Математические структуры и моделирование
2018. №4(48). С. 21–26

УДК 514.764.7+517.926.7
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.4.21-26

О КРИВЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КРИВИЗНАМИ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А. Зубарева
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: i_gribanova@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия

Аннотация. Автор доказала, что все кривизны регулярной кривой в n–мерном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}^n_l$, $n \geqslant 2$, произвольного индекса l постоянны тогда и только тогда, когда эта кривая есть орбита некоторой однопараметрической подгруппы группы всех движений пространства $\mathbb{E}^n_l$.

Ключевые слова: кривизна, репер Френе, орбита однопараметрической группы изометрий, псевдоевклидово пространство.

Предварительные сведения и вспомогательное утверждение

Кривые с постоянными кривизнами в n–мерном евклидовом пространстве, $n \geqslant 3$, бегло рассмотрены в книге Ю.А. Аминова [1]. Там показано, что вид кривых с постоянными ненулевыми кривизнами в чётномерных и нечётномерных евклидовых пространствах существенно различается. Именно в чётномерном евклидовом пространстве такая кривая ограничена и является сферической, т. е. лежит на некоторой сфере, а в нечётномерном она уходит по одному направлению в бесконечность. Несколько более расширенное утверждение другим способом было получено в книге С.В. Сизого [2].

В этой статье доказано, что регулярные кривые с постоянными кривизнами в n–мерном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}^n_l$, $n \geqslant 2$, произвольного индекса l есть в точности орбиты однопараметрических подгрупп группы всех движений этого пространства.

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}^n_l$ *индекса* l, где n, l — целые числа, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant l \leqslant n/2$, есть n–мерное векторное пространство *с псевдоскалярным произведением*

$$\{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\} := -x_1y_1 - \dots - x_ly_l + x_{l+1}y_{l+1} + \dots x_ny_n.$$

Очевидно, что $\mathbb{E}^n_0$ — n–мерное евклидово пространство. *Скалярный квадрат* вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ в $\mathbb{E}^n_l$ имеет вид

$$x^2 := \{x, x\} = -x_1^2 - \dots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \dots x_n^2$$

и может быть положительным, отрицательным (при $l > 0$) или равным нулю. Число $\|x\| := \sqrt{|\ x^2\ |}$ называется *длиной* вектора x.

Пусть γ — регулярная кривая в $\mathbb{E}_l^n$, $r = r(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — её естественная параметризация, т. е. $\|r'(s)\| \equiv 1$. Определим $q_0(s) = r'(s)$. Если $\|q_{m-1}(s)\| \neq 0$, $m = 1, \ldots, n$, то положим $e_m(s) = q_{m-1}(s)/\|q_{m-1}(s)\|$, $\varepsilon_m(s) = e_m^2(s)$,

$$q_m(s) = e_m'(s) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(s)\{e_m'(s), e_i(s)\}e_i(s).$$

Если $\|q_{m-1}(s)\| = 0$, то векторы $e_i(s)$, $i = m, \ldots, n$, не определены.

Пусть $\|q_i(s)\| \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Нетрудно показать, что система векторов $\{e_i(s)\}_{i=1,\ldots,n}$ ортонормальна, т. е. $\|e_i(s)\| = 1$, $\{e_i(s), e_j(s)\} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Эта система называется базисом Френе кривой γ в точке $r(s)$. При этом выполнены следующие формулы Френе (см. [3]):

$$\begin{cases} e_1'(s) = \kappa_1(s)e_2(s), \\ e_i'(s) = -\varepsilon_{i-1}(s)\varepsilon_i(s)\kappa_{i-1}(s)e_{i-1}(s) + \kappa_i(s)e_{i+1}(s), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ e_n'(s) = -\varepsilon_{n-1}(s)\varepsilon_n(s)\kappa_{n-1}(s)e_{n-1}(s). \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s), \ldots, \kappa_{n-1}(s)$ называются первой, второй, $\ldots$, $(n-1)$–ой кривизной кривой γ в точке $r(s)$, причём все они положительны.

