Математические структуры и моделирование
2018. № 1(45). С. 95–107

УДК 534.11
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.95-107

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИНИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

В.Р. Шагиев[1]
аспирант, e-mail: shagiev-vadim@mail.ru
А.М. Ахтямов[1,2]
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: akhtyamovam@mail.ru

[1]Башкирский государственный университет, Уфа, Республика Башкортостан, Россия
[2]Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа, Республика Башкортостан, Россия

Аннотация. Рассматриваются колебания трубопровода с жидкостью. Ранее было показано, что если жидкость не течёт по трубопроводу, то по всем собственным частотам изгибных колебаний трубопровода вид закрепления трубопровода определяется однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах. Задача идентификации краевых условий решалась также и по девяти собственным частотам. В настоящей статье количество собственных значений, с помощью которых можно однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах восстановить краевые условия, уменьшено до пяти. Количество спектральных данных удалось уменьшить за счёт того, что если ранее решалась линейная система 9-ти уравнений, то в настоящей статье решается система пяти нелинейных уравнений относительно четырёх неизвестных коэффициентов из краевых условий, приведённых к канонической форме. Представлен пример решения этой обратной задачи. Приведены также два контрпримера, в которых показано, что меньшего числа собственных значений для идентификации вообще говоря недостаточно. В первом контрпримере показано, что четырёх ненулевых собственных частот ещё недостаточно для идентификации вида закрепления трубопровода. Во втором контрпримере показано, что в отдельных случаях необходима информация о том, является ли нуль собственным значением.

Ключевые слова: краевые условия, собственные частоты, собственные значения, заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, трубопровод.

Введение

Колебаниям трубопроводов, содержащим жидкость, а также определению собственных частот колебаний стержней и трубопроводов посвящены работы

[1]–[8]. В [9]–[16] решались задачи определения параметров краевых условий и условий сопряжения стержней, трубопроводов и других распределённых механических систем. В частности, в [15] по двум собственным значениям определялись неупругие закрепления трубопроводов, в [16] по 14-ти собственным частотам определялись закрепления трубопроводов с протекающей жидкостью. В [13, 14] показано, что по всем собственным частотам (в том числе и нулевому собственному значению) вид закрепления трубопровода (в случае, когда жидкость не течёт по трубопроводу) определяется однозначно с точностью до перестановок местами закреплений на его концах. Более того, там же было показано, что для такой идентификации достаточно и девяти собственных частот. В статье [15] показано, что для определения одного из 16-ти неупругих видов закреплений трубопровода ((заделка)–(заделка), (заделка)–(свободное опирание), (заделка)–(плавающая заделка), (заделка)–(свободный конец), (свободное опирание)–(заделка), (свободное опирание)–(свободное опирание), (свободное опирание)–(плавающая заделка), (свободное опирание)–(свободный конец), (плавающая заделка)–(заделка), (плавающая заделка)–(свободное опирание), (плавающая заделка)–(плавающая заделка), (плавающая заделка)–(свободный конец), (свободный конец)–(заделка), (свободный конец)–(свободное опирание), (свободный конец)–(плавающая заделка), (свободный конец)–(свободный конец)) с точностью до перестановок закреплений на его концах достаточно одной собственной частоты и информации о том, является ли нулевое значение собственным. В настоящей статье показано, что для идентификации закреплений трубопровода достаточно пяти собственных частот, а четырёх собственных частот для этого недостаточно.

Прямая задача

Необходимо определить собственные частоты изгибных колебаний трубопровода с жидкостью (жидкость не движется), зная вид закреплений на его концах (краевые условия) и физические параметры механической системы (коэффициент жёсткости пружин, закрепляющих трубопровод; масса, плотность, длина, внешний и внутренний радиусы трубы; масса и плотность жидкости, которая находится внутри и полностью заполняет весь объём трубопровода в рассматриваемом участке).

