Математические структуры и моделирование
2018. № 4(48). С. 61–77

УДК 550.37 : 550.837
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.4.61-77

ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

С.А. Терентьев
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: s.a.terentyev@gmail.com
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Электромагнитное поле в задачах электроразведки часто представляется в виде интегралов с быстроосцилирущим ядром. При вычислении этих интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в плоскость комплексного переменного. В статье изучена допустимая область деформации контура интегрирования в случае неоднородной среды. Источник поля — вертикальный гармонический диполь.

Ключевые слова: электроразведка, электромагнитное поле вертикального электрического диполя, быстроосцилирующие интегралы, деформация контура, комплексная плоскость, отсутствие особых точек, область деформации.

Введение

При аналитическом решении задач электроразведки очень часто компоненты электромагнитного поля могут быть выражены в виде интеграла

$$\int_0^{+\infty} u(\lambda, p) K(\lambda, r) d\lambda,$$

где $K(\lambda)$ — быстро осциллирующее по λ ядро. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в комплексную область $\mathbb{C}$ изменения переменной λ. В связи с этим необходимо прежде всего определить область $D_\lambda \subset \mathbb{C}$, в которой подынтегральная функция $u(\lambda, p)$ не имеет особенностей по λ. В случае горизонтально-слоистой среды, состоящей из слоев с плоскими поверхностями раздела, указанная задача была решена С.И. Смагиным [1]. Трёхслойная среда была изучена в [2, с. 116-119].

В данной работе рассматривается более общий случай неоднородной среды с параметрами σ (проводимость), μ (магнитная проницаемость) и ε (электрическая проницаемость), зависящими от глубины z залегания слоя. Источником поля является гармонический электрический вертикальный диполь.

1. Постановка задачи

Пусть имеется неоднородная среда, ограниченная плоскими поверхностями раздела $z = z_0, z = z_1$, где $z_0 < z_1$ (ось z направлена вверх, рис. 1). Параметры среды σ, μ, ε будем считать функциями переменной z. При $z > z_1$ и $z < z_0$ среда предполагается однородной с $\sigma = \sigma_i$, $\mu = \mu_i$.

Источник электромагнитного поля находится в точке с декартовыми координатами $(0, 0, 0)$.

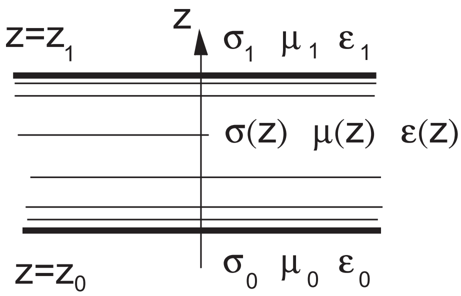

Рис. 1. Горизонтальная среда

На поверхностях раздела $z = z_i$ $(i = 0, 1)$ ставим граничные условия для электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$[\mathbf{E}_l]_{z=z_i} = 0, \qquad [\mathbf{H}_l]_{z=z_i} = 0$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}\right]_{z=z_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial l}\right]_{z=z_i} = 0,$$

где индекс l означает горизонтальную составляющую поля, а $\partial/\partial l$ — производную по касательному к поверхности раздела направлению.

Если поле $(= \mathbf{E}$ или $\mathbf{H})$ задано интегралом

$$\int_0^{+\infty} K(x, y, \lambda) u(z, \lambda) d\lambda, \tag{1.1}$$

то будем K называть ядром интегрального оператора (1.1), а $u(z, \lambda)$ — плотностью.

Продолжим λ в комплексную плоскость

$$\mathbb{C} = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}\}.$$

Область, лежащую в плоскости $\mathbb{C}$, в которой плотность $u(z, \lambda)$ не имеет особенностей по λ, будем обозначать через D_λ.

В этой статье мы определяем область D_λ для электромагнитного поля, создаваемого вертикальным гармоническим электрическим диполем.

2. Поле вертикального гармонического электрического диполя

В этом параграфе подробно изучим электромагнитное поле, создаваемое вертикальным гармоническим электрическим диполем, находящимся в неоднородной среде.

2.1. Исходные уравнения

Предположим для начала, что

$$\sigma, \mu, \varepsilon \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\sigma(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Будем исходить из следующей системы уравнений Максвелла

$$rot\ \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H},$$

$$rot\ \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{j}, \tag{2.1}$$

$$div\ \varepsilon\mathbf{E} = \rho, \quad div\ \mathbf{B} = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{j}$ — сторонний электрический ток, ρ — электрические заряды, зависимость во времени определялась фазовым множителем $exp(-i\omega t)$, т. е. гармоничность источников означает следующую зависимость от времени

$$\mathbf{M} \to \mathbf{M}e^{-i\omega t}.$$

Полагаем

$$\mathbf{H} = rot\mathbf{A}, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{A} - \nabla\varphi. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3), (2.4) в (2.2) получим

$$\nabla div\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A} = (i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu)\mathbf{A} - (\sigma - i\omega\varepsilon)\nabla\varphi + \mathbf{j}$$

