Математические структуры и моделирование
2019. № 1(49). С. 38–46

УДК 510.2+101.1
DOI: 10.25513/2222-8772.2019.1.38-46

РАЦИОНАЛЬНАЯ СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ

Н.В. Михайлова
к.ф.н., доцент, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Любая программа обоснования математики содержит в себе как рациональные, так и иррациональные допущения. В статье показано, что философско-методологические проблемы современного математического образования различного уровня строгости допускают вполне рациональное обоснование или объяснение математических утверждений.

Ключевые слова: математическое образование, проблема обоснования математики, рациональность в математике.

Введение

Рациональное знание, наиболее совершенным образцом которого является математическая теория, даёт возможность понять не только окружающий нас мир, но и реальные возможности обоснования знания. Но для понимания проблемы обоснования математики следует уяснить смысл самого этого понятия. В разные периоды под обоснованием математики понимались соответствующие становлению математики как строгой науки философско-методологические проблемы. Например, для древнегреческой математики это была проблема неизмеримых величин, для математики XVII века — проблема интерпретации иррациональных и мнимых чисел, для математики XVIII века — актуальная проблема строгости доказательства в теории дифференциального исчисления. На рубеже XIX и XX веков Г. Кантор и Д. Гильберт впервые сформулировали совершенно новое понимание программы обоснования математики, рассматривая её как проблему непротиворечивости новых математических теорий.

В такой постановке решение задачи обоснования как новой философско-методологической проблемы математики зависит также от выбора методологических и философских оснований математической теории. Начиная с неверного толкования одним из основоположников новой научной методологии — английским философом XVII века Фрэнсисом Бэконом — истинных перспектив новой науки, многие исследователи соблазнились «благостными» перспективами грядущего «века рациональности», хотя понятие рациональности неоднозначно. Так, современный рационализм не признает никаких догматов, но в философско-методологическом значении сам термин «рациональность» характеризует определённые структуры человеческого мышления, а с точки зрения проблем обоснования математики — выразимость математических концепций в языке. Однако представление о рациональности со временем было в значительной степени искажено и стало отождествляться с логичностью. Попытка вывести критерии рациональности исходя только из внешних факторов, таких, например, как общественные и культурные традиции, может привести к логическому кругу.

Основная часть

Каким бы ни было множество внешних факторов, используемых при определении рациональности, оно само, в свою очередь, тоже требует рационального анализа, как требуют анализа и связи между исходными факторами и определяемыми с их помощью принципами рациональности. Подобного рода затруднения побуждают некоторых философов науки вообще отказаться от содержательного определения даже научной рациональности. «Понятие рациональности является типично философским, — считает авторитетный философ науки В.В. Целищев, — и отождествлению этого понятия с математической практикой способствовало то историческое обстоятельство, что философия долгое время формировала себя по математическому образу и подобию» [1, с. 14]. Философ Иммануил Кант понимал «рацио» как что-то, что является «пониманием», хотя это не всегда можно высказать в наглядных терминах. Например, определённая часть некоторых методологических трудностей, связанных с философско-методологической проблемой «дискурсивное — интуитивное», была сформулирована Кантом в его знаменитых «антиномиях чистого разума».

Анализируя антиномии разума, в частности, противоречие между причинностью и свободой, Иммануил Кант обнаружил также пределы рационального мышления. Исследуя содержимое априорного знания, в отличие от Рене Декарта, он пришёл к выводу, что определённые истины находятся за пределами рационального понимания. Продолжая традицию Аристотеля, он определил специфические априорные формы и категории, например, пространство и время, единство и множественность. В критике рационального мышления Кант, по сути парадоксальным образом, подтвердил именно рациональный, научный подход к добыванию истин, поскольку происхождение антиномий разума, считал он, следует искать в сложной природе априорного знания. Следуя Канту, можно констатировать, что имеются определённые цели рационального исследования, состоящие в достижении истины и понимания. Даже определённый стиль доказательства новой теории принимается математиками потому, что данный образец доказательства, согласно мнению авторитетов в этой области математики, соответствует задаче получения истинных следствий и согласуется с современным уровнем знаний, несмотря на кризисы в проблеме обоснования математики, поскольку последние порождаются рационалистической критикой самих математиков и невероятным переплетением в человеке разумного, или рационального, и иррационального начал.

