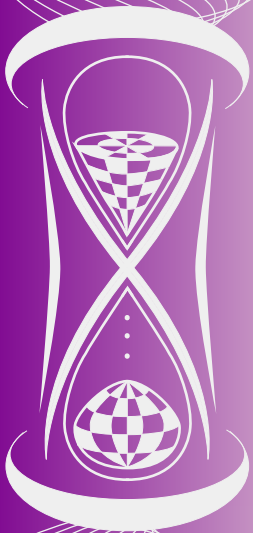


ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 4(44)
2017**



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 4(44)

Омск
2017

Математические структуры и моделирование. — Омск : Омский государственный университет, 2017. — № 4(44). — 144 с.
ISSN 2222-8772 (print)
ISSN 2222-8799 (online)

Редакционная коллегия

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- С. В. Белим** д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой информационной безопасности, проректор по научной работе, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневарттовского государственного университета.
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- В. А. Ерошенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** д.т.н., профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** д.т.н., профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- А. В. Плетюхов** д.ф.-м.н., профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** д.ф.-м.н., профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-57908 от 28 апреля 2014 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Россия, Омская обл., г. Омск, пр. Мира д. 55А.

Дата выхода в свет: 15.12.2017.

Тираж 100 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblat für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- В.В. Варламов. *О системе аксиом нелокальной квантовой теории* 5
- А.Г. Гринь. *О притяжении симметрических функций от зависимых величин к нормальному закону* 26
- И.А. Еганова, В. Каллис. *Основание Мира Минковского как математической структуры: к ответу на вопрос Римана* 33
- А.Н. Кабанов. *Верхний гиперцентральный ряд группы унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница* 49
- Н.В. Михайлова. *Проблемно-ориентированное обоснование современного математического анализа* 53
- В.И. Струнин, В.В. Шкуркин, А.А. Ляхов. *Программно-аппаратный комплекс для зондовой диагностики низкотемпературной плазмы* 60
- R. Martinez, V. Kreinovich. *Does the Universe Really Expand Faster than the Speed of Light: Kinematic Analysis Based on Special Relativity and Copernican Principle* 66

Прикладная математика и моделирование

- С.Л. Дерябин, А.С. Кирьянова. *Математическое моделирование при учёте силы тяжести течений жидкости, возникающих в результате разрушения плотины* 73
- А.Б. Крохалева, В.М. Белов. *Человеческий фактор в системе социально значимой деятельности* 86
- А.А. Сеньковская, И.И. Фураева. *Моделирование процесса распределения учебной нагрузки кафедры с использованием жадного алгоритма* 101
- A.M. Pownuk, O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Towards Decision Making under General Uncertainty* 110

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



F. Zapata, O. Kosheleva, V. Kreinovich. *Why Stable Teams Are More Efficient in Education*121

O. Kosheleva, V. Kreinovich. *The Onsager Conjecture: A Pedagogical Explanation*126

Информатика и вычислительная техника

В.А. Шовин. *Эвристическая сеть для программы ChatBot*131

L. Brunoni, O. Beaudet-Labrecque. *Smart Contracts and Cybercrime: a Game Changer?*136

О СИСТЕМЕ АКСИОМ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Система аксиом нелокальной квантовой теории определяется в рамках концепции Гейзенберга-Фока. В основании аксиоматики лежит понятие единой квантовой системы, генерирующим ядром которой является абстрактная C^* -алгебра. Показывается, что различные конкретные реализации операторной алгебры зависят от структуры присоединённых к оператору энергии генераторов группы фундаментальной симметрии. В случае генераторов комплексной оболочки групповой алгебры конформной группы спектр состояний единой квантовой системы задаётся в рамках представления Румера-Фета, что приводит к теоретико-групповому описанию периодической системы элементов Менделеева.

Ключевые слова: единая квантовая система, концепция Гейзенберга-Фока, операторная алгебра, комплексные оболочки, конформная группа, периодическая система элементов.

1. Введение

Проблема объединения квантовой механики и специальной теории относительности возникла сразу же после создания нерелятивистской квантовой механики в работах Гейзенберга, Шрёдингера, Борна, Дирака и др. Однако это объединение произошло не на равных основаниях (на это в своё время указывал де Бройль), а путём построения релятивистской квантовой механики (квантовой теории поля) на фоне классического пространства-времени, справедливого, как известно, лишь для описания макроявлений. Как следствие, пространственно-временной континуум приобрёл статус фундаментального уровня, своего рода мировой арены, на которой разворачиваются все процессы микромира. Против такой точки зрения резко возражал Дж. Чью: «... пространство и время в современной микроскопической физике играют примерно ту же роль, что и понятие эфира в макроскопической физике XIX века. Возможно, нам никогда не удастся продемонстрировать несуществование пространственно-временного континуума, однако, все большее число физиков приходит к мысли, что дальнейшее существенное продвижение в теории предполагает отказ от ненаблюдаемого континуума. Мы должны пытаться строить теорию в терминах лишь измеримых величин» [1]. С другой стороны, вместо отказа от континуума Ю.С. Владимиров ставит как одну из основных

проблем современной фундаментальной теоретической физики «... проблему вывода классических пространственно-временных представлений из понятий и закономерностей физики микромира, вместо того чтобы продолжать подкладывать классическое пространство-время под все теоретические построения: написания лагранжианов, дифференциальных уравнений и т. д. Среди исходных положений физики микромира, в первую очередь, следует иметь в виду понятия и закономерности квантовой теории» [2]¹.

Откуда же возникло это стремление свести пространственно-временной континуум на эмерджентный уровень или вовсе отказаться от него? Вот что пишет Гейзенберг: «... уже первые работы в этой области выявили очень серьёзные трудности в области, где квантовую теорию пытались объединить со специальной теорией относительности ... но более точное исследование показало, что обе теории вступают в определённом пункте в конфликт, в результате чего и проистекают все дальнейшие трудности ... действие на большие расстояния так, как оно выступает в случае сил тяготения в ньютоновской механике, оказалось несовместимым со специальной теорией относительности. Новая теория должна была заменить такое действие «близкодействием», то есть передачей силы из одной точки только непосредственно соседней точке ... Поэтому структура пространства и времени, выражаемая специальной теорией относительности, предельно резко ограничивает область одновременности, в которой не может быть передано никакое воздействие, от других областей, в которых непосредственное воздействие одного процесса на другой может иметь место. С другой стороны, соотношение неопределённостей квантовой теории устанавливает жёсткую границу точности, с которой могут быть одновременно измерены координаты и импульсы или моменты времени и энергии. Так как предельно резкая граница означает бесконечную точность фиксации положения в пространстве и во времени, то соответствующие импульсы и энергии должны быть полностью неопределёнными, то есть с подавляющей вероятностью должны выступить на первый план процессы даже со сколь угодно большими импульсами и энергиями. Поэтому всякая теория, которая одновременно выполняет требования специальной теории относительности и квантовой теории, ведёт, оказывается, к математическим противоречиям, а именно к расходимостям в области очень больших энергий и импульсов» [8, с. 98–99]. Таким образом, рождённый от брака (не на равных основаниях) между СТО и КМ «гибрид» (квантовая теория поля), был наделён изначально «неизлечимой родовой болезнью». Все попытки «излечения» (перенормировки) не имели концептуальный характер, а являлись,

¹ Следует отметить, что в программе Пенроуза [3, 4] твисторная структура понимается как подлежащая (более фундаментальная) структура по отношению к пространству-времени Минковского. Другими словами, пространственно-временной континуум не является фундаментальной субстанцией в твисторном подходе, а представляется полностью производной конструкцией, генерируемой подлежащей твисторной структурой. Параллельно с твисторным подходом, теория декогеренции [5] утверждает, что в основании реальности мы имеем *нелокальный квантовый субстрат* (квантовый домен), а весь видимый мир (классический домен \equiv пространственно-временной континуум) возникает из квантового домена в результате процесса декогеренции [6, 7]. Оба направления (твисторная программа и теория декогеренции) рассматривают классическое пространство-время как *эмерджентный* уровень.

по меткому выражению Фейнмана, «заметанием мусора под ковёр».

Очевидно, что объединение СТО и КМ не лежит на пути «релятивизации» квантовой механики или «квантования» теории относительности. Каждая из этих теорий описывает свой слой реальности: микромир (КМ) и макромир (СТО). Эти два мира не изолированы друг от друга, а соприкасаются по некоторой промежуточной границе, переходя через которую микромир (потенция) превращается (актуализируется) в макромир. В настоящей статье предпринимается попытка аксиоматически описать эту двухуровневую структуру реальности² в рамках концепции Гейзенберга-Фока [9, 10]. Исходным пунктом исследования является определение основных структурных составляющих формализма. Согласно фон Нейману [11], примитивными (неопределяемыми) понятиями формализма квантовой механики являются *система, наблюдаемая и состояние*³. Основным неопределяемым понятием является *единая квантовая система* \mathbf{U} . В качестве наблюдаемой берётся C^* -алгебра⁴, состоящая из *оператора энергии* H и присоединённых к H генераторов *группы фундаментальной симметрии* G_f . Состояния единой квантовой системы \mathbf{U} формируются в рамках конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала [13, 14], т. е. как *циклические представления* операторной алгебры. Получающийся в результате спектр состояний во многом подобен *спектру материи* Гейзенберга, в котором состояния (частицы) определяются как флуктуации нелинейного спинорного поля⁵. Главным отличием от подхода Гейзенберга является представление о том, что генератором состояний

²В связи с этим интересно отметить следующую аналогию. Физики, отрицающие двухуровневую (двухслойную) концепцию Гейзенберга-Фока, напоминают собой психотерапевта, который категорически не признает фундаментальную роль *подсознания* (как будто бы и не было работ Фрейда и Юнга) во всех аспектах психофизиологии человека, ограничиваясь при этом одним только *сознанием*.

³Джеммер [12] рассматривает формализм фон Неймана как эталон полноты и математической строгости, сравнивая с ним далее все последующие интерпретации квантовой механики.

⁴Ирвинг Сигал, один из создателей теории C^* -алгебр, первым предложил использовать абстрактную C^* -алгебру в основании физической интерпретации КМ. Однако на тот момент (40–50 гг. XX века) эта идея не получила поддержки в среде квантовополевых теоретиков (главным образом в силу проблемы несчётного множества неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений).

⁵В основу теории Гейзенберга кладётся некоторое фундаментальное спинорное поле («пра-материя»), описываемое нелинейным уравнением [15, 16]

$$i\sigma^\nu \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^\nu} + l^2 \sigma^\nu : \chi(x) (\chi^*(x) \sigma_\nu \chi(x)) := 0.$$

Здесь l – произвольная константа размерности длины, полевой оператор $\chi(x)$ определяется как двухкомпонентный (вейлевский) спинор относительно преобразований Лоренца и как двухкомпонентный спинор в изопространстве, $\sigma^\nu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ – матрицы Паули. Символ $:$ во втором члене относится к определению произведения трёх полевых операторов в одной пространственно-временной точке («виковское произведение»). Гейзенберг полагал, что возбуждённые состояния поля $\chi(x)$ приводят к различным реально наблюдаемым частицам, составляющим спектр материи. Паули, доказавший инвариантность уравнения Гейзенберга относительно изоспиновой группы, на первоначальном этапе развития нелинейной спинорной теории был её активным сторонником. Однако впоследствии Паули подверг резкой критике теорию Гейзенберга и полностью отошел от этой проблематики (см. вступительную статью Иваненко в сборнике [16]).

системы \mathbf{U} является не «праматерия» Гейзенберга-Паули, а абстрактная C^* -алгебра (по Сигалу). В силу гибкости конструкции ГНС при каждой конкретной реализации операторной алгебры («одевании») получаем свой (соответствующий данной реализации) спектр состояний (спектр материи) системы \mathbf{U} . Так, в случае, когда присоединённые к H генераторы группы фундаментальной симметрии ($G_f = \text{SO}_0(1, 3)$ – группа Лоренца) являются генераторами комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, получаем линейно растущий спектр масс состояний («элементарных частиц») [17, 18]⁶. В этом случае «одевание» операторной алгебры и построение циклических представлений конструкции ГНС осуществляется в рамках спинорной структуры (заряженные, нейтральные, истинно нейтральные (майорановские) состояния и их дискретные симметрии задаются посредством морфизмов спинорной структуры, см. [20–22]). В п. 4 настоящей статьи в качестве группы фундаментальной симметрии рассматривается *конформная группа* ($G_f = \text{SO}_0(2, 4)$)⁷. В данном случае конкретная реализация операторной C^* -алгебры задаётся посредством присоединённых к H генераторов комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$ и твисторной структуры, ассоциированной с группой $\text{SU}(2, 2)$ (универсальное накрытие конформной группы). Комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$ приводит к представлению Румера-Фета F_s^+ для конформной группы. Представление F_s^+ является базой теоретико-группового описания периодической системы элементов [23–25]. Как известно, спинорная структура (СС) является подструктурой твисторной структуры (ТС), следовательно, все морфизмы СС переносятся на ТС. Итак, при данной конкретной реализации C^* -алгебры имеем спектр состояний системы \mathbf{U} , описывающей периодическую систему элементов Менделеева. При этом, в отличие от модели Бора, атомы всех элементов описываются как единая квантовая система⁸.

