

## **«СИНДРОМ САЙМОНА» В ПРОБЛЕМЕ НАДЁЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ**

**В.А. Еровенко**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: [erovenko@bsu.by](mailto:erovenko@bsu.by)

Белорусский государственный университет,  
Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** Статья посвящена философско-математическим аспектам использования компьютера в формализованном математическом доказательстве. Проблема надёжности компьютерных доказательств отражается в востребованности экспериментальной математики в научном познании.

**Ключевые слова:** философия математических доказательств, кризис переусложненности доказательств, доверие компьютерным доказательствам.

### **Введение**

Проследивая эволюцию становления математических теорий, обратим внимание на интересную работу начала XXI века английского математика Брайана Дэвиса с названием «Куда идёт математика?». В ней выявляются новые философско-методологические аспекты обоснования современной математики, согласно которым к концу прошлого века математика испытала потрясения, благодаря которым могут возникнуть нежелательные последствия. Так, следуя анализу Брайана Дэвиса, уже начиная с 70-х годов прошлого века, в обосновании современной математики произошли ещё два новых «методологических потрясения», которые оказались непредсказуемыми, как и «кризис», вызванный работой Курта Гёделя. «Оба они связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один учёный не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность» [1, р. 1351]. Второе потрясение относится к математическим доказательствам, проводимым с использованием компьютерных технологий, в правомерности использования которых сомневаются некоторые математики. Соответствующая философская проблема кратко формулируется следующим образом: можно ли считать надёжным такое доказательство, часть которого выполнена на компьютере?

По существу машинные доказательства необозримых фрагментов математических теорем — это, наряду с фундаментальными математическими объектами, открытие «новых миров», заставляющих вновь провести переоценку ценностей таких понятий, как надёжность, обозримость и строгость доказательства. В философии математики надёжность математического доказательства определяется отсутствием в нем контрпримеров, а строгость доказательства связана

с тем, что оно не содержит в себе также неявных предпосылок. Естественно, что ломка традиционных канонов методологии математики приводит к широкому спектру оценок — от новой эпохи в математике до отказа для машинных доказательств от статуса реальных достижений. «Для учёного, занимающегося компьютерными вычислениями, ключевым вопросом является вопрос о том, как быстро растёт время, необходимое для решения любой задачи с ростом её объёма» [2, с. 47]. Но до сих пор не доказано, что алгоритма решения переборных задач за полиномиальное время для классических компьютеров не существует, то есть существуют неразрешимые пока методологические проблемы, которые оказались гораздо более относительными, чем это можно было изначально предположить.

### **Проблема компьютерных доказательств**

Существует много вопросов топологического характера, которые формулируются очень просто, но на которые интуиция не даёт удовлетворительных ответов. Таким примером может служить знаменитая «проблема четырёх красок». Задача состояла в доказательстве того, что для раскраски любой географической карты так, чтобы две страны, имеющие общую границу, как бы они ни были расположены, были окрашены по-разному, достаточно не более чем четырёх красок. Математическая интуиция ничего не говорит о том, верно ли это утверждение или нет, даже противоречащего ему примера приведено не было, и было доказано, что пяти красок достаточно для всех карт. Эта проблема оставалась нерешённой почти 125 лет. Хотя для некоторого конечного числа областей эта гипотеза Фрэнсиса Гатри была доказана, продвижение к бесконечно многим областям было безуспешным, пока эта проблема не была решена с помощью компьютера, перевернув тем самым традиционные представления о математическом доказательстве. В связи с привлечением компьютера для решения задачи о четырёх красках, предложенного американскими математиками Кеннет Аппелем и Вольфгангом Хакеном в 1977 году, возникла современная проблема «компьютерного фактора». Но такое нестандартное решение вызвало возражения некоторых ведущих математиков, считавших компьютерную проверку неадекватной, поскольку она не гарантирует безотказной работы в «недрах» компьютера и соответствующих сбоев в её логике. С одной стороны, возникает вопрос: можно ли признать необозримое логическое доказательство математическим доказательством? С другой стороны, традиционные математические доказательства тоже допускали пробелы в силу их очевидности или обоснованности в других работах.

