсюда следует, что краевые условия задач  $L$  и  $\tilde{L}$  совпадают (с точностью до линейных преобразований строк).

Пусть теперь  $q(x) = q(\pi - x)$ ,  $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$ . Тогда, также как при доказательстве равенств (13) (см. теорему 1), получаем равенства:

$$M_{32} + M_{14} = C (\tilde{M}_{32} + \tilde{M}_{14}), \quad M_{42} = C \tilde{M}_{42}, \quad M_{13} = C \tilde{M}_{13}. \quad (38)$$

Откуда также, как и при доказательстве теоремы, получаем два набора равенств

$$M_{13} = C \tilde{M}_{13}, \quad M_{14} = C \tilde{M}_{14}, \quad M_{32} = C \tilde{M}_{32}, \quad M_{42} = C \tilde{M}_{42}. \quad (39)$$

и

$$M_{13} = C \tilde{M}_{13}, \quad M_{14} = C \tilde{M}_{32}, \quad M_{32} = C \tilde{M}_{14}, \quad M_{42} = C \tilde{M}_{42}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что краевые условия задач  $L$  и  $\tilde{L}$  либо совпадают (с точностью до линейных преобразований строк), либо являются (14 и 32)-смежными.

Таким образом, верна следующая

**Теорема 4.** Пусть спектры задач  $L$  и  $\tilde{L}$  с распадающимися краевыми условиями (33) и (34) совпадают с учётом их алгебраических кратностей,  $\text{rank } A = 2$ .

Тогда:

1. Если  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$ , то матрицы коэффициентов краевых условий  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  и  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2 \times 4}$  совпадают с точностью до линейных преобразований строк. То есть в случае несимметрического потенциала задача идентификации распадающихся краевых условий по всем собственным значениям имеет единственное решение.

2. Если  $p(x) = p(\pi - x)$  и  $q(x) = q(\pi - x)$ , то либо матрицы коэффициентов краевых условий  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  и  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{2 \times 4}$  совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо являются (14 и 32)-смежными. То есть в случае симметрического потенциала задача идентификации распадающихся краевых условий по всем собственным значениям имеет два решения.

Обозначим через  $Q$  матрицу следующего вида:

$$Q = \begin{vmatrix} y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) & y_2'(\pi, \lambda_1) \\ y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) & y_2'(\pi, \lambda_2) \\ y_1(\pi, \lambda_3) & y_1'(\pi, \lambda_3) & y_2(\pi, \lambda_3) & y_2'(\pi, \lambda_3) \end{vmatrix}, \quad (41)$$

через  $Q_j$  обозначим минор матрицы  $Q$ , полученный вычёркиванием  $j$ -го столбца матрицы  $Q$ .

**Теорема 5.** Если  $p(x) \neq p(\pi - x)$  или (и)  $q(x) \neq q(\pi - x)$ ,  $\text{rank } A = 2$ , три собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) задачи  $L$  удовлетворяют условию:

$$\text{rank } Q = 3, \quad (42)$$

то задача идентификации краевых условий по этим трём собственным значениям имеет единственное решение, которое представляется формулами 2)–5) из теоремы 2 в зависимости от того, какой из миноров отличен от нуля. Причём миноры в представлениях 2)–5) для матрицы  $A$  даются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} M_{12} = 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{32} = t Q_1, \\ M_{42} = -t Q_2, \quad M_{13} = t Q_3, \quad M_{14} = -t Q_4. \end{aligned} \quad (43)$$

*Доказательство.* Три собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) задачи  $L$  являются корнями характеристического определителя. Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных  $M_{32}$ ,  $M_{42}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_j) = M_{32} y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42} y_1'(\pi, \lambda_j) + \\ + M_{13} y_2(\pi, \lambda_j) + M_{14} y_2'(\pi, \lambda_j) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Матрица этой системы совпадает с матрицей  $Q$ . Согласно условию теоремы, ранг матрицы  $Q$  равен трём. Поэтому система уравнений (17) имеет единственное с точностью до ненулевого множителя  $t$  решение (43). Теорема доказана. ■

## Пример 2

Пусть собственные значения задачи (1), (2) с  $p(x) = x$  и  $q(x) = x^2$ ,  $\lambda_1 = 2,0425$ ,  $\lambda_2 = 3,8163$ ,  $\lambda_3 = 6,8611$ . Разложив линейно независимые решения  $y_1(\pi, \lambda)$  и  $y_2(\pi, \lambda)$  в ряд Тейлора по  $x$  и  $\lambda$ , подставив частичную сумму ряда из первых 50 членов ряда в (17) и вычислив соответствующие миноры  $Q_j$  с точностью до пяти значащих цифр, получим:  $Q_1 = 3,5147 \cdot 10^8$ ,  $Q_2 = -3,5147 \cdot 10^8$ ,  $Q_3 = 3,5147 \cdot 10^8$ ,  $Q_4 = -3,5147 \cdot 10^8$ .

Отсюда и из (43) получаем

$$\begin{aligned} M_{12} = 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{23} = -M_{32} = -t Q_1 = -3,5147 \cdot 10^8 t, \\ M_{24} = -M_{42} = t Q_2 = -3,5147 \cdot 10^8 t, \quad M_{13} = t Q_3 = 3,5147 \cdot 10^8 t, \\ M_{14} = -t Q_4 = 3,5147 \cdot 10^8 t. \end{aligned}$$

Положив  $t = -\frac{1}{3,5147 \cdot 10^8}$ , получим более простые представления для миноров:

$$M_{42} = M_{23} = 1, \quad M_{12} = M_{34} = 0, \quad M_{13} = M_{14} = -1.$$

Так как  $M_{23} = 1 \neq 0$ , то матрица  $A$  с точностью до линейной эквивалентности совпадает с матрицей

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет единственное решение. Это решение представляет собой следующие краевые условия

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(\pi) + y(\pi) = 0.$$

Обозначим через  $R$  матрицу следующего вида:

$$R = \left\| \begin{array}{ccc} y_1(\pi, \lambda_1) & y'_1(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) \\ y_1(\pi, \lambda_2) & y'_1(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) \end{array} \right\|; \tag{45}$$

через  $R_j$  обозначим минор матрицы  $R$ , полученный вычёркиванием  $j$ -го столбца матрицы  $R$ .

**Теорема 6.** Если  $p(x) = p(\pi - x)$  и  $q(x) = q(\pi - x)$ ,  $\text{rank } A = 2$ , два собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) задачи  $L$  удовлетворяют условию:

$$\text{rank } R = 2, \tag{46}$$

то задача идентификации краевых условий по этим двум собственным значениям имеет два решения, которые представляется формулами 2)–5) из теоремы 2 в зависимости от того, какой из миноров отличен от нуля. Причём миноры в представлениях 2)–5) для матрицы  $A$  даются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} M_{12} = 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{32} = \frac{t}{2} \left( R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right), \\ M_{42} = -t R_2, \quad M_{13} = t R_3, \quad M_{14} = \frac{t}{2} \left( R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right). \end{aligned} \tag{47}$$

*Доказательство.* Два собственных значения  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) задачи  $L$  являются корнями функции (36). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных  $x_1 = M_{12} + M_{34}$ ,  $x_2 = M_{32}$ ,  $x_3 = M_{42}$ ,  $x_4 = M_{13}$ ,  $x_5 = M_{14}$ :

$$(M_{32} + M_{14}) y_1(\pi, \lambda_j) + M_{42} y'_1(\pi, \lambda_j) + M_{13} y_2(\pi, \lambda_j) = 0. \tag{48}$$

Матрица этой системы совпадает с матрицей  $R$  (45). Согласно условию теоремы, ранг матрицы  $R$  равен двум. Поэтому система уравнений (48) имеет единственное с точностью до ненулевого множителя решение:

$$M_{32} + M_{14} = t R_1, \quad M_{42} = -t R_2, \quad M_{13} = t R_3. \tag{49}$$

Из соотношений Плюккера (9), (35) и (49) получаем

$$M_{32} M_{14} = -t^2 R_2 R_3. \quad (50)$$

Из равенств (49), (50) и обратной теоремы Виета следует, что  $M_{32}$  и  $M_{14}$  являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - t R_1 z - t^2 R_2 R_3 = 0.$$

Откуда

$$M_{32} = \frac{t}{2} \left( R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right), \quad M_{14} = \frac{t}{2} \left( R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right). \quad (51)$$

Отсюда и из (49) и вытекает утверждение теоремы. ■

### Пример 3

Пусть собственные значения задачи (1), (2) с  $p(x) = 1$  и  $q(x) = 1$ ,  $\lambda_1 = 2,5516$ ,  $\lambda_2 = 2,9870$ . На самом деле собственные значения брались с точностью до 50 значащих цифр. Разложив линейно независимые решения  $y_1(\pi, \lambda)$  и  $y_2(\pi, \lambda)$  в ряд Тейлора по  $x$  и  $\lambda$ , подставим частичную сумму ряда из первых 50 членов ряда в (45) и вычислим соответствующие миноры  $R_j$  с точностью до пятидесяти значащих цифр, получим:  $R_1 = -1,4852$ ,  $R_2 = 0,74262$ ,  $R_3 = -0,74262$ .

Отсюда и из (47) получаем единственное (кратное) представление ( $\sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} = 0$  при точности вычислений 50 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_{12} = 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{32} &= \frac{t}{2} \left( R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right) = -0,74262 t, \\ M_{42} = t R_2 &= -0,74262 t, \quad M_{13} = t R_3 = -0,74262 t, \\ M_{14} &= -\frac{t}{2} \left( R_1 \mp \sqrt{R_1^2 + 4 R_2 R_3} \right) = -0,74262 t. \end{aligned} \quad (52)$$

Положив  $t = \frac{1}{0,74262}$ , получим более простые представления для миноров:

$$M_{12} = M_{34} = 0, \quad M_{13} = -1, \quad M_{42} = -1, \quad M_{14} = -1, \quad M_{32} = -1.$$

Так как  $M_{23} = 1 \neq 0$ , то матрица  $A$  с точностью до линейной эквивалентности совпадает с матрицей

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет единственное (кратное) решение. Это решение представляет собой следующие краевые условия:

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(\pi) + y(\pi) = 0.$$

## Благодарности

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проекты 18-51-06002-Аз\_а, 18-01-00250-а, 17-41-020230-р\_а, 17-41-020195-р\_а), Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № 0246-2018-0006), а также Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект 1-го Азербайджанско-Российского международного конкурса грантов (EIF-BGM-4-RFTF-1/2017)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
3. Коротяев Е.Л., Челкак Д.С. Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 5. С. 114–137.
4. Савчук А.М., Шкалик А.А. Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2013. Т. 283. С. 188.
5. Савчук А.М., Шкалик А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53.
6. Гусейнов Г.Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1986. Вып. 7. С. 51–101.
7. Набиев И.М., Шукюров А.Ш. Решение обратной задачи для оператора диффузии в симметрическом случае // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 36–40.
8. Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 293–296.
9. Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569–576.
10. Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. I // Матем. сборник. 1986. Т. 131, № 1. С. 3–26.
11. Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. II // Матем. сборник. 1988. Т. 136, № 1. С. 140–159.
12. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М. : Изд-во МГУ. 2009.
13. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Теоремы разрешимости несамосопряженной обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 706–713.

14. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66.
15. Гнуни В.Ц., Оганисян З.Б. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний // Известия НАН РА, серия «Механика». 1991. Т. 44, № 5. С. 9–16.
16. Оганисян З.Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний // Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем (научные труды конференции). Ереван, 1997. С. 159–162.
17. Оганисян З.Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний // Учёные записки ЕГУ. 1991. № 1. С. 45–50.
18. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М. : Физматлит, 2009.
19. Ахтямов А.М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по её спектру // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 4. С. 995–1006.
20. Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 8. С. 1011–1015.
21. Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 6. С. 647–655.

## IDENTIFICATION GENERAL BOUNDARY CONDITIONS OF THE DIFFUSION OPERATOR

**R.Yu. Galimov**<sup>1</sup>

Assistant Professor, e-mail: galimovry@mail.ru

**A.M. Akhtyamov**<sup>1,2</sup>

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: akhtyamovam@mail.ru

<sup>1</sup>Bashkir State University, Ufa, Russia

<sup>2</sup>Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia

**Abstract.** The problems of identification of both general and separated boundary conditions of the diffusion operator by its eigenvalues are investigated. For general boundary conditions it is shown that if at least one of the coefficients in the differential equation is asymmetric function, then the problem of identifying boundary conditions by all eigenvalues has two solutions, and if both of the coefficients are symmetric functions, then the problem of identifying the boundary conditions over all there are infinitely many solutions to the eigenvalues. It is also proved that if at least one of the coefficients in the differential equation is an asymmetric function, then two solutions can be obtained by four eigenvalues, if the rank of some matrix is four. For separated boundary conditions it is shown that if at least one of the coefficients in the differential equation is an asymmetric function, then the problem of identifying boundary conditions by all eigenvalues has a unique solution, and if both of the coefficients are symmetric functions, then the problem of identifying boundary conditions has two

solutions. It is also shown that under certain conditions a unique solution can be obtained from three eigenvalues, and two solutions by two eigenvalues. Appropriate examples are considered.

**Keywords:** Diffusion operator, identification of boundary conditions, inverse eigenvalue problem, eigenvalue problems.

## REFERENCES

1. Marchenko V.A. Operatory Shturma–Liuvillya i ikh prilozheniya. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1977. (in Russian)
2. Naimark M.A. Lineinye differentsial'nye operatory. Moscow, Nauka Publ., 1969, 526 p. (in Russian)
3. Korotyaev E.L. and Chelkak D.S. Obratnaya zadacha Shturma–Liuvillya so smeshannymi kraevymi usloviyami. Algebra i analiz, 2009, vol. 21, no. 5, pp. 114–137. (in Russian)
4. Savchuk A.M. and Shkalikov A.A. Ravnornernaya ustoichivost' obratnoi zadachi Shturma–Liuvillya po spektral'noi funktsii v shkale sobolevskikh prostranstv. Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN, 2013, vol. 283, pp. 188. (in Russian)
5. Savchuk A.M. and Shkalikov A.A. Obratnye zadachi dlya operatora Shturma–Liuvillya s potentsialami iz prostranstv Soboleva. Ravnornernaya ustoichivost'. Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya, 2010, vol. 44, no. 4, pp. 34–53. (in Russian)
6. Guseinov G.Sh. Obratnye spektral'nye zadachi dlya kvadrachnogo puchka operatorov Shturma–Liuvillya na konechnom intervale. Spektral'naya teoriya operatorov i ee prilozheniya, Baku, 1986, iss. 7, pp. 51–101. (in Russian)
7. Nabiev I.M. and Shukyurov A.Sh. Reshenie obratnoi zadachi dlya operatora diffuzii v simmetricheskom sluchae. Izv. Sarat. un-ta, Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2009, vol. 9, iss. 4, ch. 1, pp. 36–40. (in Russian)
8. Sadovnichii V.A. Edinstvennost' resheniya obratnoi zadachi v sluchae uravneniya vtorogo poryadka s neraspadayushchimisy usloviyami, regularizovannye summy chasti sobstvennykh chisel. Faktorizatsiya kharakteristicheskogo opredelitelya. DAN SSSR, 1972, vol. 206, no. 2, pp. 293–296. (in Russian)
9. Yurko V.A. Obratnaya zadacha dlya differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s regul'yarnymi kraevymi usloviyami. Matem. zametki, 1975, vol. 18, no. 4, pp. 569–576. (in Russian)
10. Plaksina O.A. Obratnye zadachi spektral'nogo analiza dlya operatorov Shturma–Liuvillya s neraspadayushchimisy kraevymi usloviyami. I. Matem. sbornik, 1986, vol. 131, no. 1, pp. 3–26. (in Russian)
11. Plaksina O.A. Obratnye zadachi spektral'nogo analiza dlya operatorov Shturma–Liuvillya s neraspadayushchimisy kraevymi usloviyami. II. Matem. sbornik, 1988, vol. 136, no. 1, pp. 140–159. (in Russian)
12. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T. and Akhtyamov A.M. Obratnaya zadacha Shturma–Liuvillya s neraspadayushchimisy kraevymi usloviyami. Moscow, MGU Publ., 2009. (in Russian)
13. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T. and Akhtyamov A.M. Teoremy razreshimosti nesamosp'yazhennoi obratnoi zadachi Shturma–Liuvillya s neraspadayushchimisy

- kraevymi usloviyami. *Differents. uravneniya*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 706–713. (in Russian)
14. Guseinov I.M. and Nabiev I.M. Obratnaya spektral'naya zadacha dlya puchkov differentsial'nykh operatorov. *Matematicheskii sbornik*, 2007, vol. 198, no. 11, pp. 47–66. (in Russian)
  15. Gnuni V.Ts. and Oganisyan Z.B. Opredelenie granichnykh uslovii krugloi kol'tsevoi plastinki po zadannym chastotam sobstvennykh kolebanii. *Izvestiya NAN RA, seriya «Mekhanika»*, 1991, vol. 44, no. 5, pp. 9–16. (in Russian)
  16. Oganisyan Z.B. Ob odnoi zadache vosstanovleniya granichnykh uslovii na kotsakh sterzhnya pri zadannom spektre chastot sobstvennykh poperechnykh kolebanii. *Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustoichivosti i prochnosti mekhanicheskikh sistem (nauchnye trudy konferentsii)*, Erevan, 1997, pp. 159–162. (in Russian)
  17. Oganisyan Z.B. Ob odnoi zadache vosstanovleniya granichnykh uslovii na krayakh plastinki pri zadannom spektre chastot sobstvennykh poperechnykh kolebanii. *Uchenye zapiski EGU*. 1991, no. 1, pp. 45–50. (in Russian)
  18. Akhtyamov A.M. *Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniya*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. (in Russian)
  19. Akhtyamov A.M. O edinstvennosti vosstanovleniya kraevykh uslovii spektral'noi zadachi po ee spektru. *Fund. i prikl. matematika*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 995–1006. (in Russian)
  20. Akhtyamov A.M. K edinstvennosti resheniya odnoi obratnoi spektral'noi zadachi. *Differents. uravneniya*, 2003, vol. 8, pp. 1011–1015. (in Russian)
  21. Akhtyamov A.M. and Utyashev I.M. Identifikatsiya kraevykh uslovii na oboikh kotsakh struny po sobstvennym chastotam kolebanii. *Akusticheskii zhurnal*, 2015, vol. 61, no. 6, pp. 647–655. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 26.12.2018*

## **ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОБЕЛОВ ДАННЫХ АРТЕРИАЛЬНОЙ ГИПЕРТЕНЗИИ**

**В.А. Шовин**

научный сотрудник, e-mail: v.shovin@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН  
(Омский филиал), Омск, Россия

**Аннотация.** Разработан алгоритм заполнения пробелов данных на базе восстановления вектора показателей объектов из факторной структуры данных, вычисляемой с помощью метода штрафных функций. Пробелы в данных и соответствующие им уравнения факторной модели для отдельных объектов не учитывались в критерии оптимизации невязок уравнений факторной модели, что позволяет достоверно оценить значения пробелов данных. Проведён численный эксперимент, подтверждающий работоспособность алгоритма, и создана программа с интерфейсом, позволяющая пользователю загружать новые данные.

**Ключевые слова:** факторный анализ, метод штрафных функций, артериальная гипертензия.

### **Введение**

Факторный анализ позволяет вычислить факторную структуру данных, определив тем самым связь между латентными переменными (факторами) и исходными переменными. В классическом факторном анализе связь между факторами и исходными переменными является линейной. В факторном анализе решаются несколько задач. Это поиск матрицы факторной структуры, определяющей нагрузки переменных на факторы, т. е. соответствует коэффициентам корреляции между исходными переменными и факторами. А также определение значений факторов (новых «латентных» переменных) у объектов. Зная значение факторов и матрицу факторной структуры, можно восстановить значения исходных переменных, тем самым очистив исходные данные от шума.

Существует несколько подходов к вычислению матрицы факторной структуры. Одним из продвинутых подходов к определению всех неизвестных параметров модели факторного анализа является метод оптимизации с проверкой на дополнительные условия или ограничения, а именно метод штрафов. В данном методе для оценки параметров и значений латентных переменных модели, задаваемой линейными уравнениями, может быть использован критерий минимальных невязок как сумма невязок модели вычисленных для всей выборки

различных объектов. Дополнительно на параметры и значения латентных переменных могут быть заданы ограничительные условия. Для решения задачи минимизации невязок модели предлагается использовать методы нелинейной оптимизации с условиями: метод конфигураций. Метод штрафных функций позволяет учитывать ограничения, накладываемые на значения параметров и латентных переменных модели.