2. Аксиомы локальной квантовой теории

Как известно [26], существует два варианта локального алгебраического подхода: конкретный (или *теория Хаага-Араки*), в котором локальные алгебры являются алгебрами фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{O})$ в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} , и абстрактный (или *теория Хаага-Кастлера*), в котором локальные

⁶Линейно растущий спектр масс элементарных частиц был впервые отмечен Намбу [19] и впоследствии исследовался в работах Макгрегора, Палацци, Сидхарта и др. (см. библиографию в [18]).

⁷В некотором смысле это позволяет уйти от иллюзии «фундаментальности» группы Лоренца $\text{SO}_0(1, 3)$, описывающей, как известно, вращения четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

⁸Фет отмечал, что «... модель Бора не описывает атомы различных элементов как *единую* квантовую систему. В самом деле, понятие квантовой системы предполагает, что имеется гильбертово пространство, векторы которого изображают все возможные состояния системы, и что в этом пространстве задан гамильтониан, собственные векторы которого изображают стационарные состояния системы, – в данном случае такие состояния должны соответствовать атомам всех элементов. Такого описания нет в модели Бора ... тем более нет в модели Бора группы симметрии, операторы которой переводили бы друг в друга векторы состояния, соответствующие разным элементам» [25, с. 151].

алгебры являются абстрактными C^* -алгебрами $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Различие между этими двумя вариантами имеет значение лишь с конструктивной точки зрения. А именно, может случиться, что алгебра наблюдаемых построена раньше, чем выбрано её физическое представление π , тогда предпочтительнее абстрактно-алгебраическая точка зрения (теория Хаага-Кастлера). Когда же физическое представление π зафиксировано, то абстрактные C^* -алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ можно считать «конкретными» алгебрами фон Неймана $\pi(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ (локальные наблюдаемые, определённые в слабой операторной топологии физического представления). Придерживаясь [27], перечислим основные аксиомы локального алгебраического подхода.

A.I (Алгебра наблюдаемых) Физическая система характеризуется некоторой C^* -алгеброй \mathfrak{A} с единицей, эрмитовы элементы которой называются (ограниченными) наблюдаемыми. Значение функционала $\omega(A)$, где $\omega \in S(\mathfrak{A})$, $A = A^*$ есть среднее значение наблюдаемой A в состоянии ω .

A.II (Состояния) Множество физических состояний \mathfrak{S} (алгебры наблюдаемых \mathfrak{A}) совпадает с множеством всех состояний S_π , ассоциированным с представлением $\pi = \pi_{\text{phys}}$ (называемым физическим представлением) алгебры \mathfrak{A} в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{phys}}$ (называемом физическим пространством).

A.III (Пуанкаре-инвариантность) В физическом гильбертовом пространстве \mathcal{H} определено унитарное представление $(a, \Lambda) \rightarrow U(a, \Lambda)$ спинорной группы Пуанкаре \mathfrak{P}_0 (непрерывное в слабой операторной топологии), задающее закон преобразования при трансляциях и преобразованиях Лоренца для наблюдаемых

$$A \longrightarrow U(a, \Lambda)AU(a, \Lambda)^{-1}$$

и векторов состояния

$$|\Phi\rangle \longrightarrow U(a, \Lambda)|\Phi\rangle$$

(здесь A – произвольный элемент алгебры наблюдаемых \mathfrak{A} или алгебры наблюдаемых фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}}$, $|\Phi\rangle$ – произвольный вектор из \mathcal{H}). Генераторы этого представления – операторы полного 4-импульса p^μ и четырёхмерного углового момента $M^{\lambda\mu}$ – являются самосопряжёнными операторами в \mathcal{H} , присоединёнными к алгебре наблюдаемых фон Неймана.

A.IV (Спектральность) Спектр оператора энергии-импульса p принадлежит замкнутому верхнему световому конусу \overline{V}^{+9} .

A.V (Локализация) Каждому ограниченному открытому множеству \mathcal{O} пространства-времени Минковского $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ сопоставлена C^* -алгебра с единицей $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, являющаяся подалгеброй алгебры наблюдаемых \mathfrak{A} и называемая алгеброй (локальных) наблюдаемых, ассоциированных с множеством \mathcal{O} ; при этом алгебра \mathfrak{A} является пополнением по норме объединения

$$\mathfrak{A}_{\text{loc}} = \bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathcal{M}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}),$$

⁹Аксиому спектральности часто формулируют следующим образом: в \mathcal{H} существует полная система состояний с неотрицательной энергией.

называемого алгеброй локальных наблюдаемых. Кроме того, выполнены следующие условия:

(а) изотония: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$;

(б) ковариантность относительно собственной группы Пуанкаре:

$$\alpha_{a,\Lambda}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\Lambda\mathcal{O} + a);$$

(в) локальная коммутативность: алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ и $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$, ассоциированные с пространственноподобно разделёнными областями \mathcal{O}_1 и \mathcal{O}_2 , коммутируют между собой.

Семейство $\{\mathfrak{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathcal{M}}$ C^* -алгебр, удовлетворяющих условию изотонии, называют *сетью* C^* -алгебр над \mathcal{M} . По аналогии с классической физикой понятие поля в квантовой физике призвано реализовать идею близкодействия. Поэтому в системе аксиом локального алгебраического подхода появляется аксиома А.V.

В локальном алгебраическом подходе никогда не утверждалось, что система аксиом А.I–А.V является единственно возможной, и только она приводит к физически приемлемому описанию «релятивистских квантовых объектов». Что касается возможности появления принципиально новых аксиом, то следует отметить, что предпринимались неоднократные попытки постулировать аксиому корпускулярной интерпретации. В локальной квантовой теории поиск критерия корпускулярной интерпретации исходит из общей трактовки частицы как «асимптотически стабильного центра локализации». Однако, как отмечают Бухгольц и Хааг [28], до сих пор не найден адекватный способ математического выражения подобной концепции частицы.

Уже беглый взгляд на систему аксиом А.I–А.V показывает, что непосредственно к квантовой механике имеют отношение только первые две аксиомы, а все последующие аксиомы представляют собой пространственно-временной «фон», в который погружена («релятивизирована») квантовая механика¹⁰. С целью уйти от подобного рода совмещённой («гибридной») аксиоматики в п. 4 будет предпринята попытка аксиоматизации квантовой теории на базе концепции Гейзенберга-Фока.

3. Комплексные оболочки групповых алгебр

В этом параграфе рассмотрим комплексные оболочки групповых алгебр $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (группа Лоренца $SO_0(1, 3)$) и $\mathfrak{so}(2, 4)$ (конформная группа $SO_0(2, 4)$). Как известно, с комплексной оболочкой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ассоциирована *спинорная структура*. В свою очередь с комплексной оболочкой алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$ ассоциирована *твисторная структура*. Спинорная структура является подструктурой твисторной структуры. С другой стороны, как показал Сигал [30], алгебра Ли неоднородной группы Лоренца (т. е. группы Пуанкаре) может быть получена

¹⁰Образно говоря, бесконечномерное гильбертово пространство квантовой механики здесь втиснуто в прокрустово ложе пространственно-временного континуума. В связи с этим де Бройль писал: «... мы должны с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас всё время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит» [29].

деформацией из конформной алгебры Ли. В свою очередь конформная алгебра Ли является «жёсткой», т. е. не может быть получена деформированием другой алгебры Ли. В силу этого свойства конформная алгебра (алгебра некомпактной вещественной псевдоортогональной группы в шестимерном пространстве с сигнатурой $(-, -, -, -, +, +)$) имеет уникальный (завершённый) характер и занимает выделенное место среди других алгебр. В п. 4 при рассмотрении аксиом нелокального подхода в качестве группы фундаментальной симметрии будет взята конформная группа.

3.1. Комплексная оболочка групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и представление ван дер Вардена

Как известно, универсальное накрытие собственной группы Лоренца $SO_0(1, 3)$ (группа вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$) задаётся спинорной группой

$$\mathbf{Spin}_+(1, 3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2 : \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1 \right\} = SL(2, \mathbb{C}).$$

Пусть $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ – произвольное линейное представление собственной группы Лоренца $SO_0(1, 3)$ и пусть $A_i(t) = T_{a_i(t)}$ – инфинитезимальный оператор, соответствующий вращению $a_i(t) \in SO_0(1, 3)$. Аналогично пусть $B_i(t) = T_{b_i(t)}$, где $b_i(t) \in SO_0(1, 3)$ – гиперболическое вращение. Элементы A_i и B_i образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_3, & [A_2, A_3] &= A_1, & [A_3, A_1] &= A_2, \\ [B_1, B_2] &= -A_3, & [B_2, B_3] &= -A_1, & [B_3, B_1] &= -A_2, \\ [A_1, B_1] &= 0, & [A_2, B_2] &= 0, & [A_3, B_3] &= 0, \\ [A_1, B_2] &= B_3, & [A_1, B_3] &= -B_2, \\ [A_2, B_3] &= B_1, & [A_2, B_1] &= -B_3, \\ [A_3, B_1] &= B_2, & [A_3, B_2] &= -B_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обозначая $L_{23} = A_1$, $L_{31} = A_2$, $L_{12} = A_3$, а $L_{01} = B_1$, $L_{02} = B_2$, $L_{03} = B_3$, запишем соотношения (1) в более компактной форме:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] = g_{\mu\rho}L_{\lambda\nu} + g_{\nu\lambda}L_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} - g_{\mu\lambda}L_{\nu\rho}.$$

Перейдём к комплексной оболочке групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, определяя операторы

$$\begin{aligned} X_l &= \frac{1}{2}i(A_l + iB_l), & Y_l &= \frac{1}{2}i(A_l - iB_l), \\ & & (l &= 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Используя соотношения (1), находим

$$[X_k, X_l] = i\varepsilon_{klm}X_m, \quad [Y_l, Y_m] = i\varepsilon_{lmn}Y_n, \quad [X_l, Y_m] = 0. \quad (3)$$

Далее, вводя генераторы вида («повышающие» и «понижающие» генераторы группы $SL(2, \mathbb{C})$)

$$\left. \begin{aligned} X_+ &= X_1 + iX_2, & X_- &= X_1 - iX_2, \\ Y_+ &= Y_1 + iY_2, & Y_- &= Y_1 - iY_2, \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

получим

$$\begin{aligned} [X_3, X_+] &= X_+, & [X_3, X_-] &= -X_-, & [X_+, X_-] &= 2X_3, \\ [Y_3, Y_+] &= Y_+, & [Y_3, Y_-] &= -Y_-, & [Y_+, Y_-] &= 2Y_3. \end{aligned}$$

В силу коммутативности соотношений (3) пространство неприводимого конечномерного (спинорного) представления группы $SO_0(1, 3)$ может быть натянуто на совокупность $(2l+1)(2\dot{l}+1)$ базисных векторов $|l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle$, где l, m, \dot{l}, \dot{m} – целые или полуцелые числа, $-l \leq m \leq l$, $-\dot{l} \leq \dot{m} \leq \dot{l}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} X_- |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1; \dot{l}, \dot{m}\rangle \quad (m > -l), \\ X_+ |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1; \dot{l}, \dot{m}\rangle \quad (m < l), \\ X_3 |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= m |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle, \\ Y_- |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= \sqrt{(\dot{l}+\dot{m})(\dot{l}-\dot{m}+1)} |l, m; \dot{l}, \dot{m}-1\rangle \quad (\dot{m} > -\dot{l}), \\ Y_+ |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= \sqrt{(\dot{l}-\dot{m})(\dot{l}+\dot{m}+1)} |l, m; \dot{l}, \dot{m}+1\rangle \quad (\dot{m} < \dot{l}), \\ Y_3 |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle &= \dot{m} |l, m; \dot{l}, \dot{m}\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Из соотношений (3) следует, что каждое из множеств операторов X и Y генерирует группу $SU(2)$ и эти две группы коммутируют между собой. Таким образом, из соотношений (3) следует, что в рамках комплексной оболочки групповая алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, по существу, эквивалентна (алгебраически изоморфна) прямой сумме $\mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2)$ (см. также [34, с. 28])¹¹. В противоположность представлению Гельфанда-Наймарка для группы Лоренца [35, 36], которое так и не нашло широкого применения в физике, представление (5) является наиболее используемым в теоретической физике (см., например, [31, 37–39]). Это представление

¹¹В некотором смысле это позволяет представить группу $SL(2, \mathbb{C})$ произведением $SU(2) \otimes SU(2)$, как это сделано Райдером [31]. Более того, в работах [32, 33] группа Лоренца пред-

ставлена произведением $SU_R(2) \otimes SU_L(2)$, где спиноры $\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}$ ($\phi_R(p^\mu)$ и $\phi_L(p^\mu)$ –

право- и левополяризованные спиноры) преобразуются в рамках пространства представления $(j, 0) \oplus (0, j)$. Однако изоморфизм $SL(2, \mathbb{C}) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$ не является корректным (даже в локальном смысле) с теоретико-групповой точки зрения. Действительно, группы $SO_0(1, 3)$ и $SO(4)$ являются вещественными формами комплексной шестимерной группы Ли $SO(4, \mathbb{C})$ с комплексной алгеброй Ли $D_2 = A_1 + A_1$. Вещественные алгебры Ли компактны в том случае, когда форма Киллинга является отрицательноопределённой [34]. Это справедливо для алгебры Ли группы $SO(4)$, но не для $SO_0(1, 3)$.

