Математические структуры и моделирование
2018. № 1(45). С. 57–68

УДК 517.9
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.57-68

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Г.Д. Анисимова
аспирант, e-mail: gdanisimova@gmail.com

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. Для указанного в названии класса систем доказаны необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости и дихотомии решений задачи Коши в терминах нулей (λ, μ) определителя матричного пучка – символа функционально-дифференциального оператора в левой части системы. Приведён иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: переход к разностной задаче Коши, характеризация спектра разрешающего оператора.

Введение

1. Работа является продолжением цикла работ по теории устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), выполненных в последние годы группой сотрудников и аспирантов Омского технического университета [1–8]. Развитый в [5–8] подход к анализу поведения при большом времени решений обыкновенных линейных ФДУ сведением к такой же задаче для разностного уравнения вида $u_n = \Gamma u_{n-1}$ с компактным оператором Γ в пространстве начальных данных распространён на подкласс ФДУ с частными производными. Доказаны необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости и дихотомии решений задачи Коши для одномерной стационарной гиперболической системы, возмущённой слагаемыми с запаздывающим аргументом, в терминах нулей квазимногочлена $\det \Delta(\lambda, \mu)$, где $\Delta(\lambda, \mu)$ – символ оператора в левой части системы. Основной результат проиллюстрирован на модельной задаче управления с запаздыванием в управляющем устройстве.

2. Рассмотрим в полуплоскости $\Pi = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = Du\,\big|_{(x,t)} + \displaystyle\int_0^1 [dB(s)]\, u(x, t-s) = 0, \quad (x,t) \in \Pi \setminus \Pi_0, \\ u\,|_{\Pi_0} = \varphi \in E, \quad \Pi_0 = \mathbb{R} \times [0, 1]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$$D = \frac{d}{dt} + A\frac{d}{dx}, \quad A = \operatorname{diag}(a_1 I_1, \ldots, a_m I_m), \quad a_1 > \ldots > a_m, \quad a_k \neq 0, \tag{2}$$

I_k – единичная матрица порядка N_k, $\sum N_k = N$, $B\colon [0,1] \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $\bigvee_0^1 (B) < \infty$, $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^m \end{bmatrix}$, $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \dots \\ \varphi^m \end{bmatrix}$, u^k, φ^k – столбцы размера N_k, E – банахово пространство непрерывных ограниченных функций $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\|\varphi\|_E = \sup|\varphi|$, $|\cdot|$ – эрмитова норма в $\mathbb{C}^N$.

При условиях 2 через каждую точку $(x,t) \in \Pi$ проходят характеристики

$$q_k(x,t) = \left\{(\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = \sigma_k(x,t,\tau) = x + a_k(\tau - t)\right\}, k = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Оператор D далее понимается в обобщённом смысле:

$$D = \operatorname{diag}(D_1, \dots, D_n), \tag{4}$$

где $D_k u^k$ – производная по t вдоль q_k. Под решением задачи 1 понимается непрерывная функция $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ с C^1-гладкими в $\overline{\Pi\setminus\Pi_0}$ вдоль «своих» характеристик q_k компонентами u^k, удовлетворяющая 1. Класс таких функций далее обозначается $\widehat{C}^1$. Из выполняемых в разделе 1 построений, в частности, следует однозначная разрешимость задачи 1 в классе $\widehat{C}^1$.

Далее в разделе 1 построена эквивалентная 1 разностная задача Коши в фазовом пространстве E

$$\begin{cases} u_n = \Gamma u_{n-1}, \quad n = 1,2,\dots, \\ u_0 = \varphi \in E. \end{cases} \tag{5}$$

Доказана компактность оператора Γ. В разделе 2 описан спектр Γ в терминах нулей (λ,μ) квазимногочлена, указанного в п.1. В разделе 3 на этой базе доказаны итоговые результаты. В разделе 4 приведён иллюстрирующий пример.

