Математические структуры и моделирование
2018. № 1(45). С. 5–11

УДК 519.214
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.5-11

КРИТЕРИЙ НОРМАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет, Омск, Россия

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия для справедливости центральной предельной теоремы для симметрических функций от случайных величин, в которой масштабная нормировка осуществляется правильно меняющимися последовательностями произвольного положительного порядка. Эти условия включат в себя и так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема, минимальные условия слабой зависимости.

Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность. Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393].

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x. Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Пусть $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$, $a_n = \mathbf{E}X_n$, $n = 1, 2, ...$, $b_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty$, а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \stackrel{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\widehat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n+m \to \infty. \tag{$\mathrm{R_f}$}$$

Если b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(a_n + a_m - a_{n+m}) \to 0$, $n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N). В работе [3] получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность и пусть $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$, Для того чтобы к последовательности $\{X_n\}$ была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки (N), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\mathrm{R_f})$ и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ была равномерно интегрируема.*

Замечание 1. В [3] условие $(\mathrm{R_f})$ интерпретировалось как минимальное условие слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема, и как условие, накладывающее ограничения на вид функции f, заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин.

В теореме 1 $\{b_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2. Такая масштабная нормировка используется в предельных теоремах для сумм независимых и зависимых случайных величин, в предельных теоремах для максимумов и т.п. Однако существуют предельные теоремы с нормальным предельным распределением, в которых масштабная нормировка осуществляется последовательностями других порядков. Например, в предельных теоремах для так называемых U-статистик:

$$U_n = U_n(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \neq i_2 \neq, ..., \neq i_k \leqslant n} f(x_{i_1}, ..., x_{i_k}),$$

где $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределённых величин, масштабная нормировка может осуществляться последовательностями, имеющими порядок $n^{k/2}$ (см., например, [4]). Одна из первых предельных теорем о сходимости распределений U-статистик к нормальному распределению получена В. Хёфдингом в [5].

В настоящей работе доказывается аналог теоремы 1 в случае, когда $\{b_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $\rho > 0$.

Пусть

$$\alpha_n = \left(\frac{b_n}{b_{n+m}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}, \quad \beta_n = \left(\frac{b_m}{b_{n+m}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f^*})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\alpha_n \widehat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\beta_n \widehat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n+m \to \infty. \tag{$\mathrm{R_f^*}$}$$

Если $\{b_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $\rho > 0$ и $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(\alpha_n a_n + \beta_n a_m - a_{n+m}) \to 0$, $n + m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N^*).

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ *— стационарная последовательность и пусть* $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$. *Для того чтобы к последовательности* $\{X_n\}$ *была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки* (N^*), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $(\mathrm{R}_\mathrm{f}^*)$ *и последовательность* $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ *была равномерно интегрируема.*

Лемма 1. [6] b_n *является правильно меняющейся последовательностью порядка* ρ, $\rho > 0$ *(а* $b_n^{1/\rho}$ *— правильно меняющейся последовательностью порядка 1) тогда и только тогда, когда*

$$b_{n+m}^{1/\rho} \sim b_n^{1/\rho} + b_m^{1/\rho}, \quad n + m \to \infty.$$

Доказательство теоремы 2.

Необходимость. Пусть к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\exp\{itb_n^{-1}(X_n - a_n)\} \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \to \infty \tag{1}$$

и выполнены условия нормировки (N^*). Так как

$$b_n^{-2}(X_n - a_n)^2 \xrightarrow{d} \mathcal{N}^2(0,1), \quad b_n^{-2}\mathbf{E}(X_n - a_n)^2 = 1 = \mathbf{E}\mathcal{N}^2(0,1),$$

то равномерная интегрируемость последовательности $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ следует, например, из теоремы 5.4 в [7].