Уравнение малых свободных колебаний трубопровода с протекающей по нему жидкостью (с учётом несжимаемости жидкости) имеет следующий вид [1, с. 163]:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (m+\widetilde{m})\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\widetilde{m}V_0\frac{\partial^2 W}{\partial X\partial t} + \widetilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0}+V_0^2\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \tag{1}$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad p_0 = E\left(\frac{\pi r_1}{2L}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^4 - 1\right),$$

$$m = \pi\,(r^2 - r_1^2\,)\rho, \quad \widetilde{m} = \pi\, r_1^2\,\rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жёсткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и $\widetilde{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости, L — длина трубы.

Вводя обозначения $x = X/L$, $w = W/L$, запишем уравнение (1) следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(m+\widetilde{m})\,L^4}{EI}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\widetilde{m}V_0L^3}{EI}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{\widetilde{m}L^2}{EI}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подстановка $w(x,t) = X(x)e^{iwt}$ приводит к уравнению:

$$X^{(4)} + aX'' + 2biwX' - cw^2X = 0, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{\widetilde{m}L^2}{E\,I}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right), \quad b = \frac{\widetilde{m}\,V_0\,L^3}{E\,I}, \quad c = \frac{(m+\widetilde{m})L^4}{E\,I}.$$

Введение обозначений x и w позволило нам обезразмерить переменные

$$a: \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{м}^2}{1}\cdot\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}\cdot\frac{1}{\text{м}^4}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 1, \quad w\cdot b: \quad \frac{1}{\text{с}}\cdot\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}^3}{1}\cdot\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}\cdot\frac{1}{\text{м}^4}\right) = 1,$$

$$w^2\cdot c: \quad \frac{1}{\text{с}^2}\cdot\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{м}^4}{1}\cdot\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}\cdot\frac{1}{\text{м}^4}\right) = 1.$$

Так как мы рассматриваем случай, когда жидкость не течёт по трубопроводу ($V_0 = 0$), уравнение (2) упрощается и выглядит так:

$$X^{(4)} + aX'' - cw^2X = 0. \tag{3}$$

Краевые условия в общем виде (условия типа Штурма [17, с. 70]):

$$\begin{aligned} U_1(X) &= -a_1X(0) + a_4X'''(0) = 0, \quad U_3(X) = b_1X(1) + b_4X'''(1) = 0,\\ U_2(X) &= -a_2X'(0) + a_3X''(0) = 0, \quad U_4(X) = b_2X'(1) + b_3X''(1) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$|a_1| + |a_4| \neq 0, \quad |a_2| + |a_3| \neq 0, \quad |b_1| + |b_4| \neq 0, \quad |b_2| + |b_3| \neq 0.$$

Матрицу, составленную из коэффициентов a_j форм $U_1(X_k)$ и $U_2(X_k)$, обозначим буквой A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_j форм $U_3(X_k)$ и $U_4(X_k)$, – буквой B.

$$A = \begin{Vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4\\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4\\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что в рассмотренных нами примерах спектр состоит из простых собственных значений. Для первых собственных значений это проверено с помощью неравенства $\frac{\partial\Delta(\lambda)}{\lambda} \neq 0$ при $\lambda = \lambda_k$, а для последующих собственных частот это вытекает из теоремы 2 [17, с. 74-75]), которая утверждает, что спектр краевой задачи с условиями Штурма-Лиувилля, начиная с некоторого значения, состоит из простых собственных значений.

