Математические структуры и моделирование
2018. № 2(46). С. 5–23

УДК 512.815.8
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.2.5-23

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Рассматривается аксиоматическая реализация теоретико-группового описания периодической системы элементов. Периодическая система элементов представляется как единая квантовая система бесструктурных состояний. Вычисляются массы элементов группы суперактиноидов. В рамках алгебраической формулировки единой квантовой системы устанавливается связь с теорией твисторов.

Ключевые слова: периодическая система элементов, единая квантовая система, конформная группа, группа Румера-Фета, твисторная структура.

1. Введение

Согласно модели Бора, атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающего его облака отрицательно заряженных электронов. Атомы различных элементов периодической системы отличаются зарядом (числом протонов) их ядер. Атом как целое представляется совокупностью его частей: протонов, нейтронов и электронов. Нетрудно видеть, что в данной модели реализуется классическая редукционистская схема, согласно которой *целое* определяется *частями*, т. е. целое, понимаемое как *агрегат*, является производной от своих частей.

Однако, как известно, *принцип сепарабельности*[1], являющийся исходной посылкой редукционизма, имеет ограниченное применение в квантовой механике. Если подсистемы (части) системы S находятся в *несепарабельном* (запутанном) состоянии, то никакие глобальные свойства системы S, взятой как целое, *не зависят* и *не определяются* свойствами её частей. В рамках запутанной квантовой системы не имеется чистого состояния для какой-либо отдельной подсистемы, т. е. никакая из подсистем S_1, S_2, $\ldots$, S_N не обладает индивидуальным независимым существованием. В любом случае квантовой запутанности недопустимо рассматривать части *квантового целого* как автономные сущности. Иными словами, в случае несепарабельных состояний части

[1]Одно из лучших определений этого принципа приводит Каракостас: «Если состояния любых пространственно отделённых подсистем S_1, S_2, $\ldots$, S_N составной системы S точно определены для каждой подсистемы, то состояния составной системы S целиком и полностью определяются состояниями подсистем и их физическими взаимодействиями, включая пространственно-временные связи» [1].

«растворяются» в целом, превращая последнее в бесструктурное состояние. Именно это имел в виду Гейзенберг, говоря, что понятие «состоит из» (принцип сепарабельности) не работает в квантовой области (в физике частиц)[2]. Гейзенберг пишет: «В экспериментах с атомными процессами мы имеем дело с вещами и фактами, которые столь же реальны, сколь реальны любые явления повседневной жизни. Но атомы или элементарные частицы реальны не в такой степени. Они образуют скорее мир тенденций или возможностей, чем мир вещей и фактов» [3, с. 117]. Отсюда следует, что «атомы — не вещи» и что их не следует ставить в один ряд с объектами классической физики, т. е. с макрообъектами, для которых справедлив принцип сепарабельности[3]. Квантовая система, состояния которой при измерении актуализируются как атомы периодической системы с их «частями» (протонами, нейтронами, электронами), на *потенциальном уровне* существует в суперпозиционном (бесструктурном) состоянии[4].

Модель Резерфорда–Бора, полностью базирующаяся на предпосылках редукционизма и принципа сепарабельности, имеет своей *холистической антитезой* модель Румера–Фета. Уже в первой статье по этой тематике Румер и Фет пишут: «Обычно система элементов объясняется с помощью структурной модели Резерфорда, состоящей из ядра и электронных оболочек, при этом основным параметром, различающим элементы, является атомный заряд. В этой работе атом рассматривается как бесструктурная частица, к которой применяются общие принципы физики симметрии, аналогично тому, как это делается для адронов в $\mathrm{SU}(6)$-классификации... Мы называем бесструктурный атом "кулоновской системой"; состояния этой системы должны изображаться векторами пространства, где определено некоторое представление группы $\mathbf{Spin}(4)$» [4]. Как отмечает Фет: «Своеобразная черта предлагаемой модели — "игнорирование" структуры атомов, лежащей в основе модели Бора» [5, с. 155]. Другой важнейшей характерной чертой модели Румера–Фета является представление периодической системы элементов как *единой квантовой системы*: «... в то время как модель Бора рассматривает в качестве отдельной квантовой системы атом одного элемента (причём атомный номер входит в теорию в виде параметра, так что имеется столько квантовых систем, сколько элементов), в нашей

[2]«Как в теории относительности пришлось пожертвовать старым понятием одновременности, а в квантовой механике — понятием электронных орбит, так в физике частиц надо пожертвовать понятием деления или понятием «состоит из» [2, с. 77].

[3]Модель Бора, являющаяся развитием планетарной модели Резерфорда, по сути ставит атомы в один ряд с макрообъектами классической физики (Солнечная система).

[4]У Каракостаса находим такие строки: «Вспомним, что с фундаментальной точки зрения квантовой теории физический мир появляется перед нами как неразделённое целое (unbroken whole). Мир сам по себе не является уже разделённым. Мы разделяем его. С целью получить какой-либо тип описания, говорить об объекте, или соотнести с экспериментальными фактами, лежащая в основе природы целостность должна быть разложена на взаимодействующие, но разделённые системы без холистических связей между ними. Это субъектно-объектное разделение иногда метафорически называют «скальпелем Гейзенберга» [1]. Под действием «скальпеля Гейзенберга» целостность рассекается (актуализируется) на «куски» («части»), т. е. целое, существующее в потенции в виде бесструктурного состояния, при измерении распадается на части.

модели атомы всевозможных элементов рассматриваются как состояния единой квантовой системы, соединяемые друг с другом действием группы симметрии» [5, с. 155]. Модель Румера–Фета описывает периодическую систему элементов с позиции холизма, т. е. как *единую квантовую систему бесструктурных состояний*[5].

В настоящей статье единая квантовая система $\mathbf{U}$ на потенциальном уровне определяется C^*-алгеброй, состоящей из *оператора энергии* H и присоединённых к H генераторов *группы фундаментальной симметрии* G_f. Состояния системы $\mathbf{U}$ формируются в рамках конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) [8, 9], т. е. как *циклические представления* операторной алгебры. В силу общности задания системы $\mathbf{U}$ и гибкости конструкции ГНС при каждой конкретной реализации операторной алгебры (так называемом «одевании» C^*-алгебры) получаем свой (соответствующий данной реализации) спектр состояний системы $\mathbf{U}$[6]. В п. 3 настоящей статьи в качестве группы фундаментальной симметрии рассматривается *конформная группа* ($G_f = \mathrm{SO}(2,4)$). В этом случае конкретная реализация операторной C^*-алгебры задаётся посредством присоединённых к H генераторов комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ и твисторной структуры, ассоциированной с группой $\mathrm{SU}(2,2)$ (универсальное накрытие конформной группы). Комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ приводит к представлению $F^+_{ss'}$ группы Румера–Фета $\mathrm{SO}(2,4)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$, в рамках которой задаётся теоретико-групповое описание периодической системы элементов. В п. 4 вычисляются массы элементов группы суперактиноидов. В п. 5 определяется алгебраическая формулировка единой квантовой системы (реализация операторной алгебры) и устанавливается связь с теорией твисторов (твисторной структурой).

---

[5]Следует подчеркнуть, что холизм модели Румера–Фета не противостоит редукционизму модели Резерфорда–Бора. Холизм и редукционизм являются двумя взаимодополняющими системами описания *физической реальности*. Согласно концепции Гейзенберга–Фока [2,6], физическая реальность имеет двухуровневую структуру: *потенциальная реальность* и *актуальная реальность*. Для потенциальной реальности характерно холистическое видение, актуальная реальность — царство редукционизма. Опираясь на теорему Кохена–Спекера и понятие квантовой контекстуальности, де Ронде [7] приходит к выводу, что «физическая реальность$\neq$актуальная реальность». Описание квантового объекта (атома) в рамках одной только актуальной реальности является apriori неполным описанием. Перефразируя Гейзенберга, «атомы — более чем вещи».