3. Приведём здесь для удобства ссылок используемый далее факт из теории интеграла Стилтьеса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9]. *Пусть функция $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна и функция $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда функция*

$$h(x) = \int_c^d f(x,s)\,dg(s)$$

непрерывна и верна формула

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,s)\,dx\right) dg(s).$$

Этот результат без труда переносится на случай f со значениями в $\mathbb{C}^N$ и g со значениями в $\mathbb{C}^{N\times N}$.

1. Переход к разностной задаче Коши

Поставим в соответствие $\varphi \in E$ функции $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$

$$B_0\varphi\left|_{(x,t)}\right. = \int_0^t [dB\,(s)]\varphi\,(x, t-s)\,, \quad B_1\varphi\left|_{(x,t)}\right. = \int_t^1 [dB\,(s)]\varphi\,(x, 1+t-s)\,, \tag{6}$$

$$S\varphi\left|_{(x,t)}\right. = \int_0^t \begin{bmatrix} \varphi^1\,(\sigma_1, \tau) \\ \dots \\ \varphi^m\,(\sigma_m, \tau) \end{bmatrix} d\tau, \quad P\varphi\left|_{(x,t)}\right. = \begin{bmatrix} \varphi^1\,(x - a_1 t, 1) \\ \dots \\ \varphi^m\,(x - a_m t, 1) \end{bmatrix}, \tag{7}$$
$$T_k\varphi = SB_k\varphi, \quad k = 0, 1,$$

где σ_k – функции 3. Нетрудно убедиться, с учётом предложения 1, что формула 7 задаёт линейные ограниченные операторы $E \to E$.

Лемма 1. *Оператор $I + T_0$ имеет ограниченный обратный $E \to E$.*

Доказательство. Из 6, 7 следует неравенство

$$|T_0\varphi| \leqslant Mt \sup |\varphi|, \quad M = \bigvee_0^1 (B)\,, \quad t \in [0, 1].$$

Индукцией по n получим

$$|T_0^n\varphi| \leqslant \frac{Mt^n}{n!} \sup |\varphi|, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Отсюда следует требуемое. ■

Положим

$$\Gamma = (I + T_0)^{-1}\,(P - T_1)\,. \tag{8}$$

Лемма 2. *Формула 8 задаёт компактный оператор $E \to E$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – ограниченное множество в E. Равенство $\psi = \Gamma\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, равносильно соотношению

$$\psi = P\varphi - (T_0\psi + T_1\varphi)\,. \tag{9}$$

Из 9 попутно следует

$$\psi\,(x, 0) = \varphi\,(x, 1)\,. \tag{10}$$

Положим при $(x, t) \in \widehat{\Pi}_0 = \mathbb{R} \times [-1, 1]$

$$\alpha\,(x, t) = \begin{cases} \varphi\,(x, 1+t)\,, t \in [-1, 0), \\ \quad \dots \\ \psi\,(x, t)\,, t \in [0, 1]. \end{cases} \tag{11}$$

Функции 11 равномерно по $\varphi \in \mathfrak{M}$ ограничены и, с учётом 10, непрерывны в $\widehat{\Pi}_0$. Применяя к обеим частям 9 оператор 4, после вычислений с учётом равенств $DP\varphi = 0$, $DS\varphi = \varphi$ найдём:

$$D\psi \left|_{(x,t)} = \int_0^1 [dB(s)]\, \alpha(x, t-s)\,, \quad \psi \in \Gamma\mathfrak{M}. \right. \tag{12}$$

В силу предложения 1 функция в правой части 12 непрерывна в Π_0. Представим матрицу B в блочном виде $B = [b_{kj}]$ с блоками размера $N_k \times N_j$. Вытекающие из 12 соотношения для $D_k\psi^k$ после замены

$$f_k(x,t) = \psi^k(x + a_k t, t)$$

принимают вид

$$f'_{kt} = \sum_j \int_0^1 [db_{kj}(s)]\, \alpha^j(x + a_k t, t-s)\,, \quad k = \overline{1,m}. \tag{13}$$