Покажем решение прямой задачи на примере случая (заделка)–(свободный конец), коэффициенты в краевых условиях $a_1 = 1$,$a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$:

$$U_1(X) = X(0) = 0, \quad U_3(X) = X'''(1) = 0,$$
$$U_2(X) = X'(0) = 0, \quad U_4(X) = X''(1) = 0.$$

Характеристическое уравнение для этой задачи в случае, когда жидкость не течёт по трубопроводу ($V_0 = 0$), предполагая коэффициенты a и c равными 1, имеет следующий вид:

$$X^{(4)} + X'' - w^2 X = 0, \tag{6}$$

λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 – корни уравнения (6):

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4w^2}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{1+4w^2}}{2}}. \tag{7}$$

Функции

$$X_1(x) = -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_2(x) = -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_3(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_4(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{\lambda_2 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{-\lambda_1 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{-\lambda_2 x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (6), которые удовлетворяют условию

$$X_j^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq r, \\ 1, & j = r, \end{cases} \quad j, r = 1, 2, 3, 4.$$

Общее решение уравнения (6) представляется в следующем виде

$$X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x) + C_3 X_3(x) + C_4 X_4(x).$$

Уравнение частот получают из условия равенства нулю характеристического определителя

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & U_1(X_2) & U_1(X_3) & U_1(X_4) \\ U_2(X_1) & U_2(X_2) & U_2(X_3) & U_2(X_4) \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Вычисления на компьютере приводят к следующим результатам: $w_1 = 3.641309$, $w_2 = 21.72958$, $w_3 = 61.32403$, $w_4 = 120.4921$, $w_5 = 199.4298$, $w_6 = 298.1131$, $w_7 = 416.5395$, $w_8 = 554.7075$, $w_9 = 712.6162$.

Заметим, что для случая, когда жидкость в трубопроводе не движется, собственные частоты не имеют комплексную (мнимую) часть.

Обратная задача

Известны собственные частоты w_k. Ранги матриц A и B (5) равны двум. Требуется восстановить коэффициенты краевых условий a_j и b_j (4), то есть определить вид закрепления.

Ранее [13, 14] было показано, что краевые условия находятся однозначно с точностью до перестановок закреплений местами, и для этого использовалось девять собственных частот. В данной статье мы покажем, что, используя пять собственных частот, можно однозначно определить вид закрепления трубопровода, когда жидкость не движется.

Матрицу, составленную из матриц A, B и двух нулевых матриц, обозначим через C:

$$C = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами k_1, k_2, k_3, k_4 – через

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = \begin{vmatrix} c_{1\,k_1} & c_{1\,k_2} & c_{1\,k_3} & c_{1\,k_4} \\ c_{2\,k_1} & c_{2\,k_2} & c_{2\,k_3} & c_{2\,k_4} \\ c_{3\,k_1} & c_{3\,k_2} & c_{3\,k_3} & c_{3\,k_4} \\ c_{4\,k_1} & c_{4\,k_2} & c_{4\,k_3} & c_{4\,k_4} \end{vmatrix}, \quad \text{например,} \quad M_{1256} = (-a_1)\cdot(-a_2)\cdot b_1 \cdot b_2.$$

В терминах матрицы C задача идентификации краевых условий (4) сводится к идентификации матрицы C с точностью до линейных преобразований её строк.

Характеристический определитель (8) можно представить в другом виде:

$$\Delta(w) = \det{(C \cdot D)}, \quad \text{где}$$

$$D = \left\| \begin{matrix} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(1) & X_2(1) & X_3(1) & X_4(1) \\ X_1'(1) & X_2'(1) & X_3'(1) & X_4'(1) \\ X_1''(1) & X_2''(1) & X_3''(1) & X_4''(1) \\ X_1'''(1) & X_2'''(1) & X_3'''(1) & X_4'''(1) \end{matrix} \right\| .$$

Так как нам известны собственные частоты w_k, мы можем найти значения λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4, что позволяет вычислить функции $X_1(x)$, $X_2(x)$, $X_3(x)$, $X_4(x)$ и все их производные. Поэтому матрица D нам полностью известна.

Используя формулу Бине-Коши, получаем

$$\Delta(w_k) = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant 4 \\ 5 \leqslant k_3 < k_4 \leqslant 8}} M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = 0, \tag{9}$$

где $f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ – миноры четвёртого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами k_1, k_2, k_3, k_4.

