Математические структуры и моделирование
2017. №4(44). С. 5–25

УДК 512.815.8
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.4.5-25

О СИСТЕМЕ АКСИОМ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Система аксиом нелокальной квантовой теории определяется в рамках концепции Гейзенберга-Фока. В основании аксиоматики лежит понятие единой квантовой системы, генерирующим ядром которой является абстрактная C^*-алгебра. Показывается, что различные конкретные реализации операторной алгебры зависят от структуры присоединённых к оператору энергии генераторов группы фундаментальной симметрии. В случае генераторов комплексной оболочки групповой алгебры конформной группы спектр состояний единой квантовой системы задаётся в рамках представления Румера-Фета, что приводит к теоретико-групповому описанию периодической системы элементов Менделеева.

Ключевые слова: единая квантовая система, концепция Гейзенберга-Фока, операторная алгебра, комплексные оболочки, конформная группа, периодическая система элементов.

1. Введение

Проблема объединения квантовой механики и специальной теории относительности возникла сразу же после создания нерелятивистской квантовой механики в работах Гейзенберга, Шрёдингера, Борна, Дирака и др. Однако это объединение произошло не на равных основаниях (на это в своё время указывал де Бройль), а путём построения релятивистской квантовой механики (квантовой теории поля) на фоне классического пространства-времени, справедливого, как известно, лишь для описания макроявлений. Как следствие, пространственно-временной континуум приобрёл статус фундаментального уровня, своего рода мировой арены, на которой разворачиваются все процессы микромира. Против такой точки зрения резко возражал Дж. Чью: «... пространство и время в современной микроскопической физике играют примерно ту же роль, что и понятие эфира в макроскопической физике XIX века. Возможно, нам никогда не удастся продемонстрировать несуществование пространственно-временного континуума, однако, все большее число физиков приходит к мысли, что дальнейшее существенное продвижение в теории предполагает отказ от ненаблюдаемого континуума. Мы должны пытаться строить теорию в терминах лишь измеримых величин» [1]. С другой стороны, вместо отказа от континуума Ю.С. Владимиров ставит как одну из основных проблем современной фундаментальной теоретической физики «... проблему вывода классических пространственно-временных представлений из понятий и закономерностей физики микромира, вместо того чтобы продолжать подкладывать классическое пространство-время под все теоретические построения: написания лагранжианов, дифференциальных уравнений и т. д. Среди исходных положений физики микромира, в первую очередь, следует иметь в виду понятия и закономерности квантовой теории» [2][1].

Откуда же возникло это стремление свести пространственно-временной континуум на эмерджентный уровень или вовсе отказаться от него? Вот что пишет Гейзенберг: «... уже первые работы в этой области выявили очень серьёзные трудности в области, где квантовую теорию пытались объединить со специальной теорией относительности ... но более точное исследование показало, что обе теории вступают в определённом пункте в конфликт, в результате чего и проистекают все дальнейшие трудности ... действие на большие расстояния так, как оно выступает в случае сил тяготения в ньютоновской механике, оказалось несовместимым со специальной теорией относительности. Новая теория должна была заменить такое действие «близкодействием», то есть передачей силы из одной точки только непосредственно соседней точке ... Поэтому структура пространства и времени, выражаемая специальной теорией относительности, предельно резко отграничивает область одновременности, в которой не может быть передано никакое воздействие, от других областей, в которых непосредственное воздействие одного процесса на другой может иметь место. С другой стороны, соотношение неопределённостей квантовой теории устанавливает жёсткую границу точности, с которой могут быть одновременно измерены координаты и импульсы или моменты времени и энергии. Так как предельно резкая граница означает бесконечную точность фиксации положения в пространстве и во времени, то соответствующие импульсы и энергии должны быть полностью неопределёнными, то есть с подавляющей вероятностью должны выступить на первый план процессы даже со сколь угодно большими импульсами и энергиями. Поэтому всякая теория, которая одновременно выполняет требования специальной теории относительности и квантовой теории, ведёт, оказывается, к математическим противоречиям, а именно к расходимостям в области очень больших энергий и импульсов» [8, с. 98–99]. Таким образом, рождённый от брака (не на равных основаниях) между СТО и КМ «гибрид» (квантовая теория поля), был наделён изначально «неизлечимой родовой болезнью». Все попытки «излечения» (перенормировки) не имели концептуальный характер, а являлись,

[1]Следует отметить, что в программе Пенроуза [3, 4] твисторная структура понимается как подлежащая (более фундаментальная) структура по отношению к пространству-времени Минковского. Другими словами, пространственно-временной континуум не является фундаментальной субстанцией в твисторном подходе, а представляется полностью производной конструкцией, генерируемой подлежащей твисторной структурой. Параллельно с твисторным подходом, теория декогеренции [5] утверждает, что в основании реальности мы имеем *нелокальный квантовый субстрат* (квантовый домен), а весь видимый мир (классический домен≡пространственно-временной континуум) возникает из квантового домена в результате процесса декогеренции [6, 7]. Оба направления (твисторная программа и теория декогеренции) рассматривают классическое пространство-время как *эмерджентный* уровень.

по меткому выражению Фейнмана, «заметанием мусора под ковёр».

Очевидно, что объединение СТО и КМ не лежит на пути «релятивизации» квантовой механики или «квантования» теории относительности. Каждая из этих теорий описывает свой слой реальности: микромир (КМ) и макромир (СТО). Эти два мира не изолированы друг от друга, а соприкасаются по некоторой промежуточной границе, переходя через которую микромир (потенция) превращается (актуализируется) в макромир. В настоящей статье предпринимается попытка аксиоматически описать эту двухуровневую структуру реальности[2] в рамках концепции Гейзенберга-Фока [9, 10]. Исходным пунктом исследования является определение основных структурных составляющих формализма. Согласно фон Нейману [11], примитивными (неопределяемыми) понятиями формализма квантовой механики являются *система*, *наблюдаемая* и *состояние*[3]. Основным неопределяемым понятием является *единая квантовая система* **U**. В качестве наблюдаемой берётся C^*-алгебра[4], состоящая из *оператора энергии* H и присоединённых к H генераторов *группы фундаментальной симметрии* G_f. Состояния единой квантовой системы **U** формируются в рамках конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала [13,14], т. е. как *циклические представления* операторной алгебры. Получающийся в результате спектр состояний во многом подобен *спектру материи* Гейзенберга, в котором состояния (частицы) определяются как флуктуации нелинейного спинорного поля[5]. Главным отличием от подхода Гейзенберга является представление о том, что генератором состояний

---

[2]В связи с этим интересно отметить следующую аналогию. Физики, отрицающие двухуровневую (двухслойную) концепцию Гейзенберга-Фока, напоминают собой психотерапевта, который категорически не признает фундаментальную роль *подсознания* (как будто бы и не было работ Фрейда и Юнга) во всех аспектах психофизиологии человека, ограничиваясь при этом одним только *сознанием*.

[3]Джеммер [12] рассматривает формализм фон Неймана как эталон полноты и математической строгости, сравнивая с ним далее все последующие интерпретации квантовой механики.

[4]Ирвинг Сигал, один из создателей теории C^*-алгебр, первым предложил использовать абстрактную C^*-алгебру в основании физической интерпретации КМ. Однако на тот момент (40–50 гг. XX века) эта идея не получила поддержки в среде квантовополевых теоретиков (главным образом в силу проблемы несчётного множества неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений).

[5]В основу теории Гейзенберга кладётся некоторое фундаментальное спинорное поле («праматерия»), описываемое нелинейным уравнением [15, 16]

$$i\sigma^\nu \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^\nu} + l^2 \sigma^\nu : \chi(x) \left(\chi^*(x)\sigma_\nu \chi(x)\right) := 0.$$

Здесь l – произвольная константа размерности длины, полевой оператор $\chi(x)$ определяется как двухкомпонентный (вейлевский) спинор относительно преобразований Лоренца и как двухкомпонентный спинор в изопространстве, $\sigma^\nu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ – матрицы Паули. Символ : : во втором члене относится к определению произведения трёх полевых операторов в одной пространственно-временной точке («виковское произведение»). Гейзенберг полагал, что возбуждённые состояния поля $\chi(x)$ приводят к различным реально наблюдаемым частицам, составляющим спектр материи. Паули, доказавший инвариантность уравнения Гейзенберга относительно изоспиновой группы, на первоначальном этапе развития нелинейной спинорной теории был её активным сторонником. Однако впоследствии Паули подверг резкой критике теорию Гейзенберга и полностью отошел от этой проблематики (см. вступительную статью Иваненко в сборнике [16]).