Противопоставление рационализма и иррационализма в философии имеет много различных смыслов. Первый фундаментальный смысл идёт от математического образа соотношения рациональных и иррациональных чисел. Мыслительные процессы с мгновениями гениальных озарений трудно поддаются рациональному объяснению, что можно пояснить на примере построения и обоснования иррациональных чисел. Вместо понятий «рациональный метод» или «рациональное суждение» многие исследователи после фундаментальных результатов Курта Гёделя предпочитают говорить о полноте, непротиворечивости, простоте и других, лучше определяемых терминах. При становлении математического знания стало явно проявляться внутреннее противоречие между его эффективной способностью получать конкретные математические результаты и философско-методологическими трудностями их обоснования [2]. Но идея окончательности математического результата противоречит современной теории познания, акцентирующей внимание на относительности результатов человеческого мышления. Такого рода представления идут от сопоставления математики с физикой, а также от рационалистических взглядов на математику, иногда игнорирующих, например, важнейшую математическую деятельность по конструированию математических структур и моделированию, позволяющих устанавливать связи, которые поддаются проверке с помощью конечных процедур.

Рассмотрим, например, такое известное иррациональное число как $\sqrt{2}$. Используя доказательство от противного, древние греки сумели доказать, что число $\sqrt{2}$ не представимо в виде обыкновенной дроби. Ранее все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа кратко описать число, равное корню из 2, как записать его в виде $\sqrt{2}$, так как любая попытка записать $\sqrt{2}$ не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, такого как $1{,}414213562373\ldots$ С точки зрения математики, но не здравого смысла, математически тривиально утверждение о том, что произведение двух иррациональных чисел может быть равно рациональному числу. Действительно, например, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. В то же время доказательство того, что иррациональное число в иррациональной степени тоже может быть рациональным числом, уже не столь математически конструктивно.

Так, если бы $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — было рациональным числом, то искомая пара иррациональных чисел была бы найдена. Теперь пусть оно иррациональное, тогда его степень $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ — рациональное число. Приведённый в этом примере способ доказательства — разбор случаев — был известен уже в XIX веке, хотя в то время ещё не было известно: является ли число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рациональным. Только в 30-е годы XX века было дано довольно сложное доказательство того, что это число иррационально. В рассмотренных выше примерах мы по существу не пользовались никакой математической техникой. На первый взгляд более простым кажется следующий вопрос: «Является ли число $2^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным?» Он известен под названием «7-я проблема Гильберта». Хотя она была поставлена Давидом Гильбертом в более общей формулировке, сам он считал, вопрос о числе $2^{\sqrt{2}}$ в ней, можно сказать, наиболее показательным. Ответ на этот вопрос удалось найти не сразу, а спустя три десятка лет, ещё при жизни Гильберта, известному русскому математику Р.О. Кузьмину. Он доказал иррациональность числа $2^{\sqrt{2}}$. С точки зрения рациональной сущности математического образования непонимание математики происходит иногда оттого, что в ней пытаются найти что-то сверхъестественное, а надо пытаться искать в ней именно естественное, не только вне себя, а что-то и в себе, чего мы, несмотря на естественность математики, часто не понимаем.

Нестандартные математические примеры не только стимулируют творческую активность, но и дают нам прочувствовать сущность математики. Например, сложные «нефинитные» доказательства лишь математически идеальны и как таковые не имеют практического смысла, однако ими можно манипулировать абстрактно, а именно точно так же, как i не является вещественным числом, но им можно оперировать алгебраически. Современный рационализм в математике сейчас гораздо более сложный, чем рационализм эпохи Просвещения. Но, как отмечал академик В.И. Арнольд: «Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Наиболее характерными приметами формализованного преподавания является изобилие немотивированных определений и непонятных (хотя логически безупречных) доказательств» [3, с. 109]. Более того, сколько-нибудь содержательная часть современной математики не является полностью формализованной, хотя для той её части, которая уже формализована, её непротиворечивость нельзя окончательно доказать в методологически ограничительных рамках самой формализованной системы. Кроме доказательств непротиворечивости наибольший интерес представляют успешно проводимые формальные рассуждения, являющиеся в понимаемой математике критерием полезности и убедительности любого математического понятия или теории.