С помощью метода штрафов можно определить неизвестные параметры факторной модели и из факторной структуры данных восстановить исходные данные, тем самым восстановив пробелы в данных. Чтобы задача оптимизации невязок факторной модели была определена, в данном алгоритме восстановления пробелов данных предлагается предварительно исключить из критерия оптимизации отдельные уравнения объектов, соответствующие пробелам данных.

## 1. Факторный анализ как частный случай структурных уравнений

В теории структурных уравнений используются следующие типы матриц.

Матрица  $Z \leftrightarrow z_{ij}$   $_{m \times n}$  — матрица значений измеряемых переменных у исследуемых объектов или состояний объекта размерности  $m \times n$ , где  $m$  — число измеряемых параметров,  $n$  — число объектов или состояний объекта (объём выборки).

Матрица  $P \leftrightarrow p_{ij}$   $_{g \times n}$  — матрица значений латентных переменных объектов размерности  $g \times n$ , где  $g$  — число латентных параметров.

Матрица  $A \leftrightarrow a_{ij}$   $_{k \times s}$  — матрица параметров структурных уравнений размерности  $k \times s$ , где  $k$  — число структурных уравнений,  $s$  — число параметров в структурных уравнениях.

Система структурных уравнений задаётся в виде:

$$\begin{cases} f_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}; p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{gt}; z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}) + \varepsilon_{1t} = 0, \\ f_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2s}; p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{gt}; z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}) + \varepsilon_{2t} = 0, \\ \vdots \\ f_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{ks}; p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{gt}; z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}) + \varepsilon_{kt} = 0, \end{cases}$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — в общем случае нелинейные функции своих переменных,  $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{kt}$  — невязки модели для  $t$ -го объекта или состояния объекта.

На значения параметров и значения латентных переменных могут накладываться дополнительные условия в виде равенств и неравенств.

Оптимальными значениями параметров и латентных переменных считаются те значения, которые минимизируют абсолютные значения невязок модели и удовлетворяют всем дополнительным условиям.

В данной работе рассмотрен частный случай структурной модели — линейная факторная модель, описываемая следующими уравнениями [1–3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1t} = a_{11}p_{1t} + a_{12}p_{2t} + \dots + a_{1g}p_{gt} + \varepsilon_{1t}, \\ z_{2t} = a_{21}p_{1t} + a_{22}p_{2t} + \dots + a_{2g}p_{gt} + \varepsilon_{2t}, \\ \vdots \\ z_{mt} = a_{m1}p_{1t} + a_{m2}p_{2t} + \dots + a_{mg}p_{gt} + \varepsilon_{mt}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где матрица  $A \leftrightarrow a_{ij}$  называется матрицей факторной структуры размерности  $m \times g$  весовых коэффициентов. Где  $m$  — число изучаемых параметров,  $g$  — число общих факторов.

На вид факторной структуры  $A$  налагаются дополнительные ограничения:

— общности переменных факторной структуры должны быть не больше 1, а также не меньше определённого порога значимости:

$$h_i = \sqrt{\sum_{k=1}^g a_{ik}^2} \leq 1, \quad h_i \geq p; \quad (2)$$

— критерий оптимизации задаётся в следующем виде:

$$K = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^m \varepsilon_{kt}^2; \quad (3)$$

— минимизация критерия  $K$  и учёт дополнительных условий на вид факторной структуры приводит к оптимальному решению для варьируемых значений элементов факторной структуры  $a_{ij}$  и факторов  $p_{ij}$ .

Оптимизацию суммы квадратов невязок линейных уравнений факторной структуры как функций от независимых переменных матрицы факторной структуры и значений факторов с ограничениями предлагается осуществлять методом штрафных функций [4]. В качестве метода безусловной оптимизации метода штрафных функций был выбран метод конфигураций [5].

### Вычислительный алгоритм

Алгоритм построения линейной факторной модели:

1. Определение числа факторов числом  $g < m$ .
2. Определение начальных приближений матрицы  $A$  линейной части размерности  $m \times g$  и матрицы  $P$  значений факторов размерности  $g \times n$  случайными числами из диапазона  $[-1; 1]$ .
3. Минимизация критерия (3) суммы квадратов невязок структурных уравнений (1) как функций от независимых переменных матриц  $A$  факторной структуры и значений факторов  $P$  с ограничениями (2) методом штрафных функций и методом конфигураций.

## 2. Алгоритм восстановления пробелов данных

На базе метода штрафов возможно вычислить факторную структуру данных и восстановить пробелы данных:

1. Выявить пробелы данных.
2. Исключить из критерия невязок уравнений факторной модели уравнения объектов, соответствующие пробелам данных.
3. Выполнить оценку неизвестных параметров линейной факторной модели по методу штрафов как задачи оптимизации невязок модели.
4. После процедуры оценки матрицы факторной структуры и значений факторов у объектов по методу штрафов заменить значения переменных, соответствующие пробелам данных восстановленными значениями, минимизирующих невязки факторной модели.

### 3. Отбраковка грубых ошибок (проверка на однородность выборки)

Таблица экспериментальных данных может содержать грубые ошибки. Грубые ошибки могут быть следствием нарушения основных условий измерения, неправильного чтения показаний измерительного прибора, просчёта, неверной записи при внесении результата измерения в таблицу. Внешним признаком результата, содержащего грубую ошибку, является его резкое отличие по величине от результатов остальных измерений.

Для отбраковки грубых ошибок предлагается использовать следующий алгоритм:

1. Необходимо проверить, является ли выборка симметричной или нет.
2. Строится вариационный ряд:  $x'_1 \dots x'_n$  ( $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_{n-1} \leq x'_n$ ), где  $x'_i$  — элементы вариационного ряда, полученного из элементов  $x_i$  проверяемой выборки. Анализируются крайние элементы вариационного ряда.
3. Делается предположение, что элемент  $x'_n$  померен с грубой ошибкой.
4. Берётся для исследования выборка  $x'_1 \dots x'_{n-1}$ .  
По выборке  $x'_1 \dots x'_{n-1}$  строится интервал  $(\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x)$ , если выборка  $x'_1 \dots x'_{n-1}$  симметрична, или строится интервал  $(\bar{x} - 5S_x, \bar{x} + 5S_x)$ , если выборка  $x'_1 \dots x'_{n-1}$  несимметрична, где  $\bar{x}$  — выборочное математическое ожидание величин  $x_1 \dots x_n$ ,  $S_x$  — выборочное стандартное отклонение величин  $x_1 \dots x_n$ .
5. Если  $x'_n \in$  интервалу, то грубой ошибки нет.
6. Аналогично проверяется  $x'_1$ .
7. Если  $x'_n$  померен с грубой ошибкой, то он отбрасывается.  
Элемент  $x'_1$  рассматривается относительно выборки  $x'_2 \dots x'_{n-1}$ .
8. И т. д.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  — выборочное среднее.

$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  — выборочная дисперсия.

Выборка считается симметричной, если величина  $\delta = |h_x - \bar{x}| \leq 3 \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ , где

$h_x$  — медиана,

$$h_x = \begin{cases} 0.5 \cdot (x'_l + x'_{l+1}), & n = 2l; \\ x'_{l+1}, & n = 2l + 1. \end{cases}$$

#### 4. Численный эксперимент

В качестве исходных данных были взяты 38 биофизических показателей для 131 лица с артериальной гипертензией начальной стадии. Некоторые показатели из выборки:

- 1) *вес*,
- 2) *индекс массы тела (ИМТ)*,
- 3) *частота дыхания (ЧД)*,
- 4) *сегментоядерные нейтрофилы (С)*,
- 5) *лимфоциты (Л)*,
- 6) *конечно-систолический размер левого желудочка (КСР)*,
- 7) *конечно-систолический объём левого желудочка (КСО)*,
- 8) *конечно-диастолический размер левого желудочка (КДР)*,
- 9) *конечно-диастолический объём левого желудочка (КДО)*,
- 10) *ударный объём (УО)*,
- 11) *минутный объём сердца (МОС)*,
- 12) *общее периферическое сосудистое сопротивление (ОПСС)*,
- 13) *индекс Хильдебрандта (ИХ)*,
- 14) *фракция выброса левого желудочка (ФВ)*,
- 15) *фракция укорочения левого желудочка (ФУ)*.

Исходные данные содержали пробелы, соответствующие грубым ошибкам и выбросам из нормального распределения показателей.

С помощью алгоритма восстановления пробелов данных было выполнено предварительное исключение уравнений объектов факторной модели, соответствующих пробелам данных. Была проведена оценка неизвестных параметров линейной факторной модели. Количество факторов было выбрано по принципу «каменистой осыпи» независимого классического факторного анализа исходных данных. После вычисления факторной структуры пробелы данных были восстановлены.

Оказалось, что 65 % восстановленных пробелов, соответствующих алгоритму отбраковки грубых ошибок, оказались вне интервала минимальных и максимальных значений отдельных переменных. Тогда как только 35 % пробелов оказались в рамках таких интервалов. Данный факт можно интерпретировать как ошибочное определение грубых ошибок в виду рассмотрения независимых нормальных распределений отдельных переменных, а не многомерного нормального распределения. Скорее всего, лишь 35 % выявленных грубых ошибок оказались истинными.

Алгоритм, учитывающий многомерность распределения данных, не смог исправить 65 % грубых ошибок. То есть это были не грубые ошибки, а результат совместного однонаправленного воздействия со стороны различных факторов.

Такие выбросы из многомерного или части одномерных нормальных распределений являются естественным результатом однонаправленного воздействия различных факторов.

Оставшиеся 35 % выявленных грубых ошибок как выбросы из одномерных нормальных распределений оказались после восстановления в рамках нормального распределения, что свидетельствует о том, что это были истинные выбросы. То есть после восстановления эти выбросы оказались в рамках нормальных распределений. В то время как остальные 65 % остались вне нормальных распределений.

Всё это свидетельствует о том, что при оценке значений и проверке их на нормальное распределение или выбросы нельзя рассматривать независимо только это значение и этот показатель отдельно от других. В том числе нельзя утверждать, что такова организационная система показателей: в данном случае человек имеет плохую биологическую организацию и плохое функциональное состояние. Нарушение значений показателей из одномерного нормального распределения может быть результатом компенсационных функциональных процессов при воздействии однонаправленных негативных факторов.

Например, некоторые негативные факторы могут понемногу увеличиваться в одном скоординированном направлении, что может приводить к большим выбросам значений отдельных показателей, находящихся в функциональном взаимоотношении с данными факторами. Функциональное состояние — это система функций от значений показателей объекта, т. е. как должны изменяться показатели объекта при изменении других, например, возрастая или убывая.

Можно сделать вывод, что в данном численном эксперименте в множестве объектов лишь 35 % объектов имели нарушенное функциональное состояние или имели какую-либо ошибку в измерении показателей. Поэтому в диагностике объектов нельзя использовать один показатель, в данном случае это был показатель повышенного артериального давления. Такое повышенное артериальное давление может быть нормальным значением в виду скоординированного небольшого воздействия нескольких негативных факторов, вызывающих сильное отклонение от нормы данного показателя. Данные объекты при исключении вредных факторов должны показать улучшение значения отдельного диагностического показателя. Такая система в последствии будет продиагностирована как нормальная, поскольку изначально не имела нарушенного функционального взаимоотношения показателей. Её отдельные показатели придут в интервалы нормальных значений, если негативные факторы выйдут из скоординированного воздействия или сами потеряют свой негативный статус. Подобные функциональные системы или организмы и так были в норме или в индивидуальной норме. Они продолжают жить в рамках своих нормальных функциональных взаимоотношений. Помещённые в нормальные условия такие объекты должны продемонстрировать нормальные значения отдельных показателей. Поэтому можно рекомендовать нормальные условия существования для систем, и в случае обнаружения негативных факторов нивелировать их скоординированное негативное воздействие. Опасным представляется нормализация значений отдельных показателей без нормализации негативных факторов, по-

скольку в такой системе могут в дальнейшем проявиться различные нарушения функционального состояния, что в свою очередь может вывести всю систему из нормального функционирования, и система может начать распадаться на подсистемы, в которых ещё выполняется нормальное функциональное взаимоотношение показателей. В то же время не зависимые друг от друга подсистемы могут быть организованы вместе для выполнения определённых действий, для поддержания функционирования всего организма. Такого рода системы работают под действием внешней организующей силы либо существуют из-за работы подсистем. Чтобы снять нагрузку с организующей силы в системах, это перекладывается на функциональное взаимоотношение подсистем. В контексте медицины это означает, что в случае плохого функционального состояния необходимо поддержание всего организма и отдельных его функций с помощью постоянного лечения. В случае хорошего функционального состояния можно рекомендовать лечение по одновременному воздействию на группы показателей, соответствующих факторам заболевания. Устранить негативный статус факторов заболевания. Нарушить скоординированное воздействие таких факторов. Возможно, достаточно устранить всего один фактор риска.

## 5. Заключение

На базе метода штрафных функций и минимизации невязок уравнений факторной модели был разработан алгоритм восстановления пробелов данных. С помощью численного эксперимента была подтверждена работоспособность алгоритма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шовин В.А. Нелинейные структурные уравнения и квадратичный факторный анализ // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 51–61.
2. Иберла К. Факторный анализ / Пер. с нем. В.М. Ивановой; Предисл. А.М. Дуброва. М. : Статистика, 1980.
3. Харман Г. Современный факторный анализ / Пер. с англ. В.Я. Лумельского; Научное редактирование и вступительная статья Э.М. Бравермана. М. : Статистика, 1972.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 128 с.
5. Кокуев А.Г. Оптимальное управление. Поиск экстремумов многомерных функций. Астрахань : АГТУ, 2011. 34 с.

**FACTOR ANALYSIS FOR RESTORING DATA GAPS OF HYPERTENSION****V.A. Shovin**

Scientist Researcher, e-mail: v.shovin@mail.ru

Institute of Mathematics S.L. Soboleva of Siberian Branch of RAS  
(Omsk Branch), Omsk, Russia

**Abstract.** An algorithm for filling data gaps on the basis of restoring the vector of object indices from the factorial data structure, calculated with penalty method, is developed. Data gaps and the corresponding factor model equations for individual objects were not taken into account in the optimization criterion for residuals of the factor model equations. That allows to reliably estimate the values of data gaps. A numerical experiment confirming the operability of the algorithm is carried out and a program with an interface that allows the user to upload new data is created.

**Keywords:** factor analysis, penalty method, hypertension.

## REFERENCES

1. Shovin V.A. Nelineinye strukturnye uravneniya i kvadraticnyi faktorny analiz. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 2(46), pp. 51–61. (in Russian)
2. Iberla K. Faktorny analiz. Per. s nem. V.M. Ivanovoi, Predisl. A.M. Dubrova, Moscow, Statistika Publ., 1980. (in Russian)
3. Kharman G. Sovremennyi faktorny analiz. Per. s angl. V.Ya. Lumel'skogo, Nauchnoe redaktirovanie i vstupitel'naya stat'ya E.M. Bravermana, Moscow, Statistika Publ., 1972. (in Russian)
4. Bandi B. Metody optimizatsii. Vvodnyi kurs. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1988, 128 p. (in Russian)
5. Kokuev A.G. Optimal'noe upravlenie. Poisk ekstremumov mnogomernykh funktsii. As-trakhan', AGTU Publ., 2011, 34 p. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 10.12.2018*

## **DETECTING AT-RISK STUDENTS: EMPIRICAL RESULTS AND THEIR THEORETICAL EXPLANATION**

**Edgar Daniel Rodriguez Velasquez**

Doctoral Student, e-mail: edrodriguezvelasquez@miners.utep.edu

**Olga Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** In teaching, it is very important to identify, as early as possible, students who may be at risk of failure. Traditionally, two natural criteria are used for this identification: poor grades in previous classes, and poor grades on the first assignments in the current class. Our empirical results show that these criteria do not always work: sometimes a student deemed at-risk by one of these criteria consistently succeeds, and sometimes a student who is not considered at-risk frequently fails. In this paper, we provide a theoretical explanation of our quantitative empirical results, and we use these results to provide recommendations on how to better detect at-risk students.

**Keywords:** teaching, detecting at-risk students, predicting student grades.

### **1. Formulation of the Problem**

**How do we identify students that need more attention?** Instructors and teaching assistants have a limited amount of time to attend to (often a large number of) students. To spend this time wisely, it is important to identify at-risk students, students who need additional attention to succeed. How can we identify these students?

**How do we identify at-risk students before class starts: a natural idea.** Before the class starts, the only information that we have to identify at-risk students is their past performance. A good indication of the student's past performance is their average grade in previous classes (in the US, this average grade is called Grade Point Average, GPA for short). If this GPA is low, close to the failure level, it is reasonable to assume that the student is at risk of failure, and additional efforts need to be taken to help these students.

**Once the class started, what additional information can we use?** Once the course starts, we get the average grade from the first few assignments — and again, these average grades can serve as another indicator of at-risk students:

- if a student has been doing well so far, probably he or she does not need special attention;
- on the other hand, if the student's grades so far on the course's assignments, quizzes, and tests were low, this seems like a good indication that a student needs extra help.

**But is this indeed a reasonable strategy?** This may sound reasonable, but it is a good idea to check if this strategy indeed works.

**What we do in this paper.** In our previous research [10], we provided an empirical analysis of the above strategies. In this paper, we recall these results, describe a possible theoretical justification for these empirical results, and provide resulting pedagogical recommendations.

## 2. Empirical Results: Reminder

**What we did.** In [10], we studied student performance in several classes, including their starting grade and their final grade in each class.

**What we expected.** We expected that in most of the cases, both GPA in the previous classes and the average grade for first few assignments would be very good predictors for student's success.

This would mean that all our attention should be concentrated on students with low GPA and/or low performance in the first assignment, and we should not worry that much about other students.

**What we found out: somewhat disappointing news.** What we found out is that, surprisingly, overall, neither of two usual criteria is a good predictor of the student's success:

- the correlation between the student's success and GPA is low, and
- the correlation between the student's success in a class and the student's average grade for the first few class assignment is also very low.

At first glance, this sounds pessimistic: no way that we can predict the student's success with good accuracy and so, we cannot simply dismiss students who perform well so far as not needing our attention: they may be at risk as well.

**What we found out: interesting news.** However, a deeper analysis revealed an interesting phenomenon with respect to both correlations.

It turns out that for about a third of all students, their past GPA is a good predictor of the grade in the class. In other words, such students show steady performance, with a low standard deviation of grades from the average.

- Some of these students are straight-A students, maybe with a few B's.
- Some are straight-B students, usually with a few As and Cs.
- Some are straight-C students, with a few Bs and Ds.
- Some are straight-D students, with most grades Ds and fails.

For such students, predicting their success is easy:

- if the student's GPA was passing, we can be reasonably sure that the students will pass this class;

- otherwise, if the student's previous GPA was close to failing, then this student is clearly at-risk, and an additional attention needs to be paid to these students.

Thus is about the third of all students — students with steady performance. For the remaining two thirds of the students, there is no correlation between their GPA and grade in the class.

Similarly, with respect to relation between the preliminary grade in the class and final grade for the same class, there is a similar division:

- For about a third of the students, their initial performance in a class is a good predictor of the student's final grade.
- However, for the remaining two thirds of the students, based on the initial performance, we cannot meaningfully predict their final grade.

Based on two criteria, we have two classes of “predictable” students:

- students whose success in the class can be predicted based on their GPAs, and
- students whose success in the class can be predicted based on their performance in the first weeks of the class.

Each group contains about a third of all the students. These two groups intersect: for some students, their performance in the class can be predicted *both* based on GPA and on their initial performance in the class.

Overall about half of the students are, in this sense, predictable. For the other half, we cannot predict the student's success.

### 3. Theoretical Explanation of the Empirical Results

**Why 1/3: analysis of the problem and the resulting justification.** In general, there is a low positive correlation between the final grade for the class and the average grade on the first few assignments. What is a natural way to describe this “low” in precise numerical terms?

Intuitively, the use the word “low” means that we consider two possible values of the positive correlation: low and high. We would like to assign numerical values  $\ell$  and  $h$  to these words. The only limitation is that  $0 < \ell < h < 1$ . Out of many pairs  $(\ell, h)$  that satisfy this inequality, which pair should we choose?