Из 9, 13 вытекают равномерные по $\psi \in \Gamma\mathfrak{M}$ оценки

$$|f_k| \leqslant c_1, \quad \left| f'_{kt} \right| \leqslant c_2, \quad c_k = const > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Будем рассматривать f_k *как функции от* t со значениями в банаховом пространстве C_k непрерывных ограниченных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N_k}$ с равномерной нормой. В силу второй оценки 14 можно рассматривать f'_{kt} как производную $\frac{d}{dt} f_k(t)$ в топологии C_k. Обозначим

$$M_k = \{f_k(t) \mid \psi \in \Gamma\mathfrak{M}\}\,, \quad k = \overline{1,m}.$$

Из оценок 14 следует: при каждом k множество M_k – равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций в банаховом пространстве $C([0,1], C_k)$ с нормой

$$\|f_k\| = \sup_{t \in [0,1]} \|f_k\|_{C_k} = \sup_{\Pi_0} |f_k(x,t)|\,.$$

Таким образом, при каждом k множество M_k – предкомпакт в $C([0,1], C_k)$ и, с учётом $\sup\limits_{\Pi_0} |f_k(x,t)| = \sup\limits_{\Pi_0} \left|\psi^k(x,t)\right|$, множество $\left\{\psi^k \mid \psi \in \Gamma\mathfrak{M}\right\}$ – предкомпакт в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций $\Pi_0 \to \mathbb{C}^{N_k}$. Отсюда следует требуемое. ■

Замечание 1. Из формул 11, 12 для функции $\psi = \Gamma\varphi$, с учётом предложения 1, следует: для любой $\varphi \in E$

$$D\Gamma\varphi \in E, \quad \|D\Gamma\varphi\|_E \leqslant const \cdot \|\varphi\|_E\,. \tag{15}$$

Рассмотрим разностную задачу Коши 5 с оператором 8. Очевидно, задача 5 имеет единственное решение $u_n = \Gamma^n\varphi$.

Лемма 3. *Функция* $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ *является решением класса* $\widehat{C}^1$ *задачи Коши 1 точно тогда, когда последовательность*

$$u_n(x,t) = u(x,t+n), \quad (x,t) \in \Pi_0, \quad n = 0,1,\ldots \tag{16}$$

является решением задачи 5.

Доказательство. Пусть u – решение класса $\widehat{C}^1$ задачи 1. Записывая систему 1 в точке $(x, t+n)$, указанной в 16, представляя интеграл в 1 в виде суммы интегралов по $[0,t]$, $[t,1]$ и вводя обозначения 16, получим соотношение

$$(D+B_0)\,u_n + B_1 u_{n-1} = 0, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

с операторами 4, 6; учтено равенство

$$u(x,t+n-s) = u_{n-1}(x,1+t-s), \quad s \in [t,1]. \tag{18}$$

Применяя к обеим частям 17 оператор S, с учётом равенств

$$SDu_n = u_n(x,t) - \begin{bmatrix} u_n^1(x-a_1t,0) \\ \ldots \\ u_n^m(x-a_mt,0) \end{bmatrix}, \quad u_n(x,0) = u_{n-1}(x,1), \quad n = 1,2,\ldots,$$

получим равносильное 5 уравнение

$$(I+T_0)\,u_n = (P-T_1)\,u_{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{19}$$

Обратно, пусть u_n – решение задачи 5. Определим, с учётом вытекающего из 19 равенства $u_n(x,0) = u_{n-1}(x,1)$, функцию $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ равенством 16. Выполнение начального условия и непрерывность функции u очевидны. Применяя к обеим частям 19 оператор D, получим равенство 17, равносильное, с учётом 18, равенству 1 при $t \in [n, n+1]$, $n \geqslant 1$, с односторонними производными $D_k u^k$ на прямых $t = n$, $t = n+1$. Записывая в предположении $n \geqslant 2$ равенство 17 при $t = 0$ и такое же равенство с заменой n на $n-1$ при $t = 1$ и сравнивая полученные соотношения, найдём $Du_n\,|_{t=0} = Du_{n-1}\,|_{t=1}$.