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = |\mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}\alpha_n X_n\}\mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}\beta_n X_m\}| =$$
$$= \left|\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n+m} - a_{n+m}}{b_{n+m}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{it\alpha_n\frac{X_n - a_n}{b_{n+m}}\right\} \times \right.$$
$$\left. \times\mathbf{E}\exp\left\{it\beta_n\frac{X_m - a_m}{b_{n+m}}\right\}\exp\{it\gamma_n\}\right|.$$

Поскольку b_n — правильно меняющаяся последовательность порядка ρ, то в силу леммы 1

$$\delta(n) = \frac{\alpha_n^2 b_n^2}{b_{n+m}^2} + \frac{\beta_n^2 b_m^2}{b_{n+m}^2} = \frac{b_n^{1/\rho} + b_m^{1/\rho}}{b_{n+m}^{1/\rho}} \to 1, \; n + m \to \infty, \tag{2}$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leqslant c \leqslant 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$\frac{\alpha_{n_2}^2 b_{n_2}^2}{b_{n_2+m_2}^2} \to c, \quad \frac{\beta_{n_2}^2 b_{m_2}^2}{b_{n_2+m_2}^2} \to 1 - c, \qquad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$\alpha_{n_2} b^{-1}_{n_2+m_2}(X_{n_2} - a_{n_2}) \to 0 \quad (\beta_{n_2} b^{-1}_{n_2+m_2}(X_{m_2} - a_{m_2}) \to 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \to 0$, $n \to \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (1) и (N*)

$$\Delta(n_2) = \left|\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2+m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{it\alpha_{n_2}\frac{X_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} \times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}\exp\left\{it\beta_{n_2}\frac{X_{m_2} - a_{m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\}\exp\{it\gamma_{n_2}\}\right| \to$$

$$\to \left|\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\}\right| = 0.$$

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \to 0$, $n \to \infty$, то есть выполнено условие $(\mathrm{R}^*_\mathrm{f})$.

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\mathrm{R}^*_\mathrm{f})$ и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема. В силу известной теоремы Прохорова (см., например, [7]) последовательность $\{b_n^{-1}(X_n - a_n)\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$ такую, что при $n \to \infty$

$$b^{-1}_{n_1}(X_{n_1} - a_{n_1}) \xrightarrow{d} \xi, \quad b^{-1}_{m_1}(X_{m_1} - a_{m_1}) \xrightarrow{d} \eta, \quad b^{-1}_{n_1+m_1}(X_{n_1+m_1} - a_{n_1+m_1}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad (3)$$

где $m_1 = m(n_1) \to \infty$ (случай, когда $\{m_1\}$ – ограниченная последовательность, оговорим позже), а ξ, η и ζ — случайные величины. При этом, поскольку последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E}\xi^2 = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}b^{-1}_{n_1}(X_{n_1} - a_{n_1})^2 = 1, \ \mathbf{E}\eta^2 = \mathbf{E}\zeta^2 = 1, \ \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\zeta = 0. \quad (4)$$

Из ограниченных последовательностей

$$\mu_{n_1} = \frac{\alpha_{n_1} b_{n_1}}{\sqrt{\alpha^2_{n_1} b^2_{n_1} + \beta^2_{n_1} b^2_{m_1}}}, \quad \nu_{n_1} = \frac{\beta_{n_1} b_{m_1}}{\sqrt{\alpha^2_{n_1} b^2_{n_1} + \beta^2_{n_1} b^2_{m_1}}}$$

выберем подпоследовательности $\{\mu_{n_2}\}$ и $\{\nu_{n_2}\}$ такие, что

$$\mu_{n_2} \to \mu, \quad \nu_{n_2} \to \nu, \quad n \to \infty, \quad \mu^2 + \nu^2 = 1. \quad (5)$$

Тогда из (3) и (5) выводим

$$\frac{\alpha_{n_2}(\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}) + \beta_{n_2}(\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2})}{\sqrt{b^2_{n_2} + b^2_{m_2}}} = \mu_{n_2}\frac{\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2}} + \nu_{n_2}\frac{\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}}{b_{m_2}} \xrightarrow{d} \mu\widehat{\xi} + \nu\widehat{\eta}. \quad (6)$$