[6]Так, в случае, когда присоединённые к H генераторы группы фундаментальной симметрии ($G_f = \mathrm{SO}_0(1,3)$ — группа Лоренца) являются генераторами комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, получаем линейно растущий спектр масс состояний («элементарных частиц») [10, 11]. В этом случае «одевание» операторной алгебры и построение циклических представлений конструкции ГНС осуществляется в рамках спинорной структуры (заряженные, нейтральные, истинно нейтральные (майорановские) состояния и их дискретные симметрии задаются посредством морфизмов спинорной структуры, см. [12–17]). В [11] показано, что массы «элементарных частиц» кратны массе электрона с точностью 0.41 %. Здесь имеет место прямая аналогия с электрическим зарядом. Любой электрический заряд кратен заряду электрона, причём кратен абсолютно точно. Если любой электрический заряд абсолютно кратен (квантован) заряду электрона, то в случае масс эта кратность имеет место с точностью 0.41 % (в среднем).

2. Единая квантовая система

Как уже отмечалось во введении, исходным пунктом построения теоретико-группового описания периодической системы элементов является понятие единой квантовой системы U. С целью дать наиболее универсальное определение системы U мы должны абстрагироваться от всех макроскопических (локализуемых) определений, принадлежащих исключительно к уровню актуальной реальности (таких как «структура», «частица» и т. д.). Следуя Гейзенбергу, будем считать, что на фундаментальном уровне в основе определения системы U лежат два понятия: *энергия* и *симметрия*[7]. Зададим единую квантовую систему U посредством следующей системы аксиом (более подробно см. [23], а также [24, 25]).

A.I (Энергия и фундаментальная симметрия) *Единая квантовая система U на фундаментальном уровне характеризуется C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ с единицей, состоящей из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы фундаментальной симметрии G_f, образующих с H общую систему собственных функций.*

A.II (Состояния) *Физическое состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ определяется циклическим вектором $|\Phi\rangle$ представления π C^*-алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве H_∞:*

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid \pi(H)\Phi\rangle}{\langle \Phi \mid \Phi\rangle}.$$

Множество $PS(\mathfrak{A})$ всех чистых состояний C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством всех состояний $\omega_\Phi(H)$, ассоциированных со всеми неприводимыми циклическими представлениями π алгебры $\mathfrak{A}$, $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ (конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала).

A.III (Пространство лучей) *Множество всех чистых состояний $\omega_\Phi(H)$ при выполнении условия $\omega_\Phi(H) \geqslant 0$ образует физическое гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}$ (в общем случае пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}$ несепарабельно). Для каждого вектора состояния $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$ существует единичный луч $\boldsymbol{\Psi} = e^{i\alpha}|\Psi\rangle$, где α пробегает все вещественные числа и $\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} = 1$. Пространство лучей есть фактор-пространство $\hat{H} = \mathbf{H}_{\rm phys}/S^1$, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из $\mathbf{H}_{\rm phys}$. Все состояния единой квантовой системы U описываются единичными лучами.*

A.IV (Аксиома спектральности) *В $\hat{H}$ существует полная система состояний с неотрицательной энергией.*

A.V (Принцип суперпозиции) *Основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства $\hat{H}$ включает принцип суперпозиции квантовой теории, т. е. существует набор базисных состояний*

[7]Что с неизбежностью приводит нас к *неоаристотелеву* взгляду на основания квантовой механики (концепция Гейзенберга–Фока [2, 6]). Следует отметить, что схожих воззрений придерживался Маргенау [18], а также Поппер [19]. Одним из наиболее ярких представителей этого направления является Шимони [20] (см. Каракостас [1], Севальников [21], а также сборник [22] под редакцией Кохена).

таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций.

Выберем в качестве фундаментальной симметрии конформную группу. Конформная группа встречается в современной физике в самых различных ситуациях и по сути является столь же универсальной, как группа Лоренца; есть множество релятивистских теорий и, точно так же, конформных[8].

3. Группа Румера–Фета

После определения конформной группы в качестве фундаментальной симметрии следующим логическим шагом является построение конкретной реализации операторной алгебры. Это построение следует начать с определения комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, что приведёт далее к представлению $F^+_{ss'}$ группы Румера–Фета[9].

Как известно [5], система пятнадцати генераторов конформной группы $\mathrm{SO}(2,4)$ удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathsf{L}_{\alpha\beta}, \mathsf{L}_{\gamma\delta}] = i\left(g_{\alpha\delta}\mathsf{L}_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\mathsf{L}_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}\mathsf{L}_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}\mathsf{L}_{\alpha\gamma}\right),$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, 6, \alpha \neq \beta,\ \gamma \neq \delta).$$

Генераторы $\mathsf{L}_{\alpha\beta}$ образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$. С целью перейти к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ рассмотрим другую систему генераторов, предложенную Т. Йао [30]. Пусть

$$\mathsf{J}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{23} - \mathsf{L}_{14}\right), \quad \mathsf{J}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{31} - \mathsf{L}_{24}\right), \quad \mathsf{J}_3 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{34}\right),$$

$$\mathsf{K}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{23} + \mathsf{L}_{14}\right), \quad \mathsf{K}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{31} + \mathsf{L}_{24}\right), \quad \mathsf{K}_3 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} + \mathsf{L}_{34}\right),$$

$$\mathsf{P}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{P}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} - \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{P}_0 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right),$$

$$\mathsf{Q}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{46}\right), \quad \mathsf{Q}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} + \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{Q}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right),$$

$$\mathsf{S}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{15} + \mathsf{L}_{26}\right), \quad \mathsf{S}_2 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{25} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{S}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{56}\right),$$

[8]Более того, как показал Сигал [26], алгебра Ли неоднородной группы Лоренца (т. е. группы Пуанкаре) может быть получена деформацией из конформной алгебры Ли. В свою очередь конформная алгебра Ли является «жёсткой», т. е. не может быть получена деформированием другой алгебры Ли. В силу этого свойства конформная алгебра (алгебра некомпактной вещественной псевдоортогональной группы в шестимерном пространстве с сигнатурой $(-,-,-,-,+,+)$) имеет уникальный (завершённый) характер и занимает выделенное место среди других алгебр.

[9]Первой работой в этом направлении является [4], где было отмечено поразительное сходство между строением системы химических элементов и строением энергетического спектра атома водорода. Это сходство объясняется в [4] в рамках представления Фока F [27] для группы $\mathbf{Spin}(4)$ (двулистная накрывающая группы $\mathrm{SO}(4)$). Однако главным недостатком описания в [4] является приводимость представления F, что не позволяло рассматривать систему как «элементарную» в смысле групповой механики. В 1972 г. Конопельченко [28] расширил представление Фока F до представления F^+ конформной группы, устранив тем самым указанный выше недостаток. Далее, опираясь на связь с нумерацией Маделунга, Фет определяет представления F^+_s и $F^+_{ss'}$ (для определения представления $F^+_{ss'}$ пришлось изменить «лексикографическое правило» Маделунга). После довольно длительного периода забвения (совершенно незаслуженного!) к модели Румера–Фета возобновился интерес (см. Киблер [29]).

$$\mathbf{T}_1 = 1/2\left(-\mathbf{L}_{15} - \mathbf{L}_{26}\right), \quad \mathbf{T}_2 = 1/2\left(\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}\right), \quad \mathbf{T}_0 = 1/2\left(-\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}\right). \tag{1}$$

Эта система 18 генераторов связана тремя соотношениями

$$\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3 = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3 = \mathbf{S}_0 - \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}_0 + \mathbf{T}_0. \tag{2}$$

В силу независимости генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$, (1) задаёт избыточную систему генераторов группы $\mathrm{SO}(2,4)$, из которой можно получить базис алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, исключив три генератора с помощью (2).