We have no reason to believe that some such pairs are more probable than others. Thus, it is reasonable to assume that all these pairs are equally probable, i.e., that we have a uniform distribution on the set of such pairs. If we want to select a single pair, it is therefore reasonable to select the mean value of  $(\ell, h)$  under this distribution. It is known — see, e.g., [1–9] — that this mean corresponds to  $\ell = 1/3$  and  $h = 2/3$ . So, low correlation corresponds to  $1/3$ .

This explains why in both cases, we get good predictability for  $1/3$  of the students.

**Why 1/2: analysis of the problem and the resulting justification.** In the previous subsection, we argued that it is reasonable to interpret low correlation between, e.g., the GPA and the grade for a class as correlation of  $1/3$ . Similarly,

we can argue that since the correlation between the GPA and the average of the first grades is also low, we should also describe it by a numerical value of  $1/3$ .

We now have two events:

- predictability by GPA (we will denote it by  $A$ ) and
- predictability by the average of the first few grades in a class (we will denote it by  $B$ ).

We know that the probability  $P(A)$  of  $A$  is  $p = 1/3$ , the probability  $P(B)$  of  $B$  is also  $1/3$ , and the correlation  $r$  between  $A$  and  $B$  is also equal to  $1/3$ . What is then the probability  $P(A \vee B)$  that for a random selected student, his/her final grade in the class can be predicted based either on the student's GPA or on the student's average grade for the few class assignments?

By definition, the correlation  $r$  between two random variables  $x$  and  $y$  is equal to

$$r = \frac{E[x \cdot y] - E[x] \cdot E[y]}{\sigma[x] \cdot \sigma[y]},$$

where  $E[\cdot]$  means the mean value and  $\sigma[\cdot]$  means standard deviation; see, e.g., [11].

In our case:

- $x$  is a random variable which is equal to 1 if  $A$  holds and 0 otherwise, and
- $y$  is a random variable which is equal to 1 if  $B$  holds, 0 otherwise.

Since each of the events  $A$  and  $B$  has probability  $p = 1/3$ , we can conclude that  $E[x] = E[y] = p$ . Here, the product of  $x$  and  $y$  is different from 0 only if both values  $x$  and  $y$  are different from 0, i.e., when both events  $A$  and  $B$  occurred, so  $E[x \cdot y] = P(A \& B)$ .

Here,

$$\sigma^2[x] = E[(x - E[x])^2] = p \cdot (1 - p)^2 + (1 - p) \cdot p^2 = p \cdot (1 - p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Thus,  $\sigma[x] = \sigma[y] = \sqrt{2/9}$ . Thus, the above formula for  $r$  takes the form

$$\frac{1}{3} = \frac{P(A \& B) - 1/9}{\sqrt{2/9} \cdot \sqrt{2/9}} = \frac{P(A \& B) - 1/9}{2/9}.$$

Thus,

$$P(A \& B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{27} + \frac{3}{27} = \frac{5}{27}.$$

By additivity, we always have

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \& B),$$

thus

$$P(A \vee B) = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{27} = \frac{18}{27} - \frac{5}{27} = \frac{13}{27}.$$

This is very close to the empirical value of  $1/2$ . Thus, we have indeed provided a theoretical justification for this empirical value.

#### 4. Towards Resulting Recommendations

**Before the class starts: analysis of the problem.** Before the class starts, we need to check, for each student, whether he/she belongs to the one-third of predictable by GPA. To decide on this, we need to check, e.g., on the standard deviation of all the student's previous grades.

Usually, in the US, we use letter grades. Specifically, the original 0 to 100 numerical grade is transformed into one of the few letter grades: A for excellent, B for good, C for satisfactory, D for probably passing, and F for failing. In computing the GPA, these grades are assigned the following numerical values: A is 4, B is 3, C is 2, D is 1, and F is 0. Of course, if we only use these 0 to 4 grades, we lose a lot of information, so it is better to get and use the original 0-to-100 grades.

For each student, based on his/her previous class grades, we will find the standard deviation.

- If this standard deviation is low, then we can safely predict the student's grade in the course based on his/her GPA.
- Otherwise, we cannot make this prediction.

What threshold should we use? Since about one third is predictable this way, a natural idea is to sort all these standard deviations, and consider those in the lower third predictable-by-GPA.

Thus, we arrive at the following recommendation.

**Before the class starts: resulting recommendation.** In the beginning, when we do not know anything about the students, any of them can be at-risk.

Before the class starts, to decrease the number of potential at-risk students, we collect, for each student, his/her 0-to-100 grade in all previous classes. Based on these grades, we compute the mean grade and the standard deviation corresponding to this student.

We then sort all the standard deviations, and consider students from the lower third. Those of these lower-third students whose mean grade in previous classes is C or better are clearly not at-risk, so they should be excluded from the list of possible at-risk students.

**After the first few grades: analysis of the problem.** First, we need to check, for each student from the class, whether this student belongs to the one-third of predictable-by-first-grades. To decide on this, we need to check, e.g., whether there is a correlation in the previous classes between the average grade on the first several assignments in each class and the final grade for the same class.

For this purpose, we need to know not only the student's 0-to-100 final grades in all previous classes, we also need to know, for each of these previous classes, the student's average of the first 0-to-100 grades in this class.

Based on this information, we can compute, for each student, the correlation between the average of the first few grades and the final grade for the corresponding class.

- If this standard correlation is high, then we can safely predict the student's final grade in the course based on his/her average grade from the first few assignments.

- Otherwise, we cannot make this prediction.

What threshold should we use? Since about one third is predictable this way, a natural idea is to sort all these correlations, and consider those in the upper third predictable-by-first-grades.

Thus, we arrive at the following recommendation.

**After the first few grades: resulting recommendation.** Before the class starts, for each student and for each class that this student attended, we collect, in addition to the student's 0-to-100 final grade for this class, an average of the 0-to-100 grades for the first several assignments. Based on this information, we compute, for each student, the correlation between the final grade and the average-of-first grades.

We then sort all the resulting correlations, and consider students from the upper third. Those of these upper-third students whose average on the first few grades in this class is C or better are clearly not at-risk, so they should be excluded from the list of possible at-risk students.

The resulting list — consisting of slightly more than half students — contains everyone who can potentially be at risk.

## Acknowledgments

This work was partially supported by the US National Science Foundation via grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. Ahsanullah M., Nevzorov V.B. and Shakil M. An Introduction to Order Statistics. Atlantis Press, Paris, 2013.
2. Arnold B.C., Balakrishnan N. and Nagaraja H.N. A First Course in Order Statistics. Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pennsylvania, 2008.
3. David H.A. and Nagaraja H.N. Order Statistics. Wiley, New York, 2003.
4. Kosheleva O., Kreinovich V., Lorkowski J. and Osegueda M. How to transform partial order between degrees into numerical values. Proceedings of the 2016 IEEE International Conferences on Systems, Man, and Cybernetics SMC'2016, Budapest, Hungary, October 9–12, 2016.
5. Kosheleva O., Kreinovich V., Osegueda Escobar M. and Kato K. Towards the most robust way of assigning numerical degrees to ordered labels, with possible applications to dark matter and dark energy. Proceedings of the 2016 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS'2016, El Paso, Texas, October 31 – November 4, 2016.
6. Lorkowski J. and Kreinovich V. Interval and symmetry approaches to uncertainty — pioneered by Wiener — help explain seemingly irrational human behavior: a case study. Proceedings of the 2014 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS'2014, Boston, Massachusetts, June 24–26, 2014.

7. Lorkowski J. and Kreinovich V. Likert-type fuzzy uncertainty from a traditional decision making viewpoint: how symmetry helps explain human decision making (including seemingly irrational behavior). *Applied and Computational Mathematics*, 2014, vol. 13, no. 3, pp. 275–298.
8. Lorkowski J. and Kreinovich V. Granularity helps explain seemingly irrational features of human decision making. In: W. Pedrycz and S.-M. Chen (eds.), *Granular Computing and Decision-Making: Interactive and Iterative Approaches*, Springer Verlag, Cham, Switzerland, 2015, pp. 1–31.
9. Lorkowski J. and Kreinovich V. Fuzzy logic ideas can help in explaining Kahneman and Tversky's empirical decision weights. In: L. Zadeh et al. (Eds.), *Recent Developments and New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications*, Springer Verlag, to appear.
10. Rodriguez E. and Chang G. Expected academic performance in a lower level undergraduate structural course. In: A. İşman and A. Eskiculami (eds.), *Proceedings of the Joint 2017 International Conference on New Horizons in Education (INTE), International Distance Education Conference (IDEC), and International Trends and Issues in Communication & Media Conference (ITICAM)*, Berlin, Germany, July 17–19, 2017, pp. 1323–1331.
11. Sheskin D.J. *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2011.

## ВЫЯВЛЕНИЕ ПОДВЕРЖЕННЫХ РИСКУ СТУДЕНТОВ: ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ

**Э.Д. Родригес Веласкес**

докторант, e-mail: edrodriguezvelasquez@miners.utep.edu

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

**Аннотация.** При обучении очень важно как можно раньше выявлять студентов, которые могут быть подвержены риску провала. Традиционно для этой идентификации используются два естественных критерия: плохие оценки за предыдущие дисциплины и плохие оценки за первые задания в текущей дисциплине. Наши эмпирические результаты показывают, что эти критерии не всегда работают: иногда учащиеся, которые считаются подверженными риску по одному из этих критериев, стабильно преуспевают, а иногда учащийся, который не считается подверженным риску, часто терпит неудачу. В этой статье мы даем теоретическое объяснение наших количественных эмпирических результатов, и мы используем эти результаты, чтобы предоставить рекомендации о том, как лучше выявлять учащихся из группы риска.

**Ключевые слова:** обучение, выявление подверженных риску студентов, прогнозирование оценок учащихся.

*Дата поступления в редакцию: 02.12.2018*

## **МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ СИНХРОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ И ЗАДАЧИ ИХ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Н.С. Коваленко**

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: kovalenkons@rambler.ru

Белорусский государственный экономический университет, Минск,  
Республика Беларусь

**Аннотация.** Предлагается модель организации выполнения синхронных процессов в рамках которой получены математические соотношения и формулы, позволяющие проводить расчёты оптимального соотношения числа каналов обмена и процессоров с учётом объёмов вычислений, решаются задачи минимизации времени непроизводительных простоев процессоров и каналов, оптимизации числа блоков обмена и счёта, при котором достигается минимальное значение общего времени выполнения всех процессов. Это, в свою очередь, является отправной точкой при разработке системных и прикладных программ.

**Ключевые слова:** многопроцессорные системы, процессоры, каналы обмена, синхронные процессы, задачи оптимизации.

### **Введение**

Развитие вычислительного дела стратегически связано с параллельными вычислениями, так как это не только основной источник появления новых архитектурных решений и роста производительности вычислительных средств различного назначения, их надёжности и достижения требуемой точности результатов, но и источник принципиально новых математических проблем, в частности, синхронизации большого числа одновременно протекающих и взаимодействующих процессов, распараллеливания известных и создания принципиально новых алгоритмов, автоматизации процесса распараллеливания программ, их конструирования и оптимизации, разработки и математического обоснования новых (параллельных) операторов для языков программирования. Работа связана с проблемой отображения методов и алгоритмов на современные архитектуры вычислительных средств обработки информации и посвящена разработке способов реализации одновременно протекающих процессов, конкурирующих за использование ресурсов многократного применения (процессоры, память разных уровней, каналы и т. п.) [1, 2]. Анализ показывает, что общее время реализации заданных объёмов вычислений в многопроцессорных системах (МС) существенно зависит от соотношения длительностей операций счёта и обмена,

порядка выполнения и количества блоков счёта и обмена, наличия достаточного числа каналов и др. [3, 4].

Соответствующие задачи будем рассматривать в следующей постановке. Пусть МС характеризуется следующими параметрами:  $p$  — число процессоров ( $p \geq 2$ ), каждый из которых имеет собственную локальную память;  $m$  — число каналов ( $m \geq 1$ ), через которые процессоры имеют доступ к общей внешней памяти. Предполагается, что в МС одновременно выполняются  $p$  процессов, причём каждый из них состоит из  $2s$  ( $s \geq 1$ ) блоков, которые периодически повторяются в порядке: обмен, счёт. Заданы также времена обменов  $(t_1, t_2, \dots, t_s)$  и времена счёта  $(T_1, T_2, \dots, T_s)$ . Предполагается, что число каналов ограничено ( $m \leq p$ ), т. е. процессы конкурируют за использование каналов. Взаимодействие процессов с процессорами и каналами будет характеризоваться следующими условиями:

- 1) одновременно готовы к выполнению  $p$  процессов;
- 2) в каждый момент времени  $m$  процессов из  $p$  выполняются синхронно, без ожиданий, остальные в очереди ждут освобождения каналов;
- 3) во время счёта процесс монополизирует один и тот же процессор, во время обмена — канал;
- 4) очередной  $j$ -й блок счёта на каждом процессоре выполняется только после завершения соответствующего  $j$ -го блока обмена, а каждый  $(j + 1)$ -й блок обмена выполняется после завершения  $j$ -го блока счёта;
- 5) времена обменов  $(t_1, t_2, \dots, t_s)$  и времена счёта  $(T_1, T_2, \dots, T_s)$  предполагаются одинаковыми для всех процессов.

Кроме того, процессы считаются равно приоритетными, а режим работы каналов является циклическим.

Схема взаимодействия синхронных процессов, процессоров и каналов представлена ниже на рисунке 1 в виде линейных диаграмм, на которых изображены две соседние диаграммы, соответствующие  $j$ -му и  $(j + 1)$ -му блокам обмена и счёта. Здесь  $m$  — число каналов,  $p$  — число процессоров,  $t_j, t_{j+1}$  — времена обменов двух соседних блоков, а  $T_j, T_{j+1}$  — времена счёта этих же блоков,  $j = \overline{1, s-1}$ .

## 1. Общее время выполнения синхронных процессов

Общее время выполнения  $p$  процессов, использующих  $m$  каналов, обозначим через  $T_p(m)$ . Заметим, что при  $m \geq p$  в рамках принятой модели вычислений общее время выполнения  $p$  процессов  $T_p(p)$  составит величину

$$T_p(p) = \sum_{j=1}^s (t_j + T_j).$$

Если окажется, что  $m > p$ , то  $m - p$  каналов не будут задействованы.

Из физических соображений наибольший интерес представляет случай, когда число каналов ограничено, т. е.  $m \ll p$ , и  $p = km$ , где  $k > 1$  — целое число. Для нахождения общего времени выполнения  $p$  процессов  $T_p(m)$  при  $p = km$ ,  $k > 1$ , всё множество из  $p$  процессов разобьём на  $k$  групп по  $m$  процессов

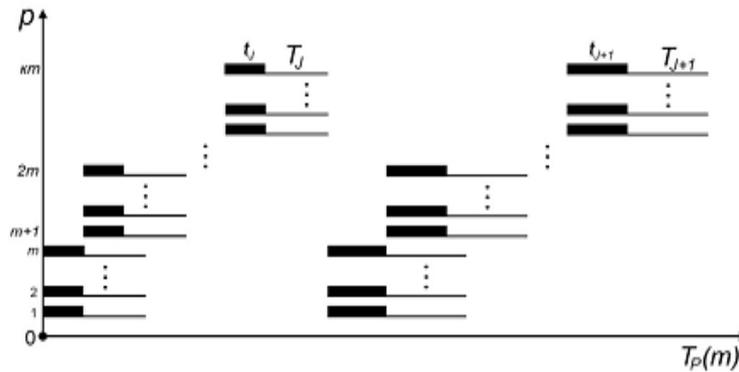


Рис. 1. Линейная несовмещённая диаграмма взаимодействия двух соседних блоков обмена и счёта

так, что  $m$  процессов в каждой группе будут выполняться строго синхронно. Это возможно в силу условий 1) – 5) и циклического режима работы каналов. Тогда при вычислении  $T_p(m)$  достаточно учитывать только по одному процессу из одновременного (параллельного) выполнения  $m$  блоков обмена и  $p$  блоков каждой группы. Далее отобразим взаимодействие  $p = km$ ,  $k > 1$ , процессов на  $p$  процессорах с учётом одновременного (параллельного) выполнения  $m$  блоков обмена и  $p$  блоков счёта и их конвейеризации по процессорам и каналам соответственно в виде прямоугольной вершинно-взвешенной сети специального вида  $G_k$ . Сеть  $G_k$  полностью определяется матрицей весов вершин  $\theta_{3 \times s}$ , которая имеет вид:

$$\theta_{3 \times s} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1j} & \dots & \theta_{1s} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \dots & \theta_{2j} & \dots & \theta_{2s} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \dots & \theta_{3j} & \dots & \theta_{3s} \end{bmatrix},$$

где  $\theta_{11} = 0$ ,  $\theta_{1j} = \max_{2 \leq j \leq s} \{kt_{j-1}, t_{j-1} + T_{j-1}\}$ ,  $j = \overline{2, s}$ ,  $\theta_{2j} = (k-1)t_j$ ,  $\theta_{3j} = t_j + T_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

Ниже приведена таблица 1, содержащая веса вершин сетевого графа  $G_k$ .

Таблица 1. Веса вершин сетевого графа

	1	2	...	$j$	...	$s$
1	0	$\max[(kt_1, t_1 + T_1)$	...	$\max(kt_{j-1}, t_{j-1} + T_{j-1})$	...	$\max(kt_{s-1}, t_{s-1} + T_{s-1})$
2	$(k-1)t_1$	$(k-1)t_2$	...	$(k-1)t_j$	...	$(k-1)t_s$
3	$t_1 + T_1$	$t_2 + T_2$	...	$t_j + T_j$	...	$t_s + T_s$

С учётом приведённых выше условий общее время выполнения  $p$  процессов  $T_p(m)$ , использующих  $m$  каналов, будет определяться по формуле

$$T_p(m) = T_{\text{крит.}}(\theta_{11}, \theta_{3s}) + \sigma. \quad (1)$$

Здесь  $T_{\text{крит.}}(\theta_{11}, \theta_{3s})$  — длина критического пути из вершины (1, 1) в вершину (3, s) сети  $G_k$ , величина  $\sigma = \sum_{j=1}^{s-2} \max\{0, T_j - (k-1)t_{j+1}\}$  представляет собой суммарные «пролёживания» блоков обмена из-за занятости каналов при условии, что времена выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют соотношениям  $t_j \leq T_j, j = \overline{1, s}$ .

Для вычисления величины критического пути  $T_{\text{крит.}}(\theta_{11}, \theta_{3s})$ , которая входит составной частью в формулу (1), в практических приложениях можно также воспользоваться следующей явной формулой:  $T_{\text{крит.}}(\theta_{11}, \theta_{3s}) = \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u \max(k_{j-1}, t_{j-1} + T_{j-1}) + (k-1)t_u + \sum_{j=u}^s (t_j + T_j) \right], t_0 = T_0 = 0$ . Справедливость формулы проверяется индукцией по  $s$ . Трудоёмкость вычислений по формуле составляет  $O(s)$  операций.

Если времена выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют соотношениям  $t_j \geq T_j$ , то величина

$$T_p(m) = k \sum_{j=1}^s t_j + T_s + \sum_{j=1}^{s-1} \max\{0, T_j - (k-1)t_{j+1}\}. \quad (2)$$

Если же длительности времён выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют неравенствам  $T_j \geq (k-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j$ , то имеет место формула

$$T_p(m) = \sum_{j=1}^s (t_j + T_j) + (k-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j. \quad (3)$$

Введём также в рассмотрение величину общего времени простоев каждого процессора из-за ограниченного числа каналов обмена

$$\Delta(m) = T_p(m) - T_p(p). \quad (4)$$

Тогда если времена выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют соотношениям  $t_j \leq T_j, j = \overline{1, s}$ , или  $T_j \geq (k-1)t_{j+1}, j = \overline{1, s-1}$ , то величина

$$\Delta(m) = \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u \max\{(k-1)t_{j-1} - T_{j-1}, 0\} + (k-1)t_u \right], t_0 = T_0 = 0.$$

Если же длительности времён выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют неравенствам  $T_j \geq (k-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j$ , то  $\Delta(m) = (k-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j$ . При организации выполнения конкурирующих процессов в условиях ограниченного числа каналов возможны также вынужденные задержки блоков обмена (так называемые «пролёживания» блоков обмена, при их готовности к выполнению) из-за занятости процессоров счётом предыдущих блоков. Тогда суммарные вынужденные «пролёживания» блоков обмена  $\sigma$  составят величину

$\sigma = \sum_{j=1}^{s-2} \max \{0, T_j - (k-1)t_{j+1}\}$ . Однако следует заметить, что если длительности времён выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют неравенствам  $T_j \geq (k-1)t_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, s-1}$  и  $T_j \geq (k-1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j$ , то величина  $\sigma = 0$ .