Лемма доказана. ■

Следствие 1. *Задача Коши 1 однозначно разрешима в классе* $\widehat{C}^1$.

Обозначим C_p банахово пространство кусочно-непрерывных ограниченных функций $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ со скачками в целых точках с нормой $\sup|v|$; C_p^1 – банахово пространство кусочно-гладких ограниченных функций $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ со скачками v, v' в целых точках с нормой $\sup|v| + \sup|v'|$. Будем предполагать функции v соответственно непрерывными и гладкими *слева*.

Лемма 4. *Оператор* $\mathfrak{L} = \frac{d}{dx} - \Lambda$, $\Lambda \in \mathbb{C}^{N\times N}$, *действующий из* C_p^1 *в* C_p, *имеет ограниченный обратный* $\mathfrak{L}^{-1}\colon C_p \to C_p^1$ *точно тогда, когда спектр матрицы* Λ *не пересекается с мнимой осью.*

Доказательство. В силу теоремы Банаха об обратном операторе утверждение леммы равносильно следующему: уравнение $\mathfrak{L}v = h$ при любой $h \in C_p$ имеет единственное решение $v \in C_p^1$ точно тогда, когда выполняется указанное условие. Доказательство достаточности проводится повторением с очевидными отличиями аналогичного утверждения в [5, с. 119] для *непрерывного* случая. Если $\mu \in i\mathbb{R}$ – собственное число Λ с собственным вектором f, уравнение $\mathfrak{L}v = 0$ имеет, помимо решения $v = 0$, ещё одно решение из C_p^1: $v = e^{\mu x} f$; таким образом, условие леммы необходимо. ■

2. Характеризация собственных чисел оператора Γ

В силу структуры спектра компактного оператора в банаховом пространстве спектр оператора $Gamma$ состоит из точки $\xi = 0$ и не более чем счётного множества собственных чисел с единственной возможной предельной точкой $\xi = 0$.

Поставим в соответствие оператору 1 матричный пучок

$$\Delta(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu A + \int_0^1 e^{-\lambda s} dB(s), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Теорема 1. *Число $\xi \neq 0$ является собственным числом оператора Γ точно тогда, когда при некотором $\mu \in i\mathbb{R}$ и некотором λ из множества $M_\xi = \{\lambda = \ln \xi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ выполняется равенство*

$$\det \Delta(\lambda, \mu) = 0. \tag{21}$$

Доказательство. **1.** Пусть пара (λ, μ), $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in i\mathbb{R}$, удовлетворяет 21 и вектор $f \in \mathbb{C}^N$, $|f| = 1$ таков, что $\Delta(\lambda, \mu) f = 0$. Положим

$$\xi = e^{\lambda}, \quad u = e^{\lambda t + \mu x} f.$$

Подстановка в 1 даёт: $Lu = e^{\lambda t + \mu x} \Delta(\lambda, \mu) f = 0$. В силу леммы 3 функции

$$u_n(x, t) = e^{\lambda(t+n) + \mu x} f, \quad (x, t) \in \Pi_0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

удовлетворяют уравнению 5, в частности, верно равенство $\Gamma u_0 = u_1$ или, что то же, $\Gamma u_0 = \xi u_0$.

2. Пусть $\xi \neq 0$, $\Gamma\varphi = \xi\varphi$ при некоторой $\varphi \in E$, $\varphi \not\equiv 0$. В силу первого соотношения 15 $D\varphi \in E$. Так как $\{e^{2k\pi i t}, k \in \mathbb{Z}\}$ – полная ортогональная система на $[0, 1]$, существует $\lambda \in M_\xi$, такое, что

$$h(x) = \int_0^1 e^{-\lambda t} \varphi(x, t)\, dt \not\equiv 0. \tag{23}$$

Функция 23 непрерывна и ограничена на оси.