системы **U** является не «праматерия» Гейзенберга-Паули, а абстрактная C^*-алгебра (по Сигалу). В силу гибкости конструкции ГНС при каждой конкретной реализации операторной алгебры («одевании») получаем свой (соответствующий данной реализации) спектр состояний (спектр материи) системы **U**. Так, в случае, когда присоединённые к H генераторы группы фундаментальной симметрии ($G_f = \mathrm{SO}_0(1,3)$ – группа Лоренца) являются генераторами комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, получаем линейно растущий спектр масс состояний («элементарных частиц») [17, 18][6]. В этом случае «одевание» операторной алгебры и построение циклических представлений конструкции ГНС осуществляется в рамках спинорной структуры (заряженные, нейтральные, истинно нейтральные (майорановские) состояния и их дискретные симметрии задаются посредством морфизмов спинорной структуры, см. [20–22]). В п. 4 настоящей статьи в качестве группы фундаментальной симметрии рассматривается *конформная группа* ($G_f = \mathrm{SO}_0(2,4)$)[7]. В данном случае конкретная реализация операторной C^*-алгебры задаётся посредством присоединённых к H генераторов комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ и твисторной структуры, ассоциированной с группой $\mathrm{SU}(2,2)$ (универсальное накрытие конформной группы). Комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ приводит к представлению Румера-Фета F_s^+ для конформной группы. Представление F_s^+ является базой теоретико-группового описания периодической системы элементов [23–25]. Как известно, спинорная структура (СС) является подструктурой твисторной структуры (ТС), следовательно, все морфизмы СС переносятся на ТС. Итак, при данной конкретной реализации C^*-алгебры имеем спектр состояний системы **U**, описывающей периодическую систему элементов Менделеева. При этом, в отличие от модели Бора, атомы всех элементов описываются как единая квантовая система[8].

2. Аксиомы локальной квантовой теории

Как известно [26], существует два варианта локального алгебраического подхода: конкретный (или *теория Хаага-Араки*), в котором локальные алгебры являются алгебрами фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{O})$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и абстрактный (или *теория Хаага-Кастлера*), в котором локальные

[6] Линейно растущий спектр масс элементарных частиц был впервые отмечен Намбу [19] и впоследствии исследовался в работах Макгрегора, Палацци, Сидхарта и др. (см. библиографию в [18]).

[7] В некотором смысле это позволяет уйти от иллюзии «фундаментальности» группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$, описывающей, как известно, вращения четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

[8] Фет отмечал, что «... модель Бора не описывает атомы различных элементов как *единую* квантовую систему. В самом деле, понятие квантовой системы предполагает, что имеется гильбертово пространство, векторы которого изображают все возможные состояния системы, и что в этом пространстве задан гамильтониан, собственные векторы которого изображают стационарные состояния системы, – в данном случае такие состояния должны соответствовать атомам всех элементов. Такого описания нет в модели Бора ... тем более нет в модели Бора группы симметрии, операторы которой переводили бы друг в друга векторы состояния, соответствующие разным элементам» [25, с. 151].

алгебры являются абстрактными C^*-алгебрами $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Различие между этими двумя вариантами имеет значение лишь с конструктивной точки зрения. А именно, может случиться, что алгебра наблюдаемых построена раньше, чем выбрано её физическое представление π, тогда предпочтительнее абстрактно-алгебраическая точка зрения (теория Хаага-Кастлера). Когда же физическое представление π зафиксировано, то абстрактные C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ можно считать «конкретными» алгебрами фон Неймана $\overline{\pi(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))}$ (локальные наблюдаемые, определённые в слабой операторной топологии физического представления). Придерживаясь [27], перечислим основные аксиомы локального алгебраического подхода.

A.I (Алгебра наблюдаемых) *Физическая система характеризуется некоторой* C^**-алгеброй* $\mathfrak{A}$ *с единицей, эрмитовы элементы которой называются (ограниченными) наблюдаемыми. Значение функционала* $\omega(A)$*, где* $\omega \in S(\mathfrak{A})$*,* $A = A^*$ *есть среднее значение наблюдаемой* A *в состоянии* ω*.*

A.II (Состояния) *Множество физических состояний* $\mathfrak{S}$ *(алгебры наблюдаемых* $\mathfrak{A}$*) совпадает с множеством всех состояний* S_π*, ассоциированным с представлением* $\pi = \pi_{\text{phys}}$ *(называемым физическим представлением) алгебры* $\mathfrak{A}$ *в некотором гильбертовом пространстве* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{phys}}$ *(называемом физическим пространством).*

A.III (Пуанкаре-инвариантность) *В физическом гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *определено унитарное представление* $(a, \Lambda) \to U(a, \Lambda)$ *спинорной группы Пуанкаре* $\mathfrak{P}_0$ *(непрерывное в слабой операторной топологии), задающее закон преобразования при трансляциях и преобразованиях Лоренца для наблюдаемых*

$$A \longrightarrow U(a, \Lambda) A U(a, \Lambda)^{-1}$$

и векторов состояния

$$|\Phi\rangle \longrightarrow U(a, \Lambda)\, |\Phi\rangle$$

(здесь A *– произвольный элемент алгебры наблюдаемых* $\mathfrak{A}$ *или алгебры наблюдаемых фон Неймана* $\overline{\mathfrak{A}}$*,* $|\Phi\rangle$ *– произвольный вектор из* $\mathcal{H}$*). Генераторы этого представления – операторы полного 4-импульса* p^μ *и четырёхмерного углового момента* $M^{\lambda\mu}$ *– являются самосопряжёнными операторами в* $\mathcal{H}$*, присоединёнными к алгебре наблюдаемых фон Неймана.*

A.IV (Спектральность) *Спектр оператора энергии-импульса* p *принадлежит замкнутому верхнему световому конусу* $\overline{V}^+$[9].

A.V (Локализация) *Каждому ограниченному открытому множеству* $\mathcal{O}$ *пространства-времени Минковского* $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ *сопоставлена* C^**-алгебра с единицей* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$*, являющаяся подалгеброй алгебры наблюдаемых* $\mathfrak{A}$ *и называемая алгеброй (локальных) наблюдаемых, ассоциированных с множеством* $\mathcal{O}$*; при этом алгебра* $\mathfrak{A}$ *является пополнением по норме объединения*

$$\mathfrak{A}_{\text{loc}} = \bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathcal{M}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}),$$

[9] Аксиому спектральности часто формулируют следующим образом: *в* $\mathcal{H}$ *существует полная система состояний с неотрицательной энергией.*

называемого алгеброй локальных наблюдаемых. Кроме того, выполнены следующие условия:
(а) изотония: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$*, то* $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$*;*
(б) ковариантность относительно собственной группы Пуанкаре:

$$\alpha_{a,\Lambda}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\Lambda\mathcal{O} + a);$$

(в) локальная коммутативность: алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ *и* $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$*, ассоциированные с пространственноподобно разделёнными областями* $\mathcal{O}_1$ *и* $\mathcal{O}_2$*, коммутируют между собой.*

Семейство $\{\mathfrak{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\subset\mathcal{M}}$ C^*-алгебр, удовлетворяющих условию изотонии, называют *сетью* C^*-алгебр над $\mathcal{M}$. По аналогии с классической физикой понятие поля в квантовой физике призвано реализовать идею близкодействия. Поэтому в системе аксиом локального алгебраического подхода появляется аксиома A.V.

В локальном алгебраическом подходе никогда не утверждалось, что система аксиом A.I–A.V является единственно возможной, и только она приводит к физически приемлемому описанию «релятивистских квантовых объектов». Что касается возможности появления принципиально новых аксиом, то следует отметить, что предпринимались неоднократные попытки постулировать аксиому корпускулярной интерпретации. В локальной квантовой теории поиск критерия корпускулярной интерпретации исходит из общей трактовки частицы как «асимптотически стабильного центра локализации». Однако, как отмечают Бухгольц и Хааг [28], до сих пор не найден адекватный способ математического выражения подобной концепции частицы.

Уже беглый взгляд на систему аксиом A.I–A.V показывает, что непосредственно к квантовой механике имеют отношение только первые две аксиомы, а все последующие аксиомы представляют собой пространственно-временной «фон», в который погружена («релятивизирована») квантовая механика[10]. С целью уйти от подобного рода совмещённой («гибридной») аксиоматики в п. 4 будет предпринята попытка аксиоматизации квантовой теории на базе концепции Гейзенберга-Фока.

3. Комплексные оболочки групповых алгебр

В этом параграфе рассмотрим комплексные оболочки групповых алгебр $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (группа Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$) и $\mathfrak{so}(2,4)$ (конформная группа $\mathrm{SO}_0(2,4)$). Как известно, с комплексной оболочкой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ассоциирована *спинорная структура*. В свою очередь с комплексной оболочкой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ ассоциирована *твисторная структура*. Спинорная структура является подструктурой твисторной структуры. С другой стороны, как показал Сигал [30], алгебра Ли неоднородной группы Лоренца (т. е. группы Пуанкаре) может быть получена

[10]Образно говоря, бесконечномерное гильбертово пространство квантовой механики здесь втиснуто в прокрустово ложе пространственно-временного континуума. В связи с этим де Бройль писал: «... мы должны с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас всё время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит» [29].