Понятно, что $\alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (R_f^*) и (3),

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha_{n_2}\widehat{X}_{n_2}+\beta_{n_2}\widehat{X}_{m_2}-a_{n_2+m_2})\xrightarrow{d}\zeta,\quad n\to\infty, \tag{7}$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [1, с. 216] из (6) и (7) вытекает

$$\frac{\sqrt{b_{n_2}^2+b_{m_2}^2}}{b_{n_2+m_2}}\to C_1,\quad \frac{\alpha_{n_2}a_{n_2}+\beta_{n_2}a_{m_2}-a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}\to C_2,\quad 0<C_1,|C_2|<\infty.$$

Отсюда с помощью (6) выводим, что вместе с последовательностями $\{b_{n_2}^{-2}(X_{n_2}-a_{n_2})^2\}$ и $\{b_{m_2}^{-2}(X_{m_2}-a_{m_2})^2\}$ равномерно интегрируемыми являются последовательности

$$\{b_{n_2+m_2}^{-2}(\alpha_{n_2}(\widehat{X}_{n_2}-a_{n_2})+\beta_{n_2}(\widehat{X}_{m_2}-a_{m_2}))^2\},$$

$$\{b_{n_2+m_2}^{-2}(\alpha_{n_2}\widehat{X}_{n_2}+\beta_{n_2}\widehat{X}_{m_2}-a_{n_2+m_2})^2\};$$

из (7) получаем теперь

$$\gamma_{n_2}=b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha_{n_2}a_{n_2}+\beta_{n_2}a_{n_2}-a_{n_2+m_2})\to\mathbf{E}\zeta=0,$$

$$\delta_{n_2}=b_{n_2+m_2}^{-2}(\alpha_{n_2}^2b_{n_2}^2+\beta_{n_2}b_{m_2}^2)\to\mathbf{E}\zeta^2=1,\quad n\to\infty.$$

В силу (2) последнее соотношение означает, что

$$\delta(n_2)=\frac{b_{n_2}^{1/\rho}+b_{m_2}^{1/\rho}}{b_{n_2+m_2}^{1/\rho}}\to 1,\ n+m\to\infty. \tag{8}$$

Таким образом, мы показали (в случае, когда $m(n)\to\infty$), что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\gamma_{n_2}\to 0,\ \delta_{n_2}\to 1,\ n\to\infty$. Это означает, что $\gamma_n\to 0,\ \delta_n\to 1,\ n\to\infty$.

Если же $m(n)$ – ограниченная последовательность, то $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ также ограничены, а из (8) нетрудно вывести, что $b_n\to\infty,\ n\to\infty$ и, следовательно, $\gamma_n\to 0,\ \delta_n\to 1,\ n\to\infty$.

В силу леммы 1 выполнены условия нормировки (N*).

Пусть теперь выполнены условия (N*) и (R_f^*). Тогда если $k=k(n)\to\infty$ достаточно медленно, то $b_{nk}\sim k^\rho b_n$ и из условия (R_f^*), где

$$\alpha_n=\left(\frac{b_n}{b_{nk}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho}-1}\sim k^{\rho-\frac{1}{2}}$$

получаем

$$b_{nk}^{-1}X_{nk}\overset{d}{\sim}\sum_{j=1}^{k}k^{\rho-\frac{1}{2}}b_{nk}^{-1}Y_j\overset{d}{\sim}\sum_{j=1}^{k}k^{-\frac{1}{2}}b_n^{-1}Y_j,$$

где $Y_1, ..., Y_k,$ – независимые случайные величины, $Y_j \stackrel{d}{=} f(\xi_{(j-1)n+1}, ..., \xi_{jn}) \stackrel{d}{=}$ $\stackrel{d}{=} X_n,\ j = 1, ..., k$. Отсюда с помощью условия (N*) получаем

$$b_{nk}^{-1}(X_{nk} - a_{nk}) \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} \frac{Y_j - a_n}{\sqrt{k} b_n}. \tag{9}$$