для группы Лоренца было впервые дано ван дер Варденом в классической монографии [40]. Следует отметить, что базис представления, определяемый формулами (2)–(5), имеет вполне очевидный физический смысл. Например, в случае пространства представления $(1, 0) \oplus (0, 1)$ имеет место аналогия с фотонными спиновыми состояниями. А именно операторы X и Y соответствуют право- и левополяризованным состояниям фотона. По этой причине канонический базис, состоящий из векторов вида $|lm; \dot{lm}\rangle$, называют *спиральным базисом*, или *базисом комплексного углового момента*.

3.2. Комплексная оболочка групповой алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$

Как известно [25], система пятнадцати генераторов конформной группы $SO_0(2, 4)$ удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathbf{L}_{\alpha\beta}, \mathbf{L}_{\gamma\delta}] = i (g_{\alpha\delta}\mathbf{L}_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\mathbf{L}_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}\mathbf{L}_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}\mathbf{L}_{\alpha\gamma}),$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, 6, \alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta).$$

Генераторы $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$. С целью перейти к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$ рассмотрим другую систему генераторов, предложенную Т. Ёао [41]. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= 1/2 (\mathbf{L}_{23} - \mathbf{L}_{14}), & \mathbf{J}_2 &= 1/2 (\mathbf{L}_{31} - \mathbf{L}_{24}), & \mathbf{J}_3 &= 1/2 (\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{34}), \\ \mathbf{K}_1 &= 1/2 (\mathbf{L}_{23} + \mathbf{L}_{14}), & \mathbf{K}_2 &= 1/2 (\mathbf{L}_{31} + \mathbf{L}_{24}), & \mathbf{K}_3 &= 1/2 (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_{34}), \\ \mathbf{P}_1 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{16}), & \mathbf{P}_2 &= 1/2 (\mathbf{L}_{45} - \mathbf{L}_{36}), & \mathbf{P}_0 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}), \\ \mathbf{Q}_1 &= 1/2 (\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{46}), & \mathbf{Q}_2 &= 1/2 (\mathbf{L}_{45} + \mathbf{L}_{36}), & \mathbf{Q}_0 &= 1/2 (\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}), \\ \mathbf{S}_1 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{15} + \mathbf{L}_{26}), & \mathbf{S}_2 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), & \mathbf{S}_0 &= 1/2 (\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}), \\ \mathbf{T}_1 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{15} - \mathbf{L}_{26}), & \mathbf{T}_2 &= 1/2 (\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), & \mathbf{T}_0 &= 1/2 (-\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}). \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система 18 генераторов связана тремя соотношениями:

$$\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3 = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3 = \mathbf{S}_0 - \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}_0 + \mathbf{T}_0. \quad (7)$$

В силу независимости генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$) (6) задаёт избыточную систему генераторов группы $SO_0(2, 4)$, из которой можно получить базис алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$, исключив три генератора с помощью (7).

Перейдём к комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$, положив

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\pm} &= \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2, & \mathbf{P}_{\pm} &= \mathbf{P}_1 \pm i\mathbf{P}_2, & \mathbf{S}_{\pm} &= \mathbf{S}_1 \pm i\mathbf{S}_2, \\ \mathbf{K}_{\pm} &= \mathbf{K}_1 \pm i\mathbf{K}_2, & \mathbf{Q}_{\pm} &= \mathbf{Q}_1 \pm i\mathbf{Q}_2, & \mathbf{T}_{\pm} &= \mathbf{T}_1 \pm i\mathbf{T}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_{\pm}] &= \mathbf{J}_{\pm}, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_{\mp}] &= -\mathbf{J}_{\mp}, & [\mathbf{J}_{+}, \mathbf{J}_{-}] &= 2\mathbf{J}_3, \\ [\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_{\pm}] &= \mathbf{K}_{\pm}, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_{\mp}] &= -\mathbf{K}_{\mp}, & [\mathbf{K}_{+}, \mathbf{K}_{-}] &= 2\mathbf{K}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_+] &= \mathbf{P}_+, & [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_-] &= -\mathbf{P}_-, & [\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-] &= -2\mathbf{P}_0, \\
[\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_+] &= \mathbf{Q}_+, & [\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_-] &= -\mathbf{Q}_-, & [\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-] &= -2\mathbf{Q}_0, \\
[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_+] &= \mathbf{S}_+, & [\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_-] &= -\mathbf{S}_-, & [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] &= -2\mathbf{S}_0, \\
[\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_+] &= \mathbf{T}_+, & [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_-] &= -\mathbf{T}_-, & [\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-] &= -2\mathbf{T}_0, \\
[\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_j] &= 0 \quad (i, j = +, -, 3), \\
[\mathbf{J}_+, \mathbf{P}_+] &= 0, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{P}_-] &= -\mathbf{T}_-, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{P}_0] &= -1/2\mathbf{J}_+, \\
[\mathbf{J}_-, \mathbf{P}_+] &= \mathbf{T}_+, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{P}_-] &= 0, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{P}_0] &= 1/2\mathbf{J}_-, \\
[\mathbf{J}_3, \mathbf{P}_+] &= 1/2\mathbf{P}_+, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{P}_-] &= -1/2\mathbf{P}_-, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{P}_0] &= 0, \\
[\mathbf{J}_+, \mathbf{Q}_+] &= \mathbf{S}_+, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{Q}_-] &= 0, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{Q}_0] &= 1/2\mathbf{J}_+, \\
[\mathbf{J}_-, \mathbf{Q}_+] &= 0, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{Q}_-] &= -\mathbf{S}_-, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{Q}_0] &= -1/2\mathbf{J}_-, \\
[\mathbf{J}_3, \mathbf{Q}_+] &= -1/2\mathbf{Q}_+, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{Q}_-] &= 1/2\mathbf{Q}_-, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{Q}_0] &= 0, \\
[\mathbf{J}_+, \mathbf{S}_+] &= 0, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{S}_-] &= -\mathbf{Q}_-, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{S}_0] &= -1/2\mathbf{J}_+, \\
[\mathbf{J}_-, \mathbf{S}_+] &= \mathbf{Q}_+, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{S}_-] &= 0, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{S}_0] &= 1/2\mathbf{J}_-, \\
[\mathbf{J}_3, \mathbf{S}_+] &= 1/2\mathbf{S}_+, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{Q}_-] &= -1/2\mathbf{S}_-, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{S}_0] &= 0, \\
[\mathbf{J}_+, \mathbf{T}_+] &= \mathbf{P}_+, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{T}_-] &= 0, & [\mathbf{J}_+, \mathbf{T}_0] &= 1/2\mathbf{J}_+, \\
[\mathbf{J}_-, \mathbf{T}_+] &= 0, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{T}_-] &= -\mathbf{P}_-, & [\mathbf{J}_-, \mathbf{T}_0] &= -1/2\mathbf{J}_-, \\
[\mathbf{J}_3, \mathbf{T}_+] &= -1/2\mathbf{T}_+, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{T}_-] &= 1/2\mathbf{T}_-, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{T}_0] &= 0, \\
[\mathbf{K}_+, \mathbf{P}_+] &= -\mathbf{S}_+, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{P}_-] &= 0, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{P}_0] &= 1/2\mathbf{K}_+, \\
[\mathbf{K}_-, \mathbf{P}_+] &= 0, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{P}_-] &= \mathbf{S}_-, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{P}_0] &= -1/2\mathbf{K}_-, \\
[\mathbf{K}_3, \mathbf{P}_+] &= -1/2\mathbf{P}_+, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{P}_-] &= 1/2\mathbf{P}_-, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{P}_0] &= 0, \\
[\mathbf{K}_+, \mathbf{Q}_+] &= 0, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{Q}_-] &= \mathbf{T}_-, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{Q}_0] &= -1/2\mathbf{K}_+, \\
[\mathbf{K}_-, \mathbf{Q}_+] &= -\mathbf{T}_+, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{Q}_-] &= 0, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{Q}_0] &= 1/2\mathbf{K}_-, \\
[\mathbf{K}_3, \mathbf{Q}_+] &= 1/2\mathbf{Q}_+, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{Q}_-] &= -1/2\mathbf{Q}_-, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{Q}_0] &= 0, \\
[\mathbf{K}_+, \mathbf{S}_+] &= 0, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{S}_-] &= \mathbf{P}_-, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{S}_0] &= -1/2\mathbf{K}_+, \\
[\mathbf{K}_-, \mathbf{S}_+] &= -\mathbf{P}_+, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{S}_-] &= 0, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{S}_0] &= 1/2\mathbf{K}_-, \\
[\mathbf{K}_3, \mathbf{S}_+] &= 1/2\mathbf{S}_+, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{S}_-] &= -1/2\mathbf{S}_-, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{S}_0] &= 0, \\
[\mathbf{K}_+, \mathbf{T}_+] &= -\mathbf{Q}_+, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{T}_-] &= 0, & [\mathbf{K}_+, \mathbf{T}_0] &= 1/2\mathbf{K}_+, \\
[\mathbf{K}_-, \mathbf{T}_+] &= 0, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{T}_-] &= \mathbf{Q}_-, & [\mathbf{K}_-, \mathbf{T}_0] &= -1/2\mathbf{K}_-, \\
[\mathbf{K}_3, \mathbf{T}_+] &= -1/2\mathbf{T}_+, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{T}_-] &= 1/2\mathbf{T}_-, & [\mathbf{K}_3, \mathbf{T}_0] &= 0, \\
[\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_j] &= 0 \quad (i, j = +, -, 0), \\
[\mathbf{P}_+, \mathbf{S}_+] &= 0, & [\mathbf{P}_+, \mathbf{S}_-] &= \mathbf{K}_-, & [\mathbf{P}_+, \mathbf{S}_0] &= -1/2\mathbf{P}_+, \\
[\mathbf{P}_-, \mathbf{S}_+] &= -\mathbf{K}_+, & [\mathbf{P}_-, \mathbf{S}_-] &= 0, & [\mathbf{P}_-, \mathbf{S}_0] &= 1/2\mathbf{P}_-,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{P}_0, \mathbf{S}_+] &= 1/2\mathbf{S}_+, & [\mathbf{P}_0, \mathbf{S}_-] &= -1/2\mathbf{S}_-, & [\mathbf{P}_0, \mathbf{S}_0] &= 0, \\
 [\mathbf{P}_+, \mathbf{T}_+] &= 0, & [\mathbf{P}_+, \mathbf{T}_-] &= -\mathbf{J}_+, & [\mathbf{P}_+, \mathbf{T}_0] &= -1/2\mathbf{P}_+, \\
 [\mathbf{P}_-, \mathbf{T}_+] &= \mathbf{J}_-, & [\mathbf{P}_-, \mathbf{T}_-] &= 0, & [\mathbf{P}_-, \mathbf{T}_0] &= 1/2\mathbf{P}_-, \\
 [\mathbf{P}_0, \mathbf{T}_+] &= 1/2\mathbf{T}_+, & [\mathbf{P}_0, \mathbf{T}_-] &= -1/2\mathbf{T}_-, & [\mathbf{P}_0, \mathbf{T}_0] &= 0, \\
 [\mathbf{Q}_+, \mathbf{S}_+] &= 0, & [\mathbf{Q}_+, \mathbf{S}_-] &= -\mathbf{J}_-, & [\mathbf{Q}_+, \mathbf{S}_0] &= -1/2\mathbf{Q}_+, \\
 [\mathbf{Q}_-, \mathbf{S}_+] &= \mathbf{J}_+, & [\mathbf{Q}_-, \mathbf{S}_-] &= 0, & [\mathbf{Q}_-, \mathbf{S}_0] &= 1/2\mathbf{Q}_-, \\
 [\mathbf{Q}_0, \mathbf{S}_+] &= 1/2\mathbf{S}_+, & [\mathbf{Q}_0, \mathbf{S}_-] &= -1/2\mathbf{S}_-, & [\mathbf{Q}_0, \mathbf{S}_0] &= 0, \\
 [\mathbf{Q}_+, \mathbf{T}_+] &= 0, & [\mathbf{Q}_+, \mathbf{T}_-] &= \mathbf{K}_+, & [\mathbf{Q}_+, \mathbf{T}_0] &= -1/2\mathbf{Q}_+, \\
 [\mathbf{Q}_-, \mathbf{T}_+] &= -\mathbf{K}_-, & [\mathbf{Q}_-, \mathbf{T}_-] &= 0, & [\mathbf{Q}_-, \mathbf{T}_0] &= 1/2\mathbf{Q}_-, \\
 [\mathbf{Q}_0, \mathbf{T}_+] &= 1/2\mathbf{T}_+, & [\mathbf{Q}_0, \mathbf{T}_-] &= -1/2\mathbf{T}_-, & [\mathbf{Q}_0, \mathbf{T}_0] &= 0, \\
 [\mathbf{S}_i, \mathbf{T}_j] &= 0 & (i, j = +, -, 0).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим специальное представление конформной группы $SO_0(2, 4)$ аналогичное представлению ван дер Вардена (5) для группы Лоренца $SO_0(1, 3)$. Это *локальное* представление группы $SO_0(2, 4)$ непосредственно связано с представлением Фока для подгруппы $SO(4)$ (см. приложение А). По сути это представление является расширением представления Фока для $SO(4)$ до унитарного представления конформной группы $SO_0(2, 4)$ в *пространстве Фока* \mathfrak{F} с помощью базиса (А.2). Используя генераторы (8) комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$, получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j + \sigma)(j - \sigma + 1)}|j, \sigma - 1, \tau\rangle, \\
 \mathbf{J}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j - \sigma)(j + \sigma + 1)}|j, \sigma + 1, \tau\rangle, \\
 \mathbf{J}_3|j, \sigma, \tau\rangle &= \sigma|j, \sigma, \tau\rangle, \\
 \mathbf{K}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j + \tau)(j - \tau + 1)}|j, \sigma, \tau - 1\rangle, \\
 \mathbf{K}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j - \tau)(j + \tau + 1)}|j, \sigma, \tau + 1\rangle, \\
 \mathbf{K}_3|j, \sigma, \tau\rangle &= \tau|j, \sigma, \tau\rangle, \\
 \mathbf{P}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= -i\sqrt{(j + \sigma)(j - \tau)}\left|j - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2}\right\rangle, \\
 \mathbf{P}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= i\sqrt{(j - \tau + 1)(j + \sigma + 1)}\left|j + \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2}\right\rangle, \\
 \mathbf{P}_0|j, \sigma, \tau\rangle &= \left(j + \frac{\sigma - \tau + 1}{2}\right)\sigma|j, \sigma, \tau\rangle, \\
 \mathbf{Q}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= i\sqrt{(j + \tau)(j - \sigma)}\left|j - \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2}\right\rangle, \\
 \mathbf{Q}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= -i\sqrt{(j - \sigma + 1)(j + \tau + 1)}\left|j + \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2}\right\rangle, \\
 \mathbf{Q}_0|j, \sigma, \tau\rangle &= \left(j - \frac{\sigma - \tau - 1}{2}\right)|j, \sigma, \tau\rangle,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= i\sqrt{(j+\sigma)(j+\tau)} \left| j - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2} \right\rangle, \\
\mathbf{S}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= -i\sqrt{(j+\tau+1)(j+\sigma+1)} \left| j + \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2} \right\rangle, \\
\mathbf{S}_0|j, \sigma, \tau\rangle &= \left(j + \frac{\sigma + \tau + 1}{2} \right) \sigma |j, \sigma, \tau\rangle, \\
\mathbf{T}_-|j, \sigma, \tau\rangle &= -i\sqrt{(j-\tau)(j-\sigma)} \left| j - \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2} \right\rangle, \\
\mathbf{T}_+|j, \sigma, \tau\rangle &= i\sqrt{(j-\sigma+1)(j-\tau+1)} \left| j + \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}, \tau - \frac{1}{2} \right\rangle, \\
\mathbf{T}_0|j, \sigma, \tau\rangle &= \left(j - \frac{\sigma + \tau - 1}{2} \right) |j, \sigma, \tau\rangle.
\end{aligned}$$