деформацией из конформной алгебры Ли. В свою очередь конформная алгебра Ли является «жёсткой», т. е. не может быть получена деформированием другой алгебры Ли. В силу этого свойства конформная алгебра (алгебра некомпактной вещественной псевдоортогональной группы в шестимерном пространстве с сигнатурой $(-,-,-,-,+,+)$) имеет уникальный (завершённый) характер и занимает выделенное место среди других алгебр. В п. 4 при рассмотрении аксиом нелокального подхода в качестве группы фундаментальной симметрии будет взята конформная группа.

3.1. Комплексная оболочка групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и представление ван дер Вардена

Как известно, универсальное накрытие собственной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$ (группа вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$) задаётся спинорной группой

$$\mathbf{Spin}_+(1,3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2 : \ \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1 \right\} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Пусть $\mathfrak{g} \to T_{\mathfrak{g}}$ – произвольное линейное представление собственной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$ и пусть $\mathsf{A}_i(t) = T_{a_i(t)}$ – инфинитезимальный оператор, соответствующий вращению $a_i(t) \in \mathrm{SO}_0(1,3)$. Аналогично пусть $\mathsf{B}_i(t) = T_{b_i(t)}$, где $b_i(t) \in \mathrm{SO}_0(1,3)$ – гиперболическое вращение. Элементы A_i и B_i образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{array}{lll}
[\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2] = \mathsf{A}_3, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{A}_3] = \mathsf{A}_1, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{A}_1] = \mathsf{A}_2, \\
[\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2] = -\mathsf{A}_3, & [\mathsf{B}_2,\mathsf{B}_3] = -\mathsf{A}_1, & [\mathsf{B}_3,\mathsf{B}_1] = -\mathsf{A}_2, \\
[\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_1] = 0, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_2] = 0, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_3] = 0, \\
[\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_2] = \mathsf{B}_3, & [\mathsf{A}_1,\mathsf{B}_3] = -\mathsf{B}_2, & \\
[\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_3] = \mathsf{B}_1, & [\mathsf{A}_2,\mathsf{B}_1] = -\mathsf{B}_3, & \\
[\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_1] = \mathsf{B}_2, & [\mathsf{A}_3,\mathsf{B}_2] = -\mathsf{B}_1. &
\end{array}\right\} \tag{1}$$

Обозначая $\mathsf{L}_{23} = \mathsf{A}_1$, $\mathsf{L}_{31} = \mathsf{A}_2$, $\mathsf{L}_{12} = \mathsf{A}_3$, а $\mathsf{L}_{01} = \mathsf{B}_1$, $\mathsf{L}_{02} = \mathsf{B}_2$, $\mathsf{L}_{03} = \mathsf{B}_3$, запишем соотношения (1) в более компактной форме:

$$[\mathsf{L}_{\mu\nu},\mathsf{L}_{\lambda\rho}] = g_{\mu\rho}\mathsf{L}_{\lambda\nu} + g_{\nu\lambda}\mathsf{L}_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}\mathsf{L}_{\mu\lambda} - g_{\mu\lambda}\mathsf{L}_{\nu\rho}.$$

Перейдём к комплексной оболочке групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, определяя операторы

$$\mathsf{X}_l = \frac{1}{2}i(\mathsf{A}_l + i\mathsf{B}_l), \quad \mathsf{Y}_l = \frac{1}{2}i(\mathsf{A}_l - i\mathsf{B}_l), \tag{2}$$
$$(l = 1,2,3).$$

Используя соотношения (1), находим

$$[\mathsf{X}_k, \mathsf{X}_l] = i\varepsilon_{klm}\mathsf{X}_m, \quad [\mathsf{Y}_l, \mathsf{Y}_m] = i\varepsilon_{lmn}\mathsf{Y}_n, \quad [\mathsf{X}_l, \mathsf{Y}_m] = 0. \tag{3}$$

Далее, вводя генераторы вида («повышающие» и «понижающие» генераторы группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$)

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{X}_+ = \mathsf{X}_1 + i\mathsf{X}_2, \quad \mathsf{X}_- = \mathsf{X}_1 - i\mathsf{X}_2, \\ \mathsf{Y}_+ = \mathsf{Y}_1 + i\mathsf{Y}_2, \quad \mathsf{Y}_- = \mathsf{Y}_1 - i\mathsf{Y}_2, \end{array}\right\}, \tag{4}$$

получим

$$[\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_+] = \mathsf{X}_+, \quad [\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_-] = -\mathsf{X}_-, \quad [\mathsf{X}_+, \mathsf{X}_-] = 2\mathsf{X}_3,$$
$$[\mathsf{Y}_3, \mathsf{Y}_+] = \mathsf{Y}_+, \quad [\mathsf{Y}_3, \mathsf{Y}_-] = -\mathsf{Y}_-, \quad [\mathsf{Y}_+, \mathsf{Y}_-] = 2\mathsf{Y}_3.$$

В силу коммутативности соотношений (3) пространство неприводимого конечномерного (спинорного) представления группы $\mathrm{SO}_0(1,3)$ может быть натянуто на совокупность $(2l+1)(2\dot{l}+1)$ базисных векторов $\mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle$, где $l,m,\dot{l},\dot{m}$ – целые или полуцелые числа, $-l \leqslant m \leqslant l$, $-\dot{l} \leqslant \dot{m} \leqslant \dot{l}$. Следовательно,

$$\begin{array}{l}
\mathsf{X}_- \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \mid l,m-1,\dot{l},\dot{m}\rangle \ \ (m > -l), \\
\mathsf{X}_+ \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \mid l,m+1;\dot{l},\dot{m}\rangle \ \ (m < l), \\
\mathsf{X}_3 \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = m \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle, \\
\mathsf{Y}_- \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = \sqrt{(\dot{l}+\dot{m})(\dot{l}-\dot{m}+1)} \mid l,m;\dot{l},\dot{m}-1\rangle \ \ (\dot{m} > -\dot{l}), \\
\mathsf{Y}_+ \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = \sqrt{(\dot{l}-\dot{m})(\dot{l}+\dot{m}+1)} \mid l,m;\dot{l},\dot{m}+1\rangle \ \ (\dot{m} < \dot{l}), \\
\mathsf{Y}_3 \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle = \dot{m} \mid l,m;\dot{l},\dot{m}\rangle.
\end{array} \tag{5}$$

Из соотношений (3) следует, что каждое из множеств операторов X и Y генерирует группу $\mathrm{SU}(2)$ и эти две группы коммутируют между собой. Таким образом, из соотношений (3) следует, что в рамках комплексной оболочки групповая алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, по существу, эквивалентна (алгебраически изоморфна) прямой сумме $\mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2)$ (см. также [34, с. 28])[11]. В противоположность представлению Гельфанда-Наймарка для группы Лоренца [35,36], которое так и не нашло широкого применения в физике, представление (5) является наиболее используемым в теоретической физике (см., например, [31,37–39]). Это представление

[11]В некотором смысле это позволяет представить группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ произведением $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$, как это сделано Райдером [31]. Более того, в работах [32,33] группа Лоренца представлена произведением $\mathrm{SU}_R(2) \otimes \mathrm{SU}_L(2)$, где спиноры $\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix}\phi_R(p^\mu)\\ \phi_L(p^\mu)\end{pmatrix}$ ($\phi_R(p^\mu)$ и $\phi_L(p^\mu)$ – право- и левополяризованные спиноры) преобразуются в рамках пространства представления $(j,0) \oplus (0,j)$. Однако изоморфизм $\mathrm{SL}(2,C) \simeq \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$ не является корректным (даже в локальном смысле) с теоретико-групповой точки зрения. Действительно, группы $\mathrm{SO}_0(1,3)$ и $\mathrm{SO}(4)$ являются вещественными формами комплексной шестимерной группы Ли $\mathrm{SO}(4,\mathbb{C})$ с комплексной алгеброй Ли $D_2 = A_1 + A_1$. Вещественные алгебры Ли компактны в том случае, когда форма Киллинга является отрицательноопределённой [34]. Это справедливо для алгебры Ли группы $\mathrm{SO}(4)$, но не для $\mathrm{SO}_0(1,3)$.

для группы Лоренца было впервые дано ван дер Варденом в классической монографии [40]. Следует отметить, что базис представления, определяемый формулами (2)–(5), имеет вполне очевидный физический смысл. Например, в случае пространства представления $(1,0)\oplus(0,1)$ имеет место аналогия с фотонными спиновыми состояниями. А именно операторы X и Y соответствуют право- и левополяризованным состояниям фотона. По этой причине канонический базис, состоящий из векторов вида $\mid lm;\dot{l}\dot{m}\rangle$, называют *спиральным базисом*, или *базисом комплексного углового момента*.

