Математические структуры и моделирование
2018. № 1(45). С. 12–22

УДК 514.82
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.12-22

АНАЛИЗ В КОСМИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЯХ НА ОСНОВЕ ГРУПП U(1,1) И U(2): СЛУЧАИ SU(2,2)-ДЕЙСТВИЙ В ИХ 2- И 4-НАКРЫТИЯХ

А.В. Левичев[1]
профессор, д.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: alevichev@gmail.com
А.Ю. Пальянов[2,3]
к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия
[2]Институт систем информатики СО РАН им. А.П. Ершова, Новосибирск, Россия
[3]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В данной работе, являющейся непосредственным продолжением предыдущей статьи этих же авторов (А.В. Левичев, А.Ю. Пальянов, Математические структуры и моделирование, 2016, № 4(40), с. 24–38), продолжено получение тех методов, которые необходимы для анализа однородных векторных расслоений на основе параллелизующей группы $U(1,1)$. В частности, изучен вопрос совместимости (введённого Панейтцем и Сигалом) *условия согласованности* с $SU(2,2)$-действиями в $U(1,1), U(2)$ и в их 2- и 4-накрытиях. В контексте $U(2)$–параллелизации исправлены неточности доказательства справедливости (технически важной при работе с индуцированными представлениями) формулы Панейтца-Сигала (см. Corollary 4.1.2 of S.M. Paneitz and I.E. Segal, J. Funct. Anal., **47** (1982), p. 78–142.).

Ключевые слова: параллелизация расслоений над пространством-временем; конформные $SU(2,2)$-действия в $U(1,1), U(2)$ и в их 2- и 4-накрытиях; условие согласованности и индуцированные представления.

1. Мотивация

Данное исследование продолжает то, которое составило содержание статьи [1] (поэтому мы не будем повторять приведённые на с. 24–27 этой статьи обозначения и мотивацию). Отметим, что за прошедшие (со времени публикации [1]) два года появились дополнительные доводы за продолжение такого рода исследований. Именно, в статье [2] два основных объекта работы [1] (пространства-времена $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$) были применены для изучения свойств многоуровневой модели кварк-глюонной среды. Эта модель (см. [3]) вводится, исходя из цепочки канонических (т. е., отвечающих главным минорам соответствующих матриц) вложений групп: U(2) в U(3), U(2) в U(4) и т. д. Эти группы названы уровнями (материи): U(2) — нулевым (т. е. нашим обычным), U(3) — первым, U(4) — вторым и т. д. Такая терминология соответствует стандартным поколениям (кварков). Насколько известно авторам, многоуровневая модель является первой, в которой такие понятия теоретической физики, как аромат и цвет, введены строго математически.

Конечно, лишь время и дальнейшие исследования могут внести ясность в вопрос об адекватности (и степени успеха) этой модели. Так как она обладает высоким уровнем симметрии, то для получения (в её рамках) формул, описывающих сечения реакций, можно применить метод индуцированных представлений групп (см. [4], с. 129–131). В этом методе фундаментальную роль играют операторы переплетения. Как известно, они являются линейными отображениями между пространствами вовлечённых волновых функций (в нашем случае их носителями являются $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$), т. е. между пространствами представлений. Мы уже отмечали ([1], с. 28) важность (конформного) соответствия W между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$. Затем на основе W канонически вводится линейное отображение между двумя пространствами представлений.

Напомним (см. [1], с.26–28), что каждая из групп Ли G, G_F изоморфна $SU(2,2)$. Группа G действует на $\mathbf{D}$, а группа G_F — в $\mathbf{F}$. Каждое из действий — дробно-линейное.

Согласно Сигалу (Irving E. Segal, 1918–1998), фундаментальным (при моделировании частиц) является глобальное дробно-линейное действие конформной группы G на группе $U(2)$. На основе этого действия получена, в частности, классификация элементарных частиц спина 1/2. Их четыре, и они различаются порядком вхождения (своих пространств представлений) в композиционный ряд: $p < v_m < v_e < e$. Отсюда — стабильность протона p (так как ему соответствует инвариантное подпространство). Эти четыре частицы были получены в рамках определённого индуцированного представления конформной группы G. Соответствие со стандартной физикой частиц было осуществлено на основе того, что стационарная подгруппа группы G в её действии на $U(2)$ изоморфна группе Пуанкаре (с дилатациями), а мир Минковского канонически вложен в $U(2)$. Понятно, что при переходе от $\mathbf{D}$-параллелизации к $\mathbf{F}$-параллелизации необходимо выбрать подгруппу Пуанкаре в G_F (чему и посвящена следующая секция).