Уравнение (9) раскрывается следующим образом

$$\begin{gathered} \Delta(w_k) = x_1\, f_{1257}(w_k) + x_2\, f_{1268}(w_k) + x_3\, f_{1368}(w_k) + x_4\, f_{1278}(w_k) + x_5\, f_{1378}(w_k) + \\ + x_6\, f_{2478}(w_k) + x_7\, f_{1357}(w_k) + x_8\, f_{2468}(w_k) + x_9\, f_{1256}(w_k) + x_{10} f_{3478}(w_k) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} x_1 = M_{1257} - M_{1356}\ (f_{1257} = -f_{1356}), \quad x_5 = M_{1378} - M_{3457}\ (f_{1378} = -f_{3457}), \\ x_2 = M_{1268} - M_{2456}\ (f_{1268} = -f_{2456}), \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468}\ (f_{2478} = -f_{3468}), \\ x_3 = M_{1368} + M_{2457}\ (f_{1368} = f_{2457}), \qquad x_4 = M_{1278} + M_{3456}\ (f_{1278} = f_{3456}), \\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \qquad\qquad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478}. \end{gathered} \tag{11}$$

$$cw^2\, f_{1356} = -f_{1378},\ cw^2\, f_{2456} = -f_{2478},\ cw^2\, f_{1357} = -f_{2468},\ cw^4\, f_{1256} = f_{3478}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что собственные частоты могут совпадать и для случаев, когда закрепления не получаются одно из другого перестановкой их на концах. Здесь c — это коэффициент из (2). Почему это важно, мы покажем ниже.

Подставив в (10) пять собственных частот $w_1,\ldots,w_5$, получим систему пяти уравнений относительно неизвестных $x_1,\ldots,x_{10}$. Матрицей этой системы является следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} f_{1257}(w_1) & f_{1268}(w_1) & ... & f_{1256}(w_1) & f_{3478}(w_1) \\ f_{1257}(w_2) & f_{1268}(w_2) & ... & f_{1256}(w_2) & f_{3478}(w_2) \\ f_{1257}(w_3) & f_{1268}(w_3) & ... & f_{1256}(w_3) & f_{3478}(w_3) \\ f_{1257}(w_4) & f_{1268}(w_4) & ... & f_{1256}(w_4) & f_{3478}(w_4) \\ f_{1257}(w_5) & f_{1268}(w_5) & ... & f_{1256}(w_5) & f_{3478}(w_5) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Выразим переменные $x_1,...,x_{10}$ через $a_1,...,a_4$ и $b_1,...,b_4$

$$x_1 = a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2; \quad x_2 = -a_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot b_4 - a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2;$$

$$x_3 = a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_4 + a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; \quad x_4 = -a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2;$$

$$x_5 = a_1 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot b_4 + a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; \quad x_6 = -a_2 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4;$$

$$x_7 = -a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3; \quad x_8 = -a_2 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4;$$

$$x_9 = a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2; \quad x_{10} = a_3 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4.$$

В результате получим систему пяти нелинейных уравнений от восьми неизвестных.

Эта система, с помощью сведения матрицы C к канонической форме, сводится к решению нелинейной системы пяти уравнений от четырёх неизвестных коэффициентов краевых условий. Четырёх собственных частот для идентификации вида закрепления трубопровода недостаточно. Соответствующий контрпример будет приведён ниже.

Ранее задача идентификации закреплений трубопровода решалась с помощью системы 9-ти линейных уравнений (10) от 10-ти неизвестных x_i ($i = 1, 2 \dots, 10$). Поэтому использовалось девять, а не пять собственных частот.