3.2. Комплексная оболочка групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$

Как известно [25], система пятнадцати генераторов конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathbf{L}_{\alpha\beta},\mathbf{L}_{\gamma\delta}]=i\left(g_{\alpha\delta}\mathbf{L}_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}\mathbf{L}_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}\mathbf{L}_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}\mathbf{L}_{\alpha\gamma}\right),$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,\ldots,6,\alpha\neq\beta,\ \gamma\neq\delta).$$

Генераторы $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$. С целью перейти к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ рассмотрим другую систему генераторов, предложенную Т. Йао [41]. Пусть

$$\begin{gathered}
\mathbf{J}_1=1/2\left(\mathbf{L}_{23}-\mathbf{L}_{14}\right),\quad \mathbf{J}_2=1/2\left(\mathbf{L}_{31}-\mathbf{L}_{24}\right),\quad \mathbf{J}_3=1/2\left(\mathbf{L}_{12}-\mathbf{L}_{34}\right),\\
\mathbf{K}_1=1/2\left(\mathbf{L}_{23}+\mathbf{L}_{14}\right),\quad \mathbf{K}_2=1/2\left(\mathbf{L}_{31}+\mathbf{L}_{24}\right),\quad \mathbf{K}_3=1/2\left(\mathbf{L}_{12}+\mathbf{L}_{34}\right),\\
\mathbf{P}_1=1/2\left(-\mathbf{L}_{35}-\mathbf{L}_{16}\right),\quad \mathbf{P}_2=1/2\left(\mathbf{L}_{45}-\mathbf{L}_{36}\right),\quad \mathbf{P}_0=1/2\left(-\mathbf{L}_{34}-\mathbf{L}_{56}\right),\\
\mathbf{Q}_1=1/2\left(\mathbf{L}_{35}-\mathbf{L}_{46}\right),\quad \mathbf{Q}_2=1/2\left(\mathbf{L}_{45}+\mathbf{L}_{36}\right),\quad \mathbf{Q}_0=1/2\left(\mathbf{L}_{34}-\mathbf{L}_{56}\right),\\
\mathbf{S}_1=1/2\left(-\mathbf{L}_{15}+\mathbf{L}_{26}\right),\quad \mathbf{S}_2=1/2\left(-\mathbf{L}_{25}-\mathbf{L}_{16}\right),\quad \mathbf{S}_0=1/2\left(\mathbf{L}_{12}-\mathbf{L}_{56}\right),\\
\mathbf{T}_1=1/2\left(-\mathbf{L}_{15}-\mathbf{L}_{26}\right),\quad \mathbf{T}_2=1/2\left(\mathbf{L}_{25}-\mathbf{L}_{16}\right),\quad \mathbf{T}_0=1/2\left(-\mathbf{L}_{12}-\mathbf{L}_{56}\right).
\end{gathered}\tag{6}$$

Эта система 18 генераторов связана тремя соотношениями:

$$\mathbf{J}_3-\mathbf{K}_3=\mathbf{P}_0-\mathbf{Q}_0,\quad \mathbf{J}_3+\mathbf{K}_3=\mathbf{S}_0-\mathbf{T}_0,\quad \mathbf{P}_0+\mathbf{Q}_0=\mathbf{S}_0+\mathbf{T}_0.\tag{7}$$

В силу независимости генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ $(\alpha<\beta)$ (6) задаёт избыточную систему генераторов группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$, из которой можно получить базис алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, исключив три генератора с помощью (7).

Перейдём к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, положив

$$\begin{gathered}
\mathbf{J}_\pm=\mathbf{J}_1\pm i\mathbf{J}_2,\quad \mathbf{P}_\pm=\mathbf{P}_1\pm i\mathbf{P}_2,\quad \mathbf{S}_\pm=\mathbf{S}_1\pm i\mathbf{S}_2,\\
\mathbf{K}_\pm=\mathbf{K}_1\pm i\mathbf{K}_2,\quad \mathbf{Q}_\pm=\mathbf{Q}_1\pm i\mathbf{Q}_2,\quad \mathbf{T}_\pm=\mathbf{T}_1\pm i\mathbf{T}_2.
\end{gathered}\tag{8}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
[\mathbf{J}_3,\mathbf{J}_+]=\mathbf{J}_+,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{J}_-]=-\mathbf{J}_-,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{J}_-]=2\mathbf{J}_3,\\
[\mathbf{K}_3,\mathbf{K}_+]=\mathbf{K}_+,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{K}_-]=-\mathbf{K}_-,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{K}_-]=2\mathbf{K}_3,
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_+]=\mathbf{P}_+,\quad [\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_-]=-\mathbf{P}_-,\quad [\mathbf{P}_+,\mathbf{P}_-]=-2\mathbf{P}_0,\\
[\mathbf{Q}_0,\mathbf{Q}_+]=\mathbf{Q}_+,\quad [\mathbf{Q}_0,\mathbf{Q}_-]=-\mathbf{Q}_-,\quad [\mathbf{Q}_+,\mathbf{Q}_-]=-2\mathbf{Q}_0,\\
[\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_+]=\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{S}_0,\mathbf{S}_-]=-\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{S}_+,\mathbf{S}_-]=-2\mathbf{S}_0,\\
[\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_+]=\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_-]=-\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{T}_+,\mathbf{T}_-]=-2\mathbf{T}_0,\\
[\mathbf{J}_i,\mathbf{K}_j]=0\quad (i,j=+,-,3),\\
[\mathbf{J}_+,\mathbf{P}_+]=0,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{P}_-]=-\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{P}_0]=-1/2\mathbf{J}_+,\\
[\mathbf{J}_-,\mathbf{P}_+]=\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{P}_-]=0,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{P}_0]=1/2\mathbf{J}_-,\\
[\mathbf{J}_3,\mathbf{P}_+]=1/2\mathbf{P}_+,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{P}_-]=-1/2\mathbf{P}_-,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{P}_0]=0,\\
[\mathbf{J}_+,\mathbf{Q}_+]=\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{Q}_-]=0,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{Q}_0]=1/2\mathbf{J}_+,\\
[\mathbf{J}_-,\mathbf{Q}_+]=0,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{Q}_-]=-\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{Q}_0]=-1/2\mathbf{J}_-,\\
[\mathbf{J}_3,\mathbf{Q}_+]=-1/2\mathbf{Q}_+,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{Q}_-]=1/2\mathbf{Q}_-,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{Q}_0]=0,\\
[\mathbf{J}_+,\mathbf{S}_+]=0,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{S}_-]=-\mathbf{Q}_-,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{S}_0]=-1/2\mathbf{J}_+,\\
[\mathbf{J}_-,\mathbf{S}_+]=\mathbf{Q}_+,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{S}_-]=0,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{S}_0]=1/2\mathbf{J}_-,\\
[\mathbf{J}_3,\mathbf{S}_+]=1/2\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{Q}_-]=-1/2\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{S}_0]=0,\\
[\mathbf{J}_+,\mathbf{T}_+]=\mathbf{P}_+,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{T}_-]=0,\quad [\mathbf{J}_+,\mathbf{T}_0]=1/2\mathbf{J}_+,\\
[\mathbf{J}_-,\mathbf{T}_+]=0,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{T}_-]=-\mathbf{P}_-,\quad [\mathbf{J}_-,\mathbf{T}_0]=-1/2\mathbf{J}_-,\\
[\mathbf{J}_3,\mathbf{T}_+]=-1/2\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{T}_-]=1/2\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{J}_3,\mathbf{T}_0]=0,\\
[\mathbf{K}_+,\mathbf{P}_+]=-\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{P}_-]=0,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{P}_0]=1/2\mathbf{K}_+,\\
[\mathbf{K}_-,\mathbf{P}_+]=0,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{P}_-]=\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{P}_0]=-1/2\mathbf{K}_-,\\
[\mathbf{K}_3,\mathbf{P}_+]=-1/2\mathbf{P}_+,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{P}_-]=1/2\mathbf{P}_-,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{P}_0]=0,\\
[\mathbf{K}_+,\mathbf{Q}_+]=0,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{Q}_-]=\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{Q}_0]=-1/2\mathbf{K}_+,\\
[\mathbf{K}_-,\mathbf{Q}_+]=-\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{Q}_-]=0,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{Q}_0]=1/2\mathbf{K}_-,\\
[\mathbf{K}_3,\mathbf{Q}_+]=1/2\mathbf{Q}_+,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{Q}_-]=-1/2\mathbf{Q}_-,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{Q}_0]=0,\\
[\mathbf{K}_+,\mathbf{S}_+]=0,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{S}_-]=\mathbf{P}_-,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{S}_0]=-1/2\mathbf{K}_+,\\
[\mathbf{K}_-,\mathbf{S}_+]=-\mathbf{P}_+,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{S}_-]=0,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{S}_0]=1/2\mathbf{K}_-,\\
[\mathbf{K}_3,\mathbf{S}_+]=1/2\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{S}_-]=-1/2\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{S}_0]=0,\\
[\mathbf{K}_+,\mathbf{T}_+]=-\mathbf{Q}_+,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{T}_-]=0,\quad [\mathbf{K}_+,\mathbf{T}_0]=1/2\mathbf{K}_+,\\
[\mathbf{K}_-,\mathbf{T}_+]=0,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{T}_-]=\mathbf{Q}_-,\quad [\mathbf{K}_-,\mathbf{T}_0]=-1/2\mathbf{K}_-,\\
[\mathbf{K}_3,\mathbf{T}_+]=-1/2\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{T}_-]=1/2\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{K}_3,\mathbf{T}_0]=0,\\
[\mathbf{P}_i,\mathbf{Q}_j]=0\quad (i,j=+,-,0),\\
[\mathbf{P}_+,\mathbf{S}_+]=0,\quad [\mathbf{P}_+,\mathbf{S}_-]=\mathbf{K}_-,\quad [\mathbf{P}_+,\mathbf{S}_0]=-1/2\mathbf{P}_+,\\
[\mathbf{P}_-,\mathbf{S}_+]=-\mathbf{K}_+,\quad [\mathbf{P}_-,\mathbf{S}_-]=0,\quad [\mathbf{P}_-,\mathbf{S}_0]=1/2\mathbf{P}_-,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{P}_0,\mathbf{S}_+]=1/2\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{P}_0,\mathbf{S}_-]=-1/2\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{P}_0,\mathbf{S}_0]=0,\\
[\mathbf{P}_+,\mathbf{T}_+]=0,\quad [\mathbf{P}_+,\mathbf{T}_-]=-\mathbf{J}_+,\quad [\mathbf{P}_+,\mathbf{T}_0]=-1/2\mathbf{P}_+,\\
[\mathbf{P}_-,\mathbf{T}_+]=\mathbf{J}_-,\quad [\mathbf{P}_-,\mathbf{T}_-]=0,\quad [\mathbf{P}_-,\mathbf{T}_0]=1/2\mathbf{P}_-,\\
[\mathbf{P}_0,\mathbf{T}_+]=1/2\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{P}_0,\mathbf{T}_-]=-1/2\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{P}_0,\mathbf{T}_0]=0,\\
[\mathbf{Q}_+,\mathbf{S}_+]=0,\quad [\mathbf{Q}_+,\mathbf{S}_-]=-\mathbf{J}_-,\quad [\mathbf{Q}_+,\mathbf{S}_0]=-1/2\mathbf{Q}_+,\\
[\mathbf{Q}_-,\mathbf{S}_+]=\mathbf{J}_+,\quad [\mathbf{Q}_-,\mathbf{S}_-]=0,\quad [\mathbf{Q}_-,\mathbf{S}_0]=1/2\mathbf{Q}_-,\\
[\mathbf{Q}_0,\mathbf{S}_+]=1/2\mathbf{S}_+,\quad [\mathbf{Q}_0,\mathbf{S}_-]=-1/2\mathbf{S}_-,\quad [\mathbf{Q}_0,\mathbf{S}_0]=0,\\
[\mathbf{Q}_+,\mathbf{T}_+]=0,\quad [\mathbf{Q}_+,\mathbf{T}_-]=\mathbf{K}_+,\quad [\mathbf{Q}_+,\mathbf{T}_0]=-1/2\mathbf{Q}_+,\\
[\mathbf{Q}_-,\mathbf{T}_+]=-\mathbf{K}_-,\quad [\mathbf{Q}_-,\mathbf{T}_-]=0,\quad [\mathbf{Q}_-,\mathbf{T}_0]=1/2\mathbf{Q}_-,\\
[\mathbf{Q}_0,\mathbf{T}_+]=1/2\mathbf{T}_+,\quad [\mathbf{Q}_0,\mathbf{T}_-]=-1/2\mathbf{T}_-,\quad [\mathbf{Q}_0,\mathbf{T}_0]=0,\\
[\mathbf{S}_i,\mathbf{T}_j]=0\quad (i,j=+,-,0).
\end{gathered}
$$