Перейдём к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, положив

$$\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2, \quad \mathbf{P}_\pm = \mathbf{P}_1 \pm i\mathbf{P}_2, \quad \mathbf{S}_\pm = \mathbf{S}_1 \pm i\mathbf{S}_2,$$

$$\mathbf{K}_\pm = \mathbf{K}_1 \pm i\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{Q}_\pm = \mathbf{Q}_1 \pm i\mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{T}_\pm = \mathbf{T}_1 \pm i\mathbf{T}_2. \tag{3}$$

Рассмотрим специальное представление конформной группы $\mathrm{SO}(2,4)$. Это *локальное* представление группы $\mathrm{SO}(2,4)$ непосредственно связано с представлением Фока F для подгруппы $\mathrm{SO}(4)$. По сути это представление является расширением представления Фока для $\mathrm{SO}(4)$ до унитарного представления конформной группы $\mathrm{SO}(2,4)$ в *пространстве Фока* $\mathfrak{F}$ с помощью базиса

$$|j,\sigma,\tau\rangle \quad (j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots; \quad \sigma = -j, -j+1, \ldots, j-1, j; \; \tau = -j, -j+1, \ldots, j-1, j). \tag{4}$$

Используя генераторы (3) комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}_-|j,\sigma,\tau\rangle = \sqrt{(j+\sigma)(j-\sigma+1)}|j,\sigma-1,\tau\rangle,\\
&\mathbf{J}_+|j,\sigma,\tau\rangle = \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}|j,\sigma+1,\tau\rangle,\\
&\mathbf{J}_3|j,\sigma,\tau\rangle = \sigma|j,\sigma,\tau\rangle,\\
&\mathbf{K}_-|j,\sigma,\tau\rangle = \sqrt{(j+\tau)(j-\tau+1)}|j,\sigma,\tau-1\rangle,\\
&\mathbf{K}_+|j,\sigma,\tau\rangle = \sqrt{(j-\tau)(j+\tau+1)}|j,\sigma,\tau+1\rangle,\\
&\mathbf{K}_3|j,\sigma,\tau\rangle = \tau|j,\sigma,\tau\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_-|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j+\sigma)(j-\tau)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{P}_+|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j-\tau+1)(j+\sigma+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{P}_0|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j+\frac{\sigma-\tau+1}{2}\right)\sigma\,|j,\sigma,\tau\rangle,\\
&\mathbf{Q}_-|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j+\tau)(j-\sigma)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{Q}_+|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j-\sigma+1)(j+\tau+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{Q}_0|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j-\frac{\sigma-\tau-1}{2}\right)|j,\sigma,\tau\rangle,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathbf{S}_{-}|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j+\sigma)(j+\tau)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\mathbf{S}_{+}|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j+\tau+1)(j+\sigma+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\mathbf{S}_{0}|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j+\frac{\sigma+\tau+1}{2}\right)\sigma\,|j,\sigma,\tau\rangle,$$

$$\mathbf{T}_{-}|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j-\tau)(j-\sigma)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\mathbf{T}_{+}|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j-\sigma+1)(j-\tau+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\mathbf{T}_{0}|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j-\frac{\sigma+\tau-1}{2}\right)|j,\sigma,\tau\rangle.$$

Формулы (5) задают унитарное представление конформной группы $\mathrm{SO}(2,4)$ в пространстве Фока $\mathfrak{F}$. Представление, задаваемое формулами (5), называется *расширением F^{+} представления Фока на конформную группу* [5]. Представление F^{+}, задаваемое формулами (5), ещё недостаточно для описания периодической системы элементов. С этой целью необходимо включить четвёртое число Маделунга s (аналогичное спину), что приводит к группе (первое «удвоение»)

$$\mathrm{SO}(2,4)\otimes\mathrm{SU}(2). \tag{6}$$

Представление $F_s^{+}=\varphi_2\otimes F^{+}$ группы (6), где φ_2 — унитарное представление группы $\mathrm{SU}(2)$ в пространстве $C(2)$, уже удовлетворяет этому требованию (включению числа Маделунга s). Базис пространства $\mathfrak{F}^2=C(2)\otimes\mathfrak{F}$ представления F_s^{+} имеет вид

$$|n,l,m,s\rangle,\quad n=1,2,\ldots;\ l=0,1,\ldots,n-1;$$
$$m=-l,-l+1,\ldots,l-1,l;\ s=-1/2,1/2. \tag{7}$$

Здесь n, l, m — квантовые числа конформной группы.

Пусть $\boldsymbol{\tau}_k$ — генераторы алгебры Ли группы $\mathrm{SU}(2)$, тогда генератор $\boldsymbol{\tau}_3$ перестановочен со всеми генераторами подгруппы $\mathrm{SO}(2,4)\otimes\mathbf{1}$, а следовательно, и её алгебры Ли, поэтому генераторы $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{J}_3+\mathbf{K}_3$, $\boldsymbol{\tau}_3$ перестановочны друг с другом. Собственные векторы операторов, представляющих эти генераторы в пространстве $\mathfrak{F}^2$, имеют вид

$$\left|n,l,m,\frac{1}{2}\right\rangle=\begin{bmatrix}\Psi^1_{nlm}\\0\end{bmatrix},\quad \left|n,l,m,-\frac{1}{2}\right\rangle=\begin{bmatrix}0\\\Psi^2_{nlm}\end{bmatrix}$$

с собственными значениями n, $l(l+1)$, m, $\frac{1}{2}$ и n, $l(l+1)$, m, $-\frac{1}{2}$. Действие операторов, представляющих генераторы $\boldsymbol{\tau}_+$, $\boldsymbol{\tau}_-$, $\boldsymbol{\tau}_3$ в пространстве $\mathfrak{F}^2$, задаётся следующими формулами:

$$\boldsymbol{\tau}_+\left|n,l,m,-\frac{1}{2}\right\rangle=\left|n,l,m,\frac{1}{2}\right\rangle,\quad \boldsymbol{\tau}_-\left|n,l,m,\frac{1}{2}\right\rangle=\left|n,l,m,-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 |n,l,m,s\rangle = s|n,l,m,s\rangle .$$

Базис $|n,l,m,s\rangle$ находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами периодической системы в силу нумерации Маделунга. Связь между расположением элемента в таблице Менделеева и набором чисел (n,l,m,s) задаётся так называемым «лексикографическим правилом» Маделунга $Z \leftrightarrow (n,l,m,s)$[10]:

1) элементы располагаются в порядке возрастания атомного номера Z;

2) наборы (n,l,m,s) располагаются в порядке возрастания $n+l$; при заданном $n+l$, в порядке возрастания n; при заданных $n+l$, n, в порядке возрастания m; при заданных $n+l$, n, m, в порядке возрастания s;

3) Z-му элементу ставится в соответствие Z-й набор.