Пример

Рассмотрим случай, когда нам известны частоты $w_1 = 29.44435$, $w_2 = 72.98521$, $w_3 = 134.6173$, $w_4 = 215.1980$, $w_5 = 315.0639$. Найдём λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 (7) для каждой из пяти частот:

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = 5.380390_{(w_1)}, 8.513925_{(w_2)}, 11.58094_{(w_3)}, 14.65260_{(w_4)}, 17.73596_{(w_5)}$$

$$\lambda_2 = -\lambda_4 = 5.472531i_{(w_1)}, 8.572452i_{(w_2)}, 11.62404i_{(w_3)}, 14.68668i_{(w_4)}, 17.76413i_{(w_5)}$$

Матрица D для w_1 выглядит следующим образом

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 55.53811 & 10.19385 & 1.831441 & 0.344800 \\ 298.9313 & 55.53811 & 9.849050 & 1.831441 \\ 1587.804 & 298.9313 & 53.70667 & 9.849050 \\ 8538.828 & 1587.804 & 289.0823 & 53.70667 \end{Vmatrix}.$$

Раскроем эту матрицу (10) и получим первое уравнение, соответствующее частоте w_1:

$$-0.480117\,x_1 - 0.477539\,x_2 - 74.79756\,x_3 + 37.22037\,x_4 - 416.2470\,x_5 -$$
$$-414.0117\,x_6 + 2.671859\,x_7 - 2316.421\,x_8 - 0.041778\,x_9 - 31401.96\,x_{10} = 0.$$

Аналогично получим остальные четыре уравнения:

$$2.818855\,x_1 + 14.49809\,x_2 + 1640.216\,x_3 - 813.1440\,x_4 + 15015.59\,x_5 +$$
$$+77229.04\,x_6 - 25.70239\,x_7 + 136912.5\,x_8 + 0.152838\,x_9 + 4336816\,x_{10} = 0,$$

$$-23.92452\,x_1 - 515.7571\,x_2 - 31464.06\,x_3 + 15651.91\,x_4 - 433555.9\,x_5 -$$
$$-9346459\,x_6 + 321.6035\,x_7 - 5828042\,x_8 - 0.863650\,x_9 - 2.836231 \cdot 10^8\,x_{10} = 0,$$

$$251.4325\,x_1 + 13071.78\,x_2 + 603128.2\,x_3 - 300417.9\,x_4 + 1.164389 \cdot 10^7\,x_5 +$$
$$+6.053564 \cdot 10^8\,x_6 - 4576.252\,x_7 + 2.119271 \cdot 10^8\,x_8 + 6.487102\,x_9 +$$
$$+1.391246 \cdot 10^{10}\,x_{10} = 0,$$

$$-3044.613\,x_1 - 297594.5\,x_2 - 1.176207 \cdot 10^7\,x_3 + 5863328\,x_4 - 3.022243 \cdot 10^8\,x_5 -$$
$$-2.954079 \cdot 10^{10}\,x_6 + 70778.30\,x_7 - 7.025825 \cdot 10^9\,x_8 - 59.06727\,x_9 -$$
$$-5.820246 \cdot 10^{11}\,x_{10} = 0.$$

Обозначим эту систему через S. Определителем этой системы является следующая матрица

$$\begin{pmatrix} -0.480117 & -0.477539 & ... & -0.041778 & -31401.96 \\ 2.818855 & 14.49809 & ... & 0.152838 & 4336816 \\ -23.92452 & -515.7571 & ... & -0.863650 & -2.836231 \cdot 10^8 \\ 251.4325 & 13071.78 & ... & 6.487102 & 1.391246 \cdot 10^{10} \\ -3044.613 & -297594.5 & ... & -59.06727 & -5.820246 \cdot 10^{11} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что наибольшим по модулю определителем четвёртого порядка этой матрицы является определитель, составленный из элементов 4-8 столбцов и равный $-6.275948 \cdot 10^{24}$. Поэтому удобнее всего выразить переменные $x_4,\ldots,x_8$ через остальные. Оставим переменные $x_4,\ldots,x_8$ в левой части уравнений системы S, а переменные x_1, x_2, x_3, x_9, x_{10} перенесём в правую часть (со знаком минус). Получим систему уравнений, решив которую методом Крамера, получим выражение переменных $x_4,\ldots,x_8$ через остальные:

$$x_4 = -0.009002x_1 - 0.103224x_2 + 2.143385x_3 - 0.001673x_9 - 950.8871x_{10},$$

$$x_5 = -0.000323x_1 - 0.008424x_2 + 0.008858x_3 - 0.000076x_9 + 33.38482x_{10},$$

$$x_6 = -6.67 \cdot 10^{-7}x_1 - 0.000021x_2 + 0.000028x_3 - 1.83 \cdot 10^{-7}x_9 - 12.03323x_{10},$$

$$x_7 = 0.264565x_1 + 0.583920x_2 - 0.818512x_3 + 0.029648x_9 - 1567.256x_{10},$$

$$x_8 = 0.000011x_1 + 0.000326x_2 - 0.000391x_3 + 0.000003x_9 - 34.49125x_{10}.$$

Выразим переменные $x_1,\ldots,x_{10}$ через $a_1,\ldots,a_4$ и $b_1,\ldots,b_4$, как мы уже сделали ранее, и предположим какие-нибудь четыре коэффициента равными единице, например, $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 1$.

$$-a_1a_2 - b_1b_2 = -0.009002(a_1a_2b_1 + a_1b_1b_2) + 0.103224(a_1a_2b_2 + a_2b_1b_2)+$$
$$+2.143385(a_1b_2 + a_2b_1) - 0.001673a_1a_2b_1b_2 - 950.8871,$$

$$a_1 + b_1 = -0.000323(a_1a_2b_1 + a_1b_1b_2) + 0.008424(a_1a_2b_2 + a_2b_1b_2)+$$
$$+0.008858(a_1b_2 + a_2b_1) - 0.000076a_1a_2b_1b_2 + 33.38482,$$

$$-a_2 - b_2 = -6.67 \cdot 10^{-7}(a_1a_2b_1 + a_1b_1b_2) + 0.000021(a_1a_2b_2 + a_2b_1b_2)+$$
$$+0.000028(a_1b_2 + a_2b_1) - 1.83 \cdot 10^{-7}a_1a_2b_1b_2 - 12.03323,$$

$$-a_1b_1 = 0.264565(a_1a_2b_1 + a_1b_1b_2) - 0.583920(a_1a_2b_2 + a_2b_1b_2)-$$
$$-0.818512(a_1b_2 + a_2b_1) + 0.029648a_1a_2b_1b_2 - 1567.256,$$

$$-a_2b_2 = 0.000011(a_1a_2b_1 + a_1b_1b_2) - 0.000326(a_1a_2b_2 + a_2b_1b_2)-$$
$$-0.000391(a_1b_2 + a_2b_1) + 0.000003a_1a_2b_1b_2 - 34.49125.$$

Решение первых четырёх уравнений даёт такие ответы (отбрасываем отрицательные и комплексные значения)

$$a_1 = 26.00974,\ a_2 = 6.549311,\ b_1 = 20.24870,\ b_2 = 5.450090,$$

$$a_1 = 25,\ a_2 = 5,\ b_1 = 21,\ b_2 = 7.$$

Решение первых трёх и пятого уравнений даёт такие ответы (отбрасываем отрицательные и комплексные значения)

$$a_1 = 33.63423,\ a_2 = 6.985825,\ b_1 = 12.94287,\ b_2 = 5.013029,$$

$$a_1 = 25,\ a_2 = 5,\ b_1 = 21,\ b_2 = 7.$$

Таким образом, частотам $w_1 = 29.44435$, $w_2 = 72.98521$, $w_3 = 134.6173$, $w_4 = 215.1980$, $w_5 = 315.0639$ соответствуют краевые условия $a_1 = 25a_4$, $a_2 = 5a_3$, $b_1 = 21b_4$, $b_2 = 7b_3$ либо $a_1 = 21a_4$, $a_2 = 7a_3$, $b_1 = 25b_4$, $b_2 = 5b_3$ (так как жидкость не течёт по трубопроводу).