Рассмотрим специальное представление конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ аналогичное представлению ван дер Вардена (5) для группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Это *локальное* представление группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ непосредственно связано с представлением Фока для подгруппы $\mathrm{SO}(4)$ (см. приложение A). По сути это представление является расширением представления Фока для $\mathrm{SO}(4)$ до унитарного представления конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ в *пространстве Фока* $\mathfrak{F}$ с помощью базиса (A.2). Используя генераторы (8) комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{J}_-|j,\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j+\sigma)(j-\sigma+1)}|j,\sigma-1,\tau\rangle,\\
&\mathbf{J}_+|j,\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}|j,\sigma+1,\tau\rangle,\\
&\mathbf{J}_3|j,\sigma,\tau\rangle=\sigma|j,\sigma,\tau\rangle,\\
&\mathbf{K}_-|j,\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j+\tau)(j-\tau+1)}|j,\sigma,\tau-1\rangle,\\
&\mathbf{K}_+|j,\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j-\tau)(j+\tau+1)}|j,\sigma,\tau+1\rangle,\\
&\mathbf{K}_3|j,\sigma,\tau\rangle=\tau|j,\sigma,\tau\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_-|j,\sigma,\tau\rangle=-i\sqrt{(j+\sigma)(j-\tau)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{P}_+|j,\sigma,\tau\rangle=i\sqrt{(j-\tau+1)(j+\sigma+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{P}_0|j,\sigma,\tau\rangle=\left(j+\frac{\sigma-\tau+1}{2}\right)\sigma\,|j,\sigma,\tau\rangle,\\
&\mathbf{Q}_-|j,\sigma,\tau\rangle=i\sqrt{(j+\tau)(j-\sigma)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{Q}_+|j,\sigma,\tau\rangle=-i\sqrt{(j-\sigma+1)(j+\tau+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathbf{Q}_0|j,\sigma,\tau\rangle=\left(j-\frac{\sigma-\tau-1}{2}\right)|j,\sigma,\tau\rangle,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{S}_-|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j+\sigma)(j+\tau)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathsf{S}_+|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j+\tau+1)(j+\sigma+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathsf{S}_0|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j+\frac{\sigma+\tau+1}{2}\right)\sigma\left|j,\sigma,\tau\right\rangle,\\
&\mathsf{T}_-|j,\sigma,\tau\rangle = -i\sqrt{(j-\tau)(j-\sigma)}\left|j-\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathsf{T}_+|j,\sigma,\tau\rangle = i\sqrt{(j-\sigma+1)(j-\tau+1)}\left|j+\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\tau-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
&\mathsf{T}_0|j,\sigma,\tau\rangle = \left(j-\frac{\sigma+\tau-1}{2}\right)\left|j,\sigma,\tau\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Формулы (9) задают унитарное представление конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$ в пространстве Фока $\mathfrak{F}$. В число формул (9) входят формулы для J_k, K_k, задающие представления Φ_n в подпространствах $\mathfrak{F}_n$ (см. (A.1), где $j_1=j_2=j$) и тем самым представление Фока Φ на подгруппе $\mathrm{SO}(4)$. Более того, при ограничении $\mathrm{SO}_0(2,4)$ на подгруппу $\mathrm{SO}_0(1,3)$ (группу Лоренца) получим представление ван дер Вардена (5), задаваемое генераторами X_k, Y_k, что и доказывает сходство комплексных оболочек групповых алгебр $\mathfrak{so}(2,4)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Представление, задаваемое формулами (9), называется *расширением F^+ представления Фока на конформную группу* [25]. Это представление является базой теоретико-группового описания периодической системы элементов [23–25]. В п. 4 представление F^+ будет использовано для построения конкретной реализации операторной алгебры $\pi(H)$ в рамках конструкции ГНС.

4. Аксиомы нелокального подхода

Согласно концепции Гейзенберга-Фока реальность имеет двухуровневую структуру: *потенциальная реальность* и *актуальная реальность*. Гейзенберг утверждал, что любой квантовый микрообъект принадлежит обеим сторонам реальности: во-первых, потенциальной реальности как суперпозиция, и, во-вторых, актуальной реальности после редукции суперпозиции, т. е. измерения. Измерение есть локализация (актуализация) какого-либо состояния единой квантовой системы $\mathbf{U}$[12]. С целью аксиоматизировать двухуровневую структу-

[12]Уилер отмечал, что «никакой элементарный феномен не является феноменом, пока он не является наблюдаемым (регистрируемым) феноменом». Представление же о том, что квантовый микрообъект существует сам по себе до всякого измерения в виде некоей корпускулы (точечной или занимающей некоторую область $\mathcal{O}$ пространства-времени), так называемого «асимптотически стабильного центра локализации», является petitio principii. Более того, понятие множественности квантовых микрообъектов также является логической ошибкой. Не существует множественности квантовых микрообъектов, существует единая квантовая система $\mathbf{U}$, состояния которой идентифицируются как квантовые микрообъекты (элементарные частицы) в результате измерения. По сути здесь лежит (в рамках $\mathbf{U}$) и решение проблемы множественности и тождественности.