или

$$\triangle\mathbf{A} + (i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu)\mathbf{A} = -\mathbf{j} + \nabla[div\mathbf{A} + \varphi\cdot(\sigma - i\omega\varepsilon)] - \varphi\cdot\nabla(\sigma - i\omega\varepsilon).$$

Пусть

$$\varphi = -\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}div\mathbf{A}. \tag{2.5}$$

Тогда получаем уравнение для векторного потенциала

$$\triangle\mathbf{A} - \frac{\nabla(\sigma - i\omega\varepsilon)}{\sigma - i\omega\varepsilon}div\mathbf{A} + (i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu)\mathbf{A} = -\mathbf{j}. \tag{2.6}$$

Будем рассматривать в качестве источника вертикальный электрический диполь, для которого

$$\mathbf{j} = (0, 0, \delta(x, y)\delta(z)),$$

т. е. предполагаем, что диполь находится в точке $(0, 0, 0)$ и, соответственно,

$$\mathbf{A} = (0, 0, A).$$

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lambda I_0(\lambda r) u(z, \lambda) d\lambda, \tag{2.7}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Подставив (2.7) в (2.6) и используя представление

$$\delta(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lambda I_0(\lambda r) d\lambda,$$

получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - (\lambda^2 + k^2) u - \frac{(\sigma - i\omega\varepsilon)'}{\sigma - i\omega\varepsilon} \cdot \frac{du}{dz} = \delta(z), \tag{2.8}$$

где $k^2 = -(i\omega\mu\sigma + \omega^2 \varepsilon\mu)$, а штрих $'$ означает дифференцирование по z.

Необходимо теперь указать соответствующие рассматриваемой задаче краевые условия. Непрерывность касательных составляющих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а также гладкость функций σ, ϵ, μ на поверхностях раздела $z = z_0$ и $z = z_1$ влекут условия:

$$[H_z]_{z=z_i} = 0, \qquad [E_z]_{z=z_i} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial z}\right]_{z=z_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]_{z=z_i} = 0,$$

где квадратные скобки означают скачок

$$[f(z)]_{z=z_i} = f(z_i + 0) - f(z_i - 0).$$

Откуда

$$\left.\begin{array}{l} [u]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\dfrac{du}{dz}\right]_{z=z_i} = 0, \quad i = 0, 1 \end{array}\right\}. \tag{2.9}$$

Кроме того, следует добавить условия излучения

$$\lim_{z \to \pm\infty} |u| = 0, \quad \lim_{z \to \pm\infty} \left|\frac{du}{dz}\right| = 0. \tag{2.10}$$

Краевую задачу (2.3), (2.9), (2.10) заменим эквивалентной краевой задачей

$$\frac{d^2u}{dz^2} - (\lambda^2 + k^2)u - \frac{(\sigma - i\omega\varepsilon)'}{\sigma - i\omega\varepsilon} \cdot \frac{du}{dz} = 0, \tag{2.11}$$

$$z \in (z_0, z_1) \setminus \{0\},$$

$$[u]_{z=z_i} = 0, \quad \left[\frac{du}{dz}\right]_{z=z_i} = 0, \tag{2.12}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} |u| = 0, \quad \lim_{z\to\pm\infty} \left|\frac{du}{dz}\right| = 0, \tag{2.13}$$

$$[u]_{z=0} = 0, \tag{2.14}$$

$$\left[\frac{du}{dz}\right]_{z=0} = 1, \tag{2.15}$$

в которой введена дополнительная (фиктивная) поверхность $z = 0$, содержащая источник. Задача (2.11)–(2.15) отличается от задачи (2.8)–(2.10) тем, что в ней отсутствуют сингулярные функции в качество коэффициентов.

Уравнение (2.11) перепишем в следующем виде

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \cdot \frac{du}{dz}\right) - (\lambda^2 + k^2)u = 0,$$

или, вводя $\lambda = \lambda_x + i\lambda_y$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma + i\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \cdot \frac{du}{dz}\right] - \frac{\sigma + i\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}\left[\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu + i(2\lambda_x\lambda_y - \omega\sigma\mu)\right]u = 0. \tag{2.16}$$

Пусть $u = u_1 + iu_2$.