В нумерации Маделунга сумма $n+l$ не имеет группового смысла: это сумма квантового числа n (собственного значения оператора $\mathbf{R}_0 = -\mathbf{L}_{56}$) и числа l, не являющегося квантовым числом (квантовым числом является $l(l+1)$ — собственное значение оператора $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_{12}^2 + \mathbf{L}_{23}^2 + \mathbf{L}_{31}^2$, а l всего лишь задаёт это квантовое число). Следовательно, с точки зрения теоретико-группового описания системы элементов число $n+l$ не должно входить в формулировку «лексикографического правила». В [5] Фет вводит новое квантовое число ν, равное $\nu = 1/2(n+l+1)$ для нечётного значения $n+l$ и $\nu = 1/2(n+l)$ для чётного значения $n+l$. Введение квантового числа ν позволяет изменить нумерацию Маделунга, что приводит к следующему «лексикографическому правилу» (правило Фета):

1) элементы располагаются в порядке возрастания атомного номера Z;

2) наборы (ν,λ,μ,s,s') располагаются в порядке возрастания ν; при заданном ν — в порядке возрастания s'; при заданных ν, s' — в порядке убывания λ; при заданных ν, s', λ — в порядке возрастания μ; при заданных ν, s', λ, μ — в порядке возрастания s;

3) Z-му элементу ставится в соответствие Z-й набор.

Введение пятого квантового числа приводит к ещё одному «удвоению» пространства представления, в котором действует группа Румера–Фета

$$\mathrm{SO}(2,4) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)'. \tag{8}$$

[10] Эрвин Маделунг первым применил «водородные» квантовые числа n, l, m, s для нумерации элементов периодической системы. Следует отметить, что числа n, l, m, s не являются в модели Бора квантовыми числами, поскольку в этой модели нет единого квантово-механического описания системы элементов, последним присваивается атомный номер Z, различающий, а не объединяющий отдельные квантовые системы. Полученную классификацию элементов Маделунг назвал «эмпирической», поскольку он не смог связать её с моделью Бора, что в принципе и не возможно было сделать с позиции редукционизма (известно, что Маделунг показывал свою классификацию Бору). Видимо, именно из-за отсутствия теоретического обоснования на тот момент (20-е годы прошлого столетия) он опубликовал её в виде справочного материала в [31, с. 585]. Теоретическое обоснование (понимание природы чисел Маделунга) было дано впоследствии Фетом [5] с позиции холистического (теоретико-группового) видения. Ещё раз подчеркнём, модели Резерфорда–Бора и Румера–Фета являются не взаимоисключающими, а *взаимодополняющими* друг друга. История чисел Маделунга получила развитие также и в несколько ином направлении в работах Клечковского [32], где заполнение электронных уровней атома рассматривалось согласно правилу последовательного заполнения $(n+l)$-групп (так называемые группы Маделунга–Клечковского).

Представление $F^+_{ss'} = \varphi'_2 \otimes F^+_s$ группы (8), где φ'_2 — унитарное представление группы $\mathrm{SU}(2)'$ в пространстве $C(2)$, удовлетворяет требованию включения пятого квантового числа. Базис пространства $\mathfrak{F}^4 = C(2) \otimes \mathfrak{F}^2$ представления $F^+_{ss'}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle, \quad \nu = 1,2,\ldots;\ \lambda = 0,1,\ldots,\nu-1; \\ &\qquad\qquad \mu = -\lambda,-\lambda+1,\ldots,\lambda-1,\lambda;\ s = -1/2, 1/2,\ s' = -1/2, 1/2. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть $\boldsymbol{\tau}'_k$ — генераторы алгебры Ли группы $\mathrm{SU}(2)'$, тогда генератор $\boldsymbol{\tau}'_3$ перестановочен со всеми генераторами подгруппы $\mathrm{SO}(2,4)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathbf{1}$, а следовательно, и её алгебры Ли, поэтому генераторы $\mathbf{R}_0 = -\mathbf{L}_{56} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}_0 + \mathbf{T}_0$, $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3$, $\boldsymbol{\tau}_3$, $\boldsymbol{\tau}'_3$ перестановочны друг с другом. Общие собственные векторы операторов, представляющих эти генераторы в пространстве $\mathfrak{F}^4$, имеют вид

$$\left|\nu,\lambda,\mu,s,+\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix}\Psi^1_{\nu\lambda,\mu}\\ \Psi^2_{\nu\lambda,\mu}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \quad \left|\nu,\lambda,\mu,s,-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Psi^3_{\nu\lambda,\mu}\\ \Psi^4_{\nu\lambda,\mu}\end{bmatrix}$$

с собственными значениями ν, $\lambda(\lambda+1)$, μ, s, $\frac{1}{2}$ и ν, $\lambda(\lambda+1)$, μ, s, $-\frac{1}{2}$.

Действие операторов, представляющих генераторы $\boldsymbol{\tau}_+$, $\boldsymbol{\tau}_-$, $\boldsymbol{\tau}_3$ и $\boldsymbol{\tau}'_+$, $\boldsymbol{\tau}'_-$, $\boldsymbol{\tau}'_3$ в пространстве $\mathfrak{F}^4$, задаётся следующими формулами:

$$\boldsymbol{\tau}_+\left|\nu,\lambda,\mu,-\frac{1}{2},s'\right\rangle = \left|\nu,\lambda,\mu,\frac{1}{2},s'\right\rangle, \quad \boldsymbol{\tau}_-\left|\nu,\lambda,\mu,\frac{1}{2},s'\right\rangle = \left|\nu,\lambda,\mu,-\frac{1}{2},s'\right\rangle,$$

$$\boldsymbol{\tau}_3\,|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle = s\,|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle\,.$$

$$\boldsymbol{\tau}'_+\left|\nu,\lambda,\mu,s,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\nu,\lambda,\mu,s,\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \boldsymbol{\tau}'_-\left|\nu,\lambda,\mu,s,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\nu,\lambda,\mu,s,-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\boldsymbol{\tau}'_3\,|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle = s'\,|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle\,.$$

Адреса элементов (см. рис. 1) задаются набором квантовых чисел группы Румера–Фета (8), нумерующих базисные векторы $|\nu,\lambda,\mu,s,s'\rangle$ пространства $\mathfrak{F}^4$. Генераторы алгебры Ли группы $\mathrm{SO}(2,4)$ действуют на квантовые числа ν, λ, μ по формулам (5) с заменой n, l, m на ν, λ, μ.