Формулы (9) задают унитарное представление конформной группы $SO_0(2, 4)$ в пространстве Фока \mathfrak{F} . В число формул (9) входят формулы для J_k, K_k , задающие представления Φ_n в подпространствах \mathfrak{F}_n (см. (A.1), где $j_1 = j_2 = j$) и тем самым представление Фока Φ на подгруппе $SO(4)$. Более того, при ограничении $SO_0(2, 4)$ на подгруппу $SO_0(1, 3)$ (группу Лоренца) получим представление ван дер Вардена (5), задаваемое генераторами X_k, Y_k , что и доказывает сходство комплексных оболочек групповых алгебр $\mathfrak{so}(2, 4)$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Представление, задаваемое формулами (9), называется *расширением F^+ представления Фока на конформную группу* [25]. Это представление является базой теоретико-группового описания периодической системы элементов [23–25]. В п. 4 представление F^+ будет использовано для построения конкретной реализации операторной алгебры $\pi(H)$ в рамках конструкции ГНС.

4. Аксиомы нелокального подхода

Согласно концепции Гейзенберга-Фока реальность имеет двухуровневую структуру: *потенциальная реальность* и *актуальная реальность*. Гейзенберг утверждал, что любой квантовый микрообъект принадлежит обеим сторонам реальности: во-первых, потенциальной реальности как суперпозиция, и, во-вторых, актуальной реальности после редукции суперпозиции, т. е. измерения. Измерение есть локализация (актуализация) какого-либо состояния единой квантовой системы \mathbf{U}^{12} . С целью аксиоматизировать двухуровневую структу-

¹²Уилер отмечал, что «никакой элементарный феномен не является феноменом, пока он не является наблюдаемым (регистрируемым) феноменом». Представление же о том, что квантовый микрообъект существует сам по себе до всякого измерения в виде некоей корпускулы (точечной или занимающей некоторую область \mathcal{O} пространства-времени), так называемого «асимптотически стабильного центра локализации», является *retitio principii*. Более того, понятие множественности квантовых микрообъектов также является логической ошибкой. Не существует множественности квантовых микрообъектов, существует единая квантовая система \mathbf{U} , состояния которой идентифицируются как квантовые микрообъекты (элементарные частицы) в результате измерения. По сути здесь лежит (в рамках \mathbf{U}) и решение проблемы множественности и тождественности.

ру концепции Гейзенберга-Фока с позиции алгебраического подхода введём следующую систему аксиом¹³.

A.I (Энергия и фундаментальная симметрия) *Единая квантовая система \mathbf{U} на фундаментальном уровне характеризуется C^* -алгеброй \mathfrak{A} с единицей, состоящей из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы фундаментальной симметрии G_f , образующих с H общую систему собственных функций.*

A.II (Состояния) *Физическое состояние C^* -алгебры \mathfrak{A} определяется циклическим вектором $|\Phi\rangle$ представления π C^* -алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathbf{H}_∞ :*

$$\omega_\Phi(H) = \frac{\langle \Phi | \pi(H)\Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle}.$$

Множество $PS(\mathfrak{A})$ всех чистых состояний C^ -алгебры \mathfrak{A} совпадает с множеством всех состояний $\omega_\Phi(H)$, ассоциированных со всеми неприводимыми циклическими представлениями π алгебры \mathfrak{A} , $|\Phi\rangle \in \mathbf{H}_\infty$ (конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала).*

A.III (Пространство лучей) *Множество всех чистых состояний $\omega_\Phi(H)$ при выполнении условия $\omega_\Phi(H) \geq 0$ образует физическое гильбертово пространство \mathbf{H}_{phys} (в общем случае пространство \mathbf{H}_{phys} несепарабельно). Для каждого вектора состояния $|\Psi\rangle \in \mathbf{H}_{\text{phys}}$ существует единичный луч $\Psi = e^{i\alpha} |\Psi\rangle$, где α пробегает все вещественные числа и $\sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle} = 1$. Пространство лучей есть фактор-пространство $\hat{H} = \mathbf{H}_{\text{phys}}/S^1$, т. е. проективное пространство одномерных подпространств из \mathbf{H}_{phys} . Все состояния единой квантовой системы \mathbf{U} описываются единичными лучами.*

A.IV (Аксиома спектральности) *В \hat{H} существует полная система состояний с неотрицательной энергией.*

A.V (Принцип суперпозиции) *Основное соответствие между физическими состояниями и элементами пространства \hat{H} включает принцип суперпозиции квантовой теории, т. е. существует набор базисных состояний таких, что произвольные состояния могут быть построены из них при помощи линейных суперпозиций.*

A.0→**B.0** (Принцип редукции) *Редукция суперпозиции лучей (измерение) системы \mathbf{U} описывается как переход от $\Psi = \sum_k c_k \Psi_k$ к Ψ_1 , т. е.*

$$\Psi = \sum_k c_k \Psi_k \longrightarrow \Psi_1$$

¹³Эта система ни в коей мере не претендует на исчерпывающую полноту и законченность, являясь по сути первым наброском подобного рода. Аксиомы **A.I**–**A.IV** описывают фундаментальный уровень (квантовый домен), аксиомы **B.I** и **B.II** принадлежат к классическому (локальному) домену (актуальной реальности). Аксиома редукции **A.0**→**B.0** служит своего рода «границей между двумя мирами». Следует отметить, что все определения, так или иначе связанные с модусом потенции, имеют ярко выраженный апофатический характер: *нелокальный* квантовый субстрат, *несепарабельное* гильбертово пространство, *небулева* логика и т. д. В связи с этим вспоминается знаменитая фраза Витгенштейна: «О чем невозможно говорить, о том следует молчать» [42]. Однако средства абстрактно-алгебраического подхода, обладающие преимущественно *невербальным* инструментариумом, позволяют перешагнуть эту границу.

с вероятностью $|c_1|^2$ (в соответствии с правилами Борна).

В.І (Локализация) Каждому ограниченному открытому множеству \mathcal{O} пространства-времени Минковского $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ сопоставлена C^* -алгебра с единицей $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, являющаяся подалгеброй нелокальной алгебры \mathfrak{A} и называемая алгеброй локальных наблюдаемых, ассоциированных с множеством \mathcal{O} ; при этом алгебра $\mathfrak{A}_{\text{loc}}$ является пополнением по норме объединения

$$\mathfrak{A}_{\text{loc}} = \bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathcal{M}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}),$$

называемого алгеброй локальных наблюдаемых. Кроме того, выполнены следующие условия:

- (а) изотония: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$;
 (б) локальная коммутативность: алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ и $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$, ассоциированные с пространственноподобно разделёнными областями \mathcal{O}_1 и \mathcal{O}_2 , коммутируют между собой.

В.ІІ (Пуанкаре-инвариантность) В гильбертовом пространстве \mathcal{H} определено унитарное представление $(a, \Lambda) \rightarrow U(a, \Lambda)$ спинорной группы Пуанкаре \mathfrak{P}_0 (непрерывное в слабой операторной топологии), задающее закон преобразования при трансляциях и преобразованиях Лоренца для локальных наблюдаемых

$$A \rightarrow U(a, \Lambda) A U(a, \Lambda)^{-1}$$

и векторов состояния

$$|\Phi\rangle \rightarrow U(a, \Lambda) |\Phi\rangle$$

(здесь A – произвольный элемент алгебры локальных наблюдаемых $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ или алгебры фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}(\mathcal{O})}$, $|\Phi\rangle$ – произвольный вектор из \mathcal{H}). При этом для алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ выполняется условие ковариантности относительно собственной группы Пуанкаре:

$$\alpha_{a, \Lambda}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\Lambda\mathcal{O} + a).$$

Генераторы представления $(a, \Lambda) \rightarrow U(a, \Lambda)$ – операторы полного 4-импульса p^μ и четырёхмерного углового момента $M^{\lambda\mu}$ – являются самосопряжёнными операторами в \mathcal{H} , присоединёнными к алгебре локальных наблюдаемых фон Неймана $\overline{\mathfrak{A}(\mathcal{O})}$. Спектр оператора энергии-импульса p принадлежит замкнутому верхнему световому конусу \overline{V}^+ .