В общем при желании все неявное и сознательно пропущенное в сложном математическом доказательстве можно было восстановить, однако использование 300 часов машинного времени в математическом доказательстве, как в приведённой выше задаче, такую возможность, вообще говоря, исключает. Другой пример подобного рода связан с решением поставленной четыреста лет назад проблемы Кеплера о пушечных шарах, состоящей в нахождении плотнейшей упаковки бесконечной системы одинаковых непересекающихся шаров в

евклидовом трёхмерном пространстве. В своей гипотезе Кеплер предположил, что наиболее плотная упаковка шаров одинаковых размеров, то есть когда при заданном количестве шаров объём пространства между шарами минимален, даётся при их пирамидальном упорядочивании по отношению друг к другу. Последовательное изложение американским математиком Томасом Хейлзом доказательства гипотезы Кеплера заняло около 300 страниц текста, который он в 1999 году отправил для публикации. Но только в 2006 году после проверки этой статьи двенадцатью рецензентами её удалось опубликовать в *Annals of Mathematics* на 120 страницах, содержащих часть доказательства, напрямую не связанную с компьютерными вычислениями. Но машинная проверка тоже подтвердила правильность гипотезы Кеплера, поэтому уже можно утверждать, что естественная укладка шаров слоями друг на друга даёт наиболее плотную упаковку.

Однако доказательство проблемы четырёх красок и гипотезы Кеплера реально демонстрирует возможности компьютеров при проверке трудоёмких вычислительных процедур, позволяя математикам концентрироваться на концептуальных сторонах проверки. Одним из современных эффективных средств математического познания является сейчас «компьютерная математика», в которой по сути синтезируются различные направления обоснования математики. Она является новым познавательным инструментом, поэтому есть философские вопросы, анализ которых требует более глубокого проникновения в их сущность. Что философия и методология математики говорит о современном кризисе, связанном с применением компьютера в доказательстве? Философско-математическое осмысление решения с помощью компьютера проблемы четырёх красок было инициировано статьёй американского философа Томаса Тимошко, который по существу стал центральной фигурой, возникшей после этой публикации философской полемики вокруг проблемы «надёжности компьютерных доказательств». Сложившаяся ситуация напоминает притчу, согласно которой вместо длинных доказательств в «марсианской математике» утверждения стали печататься под рубрикой «Так сказал Саймон». Эту метафору можно считать подобной утверждению «доказано с помощью компьютера». Апелляция к Саймону означает, что, получив важные результаты традиционными математическими методами, он со временем перестал представлять доказательства, утверждая, что доказательство слишком длинное, чтобы его приводить, но «я его осуществил». Авторитет математика Саймона был так высок, что если математики не могли воспроизвести доказательство, полученные им результаты принимались как истинные.

Эта притча порождает проблему: можно ли относить к современной математике результаты, истинность которых основана на утверждении, что так сказал Саймон? По мнению Томаса Тимошко, логика утверждений «так сказал Саймон» и «проверено с помощью компьютера» идентичны по смыслу, поскольку компьютеры, используемые в математических доказательствах, — это тоже некие другие авторитеты. В 80-е годы прошлого века эту проблему авторитетный философ науки А.Н. Кочергин образно назвал «синдромом Саймона» [3, с. 73]. Однако есть причины, которые не позволяют считать компьютерное до-

казательство убедительным, несмотря на то, что, хотя компьютерная программа формального доказательства реализуется по законам формальной логики, в неё тоже могут вкрасться ошибки, а вера основывается на надёжности компьютера, в работе которого иногда случаются сбои и который может содержать ошибки в программном обеспечении. В могуществе и бессилии компьютера отчасти отражается «могущество и бессилие человека», поэтому и прорыв в мир суперсложной математики возможен лишь при отказе от некоторых стереотипов научных традиций, поскольку развивающиеся технологии уже стали частью нашей новой реальности. Если философски акцентировать эти проблемы, то по существу они сводятся к проблеме «доверия к компьютерам», ведь для многих существенна проверка, выполненная именно человеком, хотя главное — что в итоге сделано.