			$\nu=1$, $s'=-1/2$	$\nu=1$, $s'=1/2$	$\nu=2$, $s'=-1/2$	$\nu=2$, $s'=1/2$	$\nu=3$, $s'=-1/2$	$\nu=3$, $s'=1/2$	$\nu=4$, $s'=-1/2$	$\nu=4$, $s'=1/2$
$\lambda=0$	$\mu=0$	$s=-1/2$	H	Li	Na	K	Rb	Cs	Fr	**Uue**
		$s=1/2$	He	Be	Mg	Ca	Sr	Ba	Ra	**Ubn**
$\lambda=1$	$\mu=-1$	$s=-1/2$			B	Al	Ga	In	Tl	**Nh**
		$s=1/2$			C	Si	Ge	Sn	Pb	**Fl**
	$\mu=0$	$s=-1/2$			N	P	As	Sb	Bi	**Mc**
		$s=1/2$			O	S	Se	Te	Po	**Lv**
	$\mu=1$	$s=-1/2$			F	Cl	Br	I	At	**Ts**
		$s=1/2$			Ne	Ar	Kr	Xe	Rn	**Og**
$\lambda=2$	$\mu=-2$	$s=-1/2$					Sc	Y	Lu	Lr
		$s=1/2$					Ti	Zr	Hf	Rf
	$\mu=-1$	$s=-1/2$					V	Nb	Ta	**Db**
		$s=1/2$					Cr	Mo	W	**Sg**
	$\mu=0$	$s=-1/2$					Mn	Tc	Re	**Bh**
		$s=1/2$					Fe	Ru	Os	**Hs**
	$\mu=1$	$s=-1/2$					Co	Rh	Ir	**Mt**
		$s=1/2$					Ni	Pd	Pt	**Ds**
	$\mu=2$	$s=-1/2$					Cu	Ag	Au	**Rg**
		$s=1/2$					Zn	Cd	Hg	**Cn**
$\lambda=3$	$\mu=-3$	$s=-1/2$							La	Ac
		$s=1/2$							Ce	Th
	$\mu=-2$	$s=-1/2$							Pr	Pa
		$s=1/2$							Nd	U
	$\mu=-1$	$s=-1/2$							Pm	Np
		$s=1/2$							Sm	Pu
	$\mu=0$	$s=-1/2$							Eu	Am
		$s=1/2$							Gd	Cm
	$\mu=1$	$s=-1/2$							Tb	Bk
		$s=1/2$							Dy	Cf
	$\mu=2$	$s=-1/2$							Ho	Es
		$s=1/2$							Er	Fm
	$\mu=3$	$s=-1/2$							Tm	Md
		$s=1/2$							Yb	No

Рис. 1. Таблица Менделеева в форме основного представления $F^+_{ss'}$ группы Румера–Фета $\mathrm{SO}(2,4)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)'$

Имеет место следующая цепочка групп:

$$\mathrm{SO}(2,4) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \supset \mathrm{SO}(4) \otimes \mathrm{SU}(2) \supset \mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SU}(2),$$

согласно которой осуществляется редукция основного представления $F^+_{ss'}$ группы Румера–Фета по подгруппам цепочки. Так, мультиплеты подгруппы $\mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SU}(2)$ изображаются вертикальными прямоугольниками на рис. 1, а заполняющие их элементы составляют известные s-, p-, d- и f-семейства (в частности, лантаноиды и актиноиды выделяются как мультиплеты подгруппы $\mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SU}(2)$). Каждый элемент занимает вполне определённое место, заданное его «адресом» в таблице $(\nu, \lambda, \mu, s, s')$, т. е. соответствующими квантовыми числами группы симметрии. Таким образом, атомы всевозможных элементов ставятся во взаимно-однозначное соответствие с векторами ортонормированного базиса (9) пространства основного представления группы Румера–Фета.

4. Массы элементов «острова стабильности»

На рис. 1 жирным шрифтом отмечены элементы, которые ещё не были открыты или не получили своего официального названия при жизни Румера и Фета. Это элементы последнего столбца рис. 1 с квантовыми числами $\nu = 4$ и $s' = 1/2$: **Db** — Дубний, **Sg** — Сиборгий, **Bh** — Борий, **Hs** — Хассий (эка-осмий), **Mt** — Мейтнерий, **Ds** — Дармштадтий, **Rg** — Рентгений, **Cn** — Коперницый (эка-ртуть). Все эти элементы принадлежат мультиплету с квантовым числом $\lambda = 2$. Мультиплет с квантовым числом $\lambda = 1$ ($\nu = 4$, $s' = 1/2$) образуют недавно открытые элементы: **Nh** — Нихоний (эка-таллий), **Fl** — Флеровий (эка-свинец), **Mc** — Московий (эка-висмут), **Lv** — Ливерморий (эка-полоний), **Ts** — Теннесин (эка-астат), **Og** — Оганесон (эка-радон). Мультиплет с квантовым числом $\lambda = 0$ ($\nu = 4$, $s' = 1/2$) образуют ещё не открытые гипотетические элементы **Uue** — Унуненний (эка-франций) с предполагаемой атомной массой 316 а.е. и **Ubn** — Унбинилий (эка-радий). Все перечисленные элементы завершают заполнение таблицы Менделеева (с 1-го по 120-й номер включительно) до значения квантового числа $\nu = 4$.

Согласно модели Бора, со 121-го номера начинается заполнение g-оболочки (формирование g-семейства). В модели Румера–Фета g-семейство соответствует квантовым числам $\nu = 5$ и $\lambda = 4$ группы симметрии. На сегодняшний день имеется шесть кандидатов (гипотетических элементов) на принадлежность к этому уровню: **Ubu** — Унбиуний, **Ubb** — Унбибий, **Ubt** — Унбитрий, **Ubq** — Унбиквадий, **Ubp** — Унбипентий, **Ubh** — Унбигексий. Это элементы группы суперактиноидов так называемого «острова стабильности».

Вычислим массы элементов **Ubb**, ..., **Ubh**. С этой целью воспользуемся массовой формулой[11], предложенной в [5]:

$$m = m_0 + a\left[s'(2\nu - 3) - 5\nu + \frac{11}{2} + 2(\nu^2 - 1)\right] - b \cdot \lambda(\lambda + 1), \tag{10}$$

[11]Эта формула аналогична массовой формуле Гелл-Манна–Окубо для адронов в SU(3)-теории [33, 34], а также формуле Бега–Сингха в SU(6)-теории [35].

где m_0, a, b — коэффициенты, не выводимые из теории. Формула (10) аналогична «первому возмущению» в SU(3)- и SU(6)-теориях, которое позволяет вычислить среднюю массу элементов мультиплета (аналога «второго возмущения», приводящего к расщеплению масс внутри мультиплета, для группы Румера–Фета нет). В таб. 1 приведены средние массы «тяжёлых» мультиплетов ($\nu = 3, 4$) периодической системы элементов, вычисленных согласно формуле (10) при $m_0 = 1$, $a = 17$, $b = 5,5$. Из таб. 1 видно, что точность между экспериментальными и теоретическими значениями масс возрастает по мере увеличения «тяжести» мультиплета, следовательно, формула (10) является асимптотической. Исключение составляет последний мультиплет ($\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 0$), состоящий из гипотетических элементов **Uue** и **Ubn**, массы которых не являются экспериментально подтверждёнными.

Табл. 1. Средние массы «тяжёлых» мультиплетов

	Мультиплет	Масса (эксп.)	Масса (теор.)	Погр-сть, %
1.	$(\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 2)$	55,31	53	−4,36
2.	$(\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 1)$	76,65	75	−2,2
3.	$(\nu = 3, s' = -1/2, \lambda = 0)$	86,54	86	−0,63
4.	$(\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 2)$	99,76	104	4,07
5.	$(\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 1)$	123,51	126	1,98
6.	$(\nu = 3, s' = 1/2, \lambda = 0)$	135,12	137	1,37
7.	$(\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 3)$	154,59	156	0,90
8.	$(\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 2)$	187,96	189	0,55
9.	$(\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 1)$	210,21	211	0,37
10.	$(\nu = 4, s' = -1/2, \lambda = 0)$	224,52	222	−1,13
11.	$(\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 3)$	244,56	241	−1,48
12.	$(\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 2)$	273,10	274	0,33
13.	$(\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 1)$	290,83	296	1,75
14.	$(\nu = 4, s' = 1/2, \lambda = 0)$	318*	307	−3,58*

Найдём среднюю массу первого мультиплета группы суперактиноидов ($\nu = 5$, $s' = -1/2$, $\lambda = 4$). Полагая $m_0 = 1$, $a = 17$, $b = 5,5$, из формулы (10) получим $m = 316$. Средняя масса второго мультиплета суперактиноидов ($\nu = 5$, $s' = 1/2$, $\lambda = 4$) при тех же значениях констант равна $m = 435$. Экстраполируя разность средних масс между теоретическими и экспериментальными значениями для «тяжёлых» мультиплетов ($\nu = 3, 4, 5$), получим приближенные значения масс элементов группы суперактиноидов (см. таб. 2). Эти элементы являются частью *расширенной периодической системы* (таблицы Сиборга[12]). В таб. 2 верхний левый индекс обозначает атомный номер элемента, а правый нижний — его массу.