Пусть согласно аксиомы **А.І** к оператору энергии H присоединены генераторы (8) комплексной оболочки групповой алгебры $\mathfrak{so}(2, 4)$ конформной группы. Тогда, согласно формулам (9), получаем расширение F^+ представления Фока на конформную группу. Нашей задачей является построение физического представления π операторной алгебры. Следуя [25], определим единую квантовую систему **U** как периодическую систему элементов. Представление F^+ , задаваемое формулами (9), ещё недостаточно для описания периодической системы элементов. С этой целью необходимо включить четвертое число Маделунга s (аналогичное спину), что приводит к группе

$$\text{SO}(2, 4) \otimes \text{SU}(2). \quad (10)$$

Представление $F_s^+ = \varphi_2 \otimes F^+$ группы (10), где φ_2 – унитарное представление группы $SU(2)$ в пространстве $C(2)$, уже удовлетворяет этому требованию (включению числа Маделунга s). Базис пространства $\mathfrak{F}^2 = C(2) \otimes \mathfrak{F}$ представления F_s^+ (базис Румера-Фета) имеет вид

$$|n, l, m, s\rangle, \quad n = 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, n - 1; \\ m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l; \quad s = -1/2, 1/2, \quad (11)$$

Здесь n, l, m – квантовые числа конформной группы.

Конкретная реализация операторной алгебры с использованием представления F_s^+ определяется следующим образом (ограниченные рамки статьи не позволяют подробно рассмотреть это построение). Перейдём от группы $SO(2, 4)$ к её универсальной накрывающей $SU(2, 2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4)$ (см. приложение Б), что означает переход к $SU(2, 2) \otimes SU(2)$, тогда твисторы $\mathbf{Z}^\alpha = (\xi^\alpha, \xi_{\dot{\alpha}})$ являются элементами минимального левого идеала алгебры $\mathcal{O}_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$, где справедлива следующая факторизация: $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \sum \xi^{\alpha_1} \otimes \xi^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \xi^{\alpha_k}$. Следовательно, каждому твистору \mathbf{Z}^α можно сопоставить пару циклических векторов $\pi(H) | \Phi \rangle, \dot{\pi}(H) | \Phi \rangle$ конструкции ГНС, где $|\Phi \rangle \in \mathbf{H}_\infty$, и тем самым определить циклические представления (чистые состояния) системы \mathbf{U} . Перенос морфизмов спинорной структуры на твисторную структуру позволяет далее продолжить «одевание» операторной алгебры, т. е. определить заряженные и нейтральные состояния, а также дискретные симметрии. В этом случае векторы состояния физического гильбертова пространства \mathbf{H}_{phys} изображают атомы различных элементов периодической системы Менделеева¹⁴, понимаемой теперь как единая квантовая система \mathbf{U} .

¹⁴При ограничении группы $SO(2, 4) \otimes SU(2)$ на подгруппу $SO_0(1, 3)$ получаем редукцию представления F_s^+ на представление ван дер Вардена W , т. е. редукцию $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_W$. В рамках квантовой подсистемы \mathbf{U}_W векторы состояния пространства \mathbf{H}_{phys} изображают элементарные частицы (см. [18, 43–46]). Согласно известному высказыванию Вайскопфа ядерная физика и физика элементарных частиц — это не две разные науки, а единая наука. В данном случае квантовая система \mathbf{U} представляет собой более высокий уровень организации материи (более сложная симметрия) относительно своей подсистемы \mathbf{U}_W .

Приложение А: Группа $SO(4)$ и представление Фока

Как известно, группа $SO(4)$ является максимальной компактной подгруппой конформной группы $SO_0(2,4)$. $SO(4)$ соответствует базисным элементам $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ и $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ алгебры $\mathfrak{so}(2,4)$:

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}J_m, \quad [J_k, K_l] = i\varepsilon_{klm}K_m, \quad [K_k, K_l] = i\varepsilon_{klm}J_m.$$

Вводя линейные комбинации $\mathbf{V} = (\mathbf{J} + \mathbf{K})/2$ и $\mathbf{V}' = (\mathbf{J} - \mathbf{K})/2$, получим

$$[V_k, V_l] = i\varepsilon_{klm}V_m, \quad [V'_k, V'_l] = i\varepsilon_{klm}V'_m.$$

Генераторы \mathbf{V} и \mathbf{V}' образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Это значит, что группа $SO(4)$ изоморфна произведению $SO(3) \otimes SO(3)$ ¹⁵.

Универсальным накрытием группы вращений $SO(4)$ четырёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^4 является спинорная группа

$$\mathbf{Spin}(4) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1 \right\} = SU(2) \otimes SU(2).$$

Пусть $SO(3)_{\mathbf{J}}$ и $SO(3)_{\mathbf{K}}$ – подгруппы $SO(4)$ с генераторами соответственно J_k и K_k ($k = 1, 2, 3$), тогда каждое неприводимое представление T группы $SO(4)$ имеет следующее строение: пространство \mathfrak{R} представления T есть тензорное произведение пространств \mathfrak{R}_1 и \mathfrak{R}_2 , в которых заданы неприводимые представления D_{j_1} и D_{j_2} подгрупп $SO(3)_{\mathbf{J}}$ и $SO(3)_{\mathbf{K}}$ размерностей $2j_1 + 1$ и $2j_2 + 1$. Таким образом, размерность представления T равна $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$, где j_1, j_2 – целые или полуцелые числа. Действие операторов алгебры Ли J_k, K_k на базисные векторы задаётся формулами:

$$\begin{aligned} J_-|\sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j_1 + \sigma)(j_1 - \sigma + 1)}|\sigma - 1, \tau\rangle, \\ J_+|\sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j_1 - \sigma)(j_1 + \sigma + 1)}|\sigma + 1, \tau\rangle, \\ J_3|\sigma, \tau\rangle &= \sigma|\sigma, \tau\rangle, \\ K_-|\sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j_2 + \tau)(j_2 - \tau + 1)}|\sigma, \tau - 1\rangle, \\ K_+|\sigma, \tau\rangle &= \sqrt{(j_2 - \tau)(j_2 + \tau + 1)}|\sigma, \tau + 1\rangle, \\ K_3|\sigma, \tau\rangle &= \tau|\sigma, \tau\rangle. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Данное представление группы $SO(4)$, обозначаемое через $D_{j_1 j_2}$, неприводимо и унитарно.

Строение представления Фока Φ группы $SO(4)$ задаётся разложением на неприводимые слагаемые Φ_n в пространствах \mathfrak{F}_n . Как известно [25], неприводимое представление Φ_n при редукции по подгруппе $SO(3)$ разлагается в сумму неприводимых представлений группы $SO(3)$ размерностей $1, 3, \dots, 2n - 1$.

¹⁵Такое положение вещей выражают следующим определением: группа $SO(4)$ локально разлагается в прямое произведение подгрупп $SO(3)$. В целом (т. е. без предположения, что все матрицы близки к единичной) это разложение неоднозначно. $SO(4)$ – единственная из ортогональных групп $SO(n)$, допускающая такое локальное разложение.

В виду описанного выше строения неприводимых представлений группы $SO(4)$, наименьшая размерность 1 должна быть равна $2|j_1 - j_2| + 1$, откуда вытекает $j_1 = j_2$. Следовательно, представление Φ_n имеет вид $D_{j_1 j_2}$, а поскольку для наибольшей размерности должно быть $2n - 1 = 2(j_1 + j_2) + 1 = 4j + 1$, то $j = (n - 1)/2$. Таким образом, строение представления Фока имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \dots \oplus \Phi_n \oplus \dots, \quad \text{где } \Phi_n = D_{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}.$$

Тем самым в каждом пространстве \mathfrak{F}_n построен ортонормированный базис $|j, \sigma, \tau\rangle$, где $j = (n - 1)/2$. Все эти базисы вместе образуют ортонормированный базис пространства Фока \mathfrak{F} :

$$\begin{aligned} |j, \sigma, \tau\rangle \quad (j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \\ \sigma = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j; \tau = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

в котором алгебра Ли группы $SO(4)$ действует по формулам (A.1) с $j_1 = j_2 = j$.

Приложение Б: Твисторная структура и группа $SU(2, 2)$

Главная идея твисторной программы Пенроуза [3,4] заключается в представлении классического пространства-времени как некоторой вторичной конструкции, получаемой из более первичных понятий. В качестве более первичных понятий мы имеем здесь двухкомпонентные (комплексные) спиноры, более того, пары двухкомпонентных спиноров. В программе Пенроуза они называются *твисторами*.

Твистор Z^α определяется посредством пары двухкомпонентных спиноров: спинора ω^s и ковариантного спинора π_s из сопряжённого пространства, т. е. $Z^\alpha = (\omega^s, \pi_s)$. В теории твисторов момент ($\vec{\omega}$) и импульс ($\vec{\pi}$) частицы строятся из величин ω^s и π_s . Одним из важнейших аспектов этой теории является *переход от твисторов к координатному пространству-времени*. Пенроуз описывает этот переход с помощью так называемого *базисного соотношения теории твисторов*

$$\omega^s = ix^{s\dot{r}} \pi_{\dot{s}}, \quad (\text{B.1})$$

где $x^{s\dot{r}}$ – смешанный спинтензор второго ранга. В более подробной записи это соотношение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{\dot{1}} \\ \pi_{\dot{2}} \end{bmatrix}.$$

Из (B.1) непосредственно следует, что точки пространства-времени $\mathbb{R}^{1,3}$ восстанавливаются над твисторным пространством \mathbb{C}^4 (эти точки соответствуют линейным подпространствам твисторного пространства \mathbb{C}^4), являясь при этом вторичной (производной) конструкцией относительно твисторов.

Фактически твисторы могут быть определены как «редуцированные спиноры» для псевдоунитарной группы $SO_0(2, 4)$, действующей в шестимерном пространстве с сигнатурой $(+, +, -, -, -, -)$. Эти редуцированные спиноры задаются следующим образом. Общие спиноры являются элементами минимального левого идеала конформной алгебры $\mathcal{C}\ell_{2,4}$

$$I_{2,4} = \mathcal{C}\ell_{2,4} f_{24} = \mathcal{C}\ell_{2,4} \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{15}) \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{26}).$$

Редуцированные спиноры (твисторы) формулируются в рамках чётной подалгебры $\mathcal{C}\ell_{2,4}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{4,1}$ (алгебра де Ситтера). Минимальный левый идеал алгебры $\mathcal{C}\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$ задаётся следующим выражением [47]

$$I_{4,1} = \mathcal{C}\ell_{4,1} f_{4,1} = \mathcal{C}\ell_{4,1} \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0) \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_{12}).$$

Следовательно, после редукции $I_{2,4} \rightarrow I_{4,1}$, генерируемой изоморфизмом $\mathcal{C}\ell_{2,4}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{4,1}$, мы видим, что твисторы \mathbf{Z}^α являются элементами идеала $I_{4,1}$, который приводит к группе $SU(2, 2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4) \in \mathcal{C}\ell_{2,4}^+$ (см. далее (Б.2) и (Б.3)). Действительно, рассмотрим алгебру $\mathcal{C}\ell_{2,4}$, ассоциированную с шестимерным псевдоевклидовым пространством $\mathbb{R}^{2,4}$. Универсальное накрытие $\mathbf{Spin}_+(2, 4)$ группы вращений $SO_0(2, 4)$ пространства $\mathbb{R}^{2,4}$ описывается в рамках чётной подалгебры $\mathcal{C}\ell_{2,4}^+$. Алгебра $\mathcal{C}\ell_{2,4}$ имеет тип $p - q \equiv 6 \pmod{8}$, следовательно, согласно $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1}$ имеем $\mathcal{C}\ell_{2,4}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{4,1}$, где $\mathcal{C}\ell_{4,1}$ – алгебра де Ситтера, ассоциированная с пространством $\mathbb{R}^{4,1}$. В свою очередь алгебра $\mathcal{C}\ell_{4,1}$ имеет тип $p - q \equiv 3 \pmod{8}$ и, следовательно, имеется изоморфизм $\mathcal{C}\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C}_4$, где \mathbb{C}_4 – алгебра Дирака. Алгебра \mathbb{C}_4 является комплексификацией алгебры пространства-времени $\mathbb{C}_4 \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$. Далее, алгебра $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ допускает следующую факторизацию: $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2}$. Отсюда непосредственно следует, что $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2}$. Таким образом,

$$\mathbf{Spin}_+(2, 4) = \{s \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \mid N(s) = 1\}. \quad (\text{Б.2})$$