2. О реализации подгруппы Пуанкаре в G_F

Группа G_F была введена как $\{\tilde{g} = WgW : g \in G\}$: см. [1], (1.7). Она действует (дробно-линейно, но имеются сингулярности) в $\mathbf{F} = U(1,1)$. При рассмотрении действия G_F на $\mathbf{F}$ произведением $g_2 g_1$ двух преобразований называем то дробно-линейное преобразование g, которое соответствует произведению матриц:

$$M(g) = M(g_2)M(g_1).$$

Такое преобразование g имеет, вообще говоря, более обширную область определения, нежели композиция преобразований g_2 и g_1. Соответствующий пример приведён в Секции 4.

Напомним, что отображение W определено формулой [1], (2.1) и является биекцией пространства-времени $\mathbf{F}$ на свой образ в $\mathbf{D}$. Эта биекция задаётся 4 на

4 матрицей, обозначаемой тем же самым символом W. Обратное отображение обозначаем той же самой буквой, так как для матрицы W выполнено условие $W^2 = 1$. Из формулы для отображения W следует, что образом единичной матрицы из $\mathbf{F}$ является единичная матрица в $\mathbf{D}$. Аналогично для минус единицы (что в данном контексте более важно):

$$W(-1) = -1. \tag{2.1}$$

Из [6], теорема 2.1 следует, что стационарная подгруппа элемента -1 в $\mathbf{D}$ (при дробно-линейном действии [1], (1.9) группы $G = SU(2,2)$ на $\mathbf{D}$) изоморфна 11-мерной группе Пуанкаре P. Так как в [6] рассматривались всевозможные группы $SU(n,n)$, то (на с. 81) эта группа была обозначена P_2.

Из (2.1) и [1], (2.4) следует, что любое $\tilde{g}$ из G_F корректно определено в точке -1. Поэтому стационарная подгруппа (матрицы -1 в $U(1,1)$) группы G_F задаётся совокупностью матриц $\{\tilde{g} = WgW : g \in P_2\}$.

3. Параллелизация индуцированных расслоений

Структура данной секции аналогична таковой в [6], Секция 4, с. 98–116 (там же можно найти необходимые сведения об индуцированных расслоениях; кроме того, о *параллелизациях* подробно говорится в [1], Секция 1). При этом сейчас мы не только излагаем (новый) материал (относящийся к F-параллелизации), но и приводим те (математически необходимые) дополнения, относящиеся к D-параллелизации, которые отсутствуют в [6].

Сначала рассмотрим вопрос выполнения / невыполнения ключевого условия (фундаментальной) теоремы Панейтца-Сигала (см. [6], с. 99, Теорема 4.1). В этой теореме через ϕ обозначен гомоморфизм (некоторой) группы Ли G в группу C^∞-гомеоморфизмов (некоторой) её подгруппы. Упомянутое условие будем называть *условием согласованности*. Оно состоит в том, что если x, y являются элементами этой подгруппы, то

$$\phi(x)y = xy, \tag{3.1}$$

т. е. результат $\phi(x)y$ действия x (как элемента группы G) на y (как элемент подгруппы) сводится к произведению xy этих элементов.

В [6] основное внимание было уделено действию $\tilde{G}$ на $\tilde{\mathbf{D}}$; здесь $\tilde{}$ означает универсальную накрывающую. Но интересен и вопрос действий конечных накрытий $G^{(k)}$ группы G на конечных накрытиях $\mathbf{D}^{(m)}$ пространства-времени $\mathbf{D}$. Несколько соответствующих случаев рассматриваются ниже.

Обозначим через N основную параллелизующую группу, применявшуюся в работах школы Сигала. Она будет первым примером (вышеупомянутой) подгруппы в $G = SU(2,2)$. В [7] было приведено явное описание этой подгруппы: N состоит из всех таких матриц n вида

$$n = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

что $w \in U(2)$ и $a^2(\det w) = 1$. Другими словами, каждая матрица n составлена из 2 на 2 матриц w, a. Здесь a — скалярная матрица (причём задающее её комплексное число обозначено той же самой буквой a).