[12] Теоретико-групповое описание таблицы Сиборга в рамках группы Румера–Фета выходит за рамки настоящей статьи и будет подробно рассмотрено в следующей работе.

Табл. 2. Группа суперактиноидов

		$(\nu=5,\ s'=-1/2,\ \lambda=4)$	$(\nu=5,\ s'=1/2,\ \lambda=4)$
$\mu=-4$	$s=-1/2$	$^{121}\mathbf{Ubu}_{308}$	$^{171}\mathbf{Usu}_{423}$
	$s=1/2$	$^{122}\mathbf{Ubb}_{311}$	$^{172}\mathbf{Usb}_{426}$
$\mu=-3$	$s=-1/2$	$^{123}\mathbf{Ubt}_{313}$	$^{173}\mathbf{Ust}_{428}$
	$s=1/2$	$^{124}\mathbf{Ubq}_{316}$	$^{174}\mathbf{Usq}_{431}$
$\mu=-2$	$s=-1/2$	$^{125}\mathbf{Ubp}_{318}$	$^{175}\mathbf{Usp}_{433}$
	$s=1/2$	$^{126}\mathbf{Ubh}_{321}$	$^{176}\mathbf{Ush}_{436}$
$\mu=-1$	$s=-1/2$	$^{127}\mathbf{Ubs}_{322}$	$^{177}\mathbf{Uss}_{437}$
	$s=1/2$	$^{128}\mathbf{Ubo}_{325}$	$^{178}\mathbf{Uso}_{440}$
$\mu=0$	$s=-1/2$	$^{129}\mathbf{Ube}_{327}$	$^{179}\mathbf{Use}_{442}$
	$s=1/2$	$^{130}\mathbf{Utn}_{330}$	$^{180}\mathbf{Uon}_{445}$
$\mu=1$	$s=-1/2$	$^{131}\mathbf{Utu}_{331}$	$^{181}\mathbf{Uou}_{446}$
	$s=1/2$	$^{132}\mathbf{Utb}_{334}$	$^{182}\mathbf{Uob}_{449}$
$\mu=2$	$s=-1/2$	$^{133}\mathbf{Utt}_{336}$	$^{183}\mathbf{Uot}_{451}$
	$s=1/2$	$^{134}\mathbf{Utq}_{339}$	$^{184}\mathbf{Uoq}_{454}$
$\mu=3$	$s=-1/2$	$^{135}\mathbf{Utp}_{340}$	$^{185}\mathbf{Uop}_{455}$
	$s=1/2$	$^{136}\mathbf{Uth}_{343}$	$^{186}\mathbf{Uoh}_{458}$
$\mu=4$	$s=-1/2$	$^{137}\mathbf{Uts}_{345}$	$^{187}\mathbf{Uos}_{460}$
	$s=1/2$	$^{138}\mathbf{Uto}_{348}$	$^{188}\mathbf{Uoo}_{463}$

5. Реализация операторной алгебры

Как известно, в основании алгебраической формулировки квантовой теории лежит конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС), заключающаяся в каноническом соответствии $\omega \leftrightarrow \pi_\omega$ между состояниями и циклическими представлениями C^*-алгебры [36–38].

Пусть, согласно аксиомы **A.I** (п. 2), к оператору энергии H присоединены генераторы конформной группы, являющейся в данном контексте группой фундаментальной симметрии ($G_f = \mathrm{SO}(2,4)$). Следовательно, каждое собственное подпространство H_E оператора энергии инвариантно относительно операторов представления F^+ конформной группы[13]. Это позволяет получить конкретную реализацию («одевание») операторной алгебры $\pi(\mathfrak{A}) \to \pi(H)$, где $\pi \equiv F^+$. Таким образом, каждое возможное значение энергии (энергетический уровень) является векторным состоянием вида (аксиома **A.II**):

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle} = \frac{\langle \Phi \mid F^+(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle},$$

где $|\Phi\rangle$ — циклический вектор гильбертова пространства H_∞.

[13]Это следует из сходства комплексных оболочек групповых алгебр $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,4)$.

Далее, в силу изоморфизма $\mathrm{SU}(2,2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2,4)$[14], будем рассматривать универсальную накрывающую $\widetilde{G}_f$ как *спинорную группу*, что позволит дополнительно ассоциировать с каждым циклическим вектором $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ *твисторную структуру*. Спинтензорные представления группы $\widetilde{G}_f = \mathbf{Spin}_+(2,4)$ образуют субстрат конечномерных представлений $\boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}$, $\overline{\boldsymbol{\tau}}_{k/2,r/2}$ конформной группы, реализуемых в пространствах $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$ и $\overline{\mathrm{Sym}}_{(k,r)} \subset \overline{\mathbb{S}}_{2^{k+r}}$, где $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ — спинпространство. Действительно, твистор $\mathbf{Z}^\alpha = (\boldsymbol{s}^\alpha, \boldsymbol{s}_{\dot\alpha})$ является вектором фундаментального представления группы $\mathbf{Spin}_+(2,4)$, где $\alpha, \dot\alpha = 0, 1$. Вектором общего спинтензорного представления группы $\mathbf{Spin}_+(2,4)$ является

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} \\ \overline{\boldsymbol{S}} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{S}$ — спинтензор вида

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{\dot\alpha_1\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_r} = \sum \boldsymbol{s}^{\alpha_1} \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}^{\alpha_k} \otimes \boldsymbol{s}_{\dot\alpha_1} \otimes \boldsymbol{s}_{\dot\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{s}_{\dot\alpha_r}, \quad \alpha_i, \dot\alpha_i = 0, 1;$$

т. е. вектор спинпространства $\mathbb{S}_{2^{k+r}} = \mathbb{S}_{2^k} \otimes \dot{\mathbb{S}}_{2^r}$, где $\dot{\mathbb{S}}_{2^r}$ — дуальное спинпространство. $\overline{\boldsymbol{S}}$ — спинтензор из сопряжённого пространства $\overline{\mathbb{S}}_{2^{k+r}}$. Симметризируя каждый из спинтензоров $\boldsymbol{S}$ и $\overline{\boldsymbol{S}}$, входящих в (11), получим симметрический *твисттензор* $\mathbf{Z}$. В свою очередь, как известно [39], спинпространство является минимальным левым идеалом алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, т. е. существует изоморфизм $\mathbb{S}_{2^m}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = \mathcal{C}\ell_{p,q} f$, где f — примитивный идемпотент алгебры $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, $\mathbb{K} = f\mathcal{C}\ell_{p,q} f$ — кольцо деления для $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, $m = (p+q)/2$. Комплексное спинпространство $\mathbb{S}_{2^m}(\mathbb{C})$ является комплексификацией $\mathbb{C} \otimes I_{p,q}$ минимального левого идеала $I_{p,q}$ вещественной подалгебры $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Следовательно, $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ является минимальным левым идеалом комплексной алгебры $\mathbb{C}_{2k} \otimes \dot{\mathbb{C}}_{2r} \simeq \mathbb{C}_{2(k+r)}$ (более подробно см. [41, 42]).