Тогда уравнение (2.16) представляет собой систему двух дифференциальных уравнения

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}\frac{du_1}{dz} - \frac{\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}\frac{du_2}{dz}\right] - \frac{\sigma(\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu) - \omega\varepsilon(2\lambda_x\lambda_y - \sigma\mu)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}u_1 +$$
$$+ \frac{\omega\varepsilon(\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu) + \sigma(2\lambda_x\lambda_y - \sigma\mu)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}u_2 = 0,$$
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\omega\varepsilon}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}\frac{du_1}{dz} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}\frac{du_2}{dz}\right] - \frac{\omega\varepsilon(\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu) + \sigma(2\lambda_x\lambda_y - \sigma\mu)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}u_1 -$$
$$- \frac{\sigma(\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu) - \omega\varepsilon(2\lambda_x\lambda_y - \sigma\mu)}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}u_2 = 0.$$

Вводя матрицы

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} & \dfrac{\omega\varepsilon}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} \\ \\ -\dfrac{\omega\varepsilon}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} & -\dfrac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma(\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu)-\omega\varepsilon(2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} & -\dfrac{\omega\varepsilon(\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu)+\sigma(2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} \\ \\ \dfrac{\omega\varepsilon(\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu)+\sigma(2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} & \dfrac{\sigma(\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu)-\omega\varepsilon(2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2} \end{pmatrix},$$

можно изучаемую систему дифференциальных уравнений переписать в компактном виде

$$\frac{d}{dz}\left(P\frac{du}{dz}\right) + Qu = 0. \tag{2.17}$$

При этом краевые условия (2.12)–(2.15) примут следующий вид:

$$[u_k]_{z=z_i} = 0, \quad \left[\frac{du_k}{dz}\right]_{z=z_i} = 0, \quad k=1,2; \quad i=0,1, \tag{2.18}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} |u_k| = 0, \quad \lim_{z\to\pm\infty}\left|\frac{du_k}{dz}\right| = 0, \tag{2.19}$$

$$[u_k]_{z=0} = 0, \tag{2.20}$$

$$\left[\frac{du_1}{dz}\right]_{z=0} = 1, \quad \left[\frac{du_2}{dz}\right]_{z=0} = 0. \tag{2.21}$$

2.2. Пространство $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$

Пусть $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ — вектор-функция, компоненты которой $u_1(z), u_2(z)$, имеет первые производные по Соболеву, принадлежащие $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$u_k \in W_2^{(1)}(\mathbb{R}), \ (k=1,2).$$

Рассмотрим линейное пространство $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ всех таких вектор-функций. Введём в $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ скалярное произведение

$$(u,v)_{W_2^{(1)}} \equiv (u_1,v_1)_{W_2^{(1)}(\mathbb{R})} + (u_2,v_2)_{W_2^{(1)}(\mathbb{R})} \tag{2.22}$$

и норму

$$\| u \|_{W_2^{(1)}} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{(1)}}},$$

т. е.

$$W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) = W_2^{(1)}(\mathbb{R}) \times W_2^{(1)}(\mathbb{R}^2)$$

и, следовательно, это банахово пространство.

Рассмотрим в $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ билинейную форму

$$a(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(z)}{\sigma^2(z)+\omega^2\varepsilon^2(z)} \sum_{i=1}^{2} \frac{du_i}{dz}\frac{dv_i}{dz}dz +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(z)[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon(z)\mu(z)]-\omega\varepsilon(z)[2\lambda_x\lambda_y-\sigma(z)\mu(z)]}{\sigma^2(z)+\omega^2\varepsilon^2(z)} \sum_{i=1}^{2} u_i v_i dz, \qquad (2.23)$$

где

$\omega = const > 0$, $\sigma(z) > 0$, $\mu(z) > 0$, $\varepsilon(z) > 0$ – гладкие функции,

$$(\lambda_x, \lambda_y) \in D_\lambda,$$

$$\boxed{D_\lambda = \{(\lambda_x,\lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu] > \omega\varepsilon[2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu] \text{ для } \forall z \in \mathbb{R}\}.}$$

Пусть

$$L(z) = \frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2},$$

$$M(z) = \frac{\sigma[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu]-\omega\varepsilon[2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu]}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}.$$

Теорема 1. *Если* $\alpha = \inf\limits_{z\in\mathbb{R}} L(z) > 0$, $\beta_\lambda = \inf\limits_{z\in\mathbb{R}} M(z) > 0$,

$$A_\lambda = \max\{\sup_{z\in\mathbb{R}} L(z), \sup_{z\in\mathbb{R}} M(z)\} < +\infty,$$

то билинейная форма (2.23) *задаёт в* $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ *скалярное произведение, эквивалентное произведению* (2.22).

Доказательство. Достаточно показать, что имеют место следующие неравенства:

$$a(u,u) \leqslant const \cdot \| u \|^2_{W_2^{(1)}} \qquad (2.24)$$

$$\| u \|^2_{W_2^{(1)}} \leqslant const \cdot a(u,u) \qquad (2.25)$$

для любой $u \in W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$.

Имеем

$$a(u,u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L(z) \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{du_i}{dz}\right)^2 dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(z) \sum_{i=1}^{2} u_i^2 dz.$$

Заметим, что $a(u,u) \geqslant 0$ при $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y) \in D_\lambda$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L(z)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{du_i}{dz}\right)^2 dz \leqslant A_\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{du_i}{dz}\right)^2 dz \leqslant A_\lambda \parallel u \parallel^2_{W_2^{(1)}} .$$

Далее

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(z)\sum_{i=1}^{2} u_i^2 dz \leqslant A_\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{2} u_i^2 dz \leqslant A_\lambda \parallel u \parallel^2_{W_2^{(1)}} .$$

Следовательно,

$$a(u,u) \leqslant 2A_\lambda \parallel u \parallel^2_{W_2^{(1)}},$$

и тем самым неравенство (2.24) установлено.