Пусть теперь $\|q_m(s)\| = 0$ для некоторого $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. В этом случае система векторов Френе $\{e_i(s)\}_{i=1,\ldots,m}$ ортонормальна, и выполнены следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} e_1'(s) = \kappa_1(s)e_2(s), \\ e_i'(s) = -\varepsilon_{i-1}(s)\varepsilon_i(s)\kappa_{i-1}(s)e_{i-1}(s) + \kappa_i(s)e_{i+1}(s), \quad i = 2, \ldots, m-1, \\ e_m'(s) = -\varepsilon_{m-1}(s)\varepsilon_m(s)\kappa_{m-1}(s)e_{m-1}(s). \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s), \ldots, \kappa_{m-1}(s)$ называются первой, второй, $\ldots$, $(m-1)$–ой кривизной кривой γ в точке $r(s)$, причём все они положительны. При этом m–ая кривизна $\kappa_m(s)$ равна нулю, а остальные кривизны $\kappa_{m+1}(s), \ldots, \kappa_{n-1}(s)$ не определены.

Предложение 1. *Функции* $\varepsilon_i(s) := e_i^2(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \leqslant n$, *постоянны, т. е.* $\varepsilon_i(s) \equiv \varepsilon_i$.

Доказательство. Из (2), определения функций $\varepsilon_i(s)$ и ортонормальности системы векторов $e_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, следует, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_1'(s) = 2\{e_1'(s), e_1(s)\} = 2\kappa_1(s)\{e_2(s), e_1(s)\} \equiv 0,$$

$$\varepsilon_i'(s) = 2\{e_i'(s), e_i(s)\} = -\varepsilon_{i-1}(s)\varepsilon_i(s)\kappa_{i-1}(s)\{e_{i-1}(s), e_i(s)\} +$$
$$+\kappa_i(s)\{e_{i+1}(s), e_i(s)\} \equiv 0, \quad i = 2, \ldots, m-1,$$
$$\varepsilon_m'(s) = -\varepsilon_{m-1}(s)\varepsilon_m(s)\kappa_{m-1}(s)\{e_{m-1}(s), e_m(s)\} \equiv 0.$$

Поэтому функции $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, постоянны. ■

1. Основной результат

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Все кривизны регулярной кривой в n–мерном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}^n_l$, где n, l — целые числа, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant l \leqslant n/2$, постоянны тогда и только тогда, когда эта кривая есть орбита некоторой однопараметрической подгруппы группы всех движений пространства $\mathbb{E}^n_l$.*

Доказательство. Достаточность теоремы 1 очевидна. Докажем необходимость.

1. Пусть γ — регулярная кривая в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}^n_l$ с естественной параметризацией $r(s)$, $s \in \mathbb{R}$, имеющая постоянные ненулевые кривизны $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$.

Систему дифференциальных уравнений Френе (1) для векторов $e_1(s)$,…,$e_n(s)$ можно записать в виде $X'(s) = AX(s)$, где $X(s)$ — квадратная матрица порядка n, i–ая строчка которой есть декартовы координаты вектора $e_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, A — трёхдиагональная матрица системы (1). Тогда

$$X(s) = \exp(sA)X(0). \tag{3}$$

Обозначим через I диагональную матрицу порядка n такую, что $I_{ii} = -1$ при $i = 1, \ldots, l$ и $I_{ii} = 1$ при $i = l+1, \ldots, n$.

Лемма 1. *Для каждого $s \in \mathbb{R}$ матрица $X(s)IX^T(s)$ есть диагональная матрица n–го порядка, причём $(X(s)IX^T(s))_{ii} = \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Из определений матриц $X(s)$, I, псевдоскалярного произведения в $\mathbb{E}^n_l$, ортонормальности системы векторов $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ и предложения 1 следует, что для любых $i, j = 1, \ldots, n$

$$(X(s)IX^T(s))_{ij} = \{e_i(s), e_j(s)\} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \varepsilon_i, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

■

Положим

$$C(s) = (X(0)I)^{-1} \exp(-sA) \left(X(0)I\right), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Для любого $s \in \mathbb{R}$, $C^T(s) = X^{-1}(0)X(s)$.*