Рассмотрим N как 2-накрытие пространства-времени $\mathbf{D}$, задаваемое формулой $Z = f(n) = a^2 w$. Отметим, что это «другое» 2-накрытие для $\mathbf{D}$, нежели введённое Сигалом $\mathbf{D}^{(2)}$ (см. [1], с. 25). В частности, $\mathbf{D}^{(2)}$ не является (исходно) подгруппой в $G = SU(2,2)$. Нетрудно проверить (сопоставив каждой n вида (3.2) пару (a, aw)), что эти два накрытия эквивалентны. Такое сопоставление групп N и $\mathbf{D}^{(2)}$ является изоморфизмом, поэтому используемое ниже обозначение $N = \mathbf{D}^{(2)}$ вполне корректно. Кроме того, из вышеизложенного следует (см. [1], с. 33), что действие ϕ группы G на N задаётся следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r] \arrow[d] & \phi(g)(n) \arrow[d] \\ Z = a^2 w \arrow[r] & g(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Утверждение 3.1. Если на $N = \mathbf{D}^{(2)}$ задано действие (3.3), то условие согласованности нарушается.

Доказательство. Рассмотрим формулу (3.3) для случая блочно-диагонального (с 2 на 2 блоками A, D) элемента g группы G:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{n} \arrow[d] \\ Z = a^2 w \arrow[r] & \tilde{Z} = a^2 A w D^{-1} \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

.

С необходимостью, здесь

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} \tilde{w} & 0 \\ 0 & a(\det A) \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{w} = (\det A)^{-2} A w D^{-1}$.

Теперь возьмём такой блочно-диагональный элемент g_1 группы G, что $A = w_1$, а D — скалярная матрица, задаваемая числом a_1. Тем самым, g_1 принадлежит подгруппе $N = \mathbf{D}^{(2)}$. Напомним (см. (3.2)), что $(a_1)^2(\det w_1) = 1$. Поэтому фигурирующая в (3.5) унитарная матрица $\tilde{w}$ равна $(a_1)^3 w_1 w$. Значит, условие согласованности не выполняется.

Замечание 3.1. В [6], с. 101 подгруппа N рассматривалась как 4-накрытие для $U(2)$ (на этой с. 101 надо положить $n = 2$). Именно, слой над каждой матрицей Z состоит из следующих (четырёх) матриц:

$$n = (\det Z)^{-1/4} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Один из авторов (А.В. Л.), изучая работы Сигала и его школы, довольно долго не мог понять: почему в них не рассматривается возможность 2-накрытия группы $U(2)$? По-видимому, сейчас ответ на этот вопрос получен: см. наши Утверждения 3.1 и 3.2. Предваряя Утверждение 3.2, опишем (более формально, чем это было сделано в [6]) 4-накрытие подгруппой N группы $U(2)$. Именно, накрытие теперь сопоставляет каждой матрице n вида (3.2) матрицу $Z = a^{-1}w$. Ясно, что для такой (унитарной) матрицы Z выполняется равенство $(\det Z)^4 = a^{-1}$.

Теперь (т. е. когда $N = \mathbf{D}^{(4)}$, а не $N = \mathbf{D}^{(2)}$) действие ϕ группы $G = SU(2,2)$ на N задаётся следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r] \arrow[d] & \phi(g)(n) \arrow[d] \\ Z = a^{-1}w \arrow[r] & g(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Утверждение 3.2. Если на $N = \mathbf{D}^{(4)}$ задано действие (3.7), то условие согласованности выполняется.

Доказательство. Применим диаграмму (3.7) для блочно-диагонального (с 2 на 2 блоками $A = w_1, D = a_1$) элемента g подгруппы N. Очевидно, что $g(Z) = a^{-1}w_1 w(a_1)^{-1}$. Отсюда следует, что $\phi(g)(n)$ равно произведению gn, как двух элементов подгруппы N. Утверждение 3.2 доказано.

Замечание 3.2. Действие на N, удовлетворяющее условию типа (3.7), нередко называют *подъёмом действия* (с $\mathbf{D}$ на N).