Докажем неравенство (2.25). Допустим, что оно не верно. Тогда для любого натурального $m \geqslant 1$ найдётся функция $u_m \in W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$, для которой

$$\parallel u_m \parallel^2_{W_2^{(1)}} > m\cdot a(u_m,u_m).$$

Положим

$$v_m(z) = \frac{u_m(z)}{\parallel u_m \parallel_{W_2^{(1)}}}.$$

Тогда

$$\parallel v_m \parallel_{W_2^{(1)}} = 1 \tag{2.26}$$

и

$$a(v_m,v_m) < \frac{1}{m}.$$

Откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{dv_{im}}{dz}\right)^2 dz < \frac{1}{m\alpha}, \tag{2.27}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{2} v_{im}^2 dz < \frac{1}{m\beta_\lambda}. \tag{2.28}$$

Имеем, используя (2.27) и (2.28)

$$\parallel v_m - v_n \parallel^2_{W_2^{(1)}} = \parallel v_m - v_n \parallel^2_{L_2\times L_2} + \parallel \frac{dv_m}{dz} - \frac{dv_n}{dz} \parallel^2_{L_2\times L_2} \leqslant$$

$$\leqslant (\parallel v_m \parallel_{L_2\times L_2} + \parallel v_n \parallel_{L_2\times L_2})^2 + \left(\parallel \frac{dv_m}{dz} \parallel_{L_2\times L_2} + \parallel \frac{dv_n}{dz} \parallel_{L_2\times L_2}\right)^2$$

$$\leqslant 2 \parallel v_m \parallel^2_{L_2\times L_2} + 2 \parallel v_n \parallel^2_{L_2\times L_2} + 2 \parallel \frac{dv_m}{dz} \parallel^2_{L_2\times L_2} + 2 \parallel \frac{dv_n}{dz} \parallel^2_{L_2\times L_2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{m\beta_\lambda} + \frac{2}{n\beta_\lambda} + \frac{2}{m\alpha} + \frac{2}{n\alpha}.$$

Тогда $\| v_m - v_n \|_{W_2^{(1)}} \to 0$ при $m, n \to \infty$, т. е. последовательность $\{v_m\}$ фундаментальна в $W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Поэтому она сходится в $W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ к элементу $v \in W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Переходя к пределу в (2.26), (2.28), получим

$$\| v \|_{W_2^{(1)}} = 1, \tag{2.29}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{2} v_i^2 dz = 0. \tag{2.30}$$

Из (2.30) следует $v_i = 0$, т. е. $v \equiv 0$. Последнее противоречит (2.29).

Теорема 1 доказана.

■

Замечание 1. В практически важном случае обычно берут $\omega\varepsilon = 0$. Тогда

$$M(z) = \frac{\lambda_x^2 - \lambda_y^2}{\sigma(z)}.$$

Очевидно, условие $\beta_\lambda > 0$ означает ограниченность $\sigma(z)$.

2.3. Существование слабых решений в классе $W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (2.17)–(2.21) в классе функций, допускающих первые обобщённые производные в смысла Соболева.

Домножим слева уравнение (2.17) на $\phi^* = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_i – гладкие функции, и проинтегрируем по z от $z = 0$ до $z = z_i$ $(i = 0, 1)$:

$$\int\limits_0^{z_i} \phi^* \frac{d}{dz}\left(P \frac{du}{dz}\right) dz + \int\limits_0^{z_i} \phi^* Q u dz = 0$$

или

$$\phi^* P \frac{du}{dz}\bigg|_0^{z_i} - \int\limits_0^{z_i} \frac{d\phi^*}{dz} P \frac{du}{dz} dz + \int\limits_0^{z_i} \phi^* Q u dz = 0.$$

Получаем два уравнения (при $i = 0, 1$):

$$\phi^*(z_1 - 0) P(z_0) \frac{du}{dz}(z_1 - 0) - \phi^*(0) P(0) \frac{du}{dz}(+0) - \int\limits_0^{z_1} \frac{d\phi^*}{dz} P \frac{du}{dz} dz + \int\limits_0^{z_1} \phi^* Q u dz = 0,$$

$$\phi^*(z_1 + 0) P(z_0) \frac{du}{dz}(z_1 + 0) - \phi^*(0) P(0) \frac{du}{dz}(-0) + \int\limits_{z_0}^{0} \frac{d\phi^*}{dz} P \frac{du}{dz} dz - \int\limits_{z_0}^{0} \phi^* Q u dz = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$-\int\limits_{z_0}^{z_1}\frac{d\phi^*}{dz}P\frac{du}{dz}dz+\int\limits_{z_0}^{z_1}\phi^*Qudz+\phi^*(z_1-0)P(z_1)\frac{du}{dz}(z_1-0)-$$

$$-\phi^*(z_0+0)P(z_0)\frac{du}{dz}(z_0+0)-\phi^*(0)P(0)\left[\frac{du}{dz}\right]_{z=0}=0. \qquad (2.31)$$