С другой стороны, в силу изоморфизма $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2}$ общий элемент алгебры $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}\ell_{1,3}} = \mathcal{C}\ell_{1,1}^0 \mathbf{e}_0 + \mathcal{C}\ell_{1,1}^1 \phi + \mathcal{C}\ell_{1,1}^2 \psi + \mathcal{C}\ell_{1,1}^3 \phi\psi,$$

где $\phi = \mathbf{e}_{123}$, $\psi = \mathbf{e}_{124}$ – кватернионные единицы. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}_+(2, 4) = \\ = \left\{ s \in \left[\begin{array}{cc} \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^0 - i\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^3 & -\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^2 \\ \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^1 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^2 & \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^0 + i\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}^3 \end{array} \right] \mid N(s) = 1 \right\}. \quad (\text{Б.3}) \end{aligned}$$

Отображения пространства $\mathbb{R}^{1,3}$, генерируемые группой $SO_0(2, 4)$, индуцируют линейные преобразования твисторного пространства \mathbb{C}^4 , сохраняющие форму $\mathbf{Z}^\alpha \bar{\mathbf{Z}}_\alpha$ с сигнатурой $(+, +, -, -)$. Отсюда следует, что соответствующей группой в твисторном пространстве является $SU(2, 2)$ (группа псевдоунитарных унитарных 4×4 матриц, см. (Б.3)):

$$SU(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4 : \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \right\} \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F. The dubious role of the space-time continuum in microscopic physics // *Science Progress*. 1963. V. 51, № 204. P. 529–539.
2. Владимиров Ю.С. Проблема вывода классического пространства-времени из закономерностей физики микромира // *Метафизика*. 2015. № 2(16). С. 21–27.
3. Penrose R. The twistor programme // *Rep. Math. Phys.* 1977. V. 12. P. 65–76.
4. Penrose R., MacCallum M.A.H. Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time // *Physics Reports*. 1972. V. 6. P. 241–316.
5. Joos E., Zeh H.D., Kiefer C., Giulini D.J.W., Kupsch J., Stamatescu I.-O. *Decoherence and Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag, 2003.
6. Zurek W.H. Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical // *Rev. Mod. Phys.* 2003. V. 75. P. 715. arXiv:quant-ph/0105127 (2001).
7. Zurek W.H. Decoherence and the transition from quantum to classical – REVISITED. arXiv:quant-ph/0306072 (2003).
8. Гейзенберг В. *Физика и философия. Часть и целое*. М. : Наука, 1990.
9. Гейзенберг В. *Шаги за горизонт*. М. : Прогресс, 1987.
10. Фок В.А. Об интерпретации квантовой механики // *УФН*. 1957. Т. 62. С. 461–474.
11. Фон Нейман И. *Математические основы квантовой механики*. М. : Наука, 1964.
12. Jammer M. *The Philosophy of Quantum Mechanics*. Jhon Wiley & Sons, 1974.
13. Gelfand I., Neumark M. On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space // *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* 1943. V. 12(54). P. 197–217.
14. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 930–948.
15. Гейзенберг В. *Введение в единую полевую теорию элементарных частиц*. М. : Мир, 1968.
16. *Нелинейная квантовая теория поля*. М. : ИЛ, 1959.
17. Варламов В.В. Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // *Математические структуры и моделирование*. 2016. № 3(39). С. 5–23.
18. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // *Математические структуры и моделирование*. 2017. № 2(42). С. 11–28.
19. Nambu Y. An Empirical Mass Spectrum of Elementary Particles // *Prog. Theor. Phys.* 1952. V. 7. P. 595–596.
20. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // *Int. J. Theor. Phys.* 2001. V. 40. P. 769–805.
21. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 631. P. 187–191.
22. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // *Adv. Appl. Clifford Algebras*. 2015. V. 25. P. 487–516.
23. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа $Spin(4)$ и таблица Менделеева // *ТМФ*. 1971. Т. 9. С. 203–209.
24. Фет А.И. Конформная симметрия химических элементов // *ТМФ*. 1975. Т. 22. С. 323–334.
25. Фет А.И. *Группа симметрии химических элементов*. Новосибирск : Наука, 2010.

26. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986.
27. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987.
28. Buchholz D., Haag R. The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3674–3697.
29. Бройль Л. Революция в физике // Избранные научные труды. Т. 2: Квантовая механика и теория света: работы 1934-1951 годов. М.: МГУП, 2011. С. 177.
30. Segal I. A class of operator algebras which are determined by groups // Duke Math. J. 1951. V. 18. P. 221–265.
31. Ryder L. Quantum Field Theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.
32. Ahluwalia D.V., Ernst D.J. $(j, 0) \oplus (0, j)$ covariant spinors and causal propagators based on Weinberg formalism // Int. J. Mod. Phys. E. 1993. V. 2. P. 397–422.
33. Dvoeglazov V.V. Extra Dirac equations // Nuovo Cimento B. 1996. V. 111. P. 483–496.
34. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton : Princeton University Press, 1986.
35. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Физматлит, 1958.
36. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. М. : Физматлит, 1958.
37. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М. : Наука, 1969.
38. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М. : ИЛ, 1963.
39. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованные поля. М. : Наука, 1977.
40. Ван дер Варден Б.Л. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков : ОНТИ, 1938.
41. Yao Tsu. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2) // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 1931–1954.
42. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М. : Наука, 2009.
43. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576.
44. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
45. Варламов В.В. Комплексный момент и спин-зарядовое гильбертово пространство // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 5–22.
46. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. P. 5008–5045.
47. Varlamov V.V. Generalized Weierstrass representation for surfaces in terms of Dirac-Hestenes spinor field // J. Geometry and Physics. 2000. V. 32. P. 241–251.

ABOUT AXIOM SYSTEM OF NONLOCAL QUANTUM THEORY

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. An axiom system of nonlocal quantum theory is defined within Heisenberg-Fock conception. A notion of single quantum system lies in the ground of axiomatics. A generating kernel of this system is an abstract C^* -algebra. It is shown that different concrete realizations of the operator algebra depend on the structure of generators of the group of a fundamental symmetry (these generators are joined to energy operator). In the case of generators of the conformal group, we have a state spectrum defined within Rumer-Fet representation, that leads to a group-theoretical description of Mendeleev periodic system.

Keywords: single quantum system, Heisenberg-Fock conception, operator algebra, complex envelopes, conformal group, Mendeleev periodic system.

Дата поступления в редакцию: 20.07.2017

О ПРИТЯЖЕНИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А.Г. Гринь

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия для притяжения к нормальному закону определённого класса функций от зависимых случайных величин. Эти условия включают в себя так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, притяжение к нормальному закону, минимальные условия слабой зависимости.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f , то есть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждения, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Следуя [1], назовём $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $b_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ – целая часть x .

Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\eta_n \stackrel{d}{\sim} \theta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\eta_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [2, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ [2, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Всюду в настоящей работе $\{\xi_n\} = \{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ будет обозначать стационарную в узком смысле последовательность. Пусть $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону.

В статье [3] получены необходимые и достаточные условия (включающие в себя условия слабой зависимости) для стационарных последовательностей,

обеспечивающие притяжение сумм $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ к нормальному закону. В настоящей работе этот результат обобщён на случай, в котором вместо сумм S_n участвуют симметрические функции $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Пусть $1 \leq p < 2$, $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, $A_n = \mathbf{E}X_n$, $\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{1/p}$, $\widehat{X}_n = X_n - A_n$, $B_n(p) = \|\widehat{X}_n\|_p \cdot \|\mathcal{N}(0, 1)\|_p^{-1}$. Последовательностями вида $B_n(p)$ осуществляется масштабная нормировка в предельных теоремах о сходимости к нормальному закону для последовательностей, удовлетворяющих условию φ -перемешивания, сильного перемешивания и пр. (см., например, [4]).

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию (R_f) , если

$$\mathbf{E} \exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_n\} \cdot \mathbf{E} \exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_m\} \rightarrow 0, \quad (R_f)$$

$n + m \rightarrow \infty$ (символ $n + m \rightarrow \infty$ означает, что $n \rightarrow \infty$, а $m = m(n)$ — произвольная последовательность натуральных чисел).

Ясно, что условие (R_f) можно записать так:

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \stackrel{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_n}{B_{n+m}(p)} + \frac{\widehat{X}_m}{B_{n+m}(p)}, \quad n + m \rightarrow \infty, \quad (1)$$

(здесь и далее через $\widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\widehat{Y}_k \stackrel{d}{=} Y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$).

Если $B_n(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ и $\gamma_n = B_{n+m}^{-1}(p)(A_n + A_m - A_{n+m}) \rightarrow 0$, $n + m \rightarrow \infty$, то будем говорить, что выполнено условие нормировки (N) .

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$B_n^{-1}(p) \widehat{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

и выполнялось условие нормировки (N) , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R_f) , последовательность $\{B_n^{-p}(p) |\widehat{X}_n|^p\}$ была равномерно интегрируемой и при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} k \mathbf{P}\{|\widehat{X}_n| \geq \varepsilon B_{nk}(p)\} = 0. \quad (3)$$

Замечание 1. Данный результат обобщает теорему 1 из [3], в которой $X_n = S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, а условие (R_f) принимает вид

$$\frac{S_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \stackrel{d}{\sim} \frac{\widehat{S}_n}{B_{n+m}(p)} + \frac{\widehat{S}_m}{B_{n+m}(p)}, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad (R)$$

Условие (R) интерпретировалось в [3] как минимальное условие слабой зависимости, при котором последовательность S_n притягивается к нормальному закону. В настоящей работе условие (R_f) является не только условием слабой

зависимости, но и накладывает значительные ограничения на вид функции f , заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин.

В работе [5] получен аналогичный теореме 1 результат, дающий необходимые и достаточные условия для применимости центральной предельной теоремы к симметрическим функциям от зависимых величин, и аналог условия (R_f) интерпретировался там так же, как в настоящей статье.

Лемма 1. *Последовательность $\{B_n^2\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а B_n – правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$) тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$B_{n+m}^2 \sim B_n^2 + B_m^2, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Утверждение леммы доказано в [6].

Доказательство теоремы 1. Необходимость.

Пусть выполнены соотношение (2) и условие нормировки (N). Тогда

$$B_n^{-p}(p) |\widehat{X}_n|^p \xrightarrow{d} |\mathcal{N}(0, 1)|^p, \quad n \rightarrow \infty, \quad B_n^{-p}(p) \mathbf{E} |\widehat{X}_n|^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p.$$

Отсюда следует равномерная интегрируемость последовательности $\{B_n^{-p}(p) |\widehat{X}_n|^p\}$ (см., например, [7, теорема 5.4]). Далее, так как $B_{nk}(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ (условие (N)), то при любом натуральном k (не зависящем от n) $B_{nk}(p) \sim \sqrt{k} B_n(p)$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} k \mathbf{P} \left\{ |\widehat{X}_n| \geq \varepsilon B_{nk}(p) \right\} = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} k \mathbf{P} \left\{ |\mathcal{N}(0, 1)| \geq \varepsilon \sqrt{k} B_n(p) \right\} = 0. \end{aligned}$$

то есть выполняется условие (3).

Далее, из (2) следует, что при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{it B_n^{-1}(p)(X_n - A_n)\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left| \mathbf{E} \exp\left\{\frac{itX_{n+m}}{B_{n+m}(p)}\right\} - \mathbf{E} \exp\left\{\frac{itX_n}{B_{n+m}(p)}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{itX_m}{B_{n+m}(p)}\right\} \right|.$$

Как указывалось выше, выполнение соотношения $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ при любом $t \in \mathbf{R}$ равносильно условию (R_f) .

Поскольку $B_n^2(p)$ – правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$B_{n+m}^2(p) \sim B_n^2(p) + B_m^2(p), \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что

$$B_{n_2+m_2}^{-2}(p)B_{n_2}^2(p) \rightarrow c, \quad B_{n_2+m_2}^{-2}(p)B_{m_2}^2(p) \rightarrow 1 - c, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ ($c = 1$), то при $n \rightarrow \infty$

$$B_{n_2+m_2}^{-1}(p)(X_{n_2} - A_{n_2}) \rightarrow 0 \quad (B_{n_2+m_2}^{-1}(p)(X_{m_2} - A_{m_2}) \rightarrow 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{n_2+m_2} - A_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\} &\sim \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{ct^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(1-c)t^2}{2} \right\} \sim \\ &\sim \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{n_2} - A_{n_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\} \cdot \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{m_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью условия (N) получаем

$$\begin{aligned} \Delta(n_2) &= \left| \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{n_2+m_2} - A_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{n_2} - A_{n_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\} \cdot \mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{X_{m_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \right\} \exp \{ it \gamma_{n_2} \} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то есть выполнено условие (R_f) .