Анализ погрешности

В таблице 1 представлены результаты расчёта относительной погрешности при возмущении собственной частоты w_1.

Таблица 1. Относительные погрешности при возмущении w_1

Возмущение w_1	δ для a_1	δ для a_2	δ для b_1	δ для b_2
10^{-10}	1159.156	154.0616	1119.691	154.2552
10^{-9}	1159.155	154.0617	1119.691	154.2553
10^{-8}	1159.154	154.0622	1119.689	154.2558
10^{-7}	1159.136	154.0675	1119.674	154.2611
10^{-6}	1158.956	154.1204	1119.525	154.3139
10^{-5}	1157.162	154.6501	1118.041	154.8429
10^{-4}	1140.016	159.9984	1103.960	160.1841

Частота $w_1 = 29.44435$ — это частота, вычисленная с точностью в 40 значащих цифр, соответствующая краевым условиям, рассмотренным в примере. Возмущая частоту w_1 на определённое значение из левого столбца, мы рассчитывали относительную погрешность по формуле:

$$\delta = \frac{|a_{1\,\text{возмущённое}} - a_1|}{\text{возмущение}}.$$

За a_1 бралось значение при невозмущённой w_1. Эти результаты говорят нам о том, что желая получить погрешность результата не более 10^{-3}, погрешность собственной частоты w_1 не должна быть выше 10^{-7}.

В таблице 2 представлены результаты расчёта относительной погрешности при возмущении по отдельности каждой частоты на 10^{-15}.

Контрпримеры

Контрпример 1 (Восстановление по четырём собственным частотам). Четырёх собственных частот для идентификации вида закрепления трубопровода недостаточно. Рассмотрим закрепление трубопровода с такими краевыми условиями:

$$a_1 = 20.10253,\ a_2 = 5.015512,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,$$

Таблица 2. Относительные погрешности при возмущении всех частот

	δ для a_1	δ для a_2	δ для b_1	δ для b_2
w_1	1159.156	154.0616	1119.691	154.2552
w_2	7902.846	4351.306	8156.099	8156.099
w_3	17547.45	17012.10	18840.45	17027.47
w_4	16513.40	21978.03	18239.51	22008.76
w_5	5649.435	9231.953	6375.944	9250.024
Сумма	48772.29	52727.45	52731.70	56596.61

$$b_1 = 26.27080,\ b_2 = 6.982448,\ b_3 = 1,\ b_4 = 1.$$

Этому закреплению соответствуют собственные частоты $w_1 = 29.44435$, $w_2 = 72.98521$, $w_3 = 134.6173$, $w_4 = 215.1980$, $w_5 = 315.06382$.

Значения собственных частот для упругого закрепления из примера $w_1 = 29.44435$, $w_2 = 72.98521$, $w_3 = 134.6173$, $w_4 = 215.1980$, $w_5 = 315.06388$.

Все наши вычисления выполнены с точностью в 40 значащих цифр, различия между частотами w_1, w_2, w_3, w_4 проявляются на 35–38 знаке, что считается несущественным. А различие у w_5 проявилось на пятом знаке после запятой, что для нас является существенным. Получается, два различных вида закрепления имеют четыре одинаковые ненулевые собственные частоты.

Контрпример 2 (Нулевое собственное значение). Рассмотрим случай (заделка)–(заделка) и (свободный конец)–(свободный конец).