Зафиксируем последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$. Построим последовательность кусочно-гладких, гладких слева функций $\varphi_n \colon \Pi_0 \to \mathbb{C}^N$ со скачками φ_n, φ_{nx}', φ_{nt}' на отрезках $\{x = n \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ такую, что

$$|\varphi_n - \varphi| + |D\varphi_n - D\varphi| \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Имеет место равенство

$$\Gamma\varphi_n = \xi\left(\varphi_n + \delta_n\right), \tag{25}$$

где $\delta_n = \varphi - \varphi_n + \xi^{-1}\Gamma\left(\varphi_n - \varphi\right)$. Из 24 и неравенства 15 следует оценка

$$|\delta_n| + |D\delta_n| \leqslant const\,\varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Представим 25 в виде

$$\xi\left(I + T_0\right)\left(\varphi_n + \delta_n\right) + T_1\varphi_n = P\varphi_n. \tag{27}$$

Применяя к обеим частям оператор D, получим

$$\xi\left(D + B_0\right)\left(\varphi_n + \delta_n\right) + B_1\varphi_n = 0$$

(учтены соотношения $DS\varphi = \varphi$, $DP\varphi = 0$). Подстановка

$$\varphi_n = e^{\lambda t}\hat{\varphi}_n, \quad \lambda\text{–число (23)}, \tag{28}$$

даёт после вычислений с учётом $e^{\lambda} = \xi$ равенство

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_n}{\partial t} + A\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x} + b_n\left(x, t, \lambda\right) + \xi e^{-\lambda t}\left(D + B_0\right)\delta_n = 0, \tag{29}$$

где $b_n = \int_0^1 e^{-\lambda s}[dB\left(s\right)]\beta_n\left(x, t - s\right)$, $\quad \beta_n\left(x, t\right) = \begin{cases} \hat{\varphi}_n\left(x, 1 + t\right), & t \in [-1, 0), \\ \hat{\varphi}_n\left(x, t\right), & t \in [0, 1]. \end{cases}$

Применим к обеим частям 29 оператор $\int_0^1 \cdot\, dt$. Имеем

$$\int_0^1 \beta_n\left(x, t - s\right)dt = \int_0^s \hat{\varphi}_n\left(x, 1 + t - s\right)dt + \int_s^1 \hat{\varphi}\left(x, t - s\right)dt = h_n\left(x\right),$$

$$h_n\left(x\right) = \int_0^1 \hat{\varphi}_n\left(x, t\right)dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

С учётом этого и вытекающего из 27, 28 соотношения $\hat{\varphi}_n\left(x, 1\right) - \hat{\varphi}_n\left(x, 0\right) = \delta_n\left(x, 0\right)$ после преобразований получим равенство

$$\mathfrak{L}h_n = \left(\frac{d}{dx} + \Lambda\right)h_n = \theta_n\left(x\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

где

$$\Lambda = A^{-1}\left[\lambda I + \int_0^1 e^{-\lambda s}dB\left(s\right)\right], \quad \theta_n = A^{-1}\left[\delta_n\left(x, 0\right) + \xi\int_0^1 e^{-\lambda t}\left(D + B_0\right)\sigma_n dt\right].$$

Нетрудно убедиться:

$$h_n \in C_p^1, \quad h_n \to h \text{ в } C_p, \quad \theta_n \in C_p.$$

Так как с учётом $h \not\equiv 0$, $\|h_n\|_{C_p} \geqslant const > 0$ $(n \geqslant n_0)$ и ввиду 26, $\theta_n \to 0$ в C_p, из 30 вытекает: оператор $\mathfrak{L}$ *не имеет* обратного $C_p \to C_p^1$. Тогда в силу леммы 4 существует $\mu \in i\mathbb{R}$ такое, что выполняется равенство $\det\left(\mu I - \Lambda\right) = 0$, равносильное равенству 21 с матрицей 20. Теорема доказана. ■

3. Признаки устойчивости и дихотомии

Имея ввиду установленное леммой 3 соответствие между решениями класса $\widehat{C}^1$ задачи Коши 1 и решениями разностной задачи Коши 5, примем следующие определения.