Определим систему *базисных циклических векторов*, наделённых комплексной твисторной структурой[15], и соответствующих системе конечномерных

---

[14] Изоморфизм

$$\mathrm{SU}(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4 : \ \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \right\} \simeq \mathbf{Spin}_+(2,4)$$

следует из алгебраического определения группы Клиффорда–Липшица $\boldsymbol{\Gamma}_{p,q}$ (см. [39, 40]):

$$\mathbf{Spin}_+(2,4) = \left\{ s \in \begin{bmatrix} \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^0_{1,1} - i\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^3_{1,1} & -\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^1_{1,1} + i\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^2_{1,1} \\ \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^1_{1,1} + i\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^2_{1,1} & \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^0_{1,1} + i\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell^3_{1,1} \end{bmatrix} \middle| \ N(s) = 1 \right\}.,$$

где $\mathbb{C}_4$ — алгебра Дирака, $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ — алгебра анти-кватернионов.

[15] По сути твисторная структура есть «удвоение» спинорной структуры. В связи с этим возникает вопрос: какой физический смысл имеет спинорная (твисторная) структура, ассоциируемая в данном контексте с циклическими векторами гильбертова пространства? Ответ на этот вопрос может дать хорошо известная аналогия между спинором и кубитом. Как известно, *кубит* есть несепарабельное состояние, заданное суперпозицией $|\boldsymbol{\psi}\rangle = a\,|\mathbf{0}\rangle + b\,|\mathbf{1}\rangle$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Кубит есть минимально возможный (элементарный) вектор состояния. Любой вектор состояния может

представлений конформной группы:

$$
\begin{aligned}
&|\, \mathbb{C}_0, \boldsymbol{\tau}_{0,0}(H)\Phi\rangle;\\
&|\, \mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\, \dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1/2}(H)\Phi\rangle;\\
&|\, \mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\, \mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1/2}(H)\Phi\rangle, \quad |\, \dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1}(H)\Phi\rangle;\\
&|\, \mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{3/2,0}(H)\Phi\rangle, \quad |\, \mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,1/2}(H)\Phi\rangle,\\
&\qquad\qquad |\, \mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1}(H)\Phi\rangle, \quad |\, \dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,3/2}(H)\Phi\rangle;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\, \overline{\mathbb{C}_0, \boldsymbol{\tau}_{0,0}(H)}\Phi\rangle;\\
&|\, \overline{\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,0}(H)}\Phi\rangle, \quad |\, \overline{\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1/2}(H)}\Phi\rangle;\\
&|\, \overline{\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,0}(H)}\Phi\rangle, \quad |\, \overline{\mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1/2}(H)}\Phi\rangle, \quad |\, \overline{\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,1}(H)}\Phi\rangle;\\
&|\, \overline{\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2, \boldsymbol{\tau}_{3/2,0}(H)}\Phi\rangle, \quad |\, \overline{\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1,1/2}(H)}\Phi\rangle,\\
&\qquad\qquad |\, \overline{\mathbb{C}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{1/2,1}(H)}\Phi\rangle, \quad |\, \overline{\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2\otimes\dot{\mathbb{C}}_2, \boldsymbol{\tau}_{0,3/2}(H)}\Phi\rangle.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Следовательно, согласно конструкции ГНС (аксиома **A.II**), имеем комплексные векторные состояния вида

$$\omega^c_\Phi(H) = \frac{\langle\Phi \mid \mathbb{C}_{2(k+r)}, \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)\Phi\rangle}{\langle\Phi\mid\Phi\rangle},$$

$$\overline{\omega}^c_\Phi(H) = \frac{\langle\Phi \mid \overline{\mathbb{C}_{2(k+r)}, \boldsymbol{\tau}_{k/2,r/2}(H)}\Phi\rangle}{\langle\Phi\mid\Phi\rangle}.$$

Согласно (11), пары $(\omega^c_\Phi(H), \overline{\omega}^c_\Phi(H))$ образуют *нейтральные состояния*. Далее, множество всех чистых состояний $(\omega^c_\Phi(H), \overline{\omega}^c_\Phi(H))$ при выполнении условия $\omega^c_\Phi(H) \geqslant 0$ $(\overline{\omega}^c_\Phi(H) \geqslant 0)$ образует физическое гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\rm phys}$ (аксиома **A.III**) и, соответственно, пространство лучей $\hat{H} = \mathbf{H}_{\rm phys}/S^1$. Все состояния физической квантовой системы $\mathbf{U}$ описываются единичными лучами

быть представлен множеством таких элементарных векторов, по этой причине кубит является исходным «строительным кирпичом» для всех остальных векторов состояния любой размерности. Квантовое состояние N кубитов может быть описано вектором гильбертова пространства размерности 2^N. Очевидно, что это пространство совпадает со спинпространством $\mathbb{S}_{2^N}$. Выберем в качестве ортонормированного базиса для этого пространства состояния, в которых каждый кубит имеет определённое значение $|\mathbf{0}\rangle$ или $|\mathbf{1}\rangle$. Тогда векторы базиса могут быть представлены двоичными строками вида $|x\rangle = |\mathbf{01110010}\cdots\mathbf{1001}\rangle$. Общий нормированный вектор может быть выражен в этом базисе как $\sum_{x=0}^{2^N-1} a_x\,|x\rangle$, где a_x — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum_x |a_x|^2 = 1$. Уже здесь видна глубокая аналогия между кубитами и 2-компонентными спинорами. Подобно кубитам 2-компонентные спиноры являются «строительными кирпичами» спинорной структуры (посредством тензорных произведений алгебр $\mathbb{C}_2$ и $\dot{\mathbb{C}}_2$). Это означает, что в некотором смысле спинорная (твисторная) структура может быть отождествлена с информационной структурой (на что ранее уже указывал Пенроуз), прообразами которой являются все материальные объекты (в духе «it from bit» Уилера или «it from qubit» д'Ариано).

и при данной реализации операторной алгебры соответствуют атомам периодической системы элементов. При этом имеет место принцип суперпозиции (аксиома **A.V**).

Следуя классификации Гейзенберга [2], всё множество групп симметрий G следует разбить на два класса: 1) *группы фундаментальных (первичных) симметрий* G_f, участвующие в образовании векторов состояния единой квантовой системы $\mathbf{U}$; 2) *группы динамических (вторичных) симметрий* G_d, описывающие приближенные симметрии между векторами состояния системы $\mathbf{U}$. Динамические симметрии G_d связывают между собой различные состояния квантовой системы $\mathbf{U}$ (векторы состояния $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$). Симметрия G_d системы $\mathbf{U}$ может быть представлена как *квантовый переход* между её состояниями (уровнями спектра состояний системы $\mathbf{U}$).