Из равенств (12) видно, что

$$cw^4 f_{1256} = f_{3478}.$$

Минор f_{1256} соответствует закреплению (заделка)–(заделка), а минор f_{3478} соответствует закреплению (свободный конец)–(свободный конец). Равенство показывает нам, что спектры частот этих двух закреплений совпадают полностью, различие лишь в том, что значение $w = 0$ в первом случае не является собственным, а во втором является. Поэтому какие бы четыре ненулевые частоты мы не взяли для решения обратной задачи ($w_1 = 22.09646$, $w_2 = 61.29826$, $w_3 = 120.4937$, $w_4 = 199.4297$, $w_5 = 298.1131$ и т. д.), они все будут соответствовать и закреплению (заделка)–(заделка), и закреплению (свободный конец)–(свободный конец).

Таким образом, лишь информация о том, является ли нуль собственным значением, позволит нам однозначно идентифицировать вид закрепления трубопровода. Таких особенных случаев всего лишь четыре (12).

Заключение

В данной статье показано, что вид и параметры закреплений трубопровода с неподвижной жидкостью однозначно с точностью до перестановок закреплений местами идентифицируются по пяти собственным частотам изгибных колебаний. Приведены контрпримеры, показывающие, что четырёх собственных частот для такой идентификации недостаточно.

Работа поддержана РФФИ грантами 15–01–01095_ а, 17-41-020230-р_ Башкортостан_ а.

Литература

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М. : Наука, 1969. 182 с.
2. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М. : Мир, 1985. 254 с.
3. Вибрации в технике: справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Chu M.T., Golub G.H. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. Oxford : University Press, 2005.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М. : Наука, 1968. 503 с.
6. Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
7. Хакимов А. Г. Определение плотности жидкости и внутреннего давления в трубопроводе по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2014. № 1(95). С. 37–43.
8. Абзалимов Р.Р., Саляхова Е.В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвёртого порядка с разделёнными краевыми условиями // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 11. С. 3–11.
9. Гнуни В.Ц., Оганесян З.Б. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний // Известия Академии наук Армении. Механика (проблемы механики сплошной среды и конструкций). 1991. Т. 44, № 5. С. 9–15.
10. Ватульян А.О., Осипов А.В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестник ДГТУ. 2012. № 8(69). С. 34–40.
11. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
12. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Т. 45, № 6. С. 83–89.
13. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
14. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная математика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 1. С. 139–147.

15. Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, № 1. С. 21–26.
16. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. О единственности решения и корректности задачи определения параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 2(336). С. 32–45.
17. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.

IDENTIFICATION OF PIPE FASTENING USING THE MINIMUM NUMBER OF NATURAL FREQUENCIES

V.R. Shagiev[1]
Postgraduate Student, e-mail: shagiev-vadim@mail.ru
A.M. Akhtyamov[1,2]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: akhtyamovam@mail.ru

[1]Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University, Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia
[2]Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia

Abstract. The oscillations of a pipeline with a liquid are considered. Previously, it was shown that if the liquid does not flow through the pipeline, then by all its frequencies of flexural vibrations of the pipeline, the type of fixing of the pipeline is uniquely determined up to permutations of fastenings at its ends. The problem of identifying boundary conditions was also solved for nine natural frequencies. In this paper, the number of eigenvalues with which one can uniquely reduce the boundary conditions, up to permutations of the fastenings at its ends, is reduced to five. The number of spectral data was reduced due to the fact that if a linear system of 9 equations was previously solved, then in the present paper a system of five nonlinear equations is solved with respect to four unknown coefficients from the boundary conditions reduced to the canonical form. An example of solving this inverse problem is presented. Two counterexamples are also given in which it is shown that fewer eigenvalues for identification are generally insufficient. In the first counterexample, it is shown that four nonzero eigenfrequencies are still not enough to identify the type of anchorage of the pipeline. The second counterexample shows that in some cases information is needed about whether zero is an eigenvalue.

Keywords: boundary conditions, natural frequencies, eigenvalues, clamping, free support, floating fixing, free end, pipeline.

Дата поступления в редакцию: 17.10.2017