В силу непрерывности u и $\frac{du}{dz}$ на поверхностях раздела $z=z_i$ можно распространить интегрирование в (2.31) на всю вещественную ось z. В этом случае, учитывая условия излучения (2.19), мы вместо (2.31) будем иметь следующее тождество:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\phi^*}{dz}P\frac{du}{dz}dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi^*Qudz+$$

$$+\frac{\sigma(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)}\phi_1(0)+\frac{\omega\varepsilon(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)}\phi_2(0)=0. \qquad (2.32)$$

Соотношение (2.32) распространяется на класс функций ϕ и u из $W_2^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\parallel u\parallel_{W_2^{(1)}}=\sqrt{\parallel u_1\parallel^2_{W_2^{(1)}(\mathbb{R})}+\parallel u_2\parallel^2_{W_2^{(1)}(\mathbb{R})}}.$$

Введём следующую билинейную форму

$$a(u,\phi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\phi^*}{dz}P\frac{du}{dz}dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi^*Qudz \qquad (2.33)$$

и линейную форму

$$l(\phi)=-\frac{\sigma(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)}\phi_1(0)-\frac{\omega\varepsilon(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)}\phi_2(0)=0. \qquad (2.34)$$

Тогда (2.32) принимает вид

$$a(u,\phi)=l(\phi). \qquad (2.35)$$

Имеем

$$a(u,u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L(z)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{du_i}{dz}\right)^2dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M(z)\sum_{i=1}^{2}du_i{}^2dz.$$

Допустим, что

$$\alpha=\inf_{z\in\mathbb{R}}L(z)>0 \qquad (2.36)$$

и пара (λ_x,λ_y) принадлежит области $D_\lambda\subset\mathbb{R}^2$, определённой как

$$D_\lambda=\{(\lambda_x,\lambda_y)\in\mathbb{R}^2:\sigma[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu]>\omega\varepsilon[2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu]\text{ для }\forall z\in\mathbb{R}\}.$$

Зафиксируем $\lambda \in D_\lambda$. По теореме 1 билинейная форма $a(u, \phi)$ задаёт в $W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ скалярное произведение, эквивалентное стандартному скалярному произведению

$$(u, \phi)_{W_2^{(1)}} = (u_1, \phi_1)_{W_2^{(1)}} + (u_1, \phi_1)_{W_2^{(1)}},$$

если только

$$\beta_\lambda = \inf_{z \in \mathbb{R}} \frac{\sigma[\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \omega^2 \varepsilon \mu] - \omega \varepsilon [2\lambda_x \lambda_y - \sigma \mu]}{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} > 0$$

и $A_\lambda < +\infty$ (см. 2.2).

Следовательно,

$$a(u, u) \geqslant const \cdot \parallel u \parallel^2_{W_2^{(1)}} . \tag{2.37}$$

Далее в области D_λ имеем

$$|a(u, \phi)| \leqslant A_\lambda \left[\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{du_i}{dz} \frac{d\phi_i}{dz} \right| dz + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u_i \phi_i| dz \right] \leqslant$$

$$\leqslant A_\lambda \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{du_i}{dz} \right|^2 dz \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\phi_i}{dz} \right|^2 dz \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_i^2 dz \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_i^2 dz \right)^{1/2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant A_\lambda \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\parallel \frac{du_i}{dz} \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} + \parallel u_i \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} \left(\parallel \frac{d\phi_i}{dz} \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} + \parallel \phi_i \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \left(\parallel u_i \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} + \parallel \frac{du_i}{dz} \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} \left(\parallel \phi_i \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} + \parallel \frac{d\phi_i}{dz} \parallel^2_{L_2(\mathbb{R})} \right)^{1/2} \right] =$$

$$= 2A_\lambda \sum_{i=1}^{2} \parallel u_i \parallel_{W_2^{(1)}} \cdot \parallel \phi_i \parallel_{W_2^{(1)}} \leqslant$$

$$\leqslant A_\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \parallel u_i \parallel_{W_2^{(1)}}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \parallel \phi_i \parallel_{W_2^{(1)}}} = A_\lambda \parallel u \parallel_{W_2^{(1)}} \cdot \parallel \phi \parallel_{W_2^{(1)}},$$

т. е.

$$|a(u, \phi) \leqslant const \cdot \parallel u \parallel_{W_2^{(1)}} \cdot \parallel \phi \parallel_{W_2^{(1)}} . \tag{2.38}$$

Из (2.37), (2.38), согласно теореме Лакса–Мильграма [3, с. 180], следует однозначная разрешимость вариационной задачи (2.35) в классе $W_2^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Итак, краевая задача (2.17)–(2.21) имеет единственное слабое решение. При этом достаточно требовать лишь интегрируемости функций $L(z)$ и $M(z)$, а не $\sigma, \mu, \varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$.