Достаточность.

Пусть теперь выполнены условия (R_f) и (3), а последовательность $\{B_n^{-p}(p) | \widehat{X}_n |^p\}$ равномерно интегрируема. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ | \widehat{X}_n | \geq NB_n(p) \right\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} | \widehat{X}_n |^p}{N^p B_n^p(p)} = \frac{\mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p}{N^p} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Из теоремы Прохорова (см., например, [7, с. 58]) следует теперь, что последовательность $\{B_n^{-1}(p) | \widehat{X}_n |\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$ такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} B_{n_1}^{-1}(p) | \widehat{X}_{n_1} | &\xrightarrow{d} \xi, \quad B_{m_1}^{-1}(p)(X_{m_1} - A_{m_1}) \xrightarrow{d} \eta, \\ B_{n_1+m_1}^{-1}(p)(X_{n_1+m_1} - A_{n_1+m_1}) &\xrightarrow{d} \zeta, \end{aligned} \tag{6}$$

где $m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и ζ – случайные величины. При этом поскольку последовательность $\{B_n^{-p} | \widehat{X}_n |^p\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E} |\xi|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n_1}^{-1} \mathbf{E} | \widehat{X}_{n_1} |^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p, \quad \mathbf{E} |\eta|^p = \mathbf{E} |\zeta|^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p,$$

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\zeta = 0. \quad (7)$$

Из ограниченных последовательностей

$$\alpha_{n_1} = \frac{B_{n_1}(p)}{\sqrt{B_{n_1}^2(p) + B_{m_1}^2(p)}}, \quad \beta_{n_1} = \frac{B_{m_1}(p)}{\sqrt{B_{n_1}^2(p) + B_{m_1}^2(p)}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_2} \rightarrow \alpha, \quad \beta_{n_2} \rightarrow \beta, \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}}{\sqrt{B_{n_2}^2(p) + B_{m_2}^2(p)}} &= \alpha_{n_2} B_{n_2}^{-1}(p) (\widehat{X}_{n_2} - A_{n_2}) + \\ &+ \beta_{n_2} B_{m_2}^{-1}(p) (\widehat{X}_{m_2} - A_{m_2}) \xrightarrow{d} \alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Понятно, что $\alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (1) и (6)

$$B_{n_2+m_2}^{-1}(p) (\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2+m_2}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [2, с. 216] из (8) и (9) вытекает

$$\frac{\sqrt{B_{n_2}^2(p) + B_{m_2}^2(p)}}{B_{n_2+m_2}(p)} \rightarrow C_1, \quad \frac{A_{n_2+m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \rightarrow C_2, \quad 0 < C_1, C_2 < \infty. \quad (10)$$

Из (8) и (10) выводим, что вместе с последовательностями $\{B_{n_2}^{-p}(p) |\widehat{X}_{n_2} - A_{n_2}|^p\}$ и $\{B_{m_2}^{-p}(p) |\widehat{X}_{m_2} - A_{m_2}|^p\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{B_{n_2+m_2}^{-p}(p) |\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2+m_2}|^p\}$ и из (9) получаем теперь

$$\gamma_{n_2} = B_{n_2+m_2}^{-1}(p) (A_{n_2+m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}) \rightarrow \mathbf{E}\zeta = 0.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\gamma_{n_2} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\gamma_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $n = km + l$, $0 \leq l < n$. Из условия (R_f) и того, что $\gamma_n \rightarrow 0$, следует: если последовательность $k = k(n)$ растёт достаточно медленно, то

$$B_n^{-1}(p) \widehat{X}_n \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k Y_j(m) + Z(l), \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где $Z(l)$, $Y_j(m)$, $j = 1, \dots, k$ – независимые случайные величины и $Y_j(m) \stackrel{d}{=} B_n^{-1}(p) \widehat{X}_m$, $Z(l) \stackrel{d}{=} B_n^{-1}(p) \widehat{X}_l$. Аналогично (6) можно показать, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_1\}$ такая, что

$$B_n^{-1}(p) \widehat{X}_n \xrightarrow{d} \xi, \quad B_{m_k}^{-1}(p) \widehat{X}_{m_k} \xrightarrow{d} \eta, \quad \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = 0, \quad \mathbf{E}|\xi|^p = \mathbf{E}|\eta|^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0, 1)|^p, \quad (12)$$

а аналогично (10) —

$$B_{n_1}^2(p) \sim C_3(k_1 B_{m_1}^2(p) + B_{l_1}^2(p)), \quad B_{k_1 m_1}^2(p) \sim C_4(k_1 B_{m_1}^2(p)),$$

$$B_{m_1}^2(p) \sim C_5(B_{l_1}^2(p) + B_{m_1-l_1}^2(p)) \geq C_4 B_{l_1}^2(p), \quad 0 < C_3, C_4, C_5 < \infty, \quad (13)$$

$k_1 = k(n_1)$, $m_1 = m(n_1)$, $l_1 = l(n_1)$. Из (13) следует, что $B_{n_1}^{-1}(p) B_{l_1}(p) \rightarrow 0$, $B_{n_1}^2 \sim C_3 C_4^{-1} B_{k_1 m_1}^2(p)$ $n \rightarrow \infty$, и поэтому

$$\mathbf{P}\{|Z(l_1)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}|\widehat{X}_{l_1}|^p}{B_{n_1}^p(p)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть $Z(l_1) \rightarrow 0$ по вероятности, так что

$$\sum_{j=1}^{k_1} Y_j(m_1) \xrightarrow{d} \xi, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Далее, из (3) и (13) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_1} \mathbf{P}\{|Y_j(m_1)| \geq \varepsilon\} &= k_1 \mathbf{P}\{|\widehat{X}_{m_1}| \geq \varepsilon B_{n_1}(p)\} \sim \\ &\sim k_1 \mathbf{P}\{|\widehat{X}_{m_1}| \geq \varepsilon \sqrt{C_3 C_4^{-1} B_{k_1 m_1}(p)}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что ξ имеет нормальное распределение [2, с. 330], а поскольку

$$\mathbf{E}\xi = 0, \quad \mathbf{E}|\xi|^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0, 1)|^p,$$

то $\xi \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$. Таким образом, из любой подпоследовательности последовательности $\{B_n^{-1}(p) \widehat{X}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по распределению к $\mathcal{N}(0, 1)$. Это означает, что выполняется (2).

Из (2) следует, что в соотношениях (6) $\xi \stackrel{d}{=} \eta \stackrel{d}{=} \zeta \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$ и в (8) $\alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$, поэтому в (10) $C_1 = 1$, то есть

$$\delta_{n_2} = B_{n_2+m_2}^{-2}(p) (B_{n_2}^2(p) + B_{m_2}^2(p)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\delta_{n_2} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и в силу леммы 1 $\{B_n^2(p)\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
2. Лозэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
3. Гринь А.Г. О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.
4. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и её примен. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
5. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 5–11.
6. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977. 351 с.

ON THE ATTRACTION OF SYMMETRIC FUNCTIONS FROM DEPENDENT VARIABLES TO THE NORMAL LAW**A.G. Grin'**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The necessary and sufficient conditions for attracting a certain class of functions from dependent random variables to a normal law are obtained. These conditions include the so-called minimal conditions of weak dependence.

Keywords: symmetric functions of random variables, attraction to the normal law, minimal conditions of weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 10.10.2017

ОСНОВАНИЕ МИРА МИНКОВСКОГО КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ: К ОТВЕТУ НА ВОПРОС РИМАНА

И.А. Еганова¹

к.ф.-м.н., с.н.с. ИМ СО РАН, e-mail: eganova@math.nsc.ru

В. Каллис²

к.ф.-м.н., Dr. rer. nat., гл.н.с. ЛИТ ОИЯИ, e-mail: wkallies@jinr.ru

¹Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение РАН,
Новосибирск, Россия

²Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных
исследований, Дубна, Россия

Аннотация. Поднимается известный вопрос Б. Римана — о «внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве» — по отношению к Миру событий. Показана актуальность этого вопроса для пространства-времени: его решение выявляет основание Мира Минковского, приводит к новым представлениям о взаимосвязях в Мире событий и принципиально новым способам исследований. Осуществлённый концептуальный обзор развития подхода А.Д. Александрова к вопросу Римана ведётся по плану: **1.** Показано, что подход Александрова завершает определённую последовательность работ в истории Мира событий, а именно: Г. Минковского, А.А. Фридмана и Н.А. Козырева. **2.** Установлено, что на основе анализа способов измерения времени в работах Фридмана и Дж.Л. Синга и решения Дж.Дж. Уитроу проблемы стандартных часов является *априорная взаимосвязь* одновременных мировых событий, которая может обуславливать метрику Мира событий. **3.** Принято во внимание, что суть процессов, используемых при измерении времени, указывает путь к нахождению возможности наблюдения определённого явления, которое связано с данной априорной взаимосвязью. Получено математическое соотношение, показывающее, что этим явлением выступает воздействие внешних необратимых процессов на внутреннее состояние сложных систем любого происхождения, которое изучено в работах Козырева и обосновывает представления И. Пригожина о «конструктивной» роли необратимых процессов в мироздании. **4.** Рассматриваются соответствующие результаты астрономических наблюдений и перечисляются открывшиеся возможности для междисциплинарных исследований.

Ключевые слова: Мир Минковского, Мир событий, пространство-время, метрика пространства-времени, измерение временных интервалов, проблема стандартных часов, необратимые процессы.

1. Введение

В своей знаменитой вступительной лекции в Гёттингене «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» 10 июня 1854 года¹ Б. Риман выделил, в частности, фундаментальнейший гносеологический вопрос — о «внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». Причём он сразу указал, что решение этого вопроса выходит за пределы геометрии: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике» [1, с. 32–33]. У Римана речь идёт об обычном геометрическом пространстве, а особо интригующе звучит этот вопрос, когда он адресуется к Миру Минковского (Миру событий, пространству-времени) — к современной четырёхмерной модели физической реальности в физической теории. В этом случае вопрос Римана касается причины, обуславливающей единую геометрию для пространства и времени. (Мы увидим, что фактически речь идёт о природе априорной, т.е. «врождённой», причинной взаимосвязи четырёхмерных событий, «скрывающейся» за метрикой пространства-времени.) К сожалению, исторически сложилось так, что, хотя современная математическая модель объективной реальности была публично провозглашена Г. Минковским 21 сентября 1908 года в его ярком докладе «Пространство и время» [2], этот вопрос Римана, даже по отношению к пространству, в случае пространства-времени не задавался и не исследовался все последующие почти семьдесят лет. Он возник только в работах А.Д. Александрова (см., например, [3]), где автор обратил внимание на вопрос Римана и, проанализировав ситуацию и углубив господствующие представления о пространстве-времени, предложил *философско-физический* подход к нему. Цель предлагаемой статьи — дать концептуальный обзор работ, которые фактически развили подход Александрова к вопросу Римана по отношению к пространству-времени и привели к новым физическим представлениям. Другими словами, вскрыть физическое основание Мира Минковского как математической структуры и тем самым показать, почему далеко не безразлично, на какие представления о сущности Мира событий опирается та или иная физическая теория. В следующем разделе, п. 2, показано, что подход Александрова завершает определённую историческую линию в развитии представлений о Мире событий. В п. 3 известные отдельные заключения и математические результаты складываются в единую цепь, выявляющую причинную физическую взаимосвязь четырёхмерных событий, принадлежащих одному и тому же моменту времени (т.е. с одной и той же временной координатой).

Дать чисто *физический* ответ на вопрос Римана по отношению к Миру событий означает указать определённое наблюдаемое физическое явление, которое связано с существованием метрики пространства-времени, т.е. чётко указать, где и при каких условиях будет наблюдаться определённое явление, какие физические свойства будут ему присущи. Таким явлением оказалось явление несилового иницирующего дистанционного влияния внешних необрати-

¹Впервые эта лекция была опубликована в 1868 году: Riemann B. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen // Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Bd. 13, 1868, S. 133–152, см. [1].

мых процессов любой природы на внутреннее состояние сложных структурированных систем любого происхождения. С помощью этого явления Н.А. Козыревым был предложен новый метод астрономических наблюдений, который позволил наблюдать реалии Мира событий. В п. 4. результаты этих наблюдений сопоставляются свойствам структуры Мира Минковского. В заключении, п. 5, подводятся итоги и указываются новые возможности для экспериментальных исследований причинных связей в Мире событий, на которые указал Александров в предложенном им определении пространства-времени.