Обозначим через N_F новую параллелизующую группу. Аналогично (3.2), введём явное описание этой подгруппы: N_F состоит из всех таких матриц n_f вида

$$n_f = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

что $Y \in U(1,1)$ и $b^2(\det Y) = 1$. Здесь b — скалярная матрица (причём задающее её комплексное число обозначено той же самой буквой b). Так как для каждой матрицы вида (3.8) выполнено условие (1.6) (см. [1], с. 27), то N_F является подгруппой в G_F. Если зафиксировано накрывающее отображение, переводящее n_f в принадлежащую $U(1,1)$ матрицу $U = b^2 Y$, то N_F обозначаем через $\mathbf{F}^{(2)}$. Отметим, что в [1], с. 25 было приведено альтернативное описание этого же самого 2-накрытия группы $U(1,1)$.

Действие группы G_F в $\mathbf{F}^{(2)}$ было введено коммутативной диаграммой (A6) (см. [1], с. 34). В контексте следующего утверждения используем ϕ для обозначения этого действия.

Утверждение 3.3. Условие согласованности (3.1) для $\mathbf{F}^{(2)}$ нарушается.

Доказательство. Рассмотрим формулу (A7) из [1], с. 34 для случая блочно-диагонального (с 2 на 2 блоками A, D) элемента g группы G_F:

$$\begin{tikzcd} n_f \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{n}_f \arrow[d] \\ U = b^2 Y \arrow[r] & \tilde{U} = b^2 A Y D^{-1} \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

.

С необходимостью, здесь

$$\tilde{n}_f = \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & b(\det A) \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

где $\tilde{Y} = (\det A)^{-2} A Y D^{-1}$.

Теперь возьмём такой блочно-диагональный элемент g_1 группы G_F, что $A = Y_1$, а D — скалярная матрица, задаваемая числом b_1. Тем самым, g_1 принадлежит подгруппе $\mathbf{F}^{(\mathbf{2})}$. Напомним, что $(b_1)^2(\det Y_1) = 1$. Получается, что фигурирующая в (3.10) псевдо-унитарная матрица $\tilde{Y}$ равна $(b_1)^3 Y_1 Y$. Тем самым, условие согласованности не выполняется.

Утверждение 3.4. Если задан подъём (с $\mathbf{F}$ на $N_F = \mathbf{F}^{(4)}$) действия группы G_F, то условие согласованности выполняется.

Доказательство. Теперь (т. е. когда $N_F = \mathbf{F}^{(4)}$, а не $N_F = \mathbf{F}^{(2)}$), для действия ϕ группы G_F в N_F выполняется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} n_f \arrow[r] \arrow[d] & \phi(g)(n_f) \arrow[d] \\ U = b^{-1} Y \arrow[r] & g(U) = (AU + B)(CU + D)^{-1} \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Применим эту диаграмму для блочно-диагонального (с 2 на 2 блоками $A = Y_1, D = b_1$) элемента g подгруппы N_f. Очевидно, что $g(U) = b^{-1} Y_1 Y (b_1)^{-1}$. Отсюда следует, что $\phi(g)(n_f)$ равно произведению $g n_f$, как двух элементов подгруппы N_F. Утверждение 3.4 доказано.

Замечание 3.3. Мы вынуждены отметить, что Следствие 4.1.2 публикации [6] сформулировано нечётко (по сравнению с их же Теоремой 4.1). Именно, в Теореме 4.1 «подстилающим пространством» является подгруппа N (задаваемая соотношением (3.2) и четырежды-накрывающая $\mathbf{D}$), в то время как в основной формуле [6] (Corollary 4.1.2, с. 101) аргументами рассматриваемых волновых функций (т. е. сечений индуцированного расслоения) являются матрицы Z из $\mathbf{D} = U(2)$. Несомненно, что затруднение могло быть вызвано лишь (четвёртым) множителем $(\phi(g^{-1})(x))$ формулы (3.13), см. ниже. К сожалению, у самих авторов работы [6] спросить невозможно: Панайтц погиб в 1983 году, а Сигал скончался в 1998.

В наиболее общем варианте вышеупомянутой основной формулы (см. [6], с. 99) через $U(g)\psi$ обозначено сечение индуцированного расслоения, которое получено из произвольно взятого («исходного») сечения ψ применением оператора $U(g)$. Здесь g — произвольный элемент группы G, а через U обозначено индуцированное представление. Как мы отмечали ранее (см. [1], с. 26), аргументами x этих сечений являются элементы подгруппы N. Сама же формула позволяет вычислить значение сечения $U(g)\psi$ в точке x как

$$R(g^*)\psi(\phi(g^{-1})(x)). \tag{3.12}$$

Здесь R — индуцирующее представление, а элемент g^* (он принадлежит «индуцирующей» подгруппе $\mathbf{P}$) является следующим произведением (пяти сомножителей) в G:

$$g^* = x_0 x^{-1} g(\phi(g^{-1})(x)) {x_0}^{-1}. \tag{3.13}$$

В нашем контексте x_0 — это матрица -1 в N.