Покажем, что группа Румера–Фета является группой динамической симметрии. Действительно, группа (8) эквивалентна $\widetilde{\rm SO}(2,4)\otimes{\rm SU}(2) = {\rm SU}(2,2)\otimes{\rm SU}(2)$ (см. [43]), поскольку одно «удвоение» в (8) уже фактически учитывается двулистной накрывающей ${\rm SU}(2,2)$ конформной группы[16]. При этом атомы различных элементов ставятся во взаимно-однозначное соответствие с векторами базиса (9) пространства представления $F^+_{ss'}$. Здесь имеет место прямая аналогия с физикой «элементарных частиц». Согласно Вигнеру [46], квантовая система,

[16]На протяжении всей статьи термин «удвоение» встречался много раз. «Удвоение» (или «двуделение и уменьшение симметрии» Паули) является одним из ведущих принципов теоретико-группового (холистического) описания. В письме к Гейзенбергу Паули пишет: «Двуделение и уменьшение симметрии, вот где зарыт Фаустов пудель. Двуделение — старый атрибут дьявола (недаром сомнение называют “раздвоенностью”)» [2, с. 288]. Гейзенберг следующим образом комментирует письмо Паули: «В прежней физике оболочки атома ещё можно было опираться на наглядные образы, заимствованные из репертуара классической физики. Принцип соответствия Бора фиксировал как раз пусть ограниченную, но применимость подобных образов. Однако уже в том, что касается оболочки атома, математическое описание происходящих в ней процессов значительно превосходило эти образы по степени своей абстрактности. Можно было даже соотносить с одним и тем же реальным положением вещей два различных и противоречащих друг другу образа, а именно корпускулярное и волновое представления. В физике же элементарных частиц эти образы уже, по существу, совсем непригодны. Эта физика ещё более абстрактна. Для формулировки природных законов здесь не остаётся поэтому никакой иной отправной точки, кроме свойств симметрии, воплощённых в природе, или, выражаясь иначе, преобразований симметрии (например, смещений или поворотов), которые изначально организуют пространство природы. Но тогда мы неизбежно приходим к вопросу о том, почему существуют именно такие, а не иные преобразования симметрии. Процесс раздвоения, или двуделения, как я его себе представляю, мог бы нам здесь многое объяснить, потому что он каким-то очень естественным образом расширяет пространство природы, создавая тем самым возможность новых симметрий. В идеальном случае можно было бы думать, что все реальные симметрии возникли как следствие подобных раздвоений» [3, с. 342-343]. Под «уменьшением симметрии» следует понимать групповую редукцию, т. е. если имеется цепочка вложенных друг в друга групп $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k$ и дано неприводимое унитарное представление $\mathfrak{P}$ группы G в пространстве $\mathbf{H}_{\rm phys}$, то редукция G/G_1 представления $\mathfrak{P}$ группы G по подгруппе G_1 приводит к разложению $\mathfrak{P}$ в ортогональную сумму неприводимых представлений $\mathfrak{P}^{(1)}_i$ подгруппы G_1. В свою очередь, редукция G_1/G_2 представления группы G_1 по подгруппе G_2 приводит к разложению представлений $\mathfrak{P}^{(1)}_i$ на неприводимые представления $\mathfrak{P}^{(2)}_{ij}$ группы G_2 и т. д. (см. [44, 45]). Таким образом происходит редукция («уменьшение симметрии» Паули) группы G с высокой симметрией на более низкие симметрии подгрупп.

описываемая неприводимым унитарным *представлением* группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, называется элементарной частицей. С другой стороны, в согласии с SU(3)- и SU(6)-теориями, элементарная частица описывается *вектором* неприводимого представления группы SU(3) (или SU(6)). Следовательно, имеем две теоретико-групповые интерпретации элементарной частицы: как *представления* группы $\mathcal{P}$ (группы фундаментальной симметрии) и как *вектора* представления группы динамической симметрии SU(3) (SU(6)). Кроме того, структура массовой формулы (10) для группы Румера–Фета аналогична массовым формулам Гелл-Манна–Окубо и Бега–Сингха для групп SU(3) и SU(6). Действие группы $G_d = \mathrm{SU}(2,2) \otimes \mathrm{SU}(2)$, поднятое в $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$ посредством центрального расширения, переводит друг в друга векторы состояния $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$, соответствующие различным атомам периодической системы элементов.

Литература

1. Karakostas V. Forms of Quantum Nonseparability and Related Philosophical Consequences // Journal for General Philosophy of Science. 2004. V. 35. P. 283–312.
2. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
3. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
4. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 203–209.
5. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.
6. Фок В.А. Об интерпретации квантовой механики // УФН. 1957. Т. 62. С. 461–474.
7. de Ronde C. Quantum Superpositions and the Representation of Physical Reality Beyond Measurement Outcomes and Mathematical Structures // arXiv:1603.06112 [quant-ph] (2016).
8. Gelfand I., Neumark M. On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1943. V. 12(54). P. 197–217.
9. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 930–948.
10. Варламов В.В. Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 5–23.
11. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 11–28.
12. Varlamov V.V. Fundamental Automorphisms of Clifford Algebras and an Extension of Dąbrowski Pin Groups // Hadronic J. 1999. V. 22. P. 497–535.
13. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805.
14. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7. С. 114–127.
15. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191.
16. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // Int. J. Theor. Phys. 2012. V. 51. P. 1453–1481.

17. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
18. Margenau H. The Nature of physical reality. New York : McGrow Hill, 1950.
19. Popper K. A world of propensities. Bristol : Thoemmes Press, 1995.
20. Shimony A. Search for a naturalistic world view. Vol. 2. Natural science and metaphysics. Cambridge : Cambridge University Press, 1993.
21. Севальников А.Ю. Интерпретации квантовой механики: в поисках новой онтологии. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
22. Cohen R.S., Horne M., Stachel J. Potentiality, Entanglement and Passion-at-a-Distance. Dordrecht : Springer, 1997.
23. Варламов В.В. О системе аксиом нелокальной квантовой теории // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4(44). С. 5–25.
24. Варламов В.В. Комплексный момент и спин-зарядовое гильбертово пространство // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 5–22.
25. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. P. 5008–5045.
26. Segal I. A class of operator algebras which are determined by groups // Duke Math. J. 1951. V. 18. P. 221–265.
27. Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР. Сер. VII. Отд-ние мат. и естеств. наук. 1935. № 2. С. 169–179.
28. Конопельченко Б.Г. Группа $SO(2,4)+R$ и таблица Менделеева // СО РАН СССР. Ин-т ядерной физики. Препр. Новосибирск, 1972.
29. Kibler M.R. From the Mendeleev periodic table to particle physics and back to periodic table // Foundations of Chemistry. 2006. V. 9. P. 221–234.
30. Yao Tsu. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2) // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 1931–1954.
31. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М. : Наука, 1968.
32. Клечковский В.М. Распределение атомных электронов и правило последовательного заполнения $(n+l)$-групп. М. : Атомиздат, 1968.
33. Gell-Mann M. Symmetries of Baryons and Mesons // Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 1067–1084.
34. Okubo S., Ryan C. Quadratic mass formula in $SU(3)$. Nuovo Cimento. 1964. V. 34. P. 776–779.
35. Bég M., Singh V. Splitting of the 70-Plet of $SU(6)$. Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 509–511.
36. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М. : Мир, 1976.
37. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987.
38. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986.
39. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
40. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168;
41. Varlamov V.V. Generalized Weierstrass representation for surfaces in terms of Dirac-Hestenes spinor field // J. Geometry and Physics. 2000. V. 32. P. 241–251.

42. Варламов В.В. Спинорная структура и периодичность алгебр Клиффорда // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 4–20.
43. Фет А.И. Конформная симметрия химических элементов // ТМФ. 1975. Т. 22. С. 323–334.
44. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
45. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576.
46. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.

GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. An axiomatic realization of the group theoretical description is considered for periodic system of elements. The periodic system is represented as a single quantum system of structureless states. Masses of elements of the superactinide group are calculated. A relationship between an algebraic formulation of the single quantum system and twistor theory is established.

Keywords: Mendeleev periodic system, single quantum system, conformal group, Rumer-Fet group, twistor structure.

Дата поступления в редакцию: 12.05.2018