ру концепции Гейзенберга-Фока с позиции алгебраического подхода введём следующую систему аксиом[13].

A.I (Энергия и фундаментальная симметрия) *Единая квантовая система* U *на фундаментальном уровне характеризуется* C^**-алгеброй* $\mathfrak{A}$ *с единицей, состоящей из оператора энергии* H *и присоединённых к* H *генераторов группы фундаментальной симметрии* G_f*, образующих с* H *общую систему собственных функций.*

A.II (Состояния) *Физическое состояние* C^**-алгебры* $\mathfrak{A}$ *определяется циклическим вектором* $|\Phi\rangle$ *представления* π C^**-алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве* H_∞*:*

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi \mid \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle}.$$

Множество $PS(\mathfrak{A})$ *всех чистых состояний* C^**-алгебры* $\mathfrak{A}$ *совпадает с множеством всех состояний* $\omega_\Phi(H)$*, ассоциированных со всеми неприводимыми циклическими представлениями* π *алгебры* $\mathfrak{A}$*,* $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$ *(конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала).*

A.III (Пространство лучей) *Множество всех чистых состояний* $\omega_\Phi(H)$ *при выполнении условия* $\omega_\Phi(H) \geqslant 0$ *образует физическое гильбертово пространство* $\mathbf{H}_{\rm phys}$ *(в общем случае пространство* $\mathbf{H}_{\rm phys}$ *несепарабельно). Для каждого вектора состояния* $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$ *существует единичный луч* $\boldsymbol{\Psi} = e^{i\alpha}|\Psi\rangle$*, где* α *пробегает все вещественные числа и* $\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} = 1$*. Пространство лучей есть фактор-пространство* $\hat{H} = \mathbf{H}_{\rm phys}/S^1$*, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из* $\mathbf{H}_{\rm phys}$*. Все состояния единой квантовой системы* U *описываются единичными лучами.*

A.IV (Аксиома спектральности) *В* $\hat{H}$ *существует полная система состояний с неотрицательной энергией.*

A.V (Принцип суперпозиции) *Основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства* $\hat{H}$ *включает принцип суперпозиции квантовой теории, т. е. существует набор базисных состояний таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций.*

A.0→B.0 (Принцип редукции) *Редукция суперпозиции лучей (измерение) системы* U *описывается как переход от* $\boldsymbol{\Psi} = \sum_k c_k \boldsymbol{\Psi}_k$ *к* $\boldsymbol{\Psi}_1$*, т. е.*

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_k c_k \boldsymbol{\Psi}_k \;\longrightarrow\; \boldsymbol{\Psi}_1$$

[13]Эта система ни в коей мере не претендует на исчерпывающую полноту и законченность, являясь по сути первым наброском подобного рода. Аксиомы **A.I–A.IV** описывают фундаментальный уровень (квантовый домен), аксиомы **B.I** и **B.II** принадлежат к классическому (локальному) домену (актуальной реальности). Аксиома редукции **A.0→B.0** служит своего рода «границей между двумя мирами». Следует отметить, что все определения, так или иначе связанные с модусом потенции, имеют ярко выраженный апофатический характер: *нелокальный* квантовый субстрат, *несепарабельное* гильбертово пространство, *небулева* логика и т. д. В связи с этим вспоминается знаменитая фраза Витгенштейна: «О чем *невозможно* говорить, о том следует молчать» [42]. Однако средства абстрактно-алгебраического подхода, обладающие преимущественно *невербальным* инструментарием, позволяют перешагнуть эту границу.

с вероятностью $|c_1|^2$ *(в соответствии с правилами Борна).*

B.I (Локализация) *Каждому ограниченному открытому множеству* $\mathcal{O}$ *пространства-времени Минковского* $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ *сопоставлена* C^**-алгебра с единицей* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$*, являющаяся подалгеброй нелокальной алгебры* $\mathfrak{A}$ *и называемая алгеброй локальных наблюдаемых, ассоциированных с множеством* $\mathcal{O}$*; при этом алгебра* $\mathfrak{A}_{\rm loc}$ *является пополнением по норме объединения*

$$\mathfrak{A}_{\rm loc} = \bigcup_{\mathcal{O}\subset\mathcal{M}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}),$$

называемого алгеброй локальных наблюдаемых. Кроме того, выполнены следующие условия:
(а) изотония: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$*, то* $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$*;*
(б) локальная коммутативность: алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ *и* $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$*, ассоциированные с пространственноподобно разделёнными областями* $\mathcal{O}_1$ *и* $\mathcal{O}_2$*, коммутируют между собой.*

B.II (Пуанкаре-инвариантность) *В гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *определено унитарное представление* $(a,\Lambda) \to U(a,\Lambda)$ *спинорной группы Пуанкаре* $\mathfrak{P}_0$ *(непрерывное в слабой операторной топологии), задающее закон преобразования при трансляциях и преобразованиях Лоренца для локальных наблюдаемых*

$$A \longrightarrow U(a,\Lambda)AU(a,\Lambda)^{-1}$$

и векторов состояния

$$|\Phi\rangle \longrightarrow U(a,\Lambda)\,|\Phi\rangle$$

(здесь A *– произвольный элемент алгебры локальных наблюдаемых* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ *или алгебры фон Неймана* $\overline{\mathfrak{A}(\mathcal{O})}$*,* $|\Phi\rangle$ *– произвольный вектор из* $\mathcal{H}$*). При этом для алгебры* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ *выполняется условие ковариантности относительно собственной группы Пуанкаре:*

$$\alpha_{a,\Lambda}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\Lambda\mathcal{O} + a).$$

Генераторы представления $(a,\Lambda) \to U(a,\Lambda)$ *– операторы полного 4-импульса* p^μ *и четырёхмерного углового момента* $M^{\lambda\mu}$ *– являются самосопряжёнными операторами в* $\mathcal{H}$*, присоединёнными к алгебре локальных наблюдаемых фон Неймана* $\overline{\mathfrak{A}(\mathcal{O})}$*. Спектр оператора энергии-импульса* p *принадлежит замкнутому верхнему световому конусу* $\overline{V}^+$*.*

Пусть согласно аксиомы **A.I** к оператору энергии H присоединены генераторы (8) комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$ конформной группы. Тогда, согласно формулам (9), получаем расширение F^+ представления Фока на конформную группу. Нашей задачей является построение физического представления π операторной алгебры. Следуя [25], определим единую квантовую систему **U** как периодическую систему элементов. Представление F^+, задаваемое формулами (9), ещё недостаточно для описания периодической системы элементов. С этой целью необходимо включить четвёртое число Маделунга s (аналогичное спину), что приводит к группе

$$\mathrm{SO}(2,4) \otimes \mathrm{SU}(2). \tag{10}$$

Представление $F_s^+ = \varphi_2 \otimes F^+$ группы (10), где φ_2 – унитарное представление группы $\mathrm{SU}(2)$ в пространстве $C(2)$, уже удовлетворяет этому требованию (включению числа Маделунга s). Базис пространства $\mathfrak{F}^2 = C(2) \otimes \mathfrak{F}$ представления F_s^+ (базис Румера-Фета) имеет вид

$$|n, l, m, s\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots;\ l = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l;\ s = -1/2, 1/2, \quad (11)$$

Здесь n, l, m – квантовые числа конформной группы.

Конкретная реализация операторной алгебры с использованием представления F_s^+ определяется следующим образом (ограниченные рамки статьи не позволяют подробно рассмотреть это построение). Перейдём от группы $\mathrm{SO}(2,4)$ к её универсальной накрывающей $\mathrm{SU}(2,2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2,4)$ (см. приложение Б), что означает переход к $\mathrm{SU}(2,2) \otimes \mathrm{SU}(2)$, тогда твисторы $\mathsf{Z}^\alpha = (\boldsymbol{\xi}^\alpha, \boldsymbol{\xi}_{\dot{\alpha}})$ являются элементами минимального левого идеала алгебры $C\!\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$, где справедлива следующая факторизация: $\boldsymbol{\xi}^\alpha = \boldsymbol{\xi}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \sum \boldsymbol{\xi}^{\alpha_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{\alpha_k}$. Следовательно, каждому твистору Z^α можно сопоставить пару циклических векторов $\pi(H) \mid \Phi\rangle$, $\dot{\pi}(H) \mid \Phi\rangle$ конструкции ГНС, где $|\Phi\rangle \in \mathsf{H}_\infty$, и тем самым определить циклические представления (чистые состояния) системы $\mathbf{U}$. Перенос морфизмов спинорной структуры на твисторную структуру позволяет далее продолжить «одевание» операторной алгебры, т. е. определить заряженные и нейтральные состояния, а также дискретные симметрии. В этом случае векторы состояния физического гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$ изображают атомы различных элементов периодической системы Менделеева[14], понимаемой теперь как единая квантовая система $\mathbf{U}$.