Будем говорить, что решение $u = 0$ системы 1 экспоненциально устойчиво, если это имеет место для решения $u_n = 0$ уравнения 5: для решений задачи Коши 5 верна при некоторых $a, \nu > 0$ оценка

$$\|\Gamma^n \varphi\|_E \leqslant a e^{-\nu n} \|\varphi\|_E. \tag{31}$$

Будем говорить, что имеет место экспоненциальная дихотомия решений класса $\widehat{C}^1$ задачи Коши 1, если фазовое пространство E задачи Коши 5 разлагается в прямую сумму подпространств

$$E = E_1 \dot{+} E_2, \quad E_k \neq \{0\}, \tag{32}$$

так, что для решений задачи Коши 5 верны при некоторых $a, \nu > 0$ оценки

$$\begin{aligned} &\varphi \in E_1 \Rightarrow \|\Gamma^n \varphi\|_E \leqslant a e^{-\nu n} \|\varphi\|_E, \\ &\varphi \in E_2 \Rightarrow \|\Gamma^n \varphi\|_E \geqslant a e^{\nu n} \|\varphi\|_E. \end{aligned} \tag{33}$$

Теорема 2. *Решение $u = 0$ системы 1 экспоненциально устойчиво точно тогда, когда при каждом $\mu \in i\mathbb{R}$ уравнение 21 не имеет λ-корней с реальной частью* $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$.

Доказательство. **1.** Пусть требование теоремы выполняется. Так как спектр компактного оператора состоит из множества (возможно пустого) собственных чисел и точки $\xi = 0$, в этом случае, в силу теоремы 1, спектр оператора Γ лежит целиком в круге $|\xi| < 1$. Ввиду замкнутости спектра существует $r \in (0, 1)$ такое, что спектр Γ лежит в круге $|\xi| < r$. Из формулы Коши-Рисса

$$\Gamma^n \varphi = (2\pi i)^{-1} \int_{|\xi| = r} \xi^n \left(\xi I - \Gamma\right)^{-1} \varphi d\xi \tag{34}$$

следует для решений задачи Коши 5 оценка 31 при $a = r \cdot \max\limits_{|\xi|=r} \| \left(\xi I - \Gamma\right)^{-1} \|$, $\nu = \ln r^{-1}$.

2. Пусть требование теоремы не выполняется: существует удовлетворяющая уравнению 21 пара (λ, μ), $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \mu = 0$. Тогда, очевидно, не выполняется оценка 31 для решения 22 задачи 5. Теорема доказана. ■

Теорема 3. *Экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши 1 имеет место точно тогда, когда при каждом $\mu \in i\mathbb{R}$ уравнение 21 не имеет λ-корней на мнимой оси и имеет хотя бы один λ-корень в полуплоскости* $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Доказательство. **1.** Пусть требование теоремы выполняется. С учётом структуры спектра Γ и теоремы 1 это означает: спектр $\sigma(\Gamma)$ оператора Γ распадается на две непустые компоненты σ_1, σ_2, лежащие соответственно внутри и вне окружности $|\xi| = 1$, и тогда пространство E распадается [10] в прямую сумму 32 инвариантных подпространств, таких, что спектр сужения оператора Γ на подпространство E_k – множество σ_k. Из формулы вида 34 при $\varphi \in E_1$ следует первая оценка 33. Так как спектр оператора $\Gamma^{-1}\colon E_2 \to E_2$ – множество $(\sigma_2)^{-1}$, лежащее в круге $|\xi| < 1$, из формулы вида 34 для Γ^{-1} при $\varphi \in E_2$ следует вторая оценка 33 с переменой местами левой и правой частей и переменой знака неравенства на противоположный.