Анализ приведённых выше формул для нахождения значений  $\Delta(m)$  и  $\sigma$  показывает, что в условиях дефицита каналов величины суммарных простоев процессоров и вынужденных «пролёживаний» блоков обмена во многом зависят от соотношения их длительностей между собой.

## 2. Задача балансировки числа каналов и процессоров

Задачу об оптимальной балансировке числа каналов обмена и процессоров изучим на классе стационарных процессов. Процесс будем называть *стационарным*, если времена выполнения блоков обмена и счёта удовлетворяют условиям  $T_1 = T_2 = \dots = T_s = T$ ,  $t_1 = t_2 = \dots = t_s = t$ . Для класса стационарных процессов из формул (1) – (4) и соотношений для нахождения величин  $\Delta(m)$  имеют место следствия.

**Следствие 1.** Для класса стационарных процессов общее время выполнения  $p$  процессов  $T_p^{cm.}(m)$ , конкурирующих за использование  $m$ ,  $m > 1$ , каналов обмена при  $p = km$ , где  $k > 1$ , составляет величину

$$T_p^{cm.}(m) = \begin{cases} kst + T, & \text{если } (k-1)t \geq T; \\ (k+s-1)t + sT, & \text{если } (k-1)t \leq T. \end{cases}$$

**Следствие 2.** Для класса стационарных процессов общее время простоев  $\bar{\Delta}(m)$  каждого процессора из-за ограниченного числа каналов обмена составляет величину  $\bar{\Delta}(m) = \begin{cases} (k-1)st - (s-1)T, & \text{если } (k-1)t \geq T; \\ (k-1)t, & \text{если } (k-1)t \leq T. \end{cases}$

На практике значительный интерес представляет задача нахождения минимального числа каналов обмена, обеспечивающих реализацию заданных объёмов вычислений с минимальными простоями процессоров из-за занятости каналов. Ответ даёт следующая теорема.

**Теорема 1.** Минимальное число каналов обмена  $m_0$ , необходимых для выполнения  $p$ ,  $p \geq 2$ , стационарных процессов при заданных  $T, t$  с минимальными простоями, определяется из соотношения  $m_0 = \frac{p}{1 + T/t}$ . Здесь  $[\alpha]$  — целая часть числа  $\alpha$ .

*Доказательство.* В силу следствия 2 величина минимальных простоев процессоров и, следовательно, ожиданий процессов равна одному из значений  $(k-1)t$ , если  $(k-1)t \leq T$  или  $(k-1)st - (s-1)T$ , если  $(k-1)t \geq T$ . Тогда имеет место следующее соотношение  $(k-1)st - (s-1)T = (k-1)t$ . Из последнего равенства после несложных преобразований получаем  $k-1 = T/t$ . Откуда с учётом условия  $p = km$ ,  $k > 1$ , и следует формула из теоремы. ■

Рассмотрим несколько характерных случаев, которым могут удовлетворять времена счёта и обмена для класса стационарных процессов.

Пусть времена счёта и обмена удовлетворяют условию  $T = \alpha t$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда в силу теоремы 1 справедливо следствие 3.

**Следствие 3.** Минимальное число каналов обмена  $m_0$ , необходимых для выполнения  $p$ ,  $p \geq 2$ , стационарных процессов при заданных  $T = \alpha t$ ,  $\alpha > 0$ , с минимальными простоями, определяется из соотношения  $m_0 = \left\lceil \frac{p}{1 + \alpha} \right\rceil$ .

Пусть далее времена счёта и обмена удовлетворяют условию  $T = \alpha t^2$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда в силу теоремы 1 справедливо следствие 4.

**Следствие 4.** Минимальное число каналов обмена  $m_0$ , необходимых для выполнения  $p$ ,  $p \geq 2$ , стационарных процессов при заданных  $T = \alpha t^2$ ,  $\alpha > 0$ , с минимальными простоями, определяется из соотношения  $m_0 = \left\lceil \frac{p}{1 + \alpha t} \right\rceil$ .

### 3. Задача минимизации числа блоков

Будем предполагать, что в рамках введённой выше модели макроконвейерной организации вычислений взаимодействие процессоров, каналов обмена и процессов заданы следующие величины:  $\alpha = \sum_{j=1}^n t_j$  — суммарное время обменов и  $\beta = \sum_{j=1}^n T_j$  — суммарное время счёта ( $\alpha, \beta > 0$ ,  $s \geq 1$ ). Предполагается также, что длительности времён счёта и обмена удовлетворяют неравенствам

$$T_j \geq (k - 1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j. \tag{5}$$

Тогда в силу формул (2) и (3) имеет место теорема 2.

**Теорема 2.** Если времена счёта и обмена удовлетворяют условиям (5) и заданы величины  $\alpha = \sum_{j=1}^n t_j$  и  $\beta = \sum_{j=1}^n T_j$ , то для каждого фиксированного  $s$  минимальное значение  $T_p(m)$  достигается на классе процессов, времена обмена которых удовлетворяют условиям  $t_j = \alpha/s$ ,  $j = \overline{1, s}$ , а само минимальное значение общего времени

$$\overline{T}_p(m) = \alpha + \beta + (k - 1) \alpha/s. \tag{6}$$

*Доказательство.* В силу условий теоремы и с учётом (5), для вычисления величины  $T_p(m)$  имеет место следующая формула:  $T_p(m) = \alpha + \beta + (k - 1) \max_{1 \leq j \leq s} t_j$ .

Пусть времена обменов удовлетворяют условиям  $t_j = \alpha/s$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Тогда из предыдущего соотношения для вычисления  $T_p(m)$  имеет место формула (2).

Покажем далее, что величина  $\overline{T}_p(m) \leq T_p(m)$ . Рассмотрим разность  $T_p(m) - \overline{T}_p(m) = (k - 1) \left( \max_{1 \leq j \leq s} t_j - \alpha/s \right)$  и покажем, что она не может быть

отрицательной. Действительно, относительно правой части последнего соотношения имеет место неравенство  $(k-1) \left( \max_{1 \leq j \leq s} t_j - \alpha/s \right) \geq 0$ , так как  $\max_{1 \leq j \leq s} t_j \geq \sum_{j=1}^n t_j / s$ . ■

Введём в рассмотрение следующие параметры:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  — времена дополнительных затрат (накладные расходы) на организацию параллельного выполнения каждого из блоков обмена и счёта соответственно. Тогда в силу теоремы 2 имеет место следствие.

**Следствие 5.** Если времена счёта и обмена удовлетворяют условиям (5) и заданы величины  $\alpha = \sum_{j=1}^n t_j$  и  $\beta = \sum_{j=1}^n T_j$ , а также  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , то величина  $T_p(m)$  общего времени определяется по формуле

$$T_p(m) = \alpha + \beta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) s + (k-1) \varepsilon_1 + (k-1) \alpha / s. \quad (7)$$

Докажем далее следующую теорему, из которой следует решение задачи об оптимальном числе блоков  $s_0$ , при котором достигается минимальное значение общего времени выполнения всех  $p$  процессов.

**Теорема 3.** Если времена счёта и обмена удовлетворяют условиям (5) и заданы величины  $\alpha = \sum_{j=1}^n t_j$  и  $\beta = \sum_{j=1}^n T_j$ , а также  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , то величина минимального значения  $T_p(m)$  достигается на классе процессов, величина обменов которых удовлетворяет условиям  $t_j = \alpha / s_0$ ,  $j = \overline{1, s}$ , где  $s_0$  выбирается из двух чисел  $\{s_1, s_1 + 1\}$  по условию наименьшего значения функции  $T_p(m)$ , причём  $s_1 = \max \left\{ 1, \left[ \sqrt{\frac{(k-1)\alpha}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \right] \right\}$ . Здесь  $[x]$  означает наибольшее целое число не превосходящее  $x$ .

*Доказательство.* В (7) заменим  $s$  на  $x$  и введём в рассмотрение функцию действительного аргумента  $f(x) = \alpha + \beta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x + (k-1)\varepsilon_1 + (k-1)\frac{\alpha}{x}$ ,  $x \geq 1$ .

Покажем, что точка  $x = \sqrt{\frac{(k-1)\alpha}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$  является точкой локального минимума функции  $f(x)$ . Очевидно, что первая производная  $f'(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (k-1)\frac{\alpha}{x^2}$ .

Из равенства  $f'(x) = 0$  получим стационарную точку  $x = \sqrt{\frac{(k-1)\alpha}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$ . Далее  $f''(x) = \frac{2(k-1)\alpha}{x^3} > 0$ , так как  $k > 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 1$ . Следовательно,

$x_* = x = \sqrt{\frac{(k-1)\alpha}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$  является точкой локального минимума функции  $f(x)$ . Целочисленные точки, в которых достигается наименьшее значение  $T_p(m)$ , будут  $s = [x_*]$  или  $s = [x_*] + 1$ . Тогда в качестве  $s_0$  можно выбрать одно из чисел  $\{s_1, s_1 + 1\}$ , где  $s_1 = [x_*]$ . Если же окажется, что ни одна из точек  $\{s_1, s_1 + 1\}$  не принадлежит  $[2, p]$ , то  $s_0 = 1$ . Последнее означает, что минимальное значение общего времени выполнения всех  $p$  процессов достигается только при условии, что каждый из  $p$  процессов состоит из одного блока. ■

## Заключение

Построенная модель и проведённый анализ позволяют непосредственно проводить расчёты оптимального соотношения числа каналов обмена и процессов с учётом объёмов вычислений, минимизировать время непроизводительных простоев процессоров и каналов в МС, получить решение задачи об оптимальном числе блоков обмена и счёта  $s_0$ , при котором достигается минимальное значение общего времени выполнения всех  $p$  процессов. Это, в свою очередь, может послужить отправной точкой при разработке системного и прикладного программного обеспечения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин Вл.В. Распределённая обработка данных // Вторая сибирская школа-семинар по параллельным вычислениям: сб. науч. тр. ТГУ, 2004. С. 3–9.
2. Топорков В.В. Модели распределённых вычислений. М. : Физматлит, 2004. 320 с.
3. Коваленко Н.С., Павлов П.А. Математическое моделирование параллельных процессов. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, Saarbrücke.n, Germany, 2011. 246 с.
4. Коваленко Н.С. Макроконвейерная реализация асинхронных конкурирующих процессов при ограниченном числе каналов обмена // Кибернетика и системный анализ. 1998. № 5. С. 150–158.

## MODEL OF SYNCHRONOUS PROCESSES IN MULTIPROCESSOR SYSTEMS AND TASKS OF THEIR OPTIMIZATION

**N.S. Kovalenko**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: kovalenkons@rambler.ru

Belarusian State Economic University, Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** Proposed model of synchronous processes in which mathematical formulas and ratios that allow calculations of optimum ratio of Exchange processors and channel light amounts of computations, solve Xia task of minimizing time unproductive downtime CPUs and channels, optimizing the number of blocks and Exchange accounts, where the minimum value of the total execution time of all processes is reached. This, in turn, is the starting point when designing the system and applications.

**Keywords:** multiprocessor systems, processors, peering, synchronous processes, optimization problems.

## REFERENCES

1. Voevodin Vl.V. Raspredeleonnaya obrabotka dannykh. Vtoraya sibirskaya shkola-seminar po parallel'nym vychisleniyam: sb. nauch. tr., TGU Publ., 2004, pp. 3–9. (in Russian)

2. Toporkov V.V. Modeli raspredelennykh vychislenii. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 320 p. (in Russian)
3. Kovalenko N.S. and Pavlov P.A. Matematicheskoe modelirovanie parallel'nykh protsessov. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, Saarbrucke.n, Germany, 2011, 246 p. (in Russian)
4. Kovalenko N.S. Makrokonveiernaya realizatsiya asinkhronnykh konkuriruyushchikh protsessov pri ogranichennom chisle kanalov obmena. Kibernetika i sistemnyi analiz, 1998, no, 5, pp. 150–158. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 10.10.2017*

## **РАНЖИРОВАНИЕ ПОЛНОМОЧИЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИИ РОЛЕЙ В МОДЕЛЯХ РАЗГРАНИЧЕНИЯ ДОСТУПА**

**Н.Ф. Богаченко**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

**А.В. Филиппова**

студент, e-mail: afelia96@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Для оценки вероятности утечки полномочий в ролевой политике разграничения доступа введено понятие «уровень критичности полномочия». Сформулированы постулаты, определяющие зависимость уровней критичности полномочий от структуры ролевой иерархии. Предложена методика (метод и алгоритм) автоматического расчёта уровней критичности полномочий, использующая метод анализа иерархий. Проведён вычислительный эксперимент, выявляющий зависимость уровня критичности полномочия от настраиваемого параметра алгоритма. Настраиваемый параметр позволяет регулировать влияние постулатов на результаты вычислений.

**Ключевые слова:** роли, полномочия, избыточность, уровень критичности, метод анализа иерархий.

### **Введение**

Ролевое разграничение доступа получило широкое применение во многих современных компьютерных системах. Преимуществами ролевого подхода являются разделение обязанностей, простота администрирования (например, при переназначении пользователю полномочий) и применение иерархии ролей. Модель иерархической организации множества ролей предполагает соблюдение следующих правил:

- 1) каждая роль наследует полномочия подчинённых ей ролей согласно заданной иерархии;
- 2) пользователь, авторизованный на некоторую роль, авторизуется и на все роли, подчинённые данной [1].

Управление разграничением доступа в компьютерной системе, в том числе и на основе концепции ролей, должно включать в себя как стадию разработки — проектирование и реализация политики разграничения доступа, так и стадию реконструкции — администрирование, анализ и оптимизация. В свою очередь, анализ реализованной модели разграничения доступа заключается в оценке рисков информационной безопасности. Согласно [2], риск информационной безопасности — это оценка возможного ущерба, наносимого организации

либо активу в результате реализации некоторой угрозы. Основным способом оценки рисков заключается в сочетании вероятности события и его последствий:

$$R(V, T) = P(V, T) \cdot I(T), \quad (1)$$

где  $P(V, T)$  — вероятность реализации угрозы  $T$  через заданную уязвимость  $V$  (для двухфакторного способа оценки рисков) или произведение вероятностей реализации угрозы  $T$  и использования уязвимости  $V$  (для трёхфакторного способа оценки рисков),  $I(T)$  — ущерб от реализации угрозы  $T$  [3]. Основной сложностью при решении задач количественной оценки рисков информационной безопасности является качественный характер большинства показателей, влияющих на вероятности реализации угроз и использования уязвимостей, а также определяющих ущерб.

Материалы, представленные в данной работе, получены в результате исследования следующего вопроса: возможно ли при анализе рисков информационной безопасности применительно к ролевой модели разграничения доступа получить какие-либо количественные характеристики, не привлекая механизм экспертных оценок, а исходя из автоматического анализа основных элементов и структур, используемых при построении правил разграничения доступа?

## 1. Уровень критичности полномочия

При реализации в компьютерной системе подсистемы разграничения доступа возникает задача выявления скрытых каналов передачи информации: возможна ли передача информации между субъектами и объектами в обход политики безопасности. Применительно к ролевому разграничению доступа необходим контроль получения пользователями избыточных полномочий в следствии авторизации на роль, множество полномочий которой шире, чем требуется пользователю. При этом полностью исключить избыточность не всегда возможно. Возникает потребность в выявлении самых значимых полномочий, для которых избыточность наиболее нежелательна. Здесь «нежелательность» оценивается не с точки зрения ущерба, а со стороны вероятностей реализации угроз и использования уязвимостей. Числовая характеристика, отражающая значимость полномочий, названа «уровнем критичности». Содержательный смысл этого термина заключается в следующем: чем выше уровень критичности полномочия, тем больше вероятность его несанкционированного использования (утечки).

Для построения метода расчёта уровней критичности полномочий использована теоретико-графовая формализация ролевой политики разграничения доступа [1]. Рассматриваются такие элементы модели, как множество полномочий  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  и множество ролей  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ . Иерархия ролей описывается с помощью ориентированного графа, в котором узлы соответствуют ролям, определённым в системе, метки узлов — наборам их полномочий, направленные ребра (дуги) задают отношение авторизации ролей друг на друга (см. рис. 1).

Уровнем критичности полномочия  $p_i \in P$  назовём числовую характеристику  $S(p_i)$ , отражающую значимость  $p_i$  с точки зрения возможности его утечки.

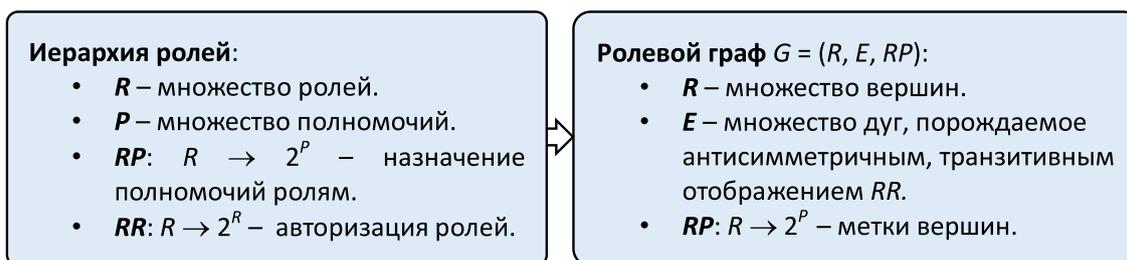


Рис. 1. Теоретико-графовое представление иерархии ролей

Потребуем, чтобы  $S(p_i) \in [0, 1]$  и  $\sum_{i=1}^m S(p_i) = 1$ . Тогда уровень критичности можно интерпретировать как некоторую априорную вероятность утечки соответствующего полномочия.

Очевидно, что величина  $S(p_i)$  зависит как от распространённости полномочия  $p_i$  среди наборов полномочий ролей, так и от местоположения ролей, которым сопоставлено это полномочие, в иерархии. Таким образом, уровень критичности полномочия находится в зависимости от отображений  $RR$  и  $RP$ . Выделены следующие эвристики, определяющие зависимость уровня критичности от структуры ролевого графа.

**Постулат 1.** Чем больше полномочий содержит роль, тем выше вероятность атаки (попытки несанкционированной авторизации) на данную роль, тем больше уровни критичности полномочий, сопоставленных роли.

**Постулат 2.** Чем чаще встречается полномочие в наборах полномочий ролей, тем выше вероятность его несанкционированного использования, тем больше его уровень критичности.

**Постулат 3.** Чем ближе роль к вершине иерархии, тем выше вероятность атаки на данную роль, тем больше уровни критичности полномочий, сопоставленных роли.

## 2. Методика оценки уровня критичности

К методике расчёта уровней критичности полномочий были предъявлены следующие требования:

- 1) учёт постулатов 1 – 3;
- 2) автоматизация процесса вычисления.

Основная идея предложенного метода заключается в интерпретации ролевого графа как дерева решения метода анализа иерархий [4]: за альтернативы метода принимаются полномочия, за критерии — роли. Для этого необходимо провести предобработку ролевого графа:

1) преобразовать ролевой граф  $G$  в эквивалентное листовое ролевое дерево  $T$  [1];

2) расширить ролевое дерево  $T$  до единичного ролевого дерева  $T_p$ : каждый листовой узел пополняется узлами-сыновьями по числу его полномочий, каждый новый узел в качестве метки содержит ровно одно полномочие из набора

полномочий своего родителя.

Следует заметить, что в расширенном ролевом дереве  $T_p$  листовые узлы теперь ассоциированы не с ролями, а с полномочиями (см. рис. 2).

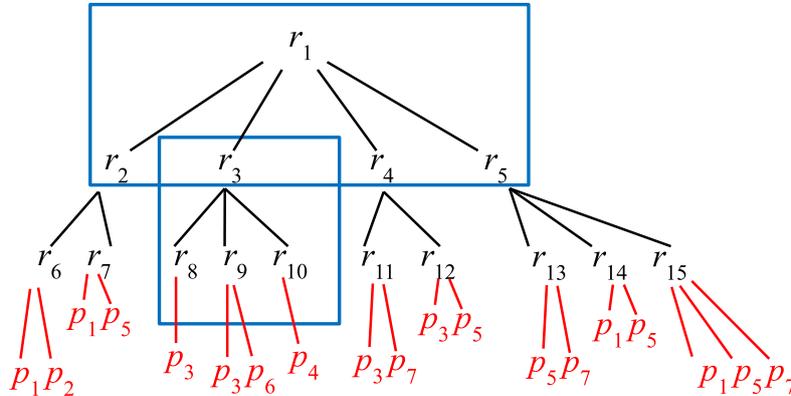


Рис. 2. Пример расширенного ролевого дерева  $T_p$

Алгоритм оценки уровней критичности полномочий состоит из двух этапов:

- 1) вычисление относительных весовых коэффициентов (весов) для всех узлов дерева  $T_p$ , кроме корня;
- 2) вычисление комбинированных весовых коэффициентов (уровней критичности) для каждого из полномочий.