2.4. Определение области D_λ

Пусть $u(z,\lambda)$ — классическое решение задачи (2.17)–(2.21). Покажем, что оно не имеет особенностей по λ при $\lambda \in D_\lambda$. Из (2.32) при $\phi = u$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^*}{dz} P \frac{du}{dz} dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^* Q u dz +$$

$$+\frac{\sigma(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)} u_1(0) + \frac{\omega\varepsilon(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)} u_2(0) = 0. \tag{2.39}$$

При $\lambda \in D_\lambda$ имеем

$$q(\lambda) \equiv -\frac{\sigma(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)} u_1(0,\lambda) - \frac{\omega\varepsilon(0)}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)} u_2(0,\lambda) \geqslant 0. \tag{2.40}$$

Из (2.39) и (2.40) получаем неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{du_2}{dz}\right)^2 dz \leqslant \alpha^{-1} q(\lambda). \tag{2.41}$$

Теорема 2. *При условии* (2.36) *классическое решение* $u(z,\lambda)$ *не имеет по переменной* $\lambda \in D_\lambda$ *особенностей.*

Доказательство. Пусть $u(z,\lambda)$ имеет полюс порядка m в точке $\lambda_0(z)$, т. е. предполагаем, что $u(z,\lambda)$ аналитична по λ, кроме точки $\lambda_0(z)$.

Тогда в некоторой окрестности точки $\lambda_0(z)$ имеем

$$u(z,\lambda) = \frac{a(z)}{[\lambda - \lambda_0(z)]^m}, \quad a(z) \neq 0, \ m \geqslant 1. \tag{2.42}$$

Откуда

$$u_2(z,\lambda) = [(\lambda_x - \lambda_{x0}(z))^2 + (\lambda_y - \lambda_{y0}(z))^2]^{-m} \times$$

$$\times Im\ a(z) \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot (\lambda_x - \lambda_{x0}(z))^k (-i)^{m-k} (\lambda_y - \lambda_{y0}(z))^{m-k}$$

или

$$u_2(z,\lambda) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k(z)(\lambda_x - \lambda_{x0}(z))^k (\lambda_y - \lambda_{y0}(z))^{m-k}}{[(\lambda_x - \lambda_{x0}(z))^2 + (\lambda_y - \lambda_{y0}(z))^2]^m}. \tag{2.43}$$

Покажем, что

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0(z) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \text{производные } \lambda_0(z) \text{ справа и слева от 0 конечны.} \end{array}\right\} \tag{2.44}$$

Действительно, из (2.42) видно, что если $\lambda \neq \lambda_0(z)$, то $u(z,\lambda)$ можно дважды дифференцировать по λ.

Тогда, дифференцируя по λ равенство

$$[\lambda - \lambda_0(z)]^m u(z, \lambda) = a(z),$$

получим

$$[\lambda - \lambda_0(z)]^m \frac{\partial u}{\partial \lambda} + m[\lambda - \lambda_0(z)]^{m-1} u = 0,$$

$$[\lambda - \lambda_0(z)] \frac{\partial u}{\partial \lambda} + mu = 0,$$

$$\lambda_0(z) = \lambda + \frac{mu}{\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)}. \tag{2.45}$$

Так как $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $u \in C(\mathbb{R})$ и существуют конечные производные у u по z в 0 справа и слева, то из (2.45) следует (2.44)[1].

Предположим, что $\lambda_0(z) \not\equiv \lambda_0(0)$. Возьмём z_0 так, что $\lambda_0(z_0) \neq \lambda_0(0)$. Из непрерывности $\lambda_0(z)$ заключаем, что существует сегмент $[\gamma, \delta]$, $z_0 \in (\gamma, \delta)$ такой, что разложение (2.42) справедливо для всех $z \in [\gamma, \delta]$ при любом λ, принадлежащем некоторому кругу θ с центром $\lambda_0(z_0)$. Тогда из (2.41) следует

$$0 \leqslant \int\limits_{\gamma}^{\delta} \left(\frac{du_2}{dz}\right)^2 dz \leqslant \alpha^{-1} q(\lambda), \quad \lambda \in \theta,$$

куда можно подставить (2.43).

Получаем

$$0 \leqslant \int\limits_{\gamma}^{\delta} \frac{[p(\lambda_x - \lambda_{x0}(z), \lambda_y - \lambda_{y0}(z))]^2}{[(\lambda_x - \lambda_{x0}(z))^2 + (\lambda_y - \lambda_{y0}(z))^2]^{2m+2}} dz \leqslant \alpha^{-1} q(\lambda), \tag{2.46}$$

где $p(u, v)$ — полином степени $\leqslant m + 1$ с коэффициентами — полиномами от $a_x(z), a_y(z)$, $\frac{d\lambda_{x0}(z)}{dz}$, $\frac{d\lambda_{y0}(z)}{dz}$.