Доказательство. В силу определения матрицы I выполнено $I = I^{-1} = I^T$. На основании (4), (3), леммы 1 и равенства $\varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что

$$X(0)C^T(s) = \left(X(0)IX^T(0)\right) (\exp(-sA))^T \left((X(0)I)^{-1}\right)^T =$$

$$= \left(X(0)IX^T(0)\right) \left((\exp(sA)X(0)I)^{-1}\right)^T =$$

$$= \left(X(0)IX^T(0)\right) \left(\left(X(s)IX^T(s)\right)^{-1}\right)^T X(s) = X(s).$$

■

Определим вектор $d(s) = (d_1(s), \ldots, d_n(s))$, $s \in \mathbb{R}$, формулой

$$d(s) = r(s) - r(0)C^T(s). \tag{5}$$

Тогда $r(s) = \Psi(s)\left(r(0)\right)$, где $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, есть аффинное преобразование псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$, задаваемое формулой

$$\Psi(s)(x) = xC^T(s) + d(s), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n_l. \tag{6}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Множество $\{\Psi(s),\, s \in \mathbb{R}\}$, определённое формулой (6), есть однопараметрическая подгруппа группы всех движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$.*

Доказательство. Покажем сначала, что аффинное преобразование $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, есть движение псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$. Вследствие (6) достаточно доказать, что для любых $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{E}^n_l$ выполнено равенство $\{\alpha(s), \beta(s)\} = \{a, b\}$, где $\alpha(s)$, $\beta(s) \in \mathbb{E}^n_l$ определены формулами

$$\alpha(s) = aC^T(s), \quad \beta(s) = bC^T(s).$$

На основании (3), (4) последние равенства можно записать в виде

$$\alpha(s)\left(X(s)I\right)^T = a\left(X(0)I\right)^T, \quad \beta(s)\left(X(s)I\right)^T = b\left(X(0)I\right)^T.$$

Из определений псевдоскалярного произведения в $\mathbb{E}^n_l$, матриц $X(s)$, $s \in \mathbb{R}$, и I следует, что последние равенства равносильны равенствам

$$\{e_i(s), \alpha(s)\} = \{e_i(0), a\}, \quad \{e_i(s), \beta(s)\} = \{e_i(0), b\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Так как для каждого $s \in \mathbb{R}$ система векторов $\{e_i(s)\}_{i=1,\ldots,n}$ — ортонормальный базис псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$, $e_i^2(s) = \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, (см. предложение 1), то

$$a = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(0), a\} e_i(0), \; b = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(0), b\} e_i(0),$$

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(s), \alpha(s)\} e_i(s), \; \beta(s) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(s), \beta(s)\} e_i(s).$$

Отсюда и из (7) следует, что

$$\{a, b\} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(0), a\}\{e_i(0), b\} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{e_i(s), \alpha(s)\}\{e_i(s), \beta(s)\} = \{\alpha(s), \beta(s)\},$$

т. е. всякое преобразование $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, есть движение псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$.

Осталось доказать, что множество движений $\{\Psi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$ образует однопараметрическую подгруппу, т. е. $\Psi(s+t)(x) = \Psi(t)(\Psi(s)(x))$ для любых $s,\ t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{E}^n_l$. На основании (6) это эквивалентно тому, что

$$C(s+t) = C(t)C(s), \quad d(s+t) = d(s)C^T(t) + d(t), \quad s,t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Первое равенство (8) непосредственно следует из (4) и свойств матричной экспоненты. Тогда на основании (5) второе равенство (8) равносильно равенству

$$r(s+t) - r(s)C^T(t) = r(t) - r(0)C^T(t), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ вектор–функция $R(s) := r(s+t) - r(s)C^T(t)$ переменного s постоянна.