На первом этапе для каждого узла  $t_i$  дерева  $T_p$ , начиная с корня и исключая листовые узлы, рассматривается подмножество непосредственно подчинённых ему узлов  $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\}$ . Для узлов этого подмножества формируется матрица парных сравнений. Но в отличие от классического метода анализа иерархий коэффициенты матрицы заполняются не экспертами, а вычисляются автоматически по формуле

$$m_{i_j i_s} = \frac{|RP(t_{i_j})|}{|RP(t_{i_s})|}, \quad (2)$$

где  $|RP(t)|$  — мощность подмножества полномочий, сопоставленных узлу  $t$ . С учётом постулата 1 эта величина соотносит уровни критичности полномочий, приписанных узлу  $t_{i_j}$ , с уровнями критичности полномочий, приписанных узлу  $t_{i_s}$ . Заполненные таким образом матрицы будут идеально согласованными [4], а формула для расчёта относительных весов примет следующий вид:

$$w_{i_j} = \frac{|RP(t_{i_j})|}{\sum_{s=1}^k |RP(t_{i_s})|}. \quad (3)$$

На втором этапе для каждого полномочия  $p_i$  вычисляется уровень критичности:

$$S(p_i) = \sum_{\rho(t, t_s): (t_s - \text{лист}) \wedge (RP(t_s) = \{p_i\})} \left( \prod_{j: t_j \in \rho(t, t_s)} w_j \right). \quad (4)$$

Суммирование ведётся по всем ориентированным маршрутам  $\rho(t, t_s)$  в дереве  $T_p$ , ведущим от корня  $t$  к такому листовому узлу  $t_s$ , набор полномочий  $RP(t_s)$  которого содержит ровно одно полномочие  $p_i$ . В каждом произведении используются вычисленные по формуле (3) относительные веса  $w_j$  тех узлов  $t_j$ , которые составляют ориентированный маршрут  $\rho(t, t_s)$  (исключая корень  $t$ ). Несложно понять, что на втором этапе учтены постулаты 2 и 3: так как для любого допустимого  $j : 0 \leq w_j \leq 1$ , то  $S(p_i)$  тем больше, чем больше слагаемых и чем меньше множителей, то есть короче путь в формуле (4).

### 3. Вычислительный эксперимент

Для проверки устойчивости модели в формулу (2) и, как следствие, в формулу (3) был введён параметр  $\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ):

$$m_{i_j i_s} = \frac{|RP(t_{i_j})|^\alpha}{|RP(t_{i_s})|^\alpha},$$

$$w_{i_j} = \frac{|RP(t_{i_j})|^\alpha}{\sum_{s=1}^k |RP(t_{i_s})|^\alpha}. \quad (5)$$

Проведён вычислительный эксперимент с целью исследования влияния параметра  $\alpha$  на уровни критичности полномочий. При этом анализировались не только абсолютные величины  $S(p)$ , а и линейный порядок, порождаемый уровнем критичности на множестве полномочий. Диапазон значений настраиваемого параметра  $\alpha$  представлял собой отрезок  $[1, 100]$ , шаг приращения параметра был равен 1.

Наглядным примером зависимости уровня критичности от параметра  $\alpha$  являются графики, представленные на рисунке 4 (а). По оси абсцисс отложены значения параметра  $\alpha$ , по оси ординат — значения уровня критичности полномочия  $S(p)$ . Построение графиков основано на данных для трёхуровневого выровненного ролевого дерева (рис. 3). Заметим, что после некоторого значения  $\alpha$  взаимное расположение графиков стабилизируется, что даёт возможность увеличить масштаб построения (см. рис. 4 (б)). Для представленного примера при  $\alpha = 1$  последовательность полномочий, упорядоченная по невозрастанию их уровней критичности, имеет вид:  $p_8, p_3, p_1, p_5, p_6, p_4, p_2, p_7$ . Тогда как для  $\alpha = 15$  порядок уже другой:  $p_1, p_8, p_7, p_6, p_5, p_4, p_3, p_2$ .

Анализ результатов вычислительного эксперимента позволяет сделать следующие выводы.

1. С ростом  $\alpha$  наблюдается смена порядка на множестве полномочий. При достижении параметром значения в интервале  $[15, 20]$  отношение порядка на множестве полномочий перестаёт изменяться.

2. Параметр  $\alpha$  может как совсем незначительно повлиять на ранжирование полномочий (рис. 5 (а)), так и кардинально изменить их порядок (рис. 5 (б)).

Следует отметить, что чем больше значение параметра  $\alpha$ , тем меньше величина относительного весового коэффициента  $w_{i_j}$  (см. формулу (5)). Зависимость отношения линейного порядка на множестве полномочий, определяемого

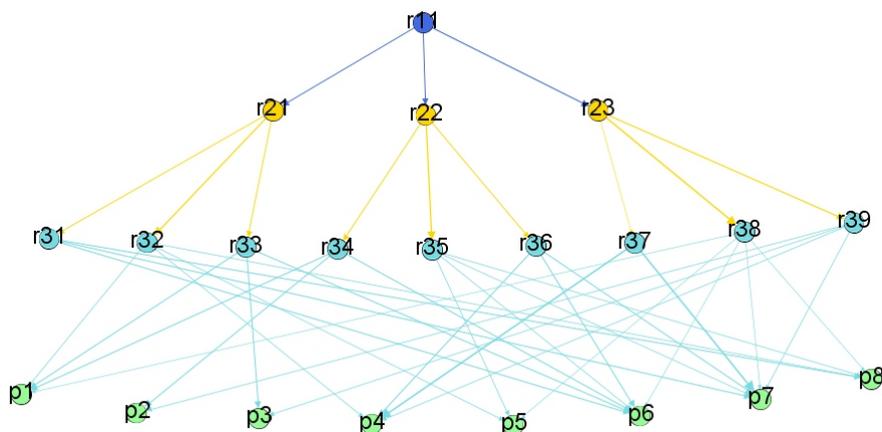


Рис. 3. Пример расширенного ролевого дерева, построенного для трёхуровневой выровненной иерархии ролей

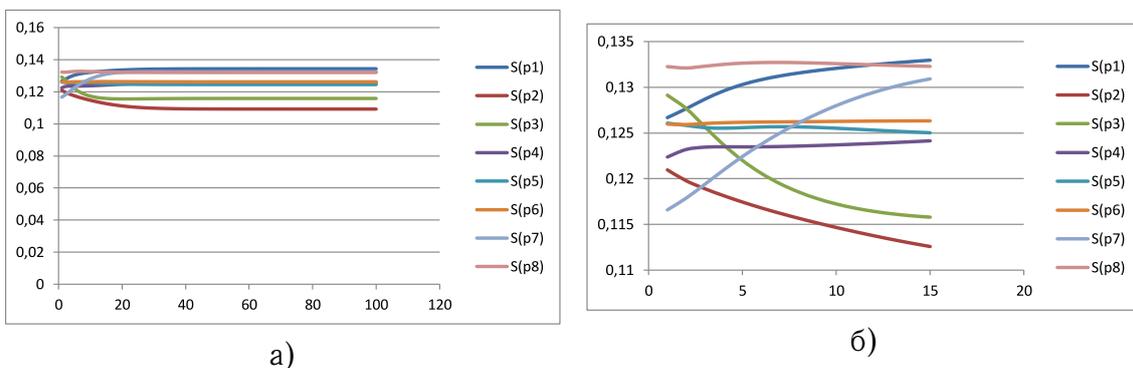
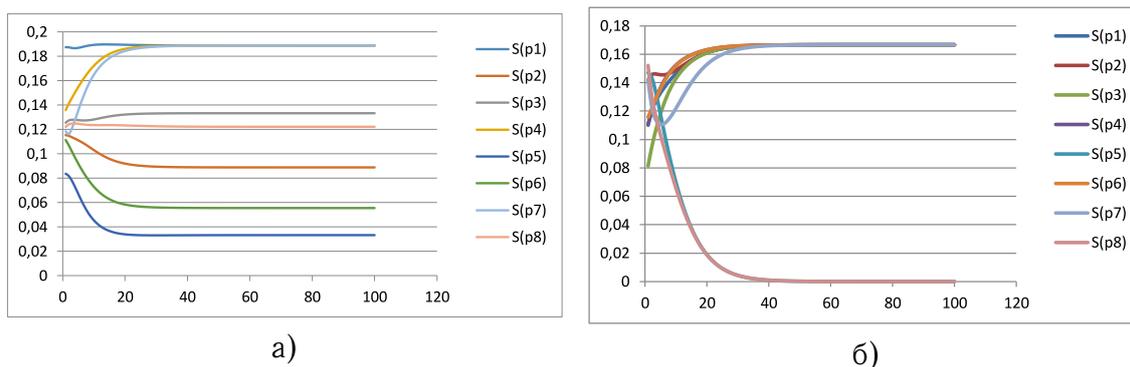


Рис. 4. Графики зависимости уровня критичности полномочия от параметра  $\alpha$ , полученные для расширенного ролевого дерева, представленного на рисунке 3

их уровнями критичности, от параметра  $\alpha$  позволяет управлять значимостью постулатов при расчёте уровня критичности: чем больше  $\alpha$ , тем менее значим постулат 1 (число полномочий, приписанных одной роли), а следовательно, большее значение приобретают постулаты 2 и 3 (распространённость полномочия в иерархии и «близость к администратору»). Таким образом, настраиваемый параметр  $\alpha$  позволяет администратору безопасности оценить значимость полномочий в различных предположениях об уязвимостях ролевой иерархии.

## Заключение

Предлагаемые в статье количественные характеристики полномочий могут являться основой для определения вероятности реализации угроз информационной безопасности через уязвимости, порождаемые структурой ролей политики разграничения доступа (см. формулу (1)). При этом уровень критичности  $S(p_i)$  полномочия есть оценка априорной вероятности утечки полномочия  $p_i$  через уязвимость, скрытую в ролевом графе.

Рис. 5. Графики зависимости уровня критичности от параметра  $\alpha$ 

Наличие в системе полномочий, уровень критичности которых превышает некоторое пороговое значение, может являться причиной реструктуризации ролевой иерархии с целью уменьшения этих показателей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bogachenko N.F. Local Optimization of the Role-Based Access Control Policy // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1965. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1965/paper14.pdf> (дата обращения: 21.02.2019).
2. NIST SP 800–30 Revision 1. Information Security. Guide for Conducting Risk Assessments. September 2012.
3. Емалетдинова Л.Ю., Аникин И.В. Анализ подходов к оценке рисков информационной безопасности в корпоративных информационных сетях // Вестник Казанского государственного энергетического университета. 2015. № 1(25). С. 55–67.
4. Belim S.V., Belim S.Yu., Bogachenko N.F., Kabanov A.N. User Authorization in a System with a Role-Based Access Control on the Basis of the Analytic Hierarchy Process // IEEE Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). 14–16 Nov., 2017. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8239432/> (дата обращения: 21.02.2019).

### RANKING OF PERMISSIONS ON THE BASIS OF ANALYSIS OF ROLES HIERARCHY IN ACCESS CONTROL MODELS

**N.F. Bogachenko**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [nfbogachenko@mail.ru](mailto:nfbogachenko@mail.ru)

**A.V. Filippova**

Student, e-mail: [afelia96@mail.ru](mailto:afelia96@mail.ru)

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The term "severity level of permissions" is introduced for the probability estimation of the permissions leakage in the role-based access control policy. The

postulates which define the dependence of severity levels of permissions on the structure of the role hierarchy are formulated. The technique (method and algorithm) of automatic calculation of severity levels of permissions is suggested, using analytic hierarchy process. The computing experiment which reveals the dependence of severity level of permission on the algorithm's parameter is made. The algorithm's parameter allows regulating the influence of postulates on results of calculations.

**Keywords:** roles, permissions, redundancy, severity level, analytic hierarchy process.

## REFERENCES

1. Bogachenko N.F. Local Optimization of the Role-Based Access Control Policy. CEUR Workshop Proceedings, 2017, vol. 1965, URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1965/paper14.pdf> (21.02.2019).
2. NIST SP 800–30 Revision 1. Information Security. Guide for Conducting Risk Assessments. September 2012.
3. Emaletdinova L.Yu. and Anikin I.V. Analiz podkhodov k otsenke riskov informatsionnoi bezopasnosti v korporativnykh informatsionnykh setyakh. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta, 2015, no. 1(25), pp. 55–67. (in Russian)
4. Belim S.V., Belim S.Yu., Bogachenko N.F. and Kabanov A.N. User Authorization in a System with a Role-Based Access Control on the Basis of the Analytic Hierarchy Process. IEEE Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), 14–16 Nov., 2017, URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8239432/> (21.02.2019).

*Дата поступления в редакцию: 21.02.2019*

## **МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАЩИТОЙ ИНФОРМАЦИИ ЗНАЧИМЫХ ОБЪЕКТОВ КРИТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**В.В. Селифанов**  
доцент, e-mail: sfo1@mail.ru

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск,  
Россия

**Аннотация.** В статье рассматривается методика формирования структуры функций автоматизированной системы управления защитой информации. Сущность методики заключается в построении модели задач защиты информации  $Z$ , отражающей их динамику и взаимосвязи между задачами защиты информации, а также ситуации совпадения задач на всей совокупности задач защиты информации, и на этой основе строится структура функций автоматизированной системы управления путём постановки в соответствие каждой задаче защиты информации и каждой паре (совкупности) совпадающих задач защиты информации соответствующей им функции автоматизированной системы управления.

**Ключевые слова:** значимые объекты критической информационной инфраструктуры РФ, система защиты информации, фреймы, растущие пирамидальные сети.

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам повышения эффективности применения существующих и перспективных сил и средств защиты информации (далее — ЗИ), которые будут использоваться для построения систем ЗИ на значимых объектах критической информационной инфраструктуры Российской Федерации (далее — ЗОКИИ). Они включают в себя информационные системы, информационно-телекоммуникационные сети, автоматизированные системы управления государственных органов, государственных учреждений, российских юридических лиц, функционирующие в сфере здравоохранения, науки, транспорта, связи, энергетики, банковской сфере и иных сферах финансового рынка, топливно-энергетического комплекса, в области атомной энергии, оборонной, ракетно-космической, горнодобывающей, металлургической и химической промышленности и которым присвоена категория значимости [1].

Система ЗИ является неотъемлемой составляющей ЗОКИИ и реализуется как средствами ЗИ, так и отдельными функциями по ЗИ, встроенными в

большую часть средств системы (аутентификация, идентификация, регистрация событий и другие). При этом сами средства защиты информации постоянно изменяются — ежегодно появляются новые их виды, построенные на базе различных технологий, подходов и концепций.

В рамках исследования будем рассматривать системы защиты ЗОКИИ, представляющие собой государственные информационные системы органов исполнительной власти субъектов Российской Федерации.

Указанные системы имеют сложную многоуровневую структуру, представляющую собой совокупность средств защиты информации, используемых подразделениями (органами) ЗИ ЗОКИИ, организованную и функционирующую по установленным правилам и нормам.

В соответствии с требованиями ФСТЭК России система защиты информации строится на базе 17-ти групп мер, каждая из которых включает в себя функции автоматизированного управления [2].

При этом разнородность применяемых средств защиты информации различного назначения и уровня значительно усложняет, а иногда и исключает возможность выполнения задачи автоматизированного оперативного управления системой ЗИ ЗОКИИ.

Для исправления этой ситуации необходимо функции управления выделить в самостоятельную подсистему, которая должна создаваться как автоматизированная адаптивная система оперативного управления [3], состав, структура и функции пунктов управления которой могут изменяться в зависимости от решаемых задач ЗИ.

Учитывая, что в состав ЗИ должны быть включены разнородные силы и средства ЗИ, которые могут быть распределены по достаточно большой территории (от объектового до федерального уровня, в том числе и при взаимодействии с государственной системой обнаружения, предупреждения и ликвидации последствий компьютерных атак на информационные ресурсы Российской Федерации), и должно быть обеспечено централизованное управление ими, а также оперативное распределение имеющегося ограниченного ресурса сил и средств ЗИ для обеспечения решения множества задач ЗИ одновременно или последовательно во времени, на первое место выдвигается научная и практическая задача обоснования рационального состава и структуры автоматизированной системы управления (далее — АСУ) ЗИ.

Первоочередным вопросом здесь будет реализация процесса формирования структуры функций создаваемой АСУ ЗИ. Для этого необходимо разработать методику, сущность которой заключается в построении модели задач системы защиты информации  $Z$ , возлагаемых на СЗИ в процессе эксплуатации, позволяющей определять взаимосвязи между задачами, а также выявлять ситуации совпадения задач на всей совокупности, и в построении на этой основе структуры функций СЗИ путём постановки в соответствие каждой задаче и каждой паре (совокупности) совпадающих задач соответствующей им функции автоматизированной системы управления.

Под системой защиты информации будем понимать совокупность органов (подразделений и (или) исполнителей), используемой ими средств защиты ин-

формации, функционирующих под управлением автоматизированной системы, а также объектов защиты информации, организованную и функционирующую по установленным правилам, нормам и политикам.

Под средствами защиты информации (далее — СЗИ) будем понимать, как специализированные средства защиты информации, так и программные, программно-технические средства различного назначения с функциями защиты информации, входящими в состав объекта защиты.

Под структурой функций автоматизированной системы управления будем понимать совокупность функций средств защиты информации и связей между ними.

Под функцией системы защиты будем понимать совокупность действий, выполняемых автоматизированной системой управления, относительно однородную по признаку направленности на выполнение обособленной задачи защиты информации, и обеспечивающую оптимальное использование возможностей подчинённых сил и средств (средства защиты информации и персонал, включая администраторов информационной системы, администраторов информационной безопасности, а также пользователей) при выполнении соответствующей задачи. Действия, которые составляют функцию СЗИ, являются функциями управления, такими как:

- сбор, обобщение и анализ информации об обстановке;
- принятие решения по применению подчинённых сил и средств ЗИ;
- разработка оптимального плана применения сил и средств ЗИ;
- постановка задач подчинённым силам и средствам ЗИ;
- контроль над выполнением принятых решений.

Каждая функция автоматизированной системы управления формально представляется в виде кортежа совокупностей действий

$$F_K = \langle D_1(I_{P,M}); D_2(R_N); D_3(PZ_K) \rangle, \quad (1)$$

где  $D_1(I_{P,M})$  — совокупность действий по сбору, обобщению и анализу информации об обстановке;

$D_2(R_N)$  — совокупность действий по принятию решения на применение подчинённых сил и средств защиты информации;

$D_3(PZ_K)$  — совокупность действий по постановке задачи.

Каждая задача системы защиты информации  $Z_K$ , возлагаемая на силы и средства ЗИ  $M$ , заключается в воздействии на совокупности объектов  $P$  (прикладное и системное программное обеспечение, средства защиты информации, сетевого оборудования и т. д.) в составе объекта защиты с требуемой эффективностью  $W_0$ , в требуемом месте  $N$  (сегменте, рабочей станции и т. д.) и в определённое время  $T$ . Задачу системы защиты можно охарактеризовать с помощью кортежа указанных параметров  $Z_K = \langle P, M, W_0, N, T \rangle$ . А учитывая, что на систему защиты может возлагаться множество таких задач ТС, выполняемых одновременно или последовательно во времени, то это множество может быть представлено в виде

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_k, \dots, \mathbf{Z}_K\}. \quad (2)$$

В настоящее время общий перечень задач, возлагаемых на систему защиты информации ЗОКИИ, определен в общем виде приложением к приказу ФСТЭК России от 25 декабря 2017 № 239 [2]. Следует отметить, что указанные задачи представлены без привязки к конкретным СЗИ ЗОКИИ. При этом стоит отметить, что на средства защиты информации возлагается два вида задач:

- первый — непосредственно функционал системы защиты;
- второй — функции управления и администрирования.