В отличие от других доказательств, математическое доказательство обладает «высокой степенью надёжности». Эта надёжность гарантируется не доказательствами отдельных математических результатов, а коллективным пониманием взаимосвязанности математической картины мира и эффективности математического знания в приложениях. Критика сосредоточена на компьютерных вычислениях, рассматриваемых в качестве доказательства. В такой ситуации общезначимым критерием является надёжность полученных результатов, и до тех пор, пока соблюдается это условие, вычисления, произведённые с помощью компьютера, будут столь же убедительны, как и сделанные человеком. Но поскольку мы не имеем перечня условий, определяющих надёжность математического доказательства, то вошедшие в математическую практику компьютерные доказательства ставят вопрос о методологической допустимости компьютерных доказательств, решать который, исходя из рациональных критериев, пока приходится в философском плане. Тем не менее, современные компьютерные доказательства реально способствовали новому пониманию подходов к обоснованию математики, которые соотносятся с вопросами об убедительности, образно говоря, традиционного «ручного» доказательства, сделанного профессиональными математиками.

В трудно обозримом математическом рассуждении, реализованном с использованием компьютера, приходится переводить относительное в абсолютное с помощью конечного и неопределённого числа проверок. Поэтому обоснование правильности компьютерных вычислений попадает под такие же методологические ограничения, что и результаты о неразрешимости некоторых важных математических проблем, причём обосновывать их тем сложнее, чем эффективней соответствующая компьютерная программа. Например, пакеты компьютерной алгебры иногда не учитывают особенности поведения функции или не обращают внимание на её гладкость, в результате чего разные пакеты по-разному дифференцируют одну и ту же кусочно заданную функцию. Однако использование «кремниевой логики» в близкой перспективе меняет практику математического доказательства. Они все же учитывают реальные практические запросы, а компьютерные доказательства обозначили принципиально новый этап осмысления роли компьютера.

Философско-математический анализ даёт возможность выявить причины,

которые не позволяют считать любое компьютерное доказательство убедительным, несмотря на веру в то, что оно соответствует идеалу формального доказательства. Во-первых, эта вера основывается на надёжности работы современного компьютера, в работе которого иногда случаются сбои и который может содержать ошибки в программном обеспечении. Для подтверждения этого заметим, что компьютерные доказательства применяются как для получения новых результатов, так и для численной проверки уже сделанных теоретических доказательств, и, хотя они эвристически полезны, компьютерные доказательства пока чаще характеризуются как «вероятные», а не «абсолютно надёжные». Во-вторых, компьютерная программа доказательства пишется в соответствии с законами формальной логики, поэтому в неё тоже могут вкрасться ошибки. Но творчески мыслящий и философски рефлексирующий математик рассматривает ошибки как закономерный этап на пути решения сложной задачи. Можно заключить, что в чистой математике с развитием компьютерных технологий появилась возможность делать, как говорит Ю.И. Манин, «физические эксперименты в ментальной реальности».

План великого немецкого математика Давида Гильберта по формальному обоснованию математических теорий состоял, во-первых, в предложении аксиоматизировать их в духе разработанной им теории доказательств, а во-вторых, в попытке доказать непротиворечивость соответствующих систем аксиом. Эта труднейшая задача, поставленная Гильбертом, так до сих пор и не решена, несмотря на то, что в период разработки направления формализма господствовало также убеждение, что математические формулы, выражающие математические факты, являются отражением абстрактных и наиболее истинных математических высказываний. Хотя академик Ю.В. Матиясевич в диспуте «Математическое доказательство: вчера, сегодня, завтра» выступал как ярый сторонник полностью формализованных доказательств, востребованных для большей убеждённости в правильности доказательств, которые могут проверить компьютеры. Уже сегодня, считает он, «компьютеры могут проверить формализованные доказательства нетривиальных теорем» [4, с. 17]. Но не каждое «серьёзное» математическое доказательство является полностью логически формализованным. Имеющиеся доказательства не проясняют ситуацию, поскольку критический этап математического доказательства требует применения компьютера, и его «ответ» подменяет собой выявление математически формализованной истинности.