[14]При ограничении группы $\mathrm{SO}(2,4) \otimes \mathrm{SU}(2)$ на подгруппу $\mathrm{SO}_0(1,3)$ получаем редукцию представления F_s^+ на представление ван дер Вардена W, т. е. редукцию $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_W$. В рамках квантовой подсистемы $\mathbf{U}_W$ векторы состояния пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{phys}}$ изображают элементарные частицы (см. [18, 43–46]). Согласно известному высказыванию Вайскопфа ядерная физика и физика элементарных частиц — это не две разные науки, а единая наука. В данном случае квантовая система $\mathbf{U}$ представляет собой более высокий уровень организации материи (более сложная симметрия) относительно своей подсистемы $\mathbf{U}_W$.

Приложение A: Группа $\mathrm{SO}(4)$ и представление Фока

Как известно, группа $\mathrm{SO}(4)$ является максимальной компактной подгруппой конформной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$. $\mathrm{SO}(4)$ соответствует базисным элементам $\mathbf{J}=(\mathsf{J}_1,\mathsf{J}_2,\mathsf{J}_3)$ и $\mathbf{K}=(\mathsf{K}_1,\mathsf{K}_2,\mathsf{K}_3)$ алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$:

$$[\mathsf{J}_k,\mathsf{J}_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{J}_m,\quad [\mathsf{J}_k,\mathsf{K}_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{K}_m,\quad [\mathsf{K}_k,\mathsf{K}_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{J}_m.$$

Вводя линейные комбинации $\mathsf{V}=(\mathsf{J}+\mathsf{K})/2$ и $\mathsf{V}'=(\mathsf{J}-\mathsf{K})/2$, получим

$$[\mathsf{V}_k,\mathsf{V}_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{V}_m,\quad [\mathsf{V}'_k,\mathsf{V}'_l]=i\varepsilon_{klm}\mathsf{V}'_m.$$

Генераторы V и V' образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Это значит, что группа $\mathrm{SO}(4)$ изоморфна произведению $\mathrm{SO}(3)\otimes\mathrm{SO}(3)$[15].

Универсальным накрытием группы вращений $\mathrm{SO}(4)$ четырёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ является спинорная группа

$$\mathbf{Spin}(4)\simeq\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}:\ \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=1\right\}=\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2).$$

Пусть $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{J}}$ и $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{K}}$ – подгруппы $\mathrm{SO}(4)$ с генераторами соответственно J_k и K_k $(k=1,2,3)$, тогда каждое неприводимое представление T группы $\mathrm{SO}(4)$ имеет следующее строение: пространство $\mathfrak{R}$ представления T есть тензорное произведение пространств $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$, в которых заданы неприводимые представления D_{j_1} и D_{j_2} подгрупп $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{J}}$ и $\mathrm{SO}(3)_{\mathbf{K}}$ размерностей $2j_1+1$ и $2j_2+1$. Таким образом, размерность представления T равна $(2j_1+1)(2j_2+1)$, где j_1, j_2 – целые или полуцелые числа. Действие операторов алгебры Ли J_k, K_k на базисные векторы задаётся формулами:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{J}_-|\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j_1+\sigma)(j_1-\sigma+1)}|\sigma-1,\tau\rangle,\\
&\mathsf{J}_+|\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j_1-\sigma)(j_1+\sigma+1)}|\sigma+1,\tau\rangle,\\
&\mathsf{J}_3|\sigma,\tau\rangle=\sigma|\sigma,\tau\rangle,\\
&\mathsf{K}_-|\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j_2+\tau)(j_2-\tau+1)}|\sigma,\tau-1\rangle,\\
&\mathsf{K}_+|\sigma,\tau\rangle=\sqrt{(j_2-\tau)(j_2+\tau+1)}|\sigma,\tau+1\rangle,\\
&\mathsf{K}_3|\sigma,\tau\rangle=\tau|\sigma,\tau\rangle.
\end{aligned}\tag{A.1}$$

Данное представление группы $\mathrm{SO}(4)$, обозначаемое через $D_{j_1j_2}$, неприводимо и унитарно.

Строение представления Фока Φ группы $\mathrm{SO}(4)$ задаётся разложением на неприводимые слагаемые Φ_n в пространствах $\mathfrak{F}_n$. Как известно [25], неприводимое представление Φ_n при редукции по подгруппе $\mathrm{SO}(3)$ разлагается в сумму неприводимых представлений группы $\mathrm{SO}(3)$ размерностей $1,\,3,\,\ldots,\,2n-1$.

[15]Такое положение вещей выражают следующим определением: группа $\mathrm{SO}(4)$ *локально* разлагается в прямое произведение подгрупп $\mathrm{SO}(3)$. *В целом* (т. е. без предположения, что все матрицы близки к единичной) это разложение неоднозначно. $\mathrm{SO}(4)$ – единственная из ортогональных групп $\mathrm{SO}(n)$, допускающая такое локальное разложение.

В виду описанного выше строения неприводимых представлений группы $\mathrm{SO}(4)$, наименьшая размерность 1 должна быть равна $2|j_1 - j_2| + 1$, откуда вытекает $j_1 = j_2$. Следовательно, представление Φ_n имеет вид $D_{j_1 j_2}$, а поскольку для наибольшей размерности должно быть $2n - 1 = 2(j_1 + j_2) + 1 = 4j + 1$, то $j = (n-1)/2$. Таким образом, строение представления Фока имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \ldots \oplus \Phi_n \oplus \ldots, \quad \text{где } \Phi_n = D_{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}.$$

Тем самым в каждом пространстве $\mathfrak{F}_n$ построен ортонормированный базис $|j, \sigma, \tau\rangle$, где $j = (n-1)/2$. Все эти базисы вместе образуют ортонормированный базис пространства Фока $\mathfrak{F}$:

$$|j, \sigma, \tau\rangle \quad (j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots; \\ \sigma = -j, -j+1, \ldots, j-1, j;\ \tau = -j, -j+1, \ldots, j-1, j), \quad (\text{A}.2)$$

в котором алгебра Ли группы $\mathrm{SO}(4)$ действует по формулам (A.1) с $j_1 = j_2 = j$.

Приложение Б: Твисторная структура и группа $\mathrm{SU}(2,2)$

Главная идея твисторной программы Пенроуза [3,4] заключается в представлении классического пространства-времени как некоторой вторичной конструкции, получаемой из более первичных понятий. В качестве более первичных понятий мы имеем здесь двухкомпонентные (комплексные) спиноры, более того, пары двухкомпонентных спиноров. В программе Пенроуза они называются *твисторами*.

Твистор $\mathbf{Z}^\alpha$ определяется посредством пары двухкомпонентных спиноров: спинора $\boldsymbol{\omega}^s$ и ковариантного спинора $\boldsymbol{\pi}_{\dot{s}}$ из сопряжённого пространства, т. е. $\mathbf{Z}^\alpha = (\boldsymbol{\omega}^s, \boldsymbol{\pi}_{\dot{s}})$. В теории твисторов момент ($\vec{\omega}$) и импульс ($\vec{\pi}$) частицы строятся из величин $\boldsymbol{\omega}^s$ и $\boldsymbol{\pi}_{\dot{s}}$. Одним из важнейших аспектов этой теории является *переход от твисторов к координатному пространству-времени*. Пенроуз описывает этот переход с помощью так называемого *базисного соотношения теории твисторов*

$$\boldsymbol{\omega}^s = i x^{s\dot{r}} \boldsymbol{\pi}_{\dot{s}}, \quad (\text{Б}.1)$$

где $x^{s\dot{r}}$ – смешанный спинтензор второго ранга. В более подробной записи это соотношение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{\dot{1}} \\ \pi_{\dot{2}} \end{bmatrix}.$$

Из (Б.1) непосредственно следует, что точки пространства-времени $\mathbb{R}^{1,3}$ восстанавливаются над твисторным пространством $\mathbb{C}^4$ (эти точки соответствуют линейным подпространствам твисторного пространства $\mathbb{C}^4$), являясь при этом вторичной (производной) конструкцией относительно твисторов.