2. Пусть требование теоремы не выполняется. Нетрудно усмотреть, с учётом структуры спектра Γ и теоремы 1, что в этом случае имеет место одно из двух: либо спектр Γ лежит целиком в круге $|\xi| < 1$, либо существует собственное число ξ_0 оператора Γ с модулем 1. В первом случае, в силу теоремы 2, первая оценка 33 выполняется при всех $\varphi \in E$, тем самым не выполняется требование $E_2 \neq \{0\}$ в 32. Во втором случае имеем для некоторой $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_E = 1$, $\Gamma\varphi = \xi_0\varphi$, откуда следует равенство $\|\Gamma^n\varphi\|_E = \|\xi_0^n\varphi\|_E \equiv 1$, несовместимое с оценками 33. Теорема доказана. ■

Замечание 2. Утверждения теорем 2, 3 сохраняются, если матрица A в 1 имеет вид $A = Z^{-1}\widehat{A}Z$, где $\widehat{A}$ – диагональная матрица 2. Это следует из равенства $\det\Delta(\lambda,\mu) = \det\widehat{\Delta}(\lambda,\mu)$, где пучок $\widehat{\Delta}$ строится по коэффициентам $\widehat{A}$, $\widehat{B} = ZB(s)Z^{-1}$ системы, получающейся заменой $\widehat{u} = Zu$.

4. Пример

Рассмотрим систему управления теплопереносом в бесконечном стержне с запаздыванием в управляющем устройстве

$$\begin{cases} Du(x,t) + B_0u(x,t) + b\sigma(x,t-1) = 0, \quad (x,t) \in \Pi \setminus \Pi_0, \\ \sigma(x,t) = d^*u(x,t), \quad u|_{\Pi_0} = \varphi \in E. \end{cases} \tag{35}$$

Здесь D – оператор 4,

$$u = \begin{bmatrix} T \\ q \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & (c\rho)^{-1} \\ k\varepsilon^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

T, q – температура и плотность теплового потока, ρ, c, k – плотность, удельная теплоёмкость и теплопроводность, ε – время релаксации, b, d – векторы управляемости и наблюдаемости, σ – сигнал обратной связи, E – банахово пространство непрерывных ограниченных функций $\varphi\colon \Pi_0 \to \mathbb{R}$ с нормой $\sup|\varphi|$. Нетрудно убедиться, что матрица A подобна матрице

$$\widehat{A} = \operatorname{diag}(a, -a), \quad a = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon c\rho}}.$$

Система 35 при $b = 0$ описывает теплоперенос в стержне в рамках гиперболической теплопроводности [11, 12], в частности, возмущения распространяются вдоль стержня с конечной скоростью a. Система 35 имеет вид 1 при

$$B(s) = \begin{cases} 0, \quad s = 0, \\ B_0, \quad 0 < s < 1, \\ B_0 + bd^*, s = 1. \end{cases}$$

Подстановка в 20 даёт

$$\Delta(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu A + B_0 + e^{-\lambda} bd^*. \tag{37}$$

С учётом замечания в конце раздела 4 устойчивость решения $u = 0$ системы 35 зависит от расположения нулей (λ, μ) определителя пучка 37. При $b = 0$ имеем: $\det \Delta(0,0) = \det B_0$. Тем самым, *при отсутствии управления* не выполняется требование теоремы 2, и решение $u = 0$ системы 35 не является экспоненциально устойчивым. Покажем: при условиях

$$0 < b_1 d_1 < \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad b_2 = d_2 = 0 \tag{38}$$

решение $u = 0$ экспоненциально устойчиво. Вычисления с учётом 36–38 дают

$$\Delta(\lambda, \mu) = A(\mu I - \Lambda), \quad \Lambda = -\begin{bmatrix} 0 & k^{-1}(1 + \varepsilon\lambda) \\ c\rho\left(\lambda + b_1 d_1 e^{-\lambda}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует для μ – корней уравнения 21 равенство

$$\mu_j^2 = \frac{c\rho}{k}(1 + \varepsilon\lambda)\left(\lambda + b_1 d_1 e^{-\lambda}\right), \quad j = 1, 2.$$