Используя имеющееся описание задач системы защиты, можно построить только простейший перечень функций, когда каждой задаче ставится в соответствие одна функция СЗИ, обеспечивающая выполнение этой задачи. Однако такой перечень функций будет адекватен рассматриваемым задачам только в том случае, когда задачи выполняются строго последовательно. Если же задачи элементами системы ЗИ выполняются не только последовательно, но и параллельно во времени, а СЗИ для одновременного решения всех задач не хватает, то может возникнуть ситуация, когда для решения какой-либо пары (совокупности) задач потребуется один и тот же комплект сил и средств системы защиты информации в одно и то же время (ситуация совпадения задач). Для разрешения такой ситуации должны быть предусмотрены дополнительные функции, которые необходимо определить. Это можно сделать на основе построения модели задач системы ЗИ, учитывающей параллельности выполнения задач по времени, по пространству и по ресурсу сил и средств.

Формальная модель задач, возлагаемых на систему ЗИ, должна содержать описание предметной области задач в виде понятий задач и отношений между ними.

Сущность методики заключается в построении модели задач системы защиты информации  $\mathbf{Z}$ , возлагаемых на СЗИ в процессе эксплуатации, позволяющей определять взаимосвязи между задачами, а также выявлять ситуации совпадения задач на всей совокупности и в построении на этой основе структуры функций системы ЗИ путем постановки в соответствие каждой задаче и каждой паре (совокупности) совпадающих задач соответствующей им функции автоматизированной системы управления.

Исходными данными методики являются типовые сценарии развития действий; задачи, возлагаемые на СЗИ, которые определяются, исходя из предположения, что силы и средства будут применяться для обеспечения решения соответствующих задач.

Последовательность действий при построении структуры функций системы ЗИ состоит из двух этапов. На первом этапе на основе имеющихся исходных данных строится модель задач. На втором этапе строится структура функций автоматизированной системы управления системой ЗИ, постановкой в соответствие задачам СЗИ соответствующих функций СЗИ.

Для решения задачи построения модели задач и структуры функций предлагается применить методы, используемые для организации и построения баз зна-

ний [4–9]. Однако для построения модели задач требуется доработка этих способов в направлении, проблемно-ориентированном на обоснование требований к составу и структуре системы ЗИ, заключающаяся в определении конкретного содержания элементов в составе модели задач системы ЗИ, их взаимосвязей и способов формального представления.

В [4–9, 10–14] разработаны языковые средства возможных способов формализованного описания информационных объектов, позволяющие отразить состав, характеристики отношения объектов. Учитывая особенности характеристик, составляющих описание задач системы ЗИ, предлагается для построения модели задач системы ЗИ использовать фреймовый язык [10, 12, 14].

Проведённый анализ информационного обеспечения обоснования требований к системе ЗИ позволил для представления знаний о задачах, возлагаемых на СЗИ, определить набор стандартных типов фреймов, описывающих объекты задач и понятия задач СЗИ (тип  $\Phi_1$ ), их назначение (тип  $\Phi_2$ ), состав задач СЗИ (тип  $\Phi_3$ ), структуру и топологию задач СЗИ (тип  $\Phi_4$ ), параметры (характеристики) задач СЗИ (тип  $\Phi_5$ ), законы функционирования (тип  $\Phi_6$ ), правила продукции (тип  $\Phi_7$ ) и сценарии (секвенции) решения задач СЗИ (тип  $\Phi_8$ ). При этом фреймы типов  $\Phi_1$ – $\Phi_6$  обеспечивают возможность описания статических свойств задач СЗИ и взаимосвязей между ними, а фреймы типов  $\Phi_7$  и  $\Phi_8$  — динамических аспектов манипулирования с задачами СЗИ и правилами их обработки при обосновании требований к СЗИ.

С учётом изложенного, рассмотренный функциональный набор стандартных типов фреймов  $\Phi_1, \dots, \Phi_8$  по степени агрегированности описаний задач СЗИ целесообразно представить в виде четырёхуровневой иерархической структуры, изображённой на рис. 1.

Разработка способов и формальных языков для описания модели задач системы ЗИ с помощью фреймов предполагает необходимость проектирования фреймовых структур. Сформулируем в соответствии с [7, 8, 11–14] определение типового фрагмента структуры сети фреймов:

а) гиперфрейм  ${}^i_j\Phi_1^0$  есть типовой фрагмент сети фреймов модели задач системы ЗИ, структура которого определяется структурой фрейма типа  $\Phi_1$ ;

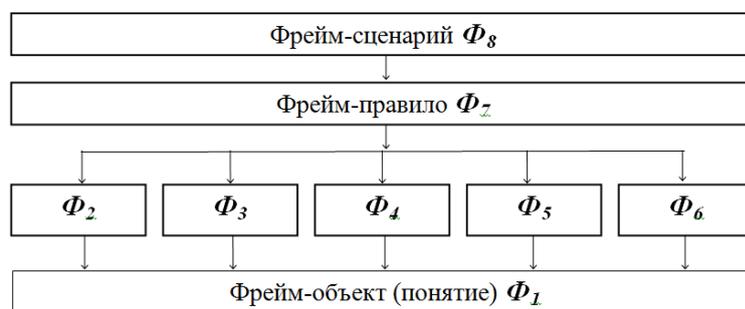


Рис. 1. Структура стандартных типов фреймов

б) каждому гиперфрейму сопоставлены некоторые числа  $i$  и  $j$ , которые называются его координатами в модели задач системы ЗИ;

в) гиперфрейм — множество фреймов различного типа и связей между ними, разделённое на  $d^v$  подмножеств (уровней), каждое из которых характеризуется своим уровнем детализации описания задач СЗИ

$${}^i_j\Phi^0_1 = \{ {}^i_j\Phi^b_r | b=1, d^v ; r=1, t^u \}, \quad (3)$$

где  $t^u$  — количество типов стандартных фреймов;

г) в каждом  $b$ -м подмножестве  $\{ {}^i_j\Phi^b_r \}$  содержится  $B^w_b$  макрофреймов-объектов  ${}^i_j\Phi^k_r$ ,  $k=1, B^w$ , являющихся единичной конструкцией из  $t^u$  типовых фреймов  $\Phi_r$ ;

д) каждый макрофрейм  $b$ -го уровня описания ( $b=1, d^v$ ) может входить в состав нескольких фреймов более высокого уровня описания;

е) слотом макрофрейма  $b$ -го уровня описания может быть любой макрофрейм нижнего уровня описания;

ж) каждый макрофрейм имеет номер порядка его применения, который имеет вид  $X^v$  и  $Y^v$ , где  $X^v$  определяется координатами  $i, j$  гиперфрейма, в состав которого он входит, а  $Y^v$  — номером уровня описания  $b | b=1, d^v$  и порядковым номером макрофрейма  $k | k=1, B^w$  на  $b$ -м уровне описания;

з) в каждом макрофрейме, кроме собственных номеров, указывается множество номеров  $\{X^v Y^v\}$  макрофреймов, которые с ним связаны.

Таким образом, предлагаемое формальное представление модели задач системы ЗИ, возлагаемых на СЗИ, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Phi [И \langle Z(i\Phi_1) \rangle] ; \\ & {}^i\Phi_1 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & {}^i_j\Phi_1 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & {}^i_j\Phi^b_1 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_2 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_3 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_4 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_5 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_6 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_7 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \\ & \Phi_8 [И_1 \langle Z_1(И_1) \rangle \langle Z_2(И_1) \rangle \dots \langle Z_{k1}(И_1) \rangle] ; \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Phi$  — имя фрейма, соответствующего классу объектов, понятий или отношений, используемых при описании задач СЗИ;

$И_l$  — идентификатор  $l$ -го атрибута фрейма,  $l=1, L$  ;

$\langle Z_K(И_l) \rangle$  —  $k$ -й спецификатор  $l$ -го атрибута фрейма,  $k=1, K$  ;

${}^i\Phi_1$  — объект представления  $i$ -я задача СЗИ, возлагаемая на СЗИ;

${}^i_j\Phi_1$  — объект представления  $j$ -я подзадача  $i$ -й задачи СЗИ, возлагаемой на СЗИ;

${}^i_j \Phi^b_1$  — объект представления  $b$ -го уровня описания в  $j$ -й подзадаче  $i$ -й задачи СЗИ.

Задача выявления ситуаций совпадения задач СЗИ решается путём построения правила отнесения двух задач к сформированному понятию ситуации совпадения и состоит в следующем. Известно несколько основных разновидностей процедур (способов) определения принадлежности объектов к некоторому классу [10, 12, 14]. Для определения принадлежности задач СЗИ к классу ситуаций совпадения на множестве задач системы ЗИ, учитывая, что они зависимы от времени, то есть имеют динамическую природу, предлагается воспользоваться методом классификации по признакам, так называемым методом растущих пирамидальных сетей (РПС) [12, 14, 15–18].

Постановка задачи классификации задач СЗИ по признакам методом РПС имеет следующий вид. Имеется множество задач СЗИ  $\mathbf{Z}=\{\mathbf{Z}_k\}$  и множество признаков  $\mathbf{\Pi}=\{\pi^Z_i\}$ ,  $i=1, n$ , присутствующих в описании  $k$ -й задачи. Предполагается, что признаки  $\pi^Z_i$  принимают двоичные значения (типа «есть-нет»). Все множества предполагаются конечными. Строится решающая функция  $\varphi\{\pi^Z_1, \pi^Z_2, \dots, \pi^Z_n\}$ , которая определяет принадлежность или непринадлежность любой совокупности (пары) задач СЗИ  $\mathbf{Z}_k, \mathbf{Z}_l$  к определённому классу подмножеств задач СЗИ.

В соответствии с основными положениями [12,14,15-18], предлагается следующая схема формирования решающего правила применительно к классификации задач, возлагаемых на СЗИ.

Каждой задаче СЗИ сопоставлены наборы двоичных признаков. Решающее правило строится в виде РПС. Растущая пирамидальная сеть состоит из вершин двух типов. Вершины первого типа называются рецепторами, вершины второго типа — ассоциативными элементами (элементами типа И). Каждый рецептор соответствует фиксированному значению определённого признака. Таким образом, число рецепторов в РПС равно произведению числа признаков на суммарное число принимаемых ими значений. Каждый ассоциативный элемент может иметь субмножество и супермножество. Динамика изменения (роста) РПС задаётся с помощью специальных правил [15,16].

Формирование понятий (ситуаций) с помощью РПС осуществляется с помощью обучающей выборки. В обучающей выборке с двоично кодированными значениями признаков рецептор РПС, соответствующий определённому значению некоторого признака, возбуждается, если это значение актуализируется, и не возбуждается в противном случае. На вход РПС последовательно подаются все значения признаков объектов из обучающей выборки как из группы положительных примеров, так и из группы отрицательных примеров. При подаче каждого значения происходит переформирование РПС в соответствии с известными правилами [15,16]. В процессе преобразования РПС в множестве её ассоциативных элементов выделяются специальные элементы, носящие название положительных и отрицательных контрольных элементов для определённого понятия ситуации совпадения задач СЗИ. При формировании РПС обучающая выборка используется многократно. Обучение считается завершённым, если описания всех объектов, входящих в обучающую выборку, при подаче их на

рецепторы РПС не вызывают появления новых контрольных элементов.

Показано в [15], что процедуры перестройки РПС, используемые в процессе работы с обучающей выборкой, всегда за конечное число шагов приводят к завершению формирования понятия. При этом все положительные и отрицательные примеры из обучающей выборки распознаются РПС правильно.

Когда понятие ситуации совпадения на задачах СЗИ сформировано, то РПС даёт возможность пользоваться следующим правилом отнесения задач СЗИ к сформированному понятию.

Задачи СЗИ  $Z_i, Z_j, i \neq j$  входят в понятие ситуации совпадения на задачах СЗИ, если при введении их описания в рецепторы РПС в ней нет возбуждённых отрицательных контрольных элементов понятия, в супермножестве которых имелся хотя бы один возбуждённый положительный элемент. Задачи  $Z_i, Z_j, i \neq j$  не входят в данное понятие, если при введении их описания в рецепторы РПС в ней нет возбуждённых положительных контрольных элементов, которые не содержали бы в своих супермножествах хотя бы одного возбуждённого отрицательного контрольного элемента.

Для построения модели задач системы ЗИ необходимо выполнить следующие действия.

Шаг 1. Производится первоначальная нумерация всех имеющихся задач  $Z_k, k=1, K$ , возлагаемых на СЗИ, в соответствии с номерами описывающих их фреймов.

Шаг 2. Строится и обучается растущая пирамидальная сеть, обеспечивающая определение принадлежности любой задачи к подмножеству совпадающих задач.

Шаг 3. В рецепторы РПС вводится описание первой (очередной) задачи СЗИ.

Шаг 4. В рецепторы РПС последовательно вводятся описания очередных задач СЗИ. Задачи, совпадающие с первой (очередной), помечаются как совпадающие задачи.

Шаг 5. Проверяется, все ли задачи СЗИ соотнесены с другими задачами СЗИ. Если не все, то — переход на шаг 3, в противном случае — на шаг 6.

Шаг 6. Производится перенумерование всех выявленных совокупностей совпадающих задач СЗИ, и их номера добавляются к первоначально пронумерованным отдельным задачам.

Таким образом, в результате выполнения последовательности действий первого этапа будет построена модель задач системы ЗИ, возлагаемых на СЗИ.

Структура функций автоматизированной системы управления системой ЗИ строится постановкой в соответствие задачам СЗИ и выявленным совокупностям совпадающих задач соответствующих функций путём выполнения операции отображения множества задач СЗИ модели задач системы ЗИ на множество функций СЗИ с учётом выполнения следующих правил.

1. Каждой задаче СЗИ  $Z_k = \langle P, M, W_0, N, T \rangle$  ставится в соответствие функция  $F_k = \langle D_1(I_{P, M}); D_2(R_N); D_3(PZ_k) \rangle$ , которая будет обеспечивать выполнение рассматриваемой задачи.

2. Каждой паре (совокупности) совпадающих задач СЗИ  $Z_k, Z_l, k \neq l$  ставит-

ся в соответствии функция СЗИ  $F_{kl}$ , которая будет обеспечивать совместное выполнение рассматриваемых функций  $F_k$  и  $F_l$  и, соответственно, совместное выполнение пары (совокупности) задач  $Z_k, Z_l$ .

Второй этап построения структуры функций автоматизированной системы управления системы ЗИ содержит следующие операции.

Шаг 1. Задаче СЗИ первого уровня (глобальной) ставится в соответствие (формируется) функция системы управления ЗИ первого уровня (глобальная). Очередная функция системы управления считается сформированной, и ей присваивается соответствующий очередной номер.

Шаг 2. Первой (очередной) задаче СЗИ очередного уровня ставится в соответствие (формируется) очередная функция СЗИ. Очередная функция считается сформированной, и ей присваивается соответствующий очередной номер.

Шаг 3. Первой (очередной) совокупности совпадающих задач СЗИ очередного уровня ставится в соответствие (формируется) очередная функция СЗИ. Очередная функция считается сформированной, и ей присваивается соответствующий очередной номер функции уровня на одну ступень выше.

Шаг 4. Проверяется, всем ли задачам СЗИ и совокупностям совпадающих задач данного уровня поставлены в соответствие (сформированы) функции автоматизированной системы управления. Если не всем, то — переход на шаг 2, в противном случае — на шаг 5.

Шаг 5. Проверяется, для всех ли уровней задач СЗИ сформированы функции. Если не для всех, то — переход на шаг 2, в противном случае — на шаг 6.

Шаг 6. Завершение процедуры.

В результате работы алгоритма модель задач системы ЗИ отображается в модель функций автоматизированной системы управления.

Таким образом, в статье разработана методика формирования структуры функций АСУ ЗИ, позволяющая решить задачу обоснования рационального состава и структуры АСУ системы ЗИ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон от 26.07.2017 № 187 «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации». [Электронный ресурс]. URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/42128> (дата обращения: 15.05.2018).
2. Приказ ФСТЭК России от 25.12.2017 № 239 «Об утверждении Требований по обеспечению безопасности значимых объектов критической информационной инфраструктуры Российской Федерации». [Электронный ресурс]. URL: <https://minjust.consultant.ru/documents/38914> (дата обращения: 15.05.2018).
3. Голдобина А.С., Исаева Ю.А. Выбор имитационной модели процессов управления защитой информации для оценки эффективности государственных и муниципальных систем / Инновационное развитие науки и образования. Сборник статей Международной научно-практической конференции. В 2 частях. Пенза, 2018. С. 86.

4. Поспелов Д.А. Логико-лингвистические модели в системах управления. М. : Энергоиздат, 1981. 231 с.
5. Клыков Ю.И. Семиотические основы ситуационного управления. М. : ИФИ, 1974. 87 с.
6. Минский М. Фреймы для представления знаний. М. : Энергия, 1979. 151 с.
7. Представление и использование знаний / Пер. с японск. М. : Мир, 1989. 220 с.
8. Атре Ш. Структурный подход к организации баз данных. М. : Финансы и статистика, 1983. 317 с.
9. Попов Э.В., Фирдман Г.Р. Алгоритмические основы интеллектуальных роботов и искусственного интеллекта. М. : Наука, 1976. 456 с.
10. Бублик Н.Г., Новосельцев В.И. и др. Логико-лингвистические модели в военных системных исследованиях. М. : Воениздат, 1988.
11. Искусственный интеллект. Кн. 1. Системы общения и экспертные системы. М. : Радио и связь, 1990. 342 с.
12. Искусственный интеллект. Кн. 2. Модели и методы. М. : Радио и связь, 1990. 304 с.
13. Хант Э. Искусственный интеллект. М. : Мир, 1978. 558 с.
14. Уинстон П. Искусственный интеллект. М. : Мир, 1980. 519 с.
15. Гладун В.П. Формирование понятий путём обучения растущих сетей // Кибернетика. 1970. № 2. С. 99–104.
16. Бонгард М.М. Проблема управления. М. : Наука, 1967.
17. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М. : Мир, 1985. 512 с.
18. Вагнер Г.М. Основы исследования операций. М. : Мир, 1973.

## **METHODS OF FORMING THE STRUCTURE OF INFORMATION SECURITY MANAGEMENT FUNCTIONS OF SIGNIFICANT OBJECTS OF THE CRITICAL INFORMATION INFRASTRUCTURE OF THE RUSSIAN FEDERATION**

**V.V. Selifanov**

Associate Professor, e-mail: sfo1@mail.ru

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia

**Abstract.** The article deals with the method of formation of the structure of the functions of an automated information security management system. The essence of the technique is to build a model of information security problems  $Z$ , reflecting their dynamics and the relationship between the tasks of information security, as well as the situation of coincidence of tasks on the whole set of tasks of information security, and on this basis, the structure of the functions of the automated control system by setting in accordance with each task of information security and each pair (set) of matching tasks of information security corresponding to them functions of the automated control system.

**Keywords:** significant objects of critical information infrastructure of the Russian Federation, information security system, frames, growing pyramid networks.