## Заключение

Компьютерному моделированию поддаются лишь некоторые частные процессы, поскольку при исследовании модели используются рассуждения, не носящие дедуктивного характера, хотя современная математика в большой степени разделяется на две области исследования с разными методологическими аппаратами и с разными интеллектуальными ценностями — на «численную» и «нечисленную» математику. Не случайно первым знаменитым компьютерным доказательством, которое привлекло усиленное внимание философов матема-

тики, стало нестандартное доказательство теоремы о четырёх красках. Когда математики Нейл Робертсон, Даниель Сандерс, Пол Сеймур и Робин Томас решили проверить доказательство Аппеля–Хакена, то оказалось, что проще написать свою программу, чем разбираться в чужой, а компьютерную часть доказательства они могли распечатать, чтобы её проверить. В 2008 году появилось ещё одно доказательство гипотезы о четырёх красках, когда французскому учёному Жоржу Гонтье [5] удалось в итоге проверить сведение к перебору содержательной части доказательства и ещё формальную корректность алгоритма, осуществлявшего такой перебор, используя для этого «универсальную программу», способную даже проверить доказательство любой теоремы, которая выводится с помощью используемой аксиоматики. Это отчасти снимает критику компьютерных доказательств, связанную с тем, что они не воспроизводятся на бумаге.

Под влиянием компьютерной вычислительной технологии в доказательстве многих теорем «нестрогие» математические доказательства стали встречаться в математической практике гораздо чаще, поэтому их надёжность, вообще говоря, не зависит от гипотетически возможного «чистого», но «строго аксиоматически» не реализованного математического доказательства. Проблема состоит ещё в том, что математический язык человека и язык программного обеспечения компьютера не всегда являются согласованными. В заключение уместно напомнить афористичное высказывание Платона, что «круглое невежество — не самое худшее зло, хуже накопление плохо усвоенных знаний». Если у профессиональных математиков спросить, являются ли выявленные философами математиками «кризисы» показателем нездорового состояния математического знания, то ответ, скорее всего, будет — нет, поскольку кризисы есть проявление вполне закономерной и естественной особенности сложного процесса развития и роста математического знания. А воображение человека может опережать любые технологические достижения, так как будущее математики — только «гипербола настоящего».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Davies B. Whither mathematics? // Notices of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 52, No. 11. P. 1350–1356.
2. Ааронсон С. На что способны квантовые компьютеры? // В мире науки (Scientific American). 2008. № 6. С. 46–53.
3. Кочергин А.Н. Машинное доказательство теорем как нетрадиционная исследовательская программа в математике // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск : Наука, 1987. С. 70–89.
4. Матиясевич Ю.В. Математическое доказательство: вчера, сегодня, завтра // Компьютерные инструменты в образовании. 2012. № 6. С. 13–24.
5. Gonthier G. Formal proof — the four-color theorem // Notices of the American Mathematical Society. 2008. Vol. 55, No. 11. P. 1382–1393.

## "SIMON'S SYNDROME" IN PROBLEM RELIABILITY OF COMPUTER PROOFS

**V.A. Erovenko**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: [erovenko@bsu.by](mailto:erovenko@bsu.by)

Belarusian State University,  
Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** The article is devoted to philosophical and mathematical aspects of use of the computer in the formalized mathematical proof. The problem of computer proofs reliability is reflected in a demand of experimental mathematics in scientific knowledge.

**Keywords:** philosophy of mathematical proofs, crisis of recomplecity of proofs, trust to computer proofs.

*Дата поступления в редакцию: 17.08.2017*