Например, для определения показательной функции комплексного переменного $z = x + iy$, где i — мнимая единица, $i^2 = -1$, и которую обозначают e^z, существует несколько технически разноплановых математических определений. Показательную функцию можно определить с помощью равенства $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, рассматриваемого для всех комплексных чисел z. Другой способ — это определение показательной функции как единственного решения задачи Коши для дифференциального уравнения $df(z)/dz = f(z)$, удовлетворяющего начальному условию $f(0) = 1$, имеющего вид $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. Заметим, что на понимании того, что сумма функционального ряда также опять является функцией, основано определение показательной функции с помощью ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, который для каждого комплексного z сходится абсолютно и его сумма равна $e^x(\cos y + i \sin y)$.

По аналогии с определением показательной функции действительного переменного полагают, что $e^z = \lim(1 + z/n)^n$ при $n \to \infty$. Этот предел существует для всех z и равен $e^x(\cos y + i \sin y)$. Показательную функцию $f(z) = e^z$ можно задать ещё и аксиоматически, предписав ей следующие свойства: функция f однозначно определена для всех комплексных чисел z, причём для действительного значения $z = x$ функция f также принимает действительные значения и $f(1) = e$; кроме того, для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$; и функция f дифференцируема в точке $z = 0$. Возможно, комплексные числа, играющие важную роль во всей понятийной системе квантовой механики, заслуживают с этой точки зрения наиболее пристального внимания. Даже Давид Гильберт, предложивший современную концепцию идеи «существования в математике», привлекал для её иллюстрации выражение $\sqrt{-1}$. Двойственность реального и идеального выражена даже в этимологии терминов, связанных с комплексными числами, а именно, в названиях «действительная» и «мнимая» часть.

Хотя математически не существует вещественного числа, квадрат которого равен -1, но если удаётся доказать, что некоторое формальное понятие обладает свойствами, которые с помощью конечного числа умозаключений никогда не приведут к противоречию, то он считал, что его существование доказано. С такой философской точки зрения доказательство непротиворечивости аксиом арифметики вещественных чисел равносильно доказательству математического существования понятия вещественных, в том числе иррациональных, чисел, или континуума. Многие математические объекты содержат в себе одну из фундаментальных математических двойственностей — это конечное и бесконечное. Но чтобы обнаружить математические объекты, которые как бы указывают на пробелы в казуальности, то есть случайности, нашего мышления, несомненно, нужна природная наблюдательность и математическая смелость восприятия.

Когда мы оперируем иррациональными и комплексными числами в рамках существующих математических формализмов, то они кажутся вполне естественными, но когда мы смотрим на их «странности» непосредственно, то они иногда кажутся немыслимыми. Традиционный рационализм объявлял основным источником знания интуицию. Например, несмотря на то, что большинство математиков не слишком много знают об аксиомах арифметики, все они сходятся во мнении относительно того, какие же рассуждения о полезных свойствах натуральных чисел следует признать доказательными, а какие могут привести лишь к гипотезам или ошибкам. Даже когда теория вроде бы основательно построена на аксиомах, в её рассуждениях могут быть обнаружены пробелы, не отражённые в аксиомах, но не вызывающие разногласий относительно их справедливости. Немецкий математик Мориц Паш, одним из первых исследовавший аксиоматические основы геометрии, только в XIX веке ввёл понятие «аксиомы порядка», отсутствовавшее в геометрии Евклида и используемое ранее без всякого обоснования. Пытаясь объяснить такого рода явления, обычно приходят к понятию интуиции, связывая её с «непосредственным постижением истины» или с феноменом «математического творческого мышления».

В понятийном арсенале математики мнимые и иррациональные величины апеллируют к методам, которые, на первый взгляд, кажутся «авантюрными» и «фантастическими». На начальных ступенях обучения очень трудно дать всему этому верное объяснение, поскольку математика — это особый «мир», в котором надо довольно долго прожить по эту сторону строгих границ разума, чтобы прочувствовать всё, что в нём происходит. «Мир математики» отличается от мира, в котором мы живём. Поэтому обоснование математики необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надёжность математических доказательств и рассуждений, включающие разные аспекты практики и приложений [4]. Значимость абстрактных математических результатов определяется будущим развитием науки, но у нас нет рациональных способов заглянуть в него, поскольку обращения к экспертам, включают в себя иррациональный элемент.