Обозначим через $\vec{i}$ вектор в $\mathbb{E}^n_l$, первая координата которого равна 1, а остальные координаты равны нулю. Из определений вектора $e_1(s)$ и матрицы $X(s)$, (3) следует, что производная вектор–функции $R(s)$ равна

$$R'(s) = e_1(s+t) - e_1(s)C^T(t) = \vec{i}X(s+t) - \left(\vec{i}X(s)\right)C^T(t) =$$

$$= \vec{i}\,(\exp((s+t)A)X(0)) - \left(\vec{i}(\exp(sA)X(0))\right)C^T(t) =$$

$$= \left(\vec{i}\exp(sA)\right)\left(\exp(tA)X(0) - X(0)C^T(t)\right).$$

Тогда, вследствие (3) и леммы 2, $R'(s)$ есть нулевой вектор, и второе равенство (8) доказано.

■

2. Пусть теперь γ — регулярная кривая в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}^n_l$ с естественной параметризацией $r(s)$, $s \in \mathbb{R}$, имеющая постоянные кривизны $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, причём $\kappa_m = 0$, $m < n-1$. Дополним ортонормальную систему векторов $e_i(0)$, $i = 1, \ldots, m$, до ортонормального базиса $e_1(0), \ldots, e_m(0), e_{m+1}, \ldots, e_n$ псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$. Фиксируем число $k \in \{m+1, \ldots, n\}$ и определим функции $f_i(s) = \{e_i(s), e_k\}$, $i = 1, \ldots, m$. Вследствие (2) и предложения 1 эти функции удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} f_1'(s) = \kappa_1 f_2(s), \\ f_i'(s) = -\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i\kappa_{i-1}f_{i-1}(s) + \kappa_i f_{i+1}(s), \quad i = 2, \ldots, m-1, \\ f_m'(s) = -\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m\kappa_{m-1}f_{m-1}(s), \end{cases} \tag{9}$$

причём $f_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Система (9) имеет единственное решение $f_i(s) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, для каждого $s \in \mathbb{R}$ векторы $e_1(s), \ldots, e_m(s)$, $e_{m+1}(s) := e_{m+1}, \ldots, e_n(s) := e_n$ задают ортонормальный базис псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$. Доопределим $\varepsilon_i = e_i^2$, $i = m+1, \ldots, n$.

Систему дифференциальных уравнений Френе (2) для векторов $e_1(s),\dots,e_n(s)$ можно записать в виде $X'(s) = AX(s)$, поэтому выполнено равенство (3). Здесь $X(s)$ — квадратная матрица порядка n, i–ая строчка которой есть декартовы координаты вектора $e_i(s)$, $i = 1,\dots,n$, A — блочно–диагональная матрица, состоящая из двух блоков, верхний — матрица системы уравнений (2), нижний — нулевая матрица порядка $n - m$.

Пусть снова I — диагональная матрица порядка n такая, что $I_{ii} = -1$ при $i = 1,\dots,l$ и $I_{ii} = 1$ при $i = l+1,\dots,n$. Определим аффинное преобразование $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$ формулой (6), где матрица $C(s)$ и вектор $d(s)$ заданы формулами (4) и (5) соответственно. Тогда выполнена лемма 3, и кривая $r(s)$ является орбитой точки $r(0)$ относительно однопараметрической подгруппы $\{\Psi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ группы движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^n_l$.

Теорема 1 доказана.

■

2. Благодарности

Автор благодарит профессора В.Н. Берестовского за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

1. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М. : Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1987.
2. Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии. М. : Физматлит, 2007.
3. Борисов Ю.Ф. Снятие априорных ограничений в теореме о полной системе инвариантов кривой в $\mathbb{E}^n_l$ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 485–503.

ON CURVES WITH CONSTANT CURVATURES IN THE PSEUDO–EUCLIDEAN SPACE

I.A. Zubareva
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: i_gribanova@mail.ru

Institute of Mathematics S.L. Sobolev SB RAS, Omsk, Russia

Abstract. The author proved all curvatures of a regular curve in n–dimensional pseudo–Euclidean space of an arbitrary index, $n \geqslant 2$, are constant if and only if the curve is an orbit of a one–parameter isometry group of the space.

Keywords: curvature, Frenet frame, orbit of a one-parameter isometry group, pseudo–Euclidean space.

Дата поступления в редакцию: 02.11.2018