Подстановка $\lambda = \alpha + i\omega$ приводит это равенство к виду

$$\begin{aligned} &\mu_j^2 = \frac{c\rho}{k}(p + qi), \\ &p = \alpha + \varepsilon(\alpha^2 - \omega^2) + b_1 d_1 \left[(1 + \varepsilon\alpha)\cos\omega + \varepsilon\omega\sin\omega\right] e^{-\alpha}, \\ &q = \omega\left[1 + 2\varepsilon\alpha + b_1 d_1\left(\varepsilon\cos\omega - (1 + \varepsilon\alpha)\tfrac{\sin\omega}{\omega}\right)e^{-\alpha}\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть выполняется требование 38 и $\alpha \geqslant 0$. Возможны два случая.

1. $\omega = 0$. В этом случае $p + qi = \alpha + \varepsilon\alpha^2 + b_1 d_1 (1 + \varepsilon\alpha) e^{-\alpha} > 0$.

2. $\omega \neq 0$. Из оценки

$$|q| \geqslant |\omega| r(\alpha), \quad r(\alpha) = 2\varepsilon\alpha + 1 - b_1 d_1 (\varepsilon\alpha + 1 + \varepsilon) e^{-\alpha},$$

с учётом

$$r(0) = (1 + \varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - b_1 d_1\right) > 0, \quad r'(\alpha) = 2\varepsilon + b_1 d_1 (1 + \varepsilon\alpha) e^{\alpha} > 0$$

следует: в этом случае $q \neq 0$. Таким образом при условии $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ правая часть уравнения 39 заведомо не является квадратом мнимого числа, и μ – корни уравнения 21 не лежат на мнимой оси. В силу теоремы 2 отсюда следует требуемое.

Случай любого запаздывания $\tau > 0$ в 35 приводится к случаю $\tau = 1$ масштабным преобразованием.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору, д.ф.-м.н. Романовскому Рэму Константиновичу (1929–2016 гг.) за оказанную помощь при написании настоящей статьи.

Литература

1. Алексенко Н.В. Устойчивость решений почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. 2000. Вып. 2. С. 3–6.
2. Алексенко Н.В., Романовский Р.К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.
3. Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2003. Вып. 36. С. 77–81.
4. Романовский Р.К., Троценко Г.А. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.
5. Романовский Р.К., Назарук Е.М. О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 129–135.
6. Романовский Р.К., Назарук Е.М. Прямой метод Ляпунова для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве Соболева // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 846–857.
7. Романовский Р.К., Назарук Е.М. Дихотомия решений функционально-дифференциальных уравнений в пространстве Соболева // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 459–471.
8. Романовский Р.К., Назарук Е.М. Дихотомия решений дифференциально-разностных уравнений в пространстве Соболева // Докл. Акад. Наук. 2015. Т. 461, № 4. С. 394–397.
9. Халмош П. Теория меры. М. : ИЛ, 1953. 282 с.
10. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 536 с.
11. Лыков А.В. Проблема тепло-массообмена. Минск : Наука и техника, 1976. 312 с.
12. Корнеев С.А. Гиперболические уравнения теплопроводности // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2001. Вып. 4. С. 117–125.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE

G.D. Anisimova
Postgraduate Student, e-mail: gdanisimova@gmail.com

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. For the class of systems specified in the title we prove necessary and sufficient criteria for exponential stability and dichotomy of solutions of the Cauchy problem in terms of the zeros (λ, μ) of determinant of a matrix pencil – symbol of the functional-differential operator in the left part of the system. An illustrative example is considered.

Keywords: transition to the difference Cauchy problem, characterization of the spectrum of resolving operator.

Дата поступления в редакцию: 20.10.2017