Даже если роль интуиции иногда переоценивалась, нельзя отрицать, что она всё же является источником многих формальных истин нашего знания. Математики уже сталкивались с такими феноменами в обосновании своей науки, для понимания которых они нуждаются в какой-то другой, более глубокой уверенности. Тогда они обращались к религиозным точкам зрения, к божественной и трансцендентной сущностям. Так, математиков иногда упрекают в том, что они присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных множествах справедливы, поставив себя на место, с которого эти множества можно созерцать. В качестве наиболее впечатляющего примера подобной смелости можно привести работу Георга Кантора над теорией бесконечных множеств, проблемы которой так и не удалось полностью решить в прошедшем веке науки. Например, антитеза актуальной и потенциальной бесконечностей поставила перед математикой того времени, наряду с логическими и философскими, также и богословские проблемы. Даже несмотря на всевозможные философско-теологические предубеждения и возражения, необходимость оперирования бесконечностью в различных формах, в том числе и в форме актуальной бесконечности, появилась с самого начала возникновения древнегреческой математики.

Продемонстрируем простейшую конечно-бесконечную ситуацию на примере только одного математического объекта, доступного пониманию студентов младших курсов, а именно — степени с произвольным показателем, a^b, где a и b — произвольные комплексные числа. Это выражение определяют с помощью многозначной логарифмической функции, то есть $a^b = e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$. Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение a^b имеет бесконечное множество значений. Однако в частных случаях среди них может быть только конечное число различных значений, если b — дробное число, или они могут все совпадать, если b — целое число. Удивительно то, что с мнимыми или ещё какими-либо «невозможными» величинами можно производить вычисления, дающие осязаемый, точнее действительный, результат. Некоторые основные математические понятия, в том числе мнимые числа, тоже трудно объяснить неподготовленному уму, и чтобы восполнить пробелы нашего мышления, мы иногда нуждаемся в другой, более глубокой уверенности, чем чисто рациональные объяснения. Математические утверждения, с точки зрения здравого смысла, изобилуют «бессмыслицами» и «нелепостями», в которых в большинстве случаев повинна бесконечность. Поэтому высказывались такие мнения, что если даже новое понятие вводится без риска получить противоречие и если это может быть доказано, то и тогда оно не считается вполне оправданным.

Такого рода возражения в своё время выдвигались против комплексных чисел. Многие учёные, в том числе и математик Блез Паскаль, не верили в «отрицательные» и «мнимые» числа, которые не признавались за реальные объекты, несмотря на то, что из-за них не возникало никаких противоречий. Совершенно неожиданный для непосвящённых факт состоит в том, что все значения выражения i^i — это действительные числа, $i^i = e^{i \cdot \mathrm{Ln}\, i} = e^{(\pi/2)+2k\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и, например, для $k = 0$ имеем, что $i^i = e^{\pi/2} = 0{,}2\ldots$ Последний пример встречается в упоминаемой выше 7-й проблеме Гильберта. Поскольку i^i — действительные числа, то можно задать такой совершенно неожиданный, с точки зрения их вида, вопрос: являются они рациональными или иррациональными? В проблеме Гильберта как раз и записано выражение i^{-2i}, которое равно e^{π}. Вот её полная формулировка: «Доказать, что степень α^{β} при алгебраическом основании α и алгебраическом иррациональном показателе β как, например, число $2^{\sqrt{2}}$ или $e^{\pi} = i^{-2i}$ — есть всегда или трансцендентное число, или, по крайней мере, иррациональное».