## REFERENCES

1. Federal'nyi zakon ot 26.07.2017 no 187 "O bezopasnosti kriticheskoi informatsionnoi infrastruktury Rossiiskoi Federatsii". URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/42128> (15.05.2018). (in Russian)
2. Prikaz FSTEK Rossii ot 25.12.2017 no239 "Ob utverzhdenii Trebovaniy po obespecheniyu bezopasnosti znachimyykh ob"ektov kriticheskoi informatsionnoi infrastruktury Rossiiskoi Federatsii". URL: <https://minjust.consultant.ru/documents/38914> (15.05.2018). (in Russian)
3. Goldobina A.S. and Isaeva Yu.A. Vybor imitatsionnoi modeli protsessov upravleniya zashchitoi informatsii dlya otsenki effektivnosti gosudarstvennykh i munitsipal'nykh sistem, Inovatsionnoe razvitie nauki i obrazovaniya. Sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, V 2 chastyakh, Penza, 2018, pp. 86. (in Russian)
4. Pospelov D.A. Logiko-lingvisticheskie modeli v sistemakh upravleniya. Moscow, Energoizdat Publ., 1981, 231 p. (in Russian)
5. Klykov Yu.I. Semioticheskie osnovy situatsionnogo upravleniya. Moscow, IFI Publ., 1974, 87 p. (in Russian)
6. Minskii M. Freimy dlya predstavleniya znaniy. Moscow, Energiya Publ., 1979, 151 p. (in Russian)
7. Predstavlenie i ispol'zovanie znaniy. Moscow, Mir Publ., 1989, 220 p. (in Russian)
8. Atre Sh. Strukturnyi podkhod k organizatsii baz dannykh. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1983, 317 p. (in Russian)
9. Popov E.V. and Firdman G.R. Algoritmicheskie osnovy intellektual'nykh robotov i iskusstvennogo intellekta. Moscow, Nauka Publ., 1976, 456 p. (in Russian)
10. Bublik N.G., Novosel'tsev V.I. and etc. Logiko-lingvisticheskie modeli v voennykh sistemnykh issledovaniyakh. Moscow, Voenizdat Publ., 1988. (in Russian)
11. Iskusstvennyi intellekt. Kn. 1. Sistemy obshcheniya i ekspertnye sistemy. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1990, 342 p. (in Russian)
12. Iskusstvennyi intellekt. Kn. 2. Modeli i metody. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1990, 304 p. (in Russian)
13. Khant E. Iskusstvennyi intellekt. Moscow, Mir Publ., 1978, 558 p. (in Russian)
14. Uinston P. Iskusstvennyi intellekt. Moscow, Mir Publ., 1980, 519 p. (in Russian)
15. Gladun V.P. Formirovanie ponyatii putem obucheniya rastushchikh setei. Kibernetika, 1970, no. 2, pp. 99–104. (in Russian)
16. Bongard M.M. Problema upravleniya. Moscow, Nauka Publ., 1967. (in Russian)
17. Papadimitriou Kh. and Staiglits K. Kombinatornaya optimizatsiya. Algoritmy i slozhnost'. Moscow, Mir Publ., 1985., 512 p. (in Russian)
18. Vagner G.M. Osnovy issledovaniya operatsii. Moscow, Mir Publ., 1973. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 17.08.2018*

## **ПРОГРАММА, ИМИТИРУЮЩАЯ СЕТЕВЫЕ АТАКИ НА КОМПЬЮТЕРЫ**

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

**О.В. Матюшина**

студент, e-mail: vladimirova.o94@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Цель статьи — представить программу, которая моделирует работу компьютерной сети, а также демонстрирует результаты использования недобросовестным пользователем некоторых сетевых уязвимостей.

**Ключевые слова:** компьютерная сеть, сетевые атаки, сетевые уязвимости, имитация сетевых атак.

### **Введение**

При обучении студентов по направлению «Информационная безопасность», осваивающих средства защиты от сетевых атак, полезно иметь программное приложение, имитирующее сетевые атаки типа Smurfing, SYN-Flood, подмена MAC-адрес, ARP-spoofing и другие. Такие программы уже создавались в ОмГУ [1, 2], но каждая из них, к сожалению, имеет свои недостатки, хотя и решает поставленные задачи.

В статье представлена новая компьютерная программа, имитирующая сетевые атаки.

В ходе работы программы открываются окна, представляющие компьютер злоумышленника и компьютеры, входящие в состав атакуемой сети.

### **1. Описание окон программы и их возможностей**

Для разработки использовался язык программирования C#.

Чтобы реализовать возможность передачи сообщений между окнами программы, было решено использовать несколько встроенных классов: обеспечивающих клиентские подключения для сетевых служб, работающих с потоками и потоками данных.

В функции отправки создаётся экземпляр класса «TcpClient», сообщение переводится из строкового типа в байтовый массив, который уже с помощью открывшегося потока передачи данных посылается на указанный порт. Затем поток закрывается, а экземпляр класса удаляется:

```

//создание нового TCP клиента
TcpClient client = new TcpClient("localhost Convert.ToInt32(port));
byte[] data = new byte[256];
    //перевод строки в байтовый массив
byte[] msg = Encoding.UTF8.GetBytes(str);
int count = msg.Length <= 256 ? msg.Length : 256;
Array.Copy(msg, data, count);
    //создание потока передачи данных
NetworkStream stream = client.GetStream();
    //запись строки в поток
stream.Write(data, 0, 256);
    //закрытие потока и удаление TCP клиента
stream.Close();
client.Close();
textBox3.Text += "Отправлено " + oppPort + »» " + str;
textBox3.Text += Environment.NewLine;

```

Приём сообщения осуществляется сложнее. Здесь уже вступают в роль потоки. Чтобы прослушивать заданный порт непрерывно, а не по нажатию кнопки, создаётся отдельный поток, который этим занимается, периодически «засыпая», чтобы постоянно не грузить систему. На каждый прослушиваемый порт создаётся свой поток, благодаря чему можно принимать сообщение одновременно с них всех. Если в поток приёма данных попадает байтовый массив, переданный с другого окна, то этот массив переводится в строковую переменную.

**Окна злоумышленника и компьютеров.** На окна злоумышленника и компьютеров была добавлена возможность отправить сообщение на выбранный адрес. При этом, если отправитель не знает входящий порт адресата (имитация MAC-адреса), то будет послан широковещательный пакет ARP-Request.

Также был добавлен обработчик, проверяющий, что за сообщение нам пришло, и либо отбрасывающий его, либо инициализирующий какие-то определённые действия. Например, если пришёл ARP-Request — отправить в ответ ARP-Reply:

```

//Если ARP-Request
if (instr.Substring(13, 1) == "1")
{
    textBox.Text += ««ARP REQUEST от " + instr.Substring(10, 3);
    textBox.Text += Environment.NewLine;
    //Обычное + Mac-адрес назначения + наш Mac-адрес + адрес
назначения + наш адрес + ARP-Reply
    str += "0" + instr.Substring(4, 3) + localPort + instr.Substring(10, 3) +
    adres + "2";
    Thread.Sleep(1000);

```

```
    //Отправка  
    Send(str);  
    return;  
}
```

**Окно сервера.** Это окно принимает не ARP-сообщения только после процедуры «тройного рукопожатия». После получения пакета SYN сервер записывает исходящий MAC-адрес из пакета в буфер и отправляет ответ SYN-ACK. Если затем придёт пакет ACK от той же машины, то сервер «запомнит» подключение и уберёт соответствующую запись из буфера. Чистку буфера через некоторое время, как на настоящем оборудовании, решено не добавлять, так как программа работает значительно медленнее реальных сетей и для демонстрации это не понадобится.

Был принят в работу способ конфигурирования сети посредством кнопок «Добавить...».

**Окно коммутатора.** Принимая на один из портов пакет, коммутатор сначала проверяет MAC-адрес отправителя и ищет его в своей таблице MAC-адресов. Если не находит, то делает в ней запись, что этот MAC доступен по порту, с которого пришло сообщение. Затем проверяется MAC-адрес назначения и также ищется в таблице. Если находит, пакет посылается на нужный порт, если нет — происходит широковещательная рассылка.

Для того чтобы программа нормально функционировала, на все «устройства» добавлены переменные или их массивы (в зависимости от типа), хранящие информацию о том, какие «соседские» порты подключены к каким локальным портам (имитация соединения проводом). Иначе окна знали бы только на какой порт пришёл пакет, но не с какого на соседнем «устройстве».

**Окно маршрутизатора.** Его отличает от коммутатора то, что он работает с обычными адресами, а не с MAC. А также то, что маршрутизаторы обмениваются между собой таблицами маршрутизации. В программе это происходит при изменении топологии сети, инициализированном с одного из них.

Во все окна (кроме коммутатора) добавлена возможность назначить адрес, а в компьютеры и злоумышленника — ещё возможность назначить шлюз. Это сделано для имитации локальной (доменной) сети и внешней (интернет). В окно злоумышленника добавлена также возможность отправить пакет, собранный из отдельных «кусочков», каждый из которых задаётся в отдельности.

Атаки были протестированы.

## 2. Основная структура

Там, где в реальности для атаки необходимо большое количество хостов, мы ограничимся двумя-тремя. Программа использует свою структуру сетевого пакета в отличие от реальных сетей. Это допущение позволяет увеличить наглядность и упростить моделирование. При запуске программы открывается окно, выступающее в роли компьютера взломщика (см. рис. 1).

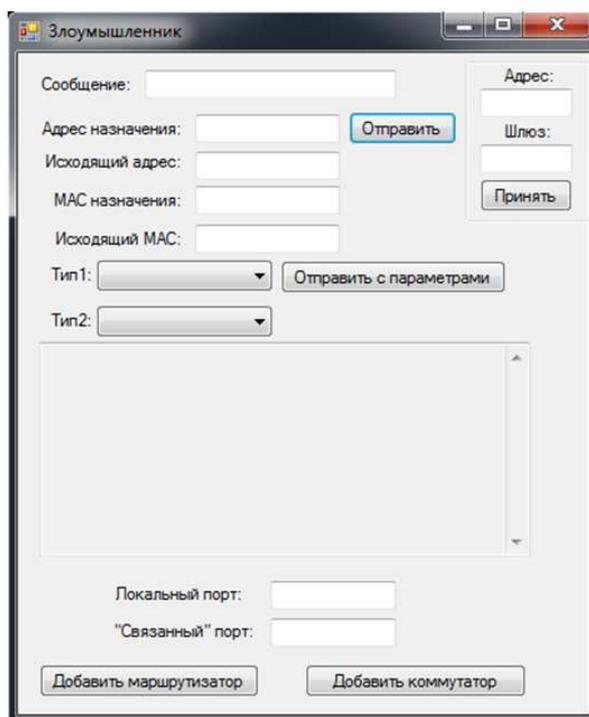


Рис. 1. Стартовое окно (оно же – компьютер злоумышленника)

Решение начинать с него обусловлено тем, что в сети такое будет одно. В окне «Злоумышленник» имеется возможность отправить произвольное сообщение на указанный адрес внутри моделируемой сети, подключить новый маршрутизатор или коммутатор. Имеется поле, куда будут выводиться полученные и служебные сообщения. Основное отличие этого окна от других «хостов» — наличие кнопки «Отправить с параметрами», позволяющей, используя введенные пользователем данные, передать сообщение с произвольными адресами назначения и отправки, а также выбранного типа. Чтобы добавить в сеть новое устройство (оно будет сразу подключено к компьютеру «проводом»), надо в два поля ввести трёхзначные адреса, первый — порта компьютера с которого идёт подключение, второй — подключённого «проводом» порта второго устройства, затем нажать «Добавить маршрутизатор» или «Добавить коммутатор». Функция открытия нового окна «Маршрутизатор» с нужными параметрами:

```

string inPort = ;
string outPort = ;
if (inPortBox.Text.Length != 3 || outPortBox.Text.Length != 3)
{
    MessageBox.Show("Порты должны состоять из трех цифр");
    return;
}

//порт в родительском окне
inPort = inPortBox.Text;

```

```
    //порт в подключаемом окне
outPort = outPortBox.Text;
    //открытие порта
Open(inPort);
oppPort = outPort;
localPort = + inPort;
this.Text += + inPort;
CreateRouter.Visible = false;
inPortBox.Visible = false;
outPortBox.Visible = false;
label2.Visible = false;
label3.Visible = false;
CreateSwitch.Visible = false;

    //добавление нового окна и передача ему номеров портов
    //(имитация подключения проводом)
Form Form2 = new Router(outPort, inPort);
Form2.Show();
```

В открывшемся окне (и в маршрутизаторе, и в коммутаторе) появляется новая возможность — добавить в сеть новый компьютер. Принцип её действия аналогичен только что рассмотренному.

Машина, добавленная с её помощью, сразу соединится с родительским устройством (с тем, с которого она была открыта), а также не будет иметь возможность добавлять новые узлы в сеть, так как будет являться по сути одной из конечных точек сети.

### 3. Smurfing

Для демонстрации взрывного увеличения сетевого трафика в программу на компьютер злоумышленника добавлена возможность отослать пакет ICMP ECHO REQUEST.

На компьютеры, в свою очередь, добавлена функция обработки этого условного пакета и отправки в ответ ICMP ECHO REPLY.

При отправке с компьютера злоумышленника кнопкой «Отправить с параметрами» можно выбрать данные как на рисунке (см. рис. 2), тогда после первой отправки инициализируется ARP-знакомство хостов, а после второй уже пойдут пакеты ICMP ECHO REPLY на машину жертвы (см. рис. 3).

Как видно, итог — количество сообщений на канале передачи данных жертвы равно количеству хостов в сети (не считая двух «главных героев») при всего лишь одном сообщении у злоумышленника.

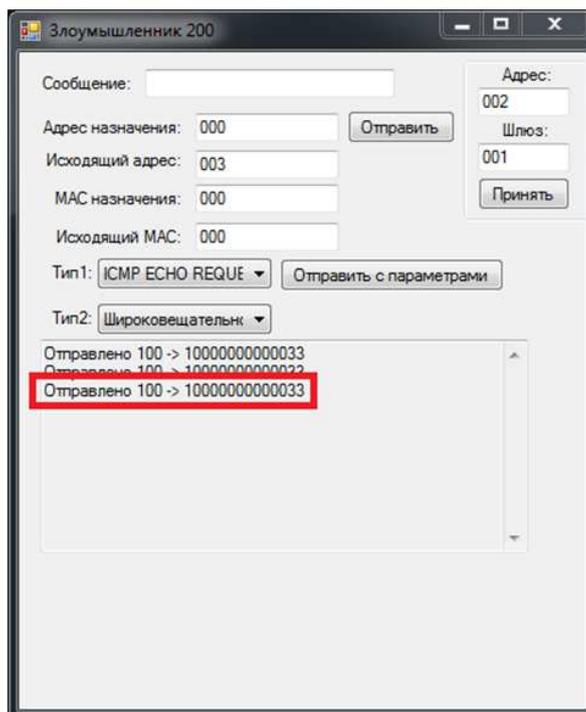


Рис. 2. Отправка широковещательного запроса ECHO REQUEST

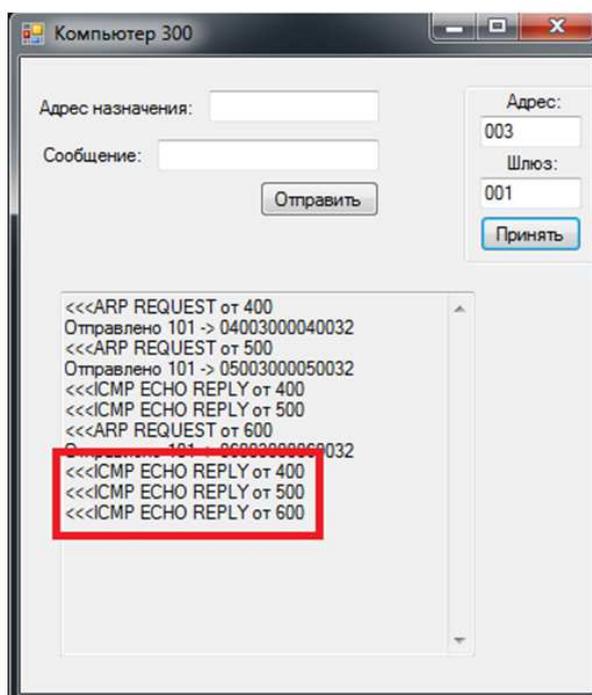


Рис. 3. Сообщения ECHO REPLY на машине жертвы

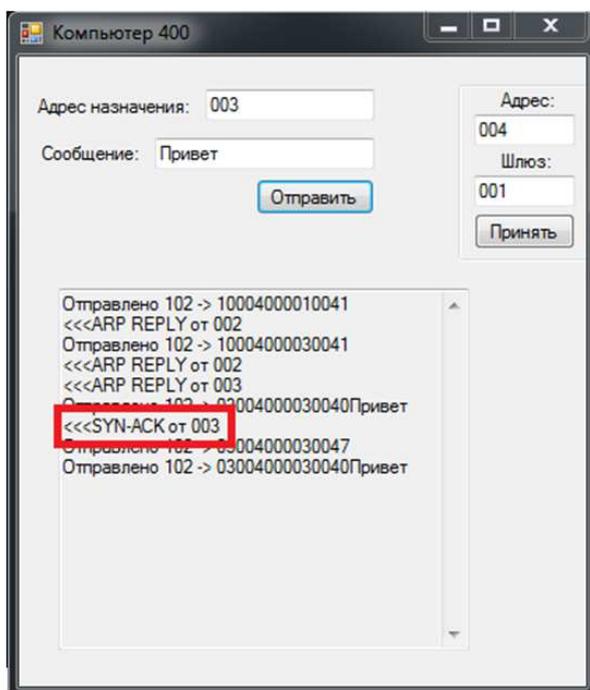


Рис. 4. Ответ SYN-ACK от сервера

Цикл широковещательной отправки:

```

//отправка по всем каналам, кроме того, откуда пришло
for (int i = 0;
i < llen; i++)
{
if (localPorts[i] != port)
{
Thread.Sleep(200);
Send(outPorts[i], str);
}
}

```

#### 4. SYN-Flood

Для начала демонстрации существенных задержек при установке связи нужно добавить в сеть сервер. Его отличие от компьютера в том, что он не принимает входящие сообщения, пока не будет установлено соединение процессом «тройного рукопожатия».

В обычной ситуации сервер отвечает пакетом SYN-ACK на все новые подключения (см. рис. 4). Но если злоумышленник начнёт непрерывно посылать с чужих адресов пакеты SYN на сервер, последний будет добавлять эти запросы в очередь. А поскольку злоумышленник отвечать на SYN-ACK сервера не будет, очередь переполнится, и не останется места новым подключениям.

Даже при условии чистки очереди через некоторое время (тайм-аут подключений) задержки будут серьезными.

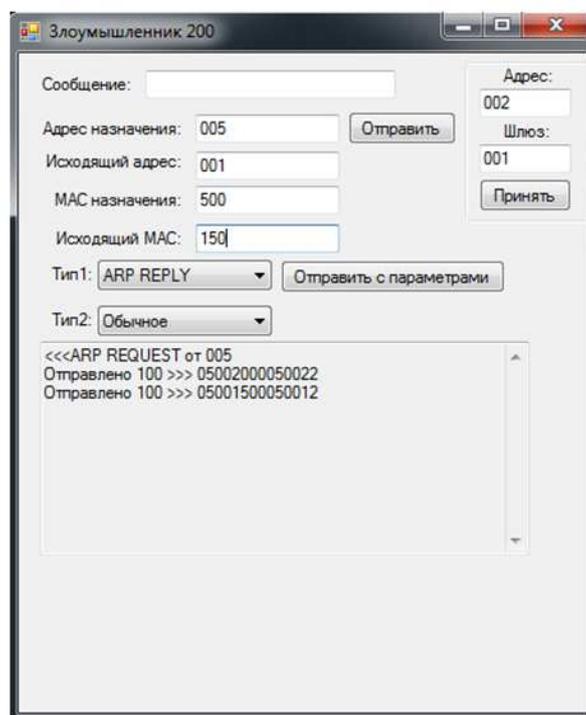


Рис. 5. Отправка поддельного ARP-Reply

## 5. Подмена MAC-адреса

Чтобы продемонстрировать возможности изменения MAC-адреса в ARP-таблице, для начала отправим сообщение «Первый привет» с машины жертвы с внешним адресом назначения (в программе это 100 и больше) на заранее созданный компьютер, находящийся «за» маршрутизатором и имитирующий интернет. Послание дойдёт до адресата. Затем отправим от злоумышленника ARP-Reply с нужными параметрами (см. рис. 5), чтобы машина жертвы, сопоставив IP из пакета с IP роутера, заменила его MAC-адрес на новый. После этого попытка снова отправить сообщение «Второй привет» (см. рис. 6) не увенчается успехом (см. рис. 7). Теперь жертва отрезана от интернета.

## 6. ARP-spoofing

Демонстрация возможности перехвата сетевого трафика.

Злоумышленник посылает поддельный пакет ARP-Reply роутеру, который, сопоставив IP из пакета с IP жертвы, заменяет её MAC-адрес на MAC-адрес злоумышленника.