Возьмём λ так, что оно не есть особенность для $u(0, \lambda)$. Тогда $q(\lambda)$ — конечно, то есть (2.46) означает сходимость выписанного интеграла. Но он как раз расходящийся, если λ равно, например, $\lambda_0(z_1)$, где $z_1 \in [\gamma, \delta]$.

Получили противоречие.

Но мы предполагали, что $\lambda_0(z) \not\equiv \lambda_0(0)$. Пусть теперь $\lambda_0(z) \equiv \lambda_0(0)$.

При $\lambda_y = \lambda_{y0}(0)$ имеем

$$u_2(z, \lambda) = \frac{a_y(z)}{[\lambda_x - \lambda_{x0}(0)]^m}, \tag{2.47}$$

$$u_1(z, \lambda) = \frac{a_x(z)}{[\lambda_x - \lambda_{x0}(0)]^m}, \tag{2.48}$$

---

[1] $\partial u / \partial \lambda \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, поскольку дифференцируя интегральное тождество (2.32) по λ, получаем интегральное тождество для $\partial u / \partial \lambda$. Для него вариационная задача подобна задаче (2.32). Значит $\partial u / \partial \lambda \in W_2^{(1)}$. Откуда $\partial u / \partial \lambda \in C(\mathbb{R})$, благодаря вложению $W_2^{(1)} \subset C$.

Из (2.39), (2.40) имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{du_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dz} \right)^2 \right] dz \leqslant \alpha^{-1} q(\lambda). \tag{2.49}$$

Подставляя (2.47), (2.48) в (2.49), получаем

$$0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{du_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dz} \right)^2 \right] dz \leqslant \alpha^{-1} q(\lambda)[\lambda_x - \lambda_{x0}(0)]^{2m} =$$

$$= -\frac{\alpha^{-1}}{\sigma^2(0) + \omega^2\varepsilon^2(0)}[a_x(0)\sigma(0) + \omega\varepsilon(0)a_y(0)][\lambda_x - \lambda_{x0}(0)]^{2m}.$$

Устремляя λ_x к $\lambda_{x0}(0)$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{da_x}{dz} \right)^2 + \left(\frac{da_y}{dz} \right)^2 \right] dz = 0,$$

то есть

$$a_x(z) = const, \quad a_y(z) = const.$$

Учитывая условие на бесконечности (2.19), получаем

$$a(z) \equiv 0,$$

то есть

$$u(z, \lambda) \equiv 0.$$

Это противоречит граничному условию $[\frac{du}{dz}]_{z=0} = 1$. Следовательно, функция $u(z, \lambda)$ не имеет полюсов по λ в области D_λ.

Но $u(z, \lambda)$ не имеет и существенных особенностей. Действительно, по теореме Пикара [4, с. 141] $u(0, \lambda)$ будет принимать в окрестности существенно особых точек $\lambda_0(0)$ любые конечные значения, за исключением, быть может, одного. Тогда найдётся точка λ_1 такая, что $u(0, \lambda_1) = u_1(0, \lambda_1) > 0$. Но это противоречит неравенству (2.40).

Итак, особых точек по λ у решения $u(z, \lambda)$ задачи (2.17)–(2.21) быть не может.

Теорема 2 доказана.

■

2.5. Вычисление электромагнитного поля на ЭВМ

Имеем

$$\mathbf{H} = rot\ \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{A} + \nabla \left\{ \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} div\mathbf{A} \right\}, \quad \mathbf{A} = (0, 0, A),$$

где

$$A(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lambda I_0(\lambda r) u(z,\lambda) d\lambda.$$

Следовательно, поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ выражаются в виде суммы интегралов вида

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{D}^\alpha I_0(\lambda r) \frac{d^k u(z,\lambda)}{dz^k} \lambda d\lambda, \quad |\alpha|, k \leqslant 2,$$

где $\mathcal{D}^\alpha$ — производная по x и y.

В силу теоремы 2 при $\lambda \in D_\lambda$ функция

$$\frac{d^k u(z,\lambda)}{dz^k}$$

не имеет особенностей по λ. Значит, можно деформировать контур интегрирования в комплексную область изменения переменной λ, не выходя за пределы области D_λ. Это позволяет избежать быстроосцилирующих функций в качестве

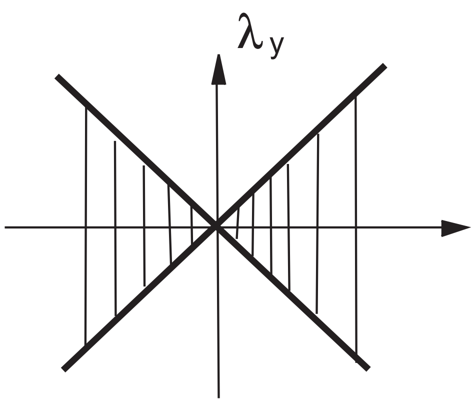

Рис. 2. Область D_λ

подынтегральных выражений и, следовательно, эффективно провести вычисление полей $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ на ЭВМ.