Недостаток изложения в этом месте статьи [6] состоит в том, что возможность действия группы G на $N = \mathbf{D}^{(4)}$ не доказана (к примеру, в нескольких случаях в статье говорится о корне четвёртой степени из определителя матрицы Z, но ведь при заданной Z таких корней четыре!). Таким образом, корректность сомножителя $(\phi(g^{-1})(x)$ в (3.13) остаётся под вопросом.

Начнём с обсуждения более общего (чем в нашем Утверждении 3.4) случая. Легко проверяется следующее

Утверждение 3.5. Если элемент

$$k = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

максимальной компактной подгруппы в G применён к $n = (w, q)$ вида (3.2), то результатом является такой $\tilde{n} = (\tilde{w}, \tilde{q})$, что $\tilde{q} = q\bar{a}$, $a^2 = \det A$.

Замечание 3.4. Получается, что (для задания глобального действия) надо уметь однозначно выбирать квадратный корень из $\det A$. Отсюда следует вывод об отсутствии глобального подъёма действия группы G на $N = \mathbf{D}^{(4)}$. В частности, само употребление (в середине с. 100 статьи [6]) выражения $\phi(g^{-1})(x)$ при доказательстве Следствия 4.1.2 является некорректным.

Исправим положение следующим образом: воспользуемся тем, что (согласно [6], Следствие 4.1.1) можно ограничиться локальным действием группы G на

$N = \mathbf{D}^{(4)}$. Проверим правильность выражения для g^* (см. четвёртую из формул на с. 101 статьи [6]; к сожалению, ни одна из (шести) формул на этой с. 101 не снабжена номером). Её достаточно проверить в двух отдельных случаях: для максимальной компактной подгруппы в G (см. выше наше Утверждение 3.5) и для одномерной подгруппы, состоящей из элементов вида

$$k = \begin{bmatrix} C & -S \\ -S & C \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

где $C = \cosh(t/2), S = \sinh(t/2)$, скалярные два-на-два матрицы. Упомянутая достаточность обеспечена тем, что максимальная компактная подалгебра и соответствующая подгруппе (3.15) одномерная подалгебра порождают всю $su(2,2)$. Некоторые дальнейшие свойства подгруппы (3.15) упомянуты в Секции 4.

Дополним Утверждение 3.5 следующим выбором корня квадратного из $d = \det A$. В силу локальности действия можно считать, что (содержащая 1) дуга единичной окружности между $d, \bar{d}$ меньше, чем π. Тогда в качестве a (фигурирующего в Утверждении 3.5) выбираем тот квадратный корень из d, который лежит на этой дуге. Теперь выражение $\phi(g^{-1})(x)$ корректно определено. Нетрудно (в силу диагональности всех пяти сомножителей, фигурирующих в формуле 3.13) проверить, что «наше» g^* совпадает с таковым в (четвёртой) формуле с. 101 статьи [6].

В (более сложном для проверки) случае (3.15) нам надо сначала установить, что (при заданных (w, q) из N и g из G) однозначно определяется такой элемент $(\tilde{w}, \tilde{q})$, что его проекция $\tilde{Z} = \tilde{q}^{-1}\tilde{w}$ на $\mathbf{D}$ совпадает с матрицей $(CZ - S)(C - SZ)^{-1}$. Здесь матрицы (w, q), $(\tilde{w}, \tilde{q})$ принадлежат $\mathbf{D}^{(4)}$, а $Z = q^{-1}w$. Очевидно, что равенство $(CZ - S)(C - SZ)^{-1} = \tilde{q}^{-1}\tilde{w}$ эквивалентно

$$\tilde{q}(Cw - qS) = \tilde{w}(qC - Sw). \tag{3.16}$$

Обозначим определитель искомой матрицы $\tilde{w}$ через h; в дальнейшем же будет использовано и соотношение $h(\tilde{q})^2 = 1$. Разложим унитарную матрицу w на произведение числа q^{-1} и матрицы $\mathbf{u}$ из группы $SU(2)$, см. [8], формула (A4). Так как q задано, то это разложение однозначно. Введём обозначения C_q, S_q для действительной и мнимой частей числа q^2. Из (3.16) следует, что

$$\begin{aligned} C^2(C_q - iS_q) - 2SCu_4 + S^2(C_q + iS_q) = \\ = h^2\{S^2(C_q - iS_q) - 2SCu_4 + C^2(C_q + iS_q)\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