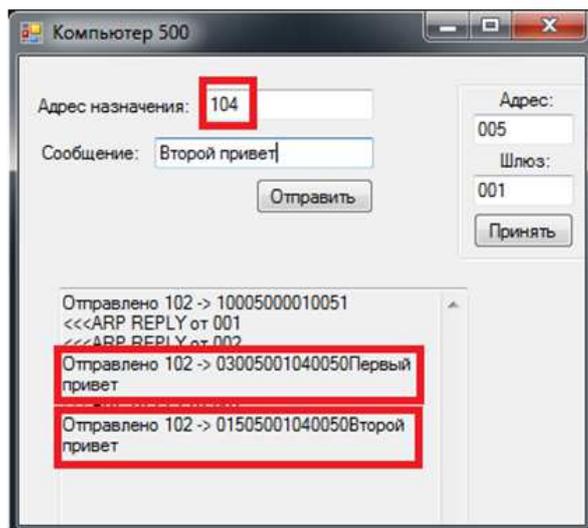


Рис. 6. Отправка двух сообщений

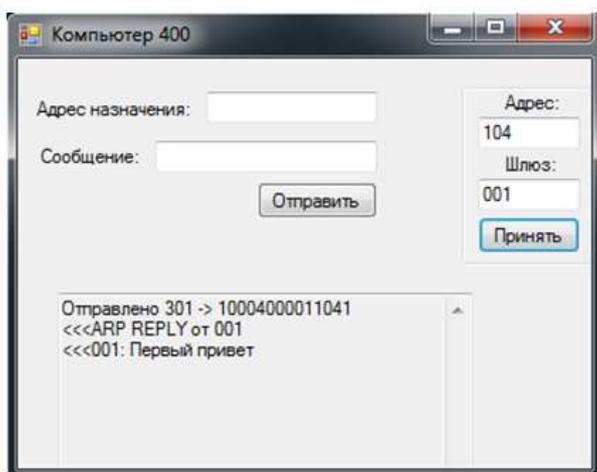


Рис. 7. Получение первого сообщения

Затем посылается поддельный пакет ARP–Reply жертве, которая, сопоставив IP из пакета с IP роутера, заменяет его MAC-адрес на MAC-адрес злоумышленника.

Теперь злоумышленник может просматривать исходящий сетевой трафик жертвы.

Данная атака весьма похожа на подмену MAC-адреса, отличие в том, что второе сообщение всё-таки доходит до компьютера-адресата (см. рис. 8), но не напрямую, а предварительно пройдя через машину злоумышленника (см. рис. 9).

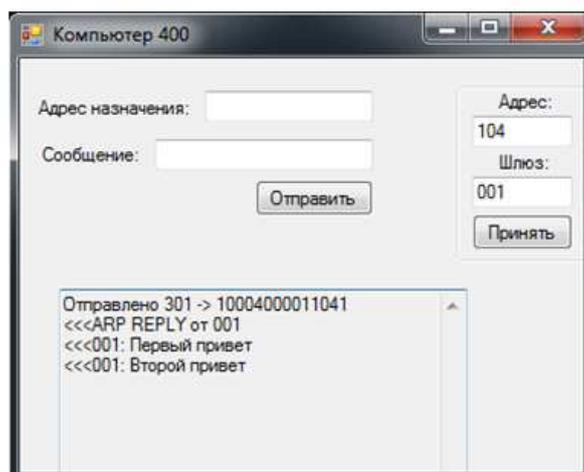


Рис. 8. Получение обоих сообщений

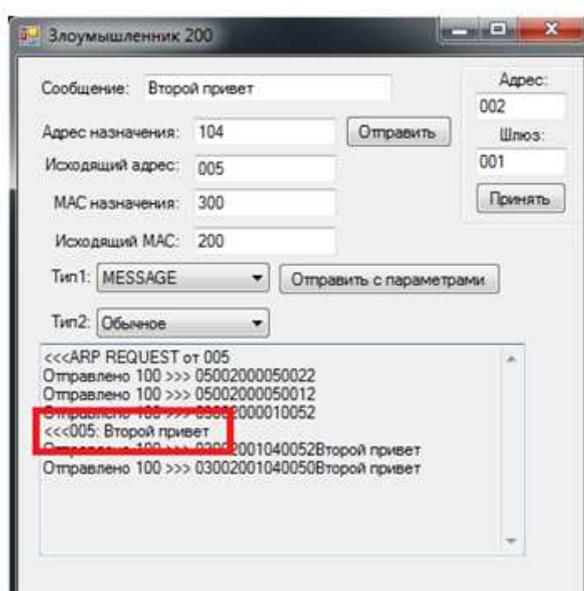


Рис. 9. Получение сообщения злоумышленником

## Заключение

Разработанное программное приложение полезно в первую очередь для обучения студентов и администраторов, которые по долгу службы должны обеспечивать безопасность информационных ресурсов. Данная работа продолжает разработки по моделированию атак на компьютерные сети посредством создания специализированного программного обеспечения, начатые в [1, 2]. Приложение не предусматривает демонстрацию защиты от сетевых атак.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Эннс Е.П. Программа, моделирующая компьютерную сеть и сетевые атаки // Математические структуры и моделирование. 2017. № 3(43). С. 139–149.
2. Гуц А.К., Баженов А.В. Программное обеспечение для моделирования сетей и имитации атак на компьютерные сети // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 99–112.

## THE PROGRAM THAT SIMULATES NETWORK ATTACKS ON COMPUTERS

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phus.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

**O.V. Matushina**

Student, e-mail: vladimirova.o94@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The purpose of the article is to present a computer program that simulates the operation of a computer network, and also demonstrates the results of using some network vulnerabilities by an unfair user.

**Keywords:** computer network, network attacks, network vulnerabilities, network attack imitation.

## REFERENCES

1. Guts A.K. and Enns E.P. Programma, modeliruyushchaya komp'yuternuyu set' i setevye ataki. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 3(43), pp. 139–149. (in Russian)
2. Guts A.K. and Bazhenov A.V. Programmnoe obespechenie dlya modelirovaniya setei i imitatsii atak na komp'yuternye seti. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 4(48), pp. 99–112. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 03.03.2019*

## **SECURE MULTI-AGENT QUANTUM COMMUNICATION: TOWARDS THE MOST EFFICIENT SCHEME (A PEDAGOGICAL REMARK)**

**Olga Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** In many economic and financial applications, it is important to have secure communications. At present, communication security is provided mostly by RSA coding, but the emergent quantum computing can break this encoding, thus making it not secure. One way to make communications absolutely secure is to use quantum encryption. The existing schemes for quantum encryption are aimed at agent-to-agent communications; however, in practice, we often need secure multi-agent communications, where each of the agents has the ability to securely send messages to everyone else. In principle, we can repeat the agent-to-agent scheme for each pair of agents, but this requires a large number of complex preliminary quantum communications. In this paper, we show how to minimize the number of such preliminary communications — without sacrificing reliability of the all-pairs scheme.

**Keywords:** Quantum communication, multi-agent communication.

### **1. Need for Secure Group Communications**

**Need for secure communications.** In e-commerce and e-finance, it is important to preserve privacy and confidentiality of all the transactions. In other words, we need to make sure that e-commerce and e-finance are based on a secure communication scheme.

**How communications are made secure now.** At present, secure communications are based mostly on the RSA algorithm; see, e.g., [1]. In this scheme, the communicator  $A$  selects two large prime numbers  $P_1$  and  $P_2$  that he/she keeps private, and releases their product  $P = P_1 \cdot P_2$  into the public domain. This public code  $P$  can then be used by anyone to encode the messages they send to  $A$ . To decode the messages, one needs to know the factors  $P_1$  and  $P_2$ . Since  $A$  knows these factors,  $A$  can decode these messages.

The security of this encoding scheme is provided by the fact that no efficient algorithm is known for factoring large integers – and RSA algorithms use 100-digit and longer factors  $P_i$ . In principle, we can factor an integer  $P$  by trying

all possible prime numbers  $p \leq \sqrt{P}$ . This works for small  $P$ , but for a number with 100 decimal digits, testing all prime numbers  $\leq \sqrt{P}$  requires  $\sqrt{10^{100}} = 10^{50}$  computational steps — which make this procedure much longer than the lifetime of the Universe.

**Why we need quantum communications.** For factoring large integers on the usual computers, no efficient algorithm is known. However, it is known that if we consider quantum computers, then factoring large integers becomes feasible; see, e.g., [4–6,8]. At present, we do not yet have quantum computers powerful enough to decode the usual RSA messages, but engineers are designing more and more powerful quantum computers, and sooner or later RSA-encoded communications will no longer be secure.

Good news is that the same quantum physics that makes RSA not secure also provides us with a secure way to communicate, known as quantum cryptography; see, e.g., [3,4,8]. In contrast to quantum computing, which is mostly the thing of the future, quantum cryptography is a practical scheme, it has been used for decades already.

In this scheme — it is described in some detail in the appendix — two agents that want to communicate in the future exchange quantum signals. By analyzing these signals, they come up with a sequence  $s = s_1 s_2 \dots s_n$  of bits (0s and 1s)  $s_1, s_2, \dots, s_n$  which they both know but which is not known to anyone else.

This sequence of 0s and 1s can then be used as *one-time pad*. Namely, if one of the two agents needs to send a message  $m = m_1 m_2 \dots m_n$  consisting of bits  $m_1, \dots, m_n$ , then:

- the sender computes and send the encoded signal  $e = s \oplus m$ , where

$$(s \oplus m)_i \stackrel{\text{def}}{=} s_i \oplus m_i$$

and  $\oplus$  means addition modulo 2 — which differs by the usual addition of bits only when  $s_i = m_i = 1$ , in which case  $1 \oplus 1 = 0$ ;

- the receiver, after getting the signal, reconstructs the original message as  $m = s \oplus e$ .

Indeed, for addition modulo 2, we always have  $a \oplus a = 0$ , hence

$$s \oplus e = s \oplus (s \oplus m) = (s \oplus s) \oplus m = 0 \oplus m = m.$$

Once the message is sent, the pair of agents again perform preliminary quantum communications and generate a new one-time pad, etc.

**Need for multi-agent communications.** In economic and financial applications, it is often important to have multi-agent communications. Such communications are especially important for decentralized schemes (like blockchain-based schemes), where each record of financial transactions is stored in many different locations.

In such a scheme, we have several agents. Let us denote the overall number of agents who need to communicate with each other by  $N$ . The system should be

ready for each of these agents  $A_1, \dots, A_N$  to send communication to everyone else.

**Using pairwise communication scheme for multi-agent communication: a straightforward idea.** In principle, we should be ready for communications between each pair of agents. For  $N$  agents, there are  $\frac{N \cdot (N - 1)}{2}$  such pairs. So, a straightforward idea is to repeat the quantum-communication protocol for each pair  $(A_j, A_k)$  and thus get  $\frac{N \cdot (N - 1)}{2}$  one-time pads  $s^{(j,k)}$  corresponding to these pairs.

If agent  $A_j$  needs to send a message to all the other agents  $A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n$ , this agent will use a one-time pad  $s^{(j,k)}$  to communicate with the  $k$ -th agent.

**Can we do it more efficiently?** The above scheme requires  $\frac{N \cdot (N - 1)}{2}$  preliminary quantum communications — and preliminary quantum communications are the most complex part of the general quantum communication protocol. Can we have fewer preliminary quantum communications?

**We can do it, but at the expense of reliability.** One possibility to have a more efficient multi-communication scheme is to select one agent as a hub and set up one-time pads between this selected agent and everyone else. This way, we have a secure communication channel between the hub agent and every other agent.

Then, if an agent  $A_j$  wants to transmit a message to everyone else, this agent first sends this message to the hub agent, and then the hub agent sends it to everyone else.

This scheme is efficient — it needs only  $N - 1$  preliminary quantum communications — but it is not as reliable as the original scheme: indeed, if the hub agent is not functioning well (which happens), then the original scheme still works while the hub scheme does not. So, we arrive at the following question.

**Can we have an efficient scheme without decreasing reliability: formulation of the problem and our answer.** Can we have an efficient scheme without decreasing reliability?

In this paper, we show that this is indeed possible: namely, we provide a multi-agent communication scheme which is maximally efficient and at the same time as reliable as the all-pairs scheme.

## 2. Towards the Optimal Multi-Agent Quantum Communication Protocol

**Lower bound on the number of preliminary quantum communications.** The only way to have secure communications is to have a secure one-time pad provided by preliminary quantum communications. A pair of agents may get a one-time pad either directly from the mutual preliminary quantum communication, or by somehow combining one-time pads provided by other pairs.

Each agent can thus securely communicate only with agents which are either directly connected with this agent by preliminary quantum communications, or connected by a chain in which each agent is connected to the next one by preliminary quantum communications between them.

Since we want each agent to be able to securely communicate with any other agent, every two agents must be connected by such a chain. We start with a single agent. At each point, we have a set of agents that can be thus connected with the agent  $A_1$ . Each new preliminary quantum agent-to-agent communication adds may add one agent to this list — if it connects this new agent with one of the agents which are already on this list. Thus, each new communication adds no more than one new agent to this list. We start with a single agent, so after performing  $k$  agent-to-agent preliminary quantum communications, we add no more than  $k$  agents to the original list, and thus, we have  $\leq k + 1$  agents connected to  $A_1$ . We want to have all  $N$  agents connected to  $A_1$ , so we must have  $N \leq k + 1$  and thus,  $k \geq N - 1$ .

This is the desired lower bound: to enable each agent to securely communicate with every other agent, we need to perform at least  $N - 1$  agent-to-agent preliminary quantum communications.

**Towards a scheme that implements this lower bound.** Let us show that it is possible to have a secure communication protocol that requires exactly  $N - 1$  agent-to-agent preliminary quantum communications. Due to what we have just shown, this algorithm is the most efficient one — in the sense that it requires the smallest possible number of agent-to-agent preliminary quantum communications.

Let one of the agents — let us denote this agent by  $A_1$  — perform the preliminary step of quantum communication with every other agent  $A_1, \dots, A_m$ . As a result, for each  $j = 2, 3, \dots, N$ , both  $A_1$  and  $A_j$  know a one-time pad  $s^{(j)}$  — which no one else knows.

Then,  $A_1$  uses a random number generator to generate a random string  $s$  and then sends by an open channel, to each agent  $A_j$ , a string  $s \oplus s^{(j)}$ . Each agent can reconstruct  $s$  as  $(s \oplus s^{(j)}) \oplus s^{(j)}$ . Thus, all  $N$  agents now have the same one-time pad  $s$  that they can use for the future multi-agent communication.

## Acknowledgments

This work was partially supported by the US National Science Foundation via grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

## REFERENCES

1. Th. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2009.
2. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.

3. O. Galindo, V. Kreinovich, and O. Kosheleva, “Current quantum cryptography algorithm is optimal: a proof”, *Proceedings of the IEEE Symposium on Computational Intelligence for Engineering Solutions CIES’2018*, Bengaluru, India, November 18–21, 2018.
4. M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
5. P. Shor, “Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer”, *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Santa Fe, New Mexico, November 20–22, 1994.
6. P. Shor, “Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1997, Vol. 26, pp. 1484-ff.
7. K. S. Thorne and R. D. Blandford, *Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2017
8. C. P. Williams and S. H. Clearwater, *Ultimate Zero and One*, Copernicus, New York, 2000.

## A. Quantum Communication: A Brief Reminder

**Quantum background: a brief reminder.** In quantum mechanics (see, e.g., [2, 7]) each bit, in addition to the usual two states 0 and 1 (which are denoted by  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$ ), it is also possible to have a superposition  $c_0 \cdot |0\rangle + c_1 \cdot |1\rangle$ , where  $c_i$  are complex numbers for which  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ . If in this state, we try to find out whether we have 0 or 1, we get 0 with probability  $|c_0|^2$  and 1 with probability  $|c_1|^2$ .

In particular, the standard quantum communication algorithm uses the following two states:

$$|0'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$$

and

$$|1'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle.$$

To reconstruct the state, we need to use a measuring instrument. A measuring instrument can be tuned:

- either to detect the usual states  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$  (we will denote this by  $+$ )
- or to detect the quantum states  $|0'\rangle$  and  $|1'\rangle$  (we will denote this tuning by  $\times$ ).

In this case:

- If the measuring instrument’s tuning matches the signal – e.g., if the signal is  $|0\rangle$  or  $|1\rangle$  and the instrument is tuned on  $|0\rangle$  or  $|1\rangle$  – then the instrument reconstructs the original signal.
- On the other hand, if there is a mismatch between the instrument’s tuning and the signal – e.g., if the signal is  $|0'\rangle$  or  $|1'\rangle$  while the instrument is tuned on  $|0\rangle$  or  $|1\rangle$  – then, irrespective of the signal, the instrument returns 0 or 1 equal with probability 1/2, and the original signal is lost.

**The actual quantum communication scheme.** The sending agent  $A$  runs, several times, a random number generator that generates 0 or 1 with equal probability  $1/2$ . As a result, we get a multi-bit sequence  $r_1 \dots r_c$ . Then,  $A$  runs the same random number generator  $n$  more times, generating  $c$  more bits  $t_1 \dots t_c$ . For each  $i$ :

- if  $t_i = 0$ , then  $A$  uses the  $+$  tuning to send the signal  $t_i$ , i.e., sends  $|0\rangle$  if  $r_i = 0$  and sends  $|1\rangle$  if  $r_i = 1$ ;
- if  $t_i = 1$ , then  $A$  uses the  $\times$  tuning to send the signal  $t_i$ , i.e., sends  $|0'\rangle$  if  $r_i = 0$  and sends  $|1'\rangle$  if  $r_i = 1$ .

The receiving agent  $B$  also runs its own random random number generator, generating yet another sequence  $b_1, \dots, b_c$  of  $c$  bits. Then, for each  $i$ :

- if  $b_i = 0$ , then  $B$  uses the  $+$  tuning to measure the received signal, and
- if  $b_i = 1$ , then  $B$  uses the  $\times$  tuning to measure the received signal.

For those bits for which there is a match between the signal and the tuning, i.e., for which  $t_i = b_i$ ,  $B$  gets exactly the original signal  $r_i$ . For every other index  $i$ , the result of  $B$ 's measurements is 0 or 1 with probability  $1/2$  — and the original signal  $r_i$  is lost.

Now,  $A$  openly sends, to  $B$ , all the bits  $t_i$ . In half of the cases,  $b_i$  coincides with  $t_i$ . The agent  $B$  sends, to  $A$ , the list of such  $i$ 's. For these  $i$ 's — and there are  $c/2$  such  $i$ 's — both agents know the value  $r_i$ . The sequence of all these common values is the desired one-time pad of length  $n \approx c/2$  that  $A$  and  $B$  can now use to securely communicate.

**Why is this scheme secure.** The security of this scheme is based on the fact that an eavesdropper does not know which tuning was used for each bit  $i$ . If the eavesdropper tries to measure the signal, it will thus, in half of the cases, use the wrong tuning, and thus, the original signal will be lost — i.e., replaced with a random bit.

As a result, even for some of the bits for which  $t_i = b_i$ , due to this replacement, the bits measured by  $B$  will be, in general, different from  $r_i$ . To detect eavesdropping,  $A$  also sends to  $B$ , by open channel, some of the bits  $r_i$  corresponding to the cases when  $t_i = b_i$ .

- If for some  $i$ ,  $B$  measured a bit different from  $r_i$ , this means that there was an eavesdropper.
- If all the test-bits  $r_i$  are reproduced by  $B$  exactly — this means that the channel was secure, there was no eavesdropping.

**БЕЗОПАСНАЯ МНОГОАГЕНТНАЯ КВАНТОВАЯ КОММУНИКАЦИЯ:  
НА ПУТИ К НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНОЙ СХЕМЕ  
(ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ)**

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

**Аннотация.** Во многих экономических и финансовых приложениях важно иметь безопасную связь. В настоящее время безопасность связи обеспечивается главным образом RSA-кодирование, но появляющиеся квантовые вычисления могут взломать этот код, делая его небезопасным. Один из способов сделать связь абсолютно безопасной — использовать квантовое шифрование. Существующие схемы квантового шифрования нацелены на связь от агента к агенту; однако на практике нам часто требуется безопасная многоагентная связь, где каждый из агентов может безопасно отправлять сообщения всем остальным. В принципе, мы можем повторить схему агент-агент для каждой пары агентов, но для этого требуется большое количество сложных предварительных квантовых связей. В этой статье мы покажем, как минимизировать количество таких предварительных сообщений — без ущерба для надёжности схемы всех пар.

**Ключевые слова:** квантовая коммуникация, мультиагентная коммуникация.

*Дата поступления в редакцию: 02.12.2018*

## Авторам

### Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате  $\LaTeX$  (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу<sup>1</sup>;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

### Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

### Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
  - фамилии, имени и отчества,
  - учёного звания,
  - учёной степени,
  - должности,
  - места работы или учёбы,
  - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета  $\LaTeX$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор  $\text{MiKTeX}$ , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

---

<sup>1</sup>Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

## Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

### **Авторская этика**

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внесшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

### **Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык**

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

### **Электронная почта для отправки статей**

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

# Математические структуры И моделирование

№1(49)

Главный редактор

**А.К. Гуц**

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

**Д.Н. Лавров**

Зам. глав. ред., технический редактор

**Н.Ф. Богаченко**

Корректор:

**И.Н. Баловнева**

Проверка корректности перевода:

**А.Н. Кабанов**

---

#### Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,  
Омский государственный университет

E-mail: [guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru), [lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>



---

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15. Тираж 100 экз. Заказ № 70.

---

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского  
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



19049 >