В практически важном случае $\omega\varepsilon \approx 0$. Тогда

$$D_\lambda = \{(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : |\lambda_x| > |\lambda_y|\},$$

т. е. область допустимой деформации контура интегрирования достаточно простая (рис. 2), в то же время весьма приемлемая с точки зрения процедуры вычисления интересующих нас интегралов на ЭВМ [2].

Заключение

Результат, представленный в данной статье, был анонсирован в [5], а его полное изложение было дано в научном отчёте [6], который находится в труднодоступном архиве. Там можно найти и решение аналогичной задачи для горизонтально-слоистой среды с горизонтальным (магнитным и электрическим) диполем в качестве источника.

Следует сказать, что случай вертикального электрического диполя является наиболее сложным. Сложнее только горизонтальные диполи. Эти случаи дают не одно, а два уравнения, аналогичные вертикальным электрическому и магнитному диполям (второе проще анализировать). Кроме того, в одном из них на горизонтали источника терпит разрыв не производная, а само решение. Это вынуждает изменить класс пространств, в котором ищется решение. Но ничего принципиально нового нет.

В одном из отчётов [7–11] приведена иная постановка задачи для случая всех диполей. В качестве неизвестных выбраны вертикальные компоненты полного (включая сторонний источник) электрического и магнитного «тока». Коэффициенты принадлежат пространству L_∞, а решение ищется в классе $W_2^{(1)}$. Более того, удалось дать определения вертикального и горизонтального диполей (и электрического, и магнтного), находящихся на границе разрыва параметров среды (но не наклонного). При этом содержание теорем не меняется.

Наконец, заметим, что в настоящее время модель вертикально неоднородной среды практически не актуальна. Тем не менее она используется:

а) как фоновая в методе объёмных интегральных уравнений. Именно для неё вычисляется функция (тензор) Грина;

б) в случае недостатка числа измеряемых сигналов, например, при инверсии для навигации во время бурения;

в) реже в других случаях электромагнитного каротажа или наземной электроразведки.

Литература

1. Смагин С.И. Расчёт функции Грина уравнения Гельмгольца с одномерным кусочно-постоянным волновым числом // Сб.: Условно-корректные задачи математической фишки в интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск, 1973.
2. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск : Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1975.
3. Partial Differential Equations // Lectures in applied mathematics. 1957. V. 31.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. : Наука, 1969.
5. Гуц А.К., Терентьев С.А. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Сб.: Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Омск : ОмПИ, 1982. С. 78–80.

6. Терентьев С.А., Гуц А.К. Теоретическое исследование электромагнитного поля в проводящих неоднородных средах // Отчёт по НИР. Омск : ОмГУ, 1980. Деп.во ВНТИЦ 25.02.81, № Б 919817. 48 с.
7. Терентьев С.А., Гуц А.К., Кайзер В.В. Теоретическое исследование электромагнитного поля в проводящих неоднородных средах // Депонированный отчёт по НИР. Инв. № 0283.0006913. Омск : ОмГУ, 1982. 58 с.
8. Терентьев С.А., Бронников И.Н. Разработка алгоритмов расчёта на ЭВМ электромагнитных полей источников различной конфигурации в горизонтально-слоистой среде // Депонированный отчёт по НИР. Инв. № 0285.0011141, № гос. рег. 0184.0015161. Омск : ОмГУ, 1984. 31 с.
9. Терентьев С.А. Алгоритм расчёта электромагнитного поля в вертикально-неоднородной проводящей среде // Сб.: Электрофизические проблемы защиты устройств связи от влияний на железнодорожном транспорте. Омск : ОмИИТ, 1985. С. 32–33.
10. Терентьев С.А., Балыкина О.Н, Романовская А.М., Ультан А.Е. Математические методы в прикладных исследованиях // Депонированный отчет по НИР. Инв. № 0986.0039352, № гос. рег. 0185.0051835. Омск : ОмГУ, 1985, 90 с.
11. Терентьев С.А., Балыкина О.Н, Романовская А.М., Ультан А.Е. Математические методы в прикладных исследованиях. // Депонированный отчёт по НИР. Инв. № 02.88.0022619, № гос. рег. 0185.0051835. Омск : ОмГУ, 1987. 54 с.

INVESTIGATIONS OF THE SPECTRAL DENSITY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS CONDUCTIVE MEDIUM

S.A. Terentyev
PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: sa.terentyev@gmail.com
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The electromagnetic field in electrical exploration problems is often represented as integrals with a fast-oscillating nucleus. When calculating these integrals on a computer, it is necessary to deform the contour of integration into the plane of the complex variable. The article studies the allowable deformation region of the integration contour in the case of a non-uniform medium. The source of the field is a vertical dipole. A similar problem was solved for a horizontally layered medium with a horizontal harmonious dipole as a source.

Keywords: Electrical exploration, electromagnetic field of vertical electric dipole, fast-oscillating integrals, deformation contour, complex plane, absence of singular points, deformation domain.

Дата поступления в редакцию: 17.10.2018