В связи с этим, выражение для h^2 таково:

$$h^2 = (x + iy)^2/(x^2 + y^2), \tag{3.18}$$

где $x = C_2C_q - S_2u_4, y = -S_q$, а через C_2, S_2 обозначены гиперболические косинус и синус параметра t. Эти обозначения оправданы, так как t равен удвоенному исходному аргументу $t/2$. Через m обозначим положительный квадратный корень из $(x^2 + y^2)$. Так как действие однопараметрической подгруппы $g(t)$ непрерывно, то нами доказано следующее

Утверждение 3.6. Определитель h матрицы $\tilde{w}$ равен$(x + iy)m^{-1}$.

Теперь найдём число $\tilde{q}$. Из Утверждения 3.6 следует, что $(\tilde{q})^2 = (x - iy)m^{-1}$. Обозначим через d положительный квадратный корень из m^{-1}. Тогда (при вещественном t, достаточно близком к нулю, и при q, достаточно близком к числу 1 — на единичной окружности в комплексной плоскости) «правильный» выбор квадратного корня из $\tilde{q}^2$ таков: $\tilde{q} = d(a + ib)$, где a — это положительный квадратный корень из $(x + m)/2$, а $b = S_q/2a$.

Из вышеизложенного следует

Утверждение 3.7. Результат действия элемента (3.15) на (w, q) равен такому $(\tilde{w}, \tilde{q})$, что $\tilde{q} = d(a + ib)$, а $\tilde{w} = \tilde{q}(C\bar{q}w + S)(C + S\bar{q}w)^{-1}$.

Теперь все сомножители в (3.13) корректно определены, т. е. «наше» g^* таково:

$$g^* = \begin{bmatrix} w^*C\tilde{w} & S\tilde{q}w^* \\ \bar{q}S\tilde{w} & \bar{q}\tilde{q}C \end{bmatrix}. \qquad (3.19)$$

Опять-таки, (3.19) совпадает с g^*, подсчитанным согласно формуле со с. 101 статьи [6].

Теперь сформулируем [6], Corollary 4.1.2 (для интересующего нас случая $n = 2$) аккуратнее. В приводимом ниже соответствующем утверждении через $\mathbf{P}$ обозначена стационарная подгруппа (точки -1 в $U(2) = \mathbf{D}$) группы G в её (дробно-линейном) действии на $\mathbf{D}$, а под N понимается подгруппа, задаваемая соотношением (3.2) и являющаяся 4-кратной накрывающей пространства-времени $\mathbf{D}$. Через ϕ обозначим то действие группы G в N, которое рассматривалось в наших Утверждениях (3.5–3.7).

Утверждение 3.8. Пусть (*индуцирующее представление*) R является конечномерным представлением подгруппы Пуанкаре $\mathbf{P}$. Тогда элемент g^* из (3.12) корректно определён и совпадает с таковым на с. 101 статьи [6] (см. четвёртую формулу на этой с. 101).

Доказательство следует из (доказанных выше) Утверждений 3.5–3.7.

Приложение. Область определения композиции двух преобразований из группы G_F может не совпадать с таковой для их произведения

Композицию преобразований g_1 и g_2 обозначаем $g_2 \circ g_1$. Под произведением g_2g_1 понимается то дробно-линейное преобразование, матрица которого равна соответствующему произведению двух матриц (этих преобразований). В данном приложении достаточно рассмотреть лишь те преобразования g пространства-времени $\mathbf{F}$, которые задаются матрицами (3.15).

Считаем, что t — не ноль (т. е. g не является тождественным преобразованием). Интересно, что $\tilde{g}$, как матрица, совпадает с g. Поэтому мы опускаем тильду (она была введена в самом начале нашей Секции 2) над g. Этот пример важен (см. [6], с. 85), так как подалгебра изометрий (она состоит из соответствующих блочно-диагональных матриц) и генератор однопараметрической группы (3.15) порождают всю (15-мерную) алгебру Ли $su(2,2)$ — как в **D**-, так и в **F**-случае.