Давид Гильберт выражал надежду на то, что решение этой, а также аналогичных ей проблем приведёт к новым методам и новым точкам зрения на сущность понимания иррациональных и трансцендентных чисел. В 1934 году высказанную Гильбертом общую гипотезу о трансцендентности чисел вида α^{β} независимо доказали А.О. Гельфонд и Т. Шнайдер. Именно рациональности, сильно связанной с традициями науки на протяжении последних трёх столетий, мы обязаны тем, что, в конце концов, находим понимаемое объяснение чего-либо. Поразительно, что в столь строгой и рационалистической науке как математика, залогом точности могут стать операции с мнимыми и иррациональными числами. Одно из равенств, тривиальное с математической точки зрения, содержит в себе важнейшие трансцендентные иррациональные числа e, π, а также действительную, мнимую единицы 1, i и число 0 — это пять фундаментальных математических констант, каждая из которых была введена в математику в особом специфическом контексте, то есть это равенство вида: $e^{i\pi} = -1$. Математик и механик академик А.Н. Крылов видел в этой формуле удивительный символ единства всей математики, так как число -1 представляет в ней арифметику, i — алгебру, π — геометрию и e — математический анализ.

Заключение

Могут ли в научном познании скрываться элементы иррационализма? Если рациональность состоит в том, чтобы верить только в то, про что мы можем разумно предполагать, что оно является истинным, то наука была и всегда будет иррациональной. Но одной из целей математики, отличающей её от других наук, является методологическая значимость обоснования, раскрывающая рациональную сущность математического образования. «Именно здесь и вступают в силу методологические (философские) установки, которые существенны особенно тогда, когда общая задача обоснования определилась и вопрос только в форме этого обоснования» [5, с. 111]. Математики XX и XXI веков активно и плодотворно используют в своих выводах теорию бесконечных множеств, опираясь на неё как наиболее фундаментальную структуру при обосновании математики, несмотря на некоторые её парадоксы. Этот иррациональный факт философии математики имеет вполне рациональное объяснение в поведении математиков, поскольку внутренние проблемы теории не являются причиной отказа от неё, если она не исчерпала все свои эвристические возможности. Сила рационального мышления в проблемно-ориентированном обосновании математики состоит в том, что оно позволяет сделать аргументы ясными даже для тех, кто не искушён в данной области математического знания.

Литература

1. Целищев В.В. Возможна ли иррациональная математика // Философия науки. 2000. № 1. С. 14–21.
2. Михайлова Н.В. Методологический прагматизм проблемно-ориентированного обучения математике // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1. С. 30–36.
3. Арнольд В.И. Математика и математическое образование в современном мире // Математическое образование. 1997. Вып. 2. С. 109–112.
4. Михайлова Н.В. Проблемно-ориентированное обоснование в философии математического образования // Философия образования. 2018. № 75, вып. 2. С. 124–129.
5. Новоселов М.М. Аргументация, абстракция и логика обоснования (заметки на полях) // Теория и практика аргументации. М. : ИФ РАН, 2001. С. 109–129.

RATIONAL ESSENCE OF MATHEMATICAL EDUCATIONS AND JUSTIFICATION PROBLEM

N.V. Michailova

Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, e-mail: michailova.n@bntu.by

Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

Abstract. Any program of mathematical justification comprises rational and irrational assumptions. Philosophical and methodological problems of modern mathematical formation of different severity level allow rational justification or an explanation of mathematical statements.

Keywords: mathematical education, the problem of substantiation of mathematics, rationality in mathematics.

References

1. Tselishchev V.V. Vozmozhna li irratsional'naya matematika, Filosofiya nauki, 2000, no. 1, pp. 14–21. (in Russian)

2. Mikhailova N.V. Metodologicheskii pragmatizm problemno-orientirovannogo obucheniya matematike. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 1, pp. 30–36. (in Russian)
3. Arnol'd V.I. Matematika i matematicheskoe obrazovanie v sovremennom mire. Matematicheskoe obrazovanie, 1997, iss. 2, pp. 109–112. (in Russian)
4. Mikhailova N.V. Problemno-orientirovannoe obosnovanie v filosofii matematicheskogo obrazovaniya. Filosofiya obrazovaniya, 2018, no. 75, iss. 2, pp. 124–129. (in Russian)
5. Novoselov M.M. Argumentatsiya, abstraktsiya i logika obosnovaniya (zametki na polyakh). Teoriya i praktika argumentatsii, Moscow, IF RAN Publ., 2001, pp. 109–129. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 29.12.2018