Фактически твисторы могут быть определены как «редуцированные спиноры» для псевдоунитарной группы $\mathrm{SO}_0(2,4)$, действующей в шестимерном пространстве с сигнатурой $(+,+,-,-,-,-)$. Эти редуцированные спиноры задаются следующим образом. Общие спиноры являются элементами минимального левого идеала *конформной алгебры* $C\!\ell_{2,4}$

$$I_{2,4}=C\!\ell_{2,4}f_{24}=C\!\ell_{2,4}\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_{15})\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_{26}).$$

Редуцированные спиноры (твисторы) формулируются в рамках чётной подалгебры $C\!\ell^+_{2,4}\simeq C\!\ell_{4,1}$ (*алгебра де Ситтера*). Минимальный левый идеал алгебры $C\!\ell_{4,1}\simeq\mathbb{C}_4$ задаётся следующим выражением [47]

$$I_{4,1}=C\!\ell_{4,1}f_{4,1}=C\!\ell_{4,1}\frac{1}{2}(1+\mathbf{e}_0)\frac{1}{2}(1+i\mathbf{e}_{12}).$$

Следовательно, после редукции $I_{2,4}\rightarrow I_{4,1}$, генерируемой изоморфизмом $C\!\ell^+_{2,4}\simeq C\!\ell_{4,1}$, мы видим, что твисторы Z^α являются элементами идеала $I_{4,1}$, который приводит к группе $\mathrm{SU}(2,2)\simeq\mathbf{Spin}_+(2,4)\in C\!\ell^+_{2,4}$ (см. далее (Б.2) и (Б.3)). Действительно, рассмотрим алгебру $C\!\ell_{2,4}$, ассоциированную с шестимерным псевдоевклидовым пространством $\mathbb{R}^{2,4}$. Универсальное накрытие $\mathbf{Spin}_+(2,4)$ группы вращений $\mathrm{SO}_0(2,4)$ пространства $\mathbb{R}^{2,4}$ описывается в рамках чётной подалгебры $C\!\ell^+_{2,4}$. Алгебра $C\!\ell_{2,4}$ имеет тип $p-q\equiv 6 \pmod 8$, следовательно, согласно $C\!\ell^+_{p,q}\simeq C\!\ell_{q,p-1}$ имеем $C\!\ell^+_{2,4}\simeq C\!\ell_{4,1}$, где $C\!\ell_{4,1}$ – алгебра де Ситтера, ассоциированная с пространством $\mathbb{R}^{4,1}$. В свою очередь алгебра $C\!\ell_{4,1}$ имеет тип $p-q\equiv 3 \pmod 8$ и, следовательно, имеется изоморфизм $C\!\ell_{4,1}\simeq\mathbb{C}_4$, где $\mathbb{C}_4$ – *алгебра Дирака*. Алгебра $\mathbb{C}_4$ является комплексификацией алгебры пространства-времени $\mathbb{C}_4\simeq\mathbb{C}\otimes C\!\ell_{1,3}$. Далее, алгебра $C\!\ell_{1,3}$ допускает следующую факторизацию: $C\!\ell_{1,3}\simeq C\!\ell_{1,1}\otimes C\!\ell_{0,2}$. Отсюда непосредственно следует, что $C\!\ell_{1,3}\simeq\mathbb{C}\otimes C\!\ell_{1,1}\otimes C\!\ell_{0,2}$. Таким образом,

$$\mathbf{Spin}_+(2,4)=\left\{s\in\mathbb{C}\otimes C\!\ell_{1,1}\otimes C\!\ell_{0,2}\mid N(s)=1\right\}. \tag{Б.2}$$

С другой стороны, в силу изоморфизма $C\!\ell_{1,3}\simeq C\!\ell_{1,1}\otimes C\!\ell_{0,2}$ общий элемент алгебры $C\!\ell_{1,3}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{A}_{C\!\ell_{1,3}}=C\!\ell^0_{1,1}\mathbf{e}_0+C\!\ell^1_{1,1}\phi+C\!\ell^2_{1,1}\psi+C\!\ell^3_{1,1}\phi\psi,$$

где $\phi=\mathbf{e}_{123}$, $\psi=\mathbf{e}_{124}$ – кватернионные единицы. Следовательно,

$$\mathbf{Spin}_+(2,4)=$$
$$=\left\{s\in\begin{bmatrix}\mathbb{C}\otimes C\!\ell^0_{1,1}-i\mathbb{C}\otimes C\!\ell^3_{1,1} & -\mathbb{C}\otimes C\!\ell^1_{1,1}+i\mathbb{C}\otimes C\!\ell^2_{1,1}\\ \mathbb{C}\otimes C\!\ell^1_{1,1}+i\mathbb{C}\otimes C\!\ell^2_{1,1} & \mathbb{C}\otimes C\!\ell^0_{1,1}+i\mathbb{C}\otimes C\!\ell^3_{1,1}\end{bmatrix}\middle|\; N(s)=1\right\}. \tag{Б.3}$$

Отображения пространства $\mathbb{R}^{1,3}$, генерируемые группой $\mathrm{SO}_0(2,4)$, индуцируют линейные преобразования твисторного пространства $\mathbb{C}^4$, сохраняющие форму $\mathsf{Z}^\alpha\overline{\mathsf{Z}}_\alpha$ с сигнатурой $(+,+,-,-)$. Отсюда следует, что соответствующей группой в твисторном пространстве является $\mathrm{SU}(2,2)$ (группа псевдоунитарных унимодулярных 4×4 матриц, см. (Б.3)):

$$\mathrm{SU}(2,2)=\left\{\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_4:\ \det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=1\right\}\simeq\mathbf{Spin}_+(2,4).$$

Литература

1. Chew G.F. The dubious role of the space-time continuum in microscopic physics // Science Progress. 1963. V. 51, № 204. P. 529–539.
2. Владимиров Ю.С. Проблема вывода классического пространства-времени из закономерностей физики микромира // Метафизика. 2015. № 2(16). С. 21-27.
3. Penrose R. The twistor programme // Rep. Math. Phys. 1977. V. 12. P. 65–76.
4. Penrose R., MacCallum M.A.H. Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time // Physics Reports. 1972. V. 6. P. 241–316.
5. Joos E., Zeh H.D., Kiefer C., Giulini D.J.W., Kupsch J., Stamatescu I.-O. Decoherence and Appearence of a Classical World in Quantum Theory. Springer-Verlag, 2003.
6. Zurek W.H. Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 715. arXiv:quant-ph/0105127 (2001).
7. Zurek W.H. Decoherence and the transition from quantum to classical – REVISITED. arXiv:quant-ph/0306072 (2003).
8. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
9. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
10. Фок В.А. Об интерпретации квантовой механики // УФН. 1957. Т. 62. С. 461–474.
11. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М. : Наука, 1964.
12. Jammer M. The Philosophy of Quantum Mechanics. Jhon Wiley & Sons, 1974.
13. Gelfand I., Neumark M. On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1943. V. 12(54). P. 197–217.
14. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 930–948.
15. Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. М. : Мир, 1968.
16. Нелинейная квантовая теория поля. М. : ИЛ, 1959.
17. Варламов В.В. Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 5–23.
18. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 11–28.
19. Numbu Y. An Empirical Mass Spectrum of Elementary Particles // Prog. Theor. Phys. 1952. V. 7. P. 595-596.
20. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805.
21. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191.
22. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
23. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // ТМФ. 1971. Т. 9. С. 203–209.
24. Фет А.И. Конформная симметрия химических элементов // ТМФ. 1975. Т. 22. С. 323–334.
25. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.

26. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986.
27. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987.
28. Buchholz D., Haag R. The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3674–3697.
29. Бройль Л. Революция в физике // Избранные научные труды. Т. 2: Квантовая механика и теория света: работы 1934-1951 годов. М.: МГУП, 2011. С. 177.
30. Segal I. A class of operator algebras which are determined by groups // Duke Math. J. 1951. V. 18. P. 221–265.
31. Ryder L. Quantum Field Theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.
32. Ahluwalia D.V., Ernst D.J. $(j,0)\oplus(0,j)$ covariant spinors and causal propagators based on Weinberg formalism // Int. J. Mod. Phys. E. 1993. V. 2. P. 397–422.
33. Dvoeglazov V.V. Extra Dirac equations // Nuovo Cimento B. 1996. V. 111. P. 483–496.
34. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton : Princeton University Press, 1986.
35. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Физматлит, 1958.
36. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. М. : Физматлит, 1958.
37. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М. : Наука, 1969.
38. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М. : ИЛ, 1963.
39. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованные поля. М. : Наука, 1977.
40. Ван дер Варден Б.Л. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков : ОНТИ, 1938.
41. Yao Tsu. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2) // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 1931–1954.
42. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М. : Наука, 2009.
43. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576.
44. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
45. Варламов В.В. Комплексный момент и спин-зарядовое гильбертово пространство // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 5–22.
46. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. P. 5008–5045.
47. Varlamov V.V. Generalized Weierstrass representation for surfaces in terms of Dirac-Hestenes spinor field // J. Geometry and Physics. 2000. V. 32. P. 241–251.

ABOUT AXIOM SYSTEM OF NONLOCAL QUANTUM THEORY

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. An axiom system of nonlocal quantum theory is defined within Heisenberg-Fock conception. A notion of single quantum system lies in the ground of axiomatics. A generating kernel of this system is an abstract C^*-algebra. It is shown that different concrete realizations of the operator algebra depend on the structure of generators of the group of a fundamental symmetry (these generators are joined to energy operator). In the case of generators of the conformal group, we have a state spectrum defined within Rumer-Fet representation, that leads to a group-theoretical description of Mendeleev periodic system.

Keywords: single quantum system, Heisenberg-Fock conception, operator algebra, complex envelopes, conformal group, Mendeleev periodic system.

Дата поступления в редакцию: 20.07.2017