Пусть преобразование g_1 задаётся некоторой матрицей (3.15) с положительным t. Пусть преобразование g_2 совпадает с g_1. Докажем существование такой точки U (U– это матрица, принадлежащая **F**), которая сингулярна для $g_2 \circ g_1$, но не является сингулярной для преобразования $g_2 g_1$.

Для любой из 2 на 2 матриц (A, B, ...), вовлечённых в приводимые ниже подсчёты, их элементы обозначаются так:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

В [3], Proposition 1 установлено, что множество $Sing\{g_1\}$ всех сингулярностей преобразования g_1 является W-образом множества следующих матриц $Z \in \mathbf{D}$:

$$Z_1 = Z_4 = SC(1-pq)/(c^2 - pqS^2), Z_2 = p/(C^2 - pqS^2), Z_3 = q/(C^2 - pqS^2). \tag{4.2}$$

Параметры p и q – произвольные комплексные числа модуля 1 (лишь бы их произведение не равнялось 1). Тем самым, $Sing\{g_1\}$ диффеоморфно (посредством отображения W) тору с вырезанной окружностью. Через U обозначим такую $W(Z)$, что $p = 1, q = -1$ в (4.2). Ясно, что U принадлежит множеству $Sing\{g_2 \circ g_1\}$: ведь уже составляющая g_1 не может быть применена к U!

Литература

1. Левичев А.В., Пальянов А.Ю. Анализ в космических расслоениях на основе группы $U(1,1)$: основные таблицы инфинитезимального $SU(2,2)$-действия // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4(40). С. 26–40.
2. Levichev A.V. On key properties of the intertwining operators ornament in the matrix multi-level model of the quark-gluon media // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Знания–Онтологии–Теории» (ЗОНТ-2017). Том 2. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2017. С. 41–47.
3. Levichev A.V. Towards a matrix multi-level model of quark-gluon media // Journal of Progressive Research in Mathematics. 2016. Vol. 10, Issue 2. P. 1493–1496. URL: `http://scitecresearch.com/journals/index.php/jprm/article/view/974/0` (дата обращения: 15.01.2018).
4. Менский М.Б. Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц. Москва : Наука, 1976.
5. Levichev A.V. Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory // Physica Scripta. 2011. No. 83(1). P. 1–9. URL: `http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/83/01/015101` (дата обращения: 15.01.2018).

6. Paneitz S.M., Segal I.E. Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle // Journal of Functional Analysis. 1982. No. 47. P. 78–142. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002212368290101X (дата обращения: 15.01.2018).
7. Levichev A.V. Certain Chronometric Bundles over Compact Worlds: Triviality of Scalar and Spinor Bundles // Siberian Advances in Mathematics. 2003. No. 4. P. 1–9.
8. Levichev A., Palyanov A. On Separation between Metric Observers in Segal's Compact Cosmos // Journal of Modern Physics. 2015. No. 6. P. 2040–2049. URL: http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614210 (дата обращения: 15.01.2018).

ANALYSIS IN SPACETIME BUNDLES BASED ON GROUPS U(1,1) AND U(2): THE CASE OF SU(2,2)-ACTIONS IN THEIR 2- AND 4-COVERS

A.V. Levichev[1]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Senior Researcher, e-mail: alevichev@gmail.com
A.Yu. Palyanov[2,3]
Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Researcher, e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
[2]A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia
[3]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Abstract. In this paper (which is the direct continuation of A.V.Levichev and A.Yu.Palyanov, Mathematical structures and modeling, 2016, N. 4(40), 24-38) we continue to develop mathematical tools which are necessary in order to perform analysis of homogeneous vector bundles on the basis of the parallelizing group $U(1,1)$. In particular, the compatibility of the (introduced by Paneitz and Segal) coherence condition with the $SU(2,2)$-action on finite covers of $U(1,1)$ and of $U(2)$ was studied: such a compatibility is violated in case of 2-covers but it holds in case of 4-covers. In terms of the $U(2)$-approach, we have corrected the proof of one (fundamental for the implementation of any induced representation) Paneitz-Segal formula given in Corollary 4.1.2 of S. M. Paneitz and I. E. Segal, J. Funct. Anal. **47**(1982), 78-142.

Keywords: parallelizations of space-time bundles, conformal $SU(2,2)$-actions in $U(1,1), U(2)$, 2- and 4-covers, coherence condition and induced representations.

Дата поступления в редакцию: 17.01.2018