Для того чтобы к последовательности серий $\left\{\dfrac{Y_j - a_n}{\sqrt{k} b_n}, j = 1, ..., k,\ n = 1, 2, ...\right\}$ независимых случайных величин была применима центральная предельная теорема, достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_{nk}(\varepsilon) = \frac{1}{k b_m^2} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\{(Y_j - a_n)^2, |Y_j - a_n| > \varepsilon \sqrt{k} b_n\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Используя определение величин Y_j и равномерную интегрируемость последовательности $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$, получаем

$$L_{nk}(\varepsilon) = \mathbf{E}\left\{\frac{(X_n - a_n)^2}{b_n^2}, \frac{|X_n - a_n|}{b_n} > \varepsilon \sqrt{k}\right\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

что вместе с (9) даёт $b_{nk}^{-1}(X_{nk} - a_{nk}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty.$

Представим теперь произвольное натуральное m в виде $m = kn + r$, $0 \leqslant r < m,\ k = [n/m]$. Из условий ($\mathrm{R}_{\mathrm{f}}^*$) и (N*) выводим

$$\frac{(X_m - a_m)}{b_m} \stackrel{d}{\sim} \frac{\alpha_n(X_{nk} - a_{nk})}{b_m} + \frac{\beta_n(Z_n - a_r)}{b_m}, \tag{10}$$

где $Z_n \stackrel{d}{=} f(\xi_{km+1}, ..., \xi_{km+r}) \stackrel{d}{=} X_r$ не зависит от X_{nk},

$$\alpha_n = \left(\frac{b_{nk}}{b_m}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}, \quad \beta_n = \left(\frac{b_r}{b_m}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}.$$

Правильно меняющаяся функция положительного порядка эквивалентна неубывающей функции [2, с. 26], так что при достаточно больших n $\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} b_r^2 b_n^{-2} < 2$, если $k = k(n) \to \infty$ растёт достаточно медленно, то что $\sigma_{kn}^2 \sim k\sigma_n^2$, а так как $m/nk \to 1,\ n \to \infty$, то $b_n \sim b_{nk}$ и $\alpha_n \to 1,\ n \to \infty$. Соотношение (10) принимает тогда вид

$$\frac{(X_m - a_m)}{b_m} \stackrel{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_{nk} - a_{nk}}{b_{nk}} + \frac{\widehat{X}_r - a_r}{b_r} \cdot \frac{\beta_n b_r}{b_m},$$

где

$$\frac{\beta_n b_r}{b_m} \sim \left(\frac{b_r}{b_{nk}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho}} \leqslant 2^{\frac{1}{2\rho}} k^{-\frac{1}{2}} \to 0,\ n \to \infty,$$

поэтому $\dfrac{\widehat{X}_r - a_r}{b_r} \cdot \dfrac{\beta_n b_r}{b_m} \to 0$ по вероятности. Из (10) следует теперь

$$b_m^{-1}(X_m - a_m) \stackrel{d}{\sim} b_{nk}^{-1}(X_{nk} - a_{nk}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad m \to \infty.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
3. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 5–11.
4. Королюк В.С., Боровских Ю.В. Теория U-статистик. Киев : Наукова Думка, 1989.
5. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19. P. 293–325.
6. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977.

THE CRITERION OF NORMAL CONVERGENCE FOR SYMMETRIC FUNCTIONS OF THE DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin
Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The necessary and sufficient conditions for fulfillment of the central limit theorem for symmetric functions of random variables, in which the scale normalization is carried out by regularly varying sequences of arbitrary positive order are obtained in this article. These conditions include the so-called minimal conditions of the weak dependence.

Keywords: symmetric functions of random variables, central limit theorem, minimal conditions of the weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 30.01.2018