2. Необходимый экскурс в историю Мира событий

По-видимому, А.А. Фридман был единственным из современников создателей специальной теории относительности, кто проникся необходимостью анализа Мира событий как математической модели физической реальности. В его книге [4] «Мир как пространство и время» (1923) был дан наглядный анализ основополагающих физических категорий — пространства, времени и движения, что существенно обосновало Путь, провозглашённый в 1908 году Минковским. Таким образом, только Фридман взялся за продолжение Дела Минковского, который так быстро — через три с половиной месяца после своего знаменитого доклада — преждевременно ушёл в лучший мир. Возможно, именно поэтому физики, за немногими исключениями, восприняли и усвоили пространство-время номинально, чисто формально, не распознав его сущности, только как некий математический формализм, что справедливо подверг критике Александров в статье [3]. Тем самым была проигнорирована и позиция самого А. Эйнштейна: известно, что в своей лекции о сущности теории относительности [5] в 1921 году в Принстоне он не только высоко оценил вклад Минковского и его роль в создании специальной теории относительности, но также ясно выразил своё мнение о Мире событий как *физической реальности*. К сожалению, и поныне широко распространено мнение о пространстве-времени как удобном, но воображаемом, фиктивном математическом формализме². Поэтому аксиоматический подход к теории относительности в работах Александрова, которому посвящена монография А.К. Гуца [8], анализ специальной теории относительности [9], проведённый в 1980-х годах А.А. Логуновым, и детальное рассмотрение четырёхмерного Мира Минковского [10] А.А. Сазановым были насущно необходимы, и они по-прежнему актуальны. И несомненно, весьма актуально продолжающееся переиздание и перевод на другие языки книги Фридмана [4] (см., например, [11]). Эта книга особо выделяется своим отношением к временному аспекту объективной реальности; в ней рассмотрены главные вопросы, относящиеся ко времени: время как сердцевина Мира событий, как особый аспект объективной реальности.

Во-первых, Фридман показал, что сердцевина физической сущности преобразования Лоренца заключена в идее о времени как равноправной координате в системе отсчёта. В этом статусе оно не может отличаться от пространственных

²Как показано в статье [6] одного из авторов (В.К.), этому весьма поспособствовало соглашение учёных, принятое на «Мюнхенской религиозной беседе», см. также [7, с. 241].

координат. Это означает, что *временная координата обладает объективной реальностью так же, как пространственные координаты, и Мир событий есть математическая модель физической реальности*. Во-вторых, что особо важно, Фридман не отождествляет временную координату с пространственными, имея в виду их *функциональное различие в мироздании*. Так, его анализ пространства как аспекта объективной реальности заканчивается чётким выводом: «Итак, мы совершенно не можем производить физические действия, нужные для экспериментального установления физической геометрии в трёхмерном пространстве; для нас эти действия столь невозможны, сколь невозможны для нас физические действия в двумерном пространстве, где нельзя поместить наших приборов и где мы не можем поместиться сами. Причина этих затруднений — *время*, без которого нет пространства и которое обуславливает не физическое трёхмерное пространство, а физическое четырёхмерное пространство — мир» [4, с. 47–48].

Если мы восприняли и поняли, что Мир событий есть объективная реальность, тогда перед нами немедленно раскрывается новое поле деятельности для наших исследований.³ По логике вещей два органически связанных, содействующих друг другу аспекта физической реальности — пространственный и временной — должны играть разную роль в мироздании. Временной аспект не копирует пространственный — он имеет своё функциональное назначение и, соответственно, свои специфические свойства, так что весьма привлекательно и необходимо их изучать.

Итак, для Фридмана время не растворяется в многомерном пространстве, и он начинает обсуждать особые свойства временной координаты и в результате выдвигает как чрезвычайно важную новую физическую проблему — *проблему возвращения времени его исключительного положения в физике, связанного с ключевым свойством мироздания — с причинностью*. Он сразу же предлагает определённый теоретико-математический подход к этой проблеме. К сожалению, предложенный Фридманом подход к сформулированной им важнейшей проблеме не состоялся — вскоре он, подобно Минковскому, преждевременно уходит из жизни.

Дело Минковского–Фридмана было продолжено только спустя тридцать лет Н.А. Козыревым — в его теоретических и экспериментальных исследованиях физических свойств времени, времени как аспекта физической реальности (см. [12]). Насущную целесообразность таких исследований он узрел независимо в результатах своего анализа и синтеза многочисленных наблюдательных данных астрономии в поиске пути решения фундаментальной астрономической проблемы — об источниках звёздной энергии [12, с. 71–154]⁴. В своих астрофизических изысканиях Козырев увидел, что необходимо рассматривать про-

³О чём Минковский заявил в самом начале своего доклада: о силе предлагаемых новых воззрений на пространство и время и о их радикальной тенденции.

⁴Детальный концептуальный анализ этого фундаментального исследования в двух частях, опубликованных в 1948 и 1951 годах, а также критика позиции его оппонентов имеются в монографии [13] одного из авторов (И.Е.). Заметим, что в 2005 году в статье [14] был опубликован английский перевод этого исследования Козырева.

странство и время как два органически, врождённо взаимосвязанных аспекта реальности; причём пространство играет пассивную роль, тогда как время играет активную роль в мироздании, связанную с фундаментальным свойством мироздания — с причинностью.

Таким образом, исторически сложилось так, что фактически Козырев обратился к проблеме, выдвинутой Фридманом, и разрешил её, ибо его теоретические и экспериментальные физические исследования действительно вернули времени его исключительное положение в физике, связанное с причинностью, — им были успешно заложены основы причинной или несимметричной механики [12, с. 232–312] (см. также [13, с. 87–136]). Подчеркнём, что причинная механика не является альтернативой классической механике, она только дополняет её принципом причинности и представлениями о свойствах временного аспекта, связанных с причинностью.

Наконец, вслед за созданием (1959) причинной или несимметричной механики в арсенале теоретических средств физики появляется сформулированное Александровым на основе философского определения пространства-времени как формы существования материи его физическое определение, в котором причинность фигурирует явным образом [3, с. 135] (см. также [8, с. 66]): *«Пространство-время есть множество всех событий в мире, отвлечённое от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие»*. Добавим, что то, что данное определение пространства-времени действительно возможно в рамках теории относительности, было доказано Александровым чисто математически [15].

Определение пространства-времени, предложенное Александровым, фактически уже содержит в себе ответ на вопрос Римана (и по отношению к пространству, и по отношению к пространству-времени), ибо указывает, что структуру пространства-времени формируют отношения воздействия, т. е. причинные отношения в мироздании, а все метрические отношения задаются структурой: *«Отношения воздействия, определяя структуру пространства-времени, определяют вместе с ней и геометрию — метрику пространства»* [3, с. 137].

Чтобы теперь извлечь какую-либо конкретную информацию о характере воздействий, обуславливающих метрику пространства-времени, следует опереться на особые свойства времени, поскольку именно оно (а не пространство!) является, как показал Фридман в [4], сердцевинной Мира событий, и на определение пространства-времени, сформулированное Александровым. Такой подход мы продемонстрируем в следующем разделе.

3. Априорная взаимосвязь одновременных мировых событий

В анализе понятия длительности, т. е. временного интервала между событиями, Фридман прежде всего выделил и подчеркнул исключительное обстоятельство, а именно: в отличие от остальных физических величин длительность измеряется не напрямую, а через посредство использования некоторого реаль-

ного «движения» (например, процесса), которое может играть роль «часового механизма». Поскольку не любое движение (процесс) является таковым, он предложил именовать движение (процесс), которое может использоваться в приборе для измерения времени (т. е. часах), *основным*.

Допустим, некоторый процесс λ принадлежит классу основных процессов. Определим меру длительности, следуя Дж. Л. Сингу [16, гл. III, § 2]: в качестве пробной⁵ меры длительности будем рассматривать ключевую характеристику процесса λ , которую будем обозначать через τ_λ . Т. е., если событию i соответствует значение этой характеристики, равное $\tau_\lambda(i)$, а событию j — $\tau_\lambda(j)$ (для определённости пусть $i \prec j$, где знак \prec означает «предшествует»), временному интервалу между событиями i и j ставится в соответствие произошедшее за этот промежуток времени изменение величины этой характеристики

$$\tau_\lambda(i) - \tau_\lambda(j) \equiv \tau_\lambda(i, j) \quad \forall i \prec j.$$

Синг справедливо полагает, что такая мера в силу своей произвольности не имеет глубокого физического смысла и понятие длительности следует связывать с существованием «стандартных» (например, «атомных») часов. Таким образом, оказывается, что понятие длительности основывается на неких стандартных процессах, поэтому естественно возникает вопрос об обосновании объективного выбора этих стандартных процессов (обсуждение этого вопроса (1960) см. в [16, с. 99–101]). Вскоре, в 1961 году, Дж. Дж. Уитроу предложил оригинальный подход к проблеме стандартных часов, который даёт возможность чисто математически обнаружить причинную взаимосвязь, которая способна обуславливать структуру пространства-времени. Укажем узловые моменты подхода Уитроу.

Рассматривая проблему стандартных часов, Уитроу [17, гл. III, § 8] выделил главный момент в измерении времени: *мера длительности, которая состоит из двух последовательных длительностей, должна быть равна арифметической сумме их мер*. Данное заключение отражает сложившиеся представления об аддитивности временных промежутков:

$$t(i, j) + t(j, k) = t(i, k) \quad \forall i \prec j \prec k, \quad (1)$$

где $t(a, b)$ — истинная мера длительности между событиями a и b , $a \prec b$.

Далее Уитроу исходит из того очевидного факта, что при использовании некоторой пробной меры τ_λ может оказаться, что

$$\tau_\lambda(i, j) + \tau_\lambda(j, k) \neq \tau_\lambda(i, k) \quad \forall i \prec j \prec k. \quad (2)$$

(Например, когда в качестве основного процесса λ использовался бы процесс радиоактивного распада и в качестве τ_λ фигурировала бы доля распавшихся атомов [17, гл. III, § 8].) И чтобы выяснить, чем же стандартный основной процесс отличается от не стандартного, Уитроу предлагает для пробной меры,

⁵Речь может идти только о *пробной*, а не *истинной* мере, поскольку предварительно необходимо соответствующим образом обосновать выбор процесса λ .

при которой имеет место неравенство (2), рассмотреть возможность введения специального временного сложения \oplus , удовлетворяющего условию (1):

$$\tau_\lambda(i, j) \oplus \tau_\lambda(j, k) = \tau_\lambda(i, k) \quad \forall i \prec j \prec k. \quad (3)$$

На этом пути ему удалось чисто аналитически показать, что временное сложение (3) определяется формулой

$$\tau_\lambda(i, j) \oplus \tau_\lambda(j, k) = \varphi_\lambda^{-1}\{\varphi_\lambda(\tau_\lambda(i, j)) + \varphi_\lambda(\tau_\lambda(j, k))\} \\ \forall i \prec j \prec k, \quad (4)$$

где φ_λ — соответствующая процессу λ монотонная функция одной переменной, φ_λ^{-1} — обратная функция. При этом он основывался только на бесспорных общеизвестных свойствах временных промежутков: на их коммутативности, т. е.

$$\tau_\lambda(i, j) \oplus \tau_\lambda(j, k) = \tau_\lambda(j, k) \oplus \tau_\lambda(i, j) \quad \forall i \prec j \prec k,$$

и ассоциативности относительно сложения, т. е.

$$\tau_\lambda(i, j) \oplus (\tau_\lambda(j, l) \oplus \tau_\lambda(l, k)) = (\tau_\lambda(i, j) \oplus \tau_\lambda(j, l)) \oplus \tau_\lambda(l, k) \\ \forall i \prec j \prec l \prec k.$$

Формула (4) указывает, что, в принципе, каждый основной процесс λ может быть использован как стандартный с помощью меры

$$t(i, j) = \varphi_\lambda(\tau_\lambda(i, j)) \quad \forall i \prec j,$$

которая удовлетворяет условию (1) и является истинной мерой длительности между событиями i и j , будучи, как было показано [17, гл. III, § 8], *единственной* с точностью до мультипликативной константы, т. е. для любого основного процесса λ в общем виде

$$t(i, j) = C_\lambda \cdot \varphi_\lambda(\tau_\lambda(i, j)) \quad \forall i \prec j, \quad (5)$$

где C_λ — масштабный множитель для основного процесса λ .

Таким образом, Уитроу разрешил проблему стандартных часов: *стандартные часы — это часы с аддитивной шкалой*; если пробная мера τ_λ , выбранная при использовании основного процесса λ , не удовлетворяет условию (1), мы всегда можем однозначно до масштабного множителя отобразить её с помощью функции φ_λ на аддитивную меру (5).

Как уже упоминалось, подход Уитроу к проблеме стандартных часов открыл возможность обнаружить априорную взаимосвязь событий, принадлежащих одному моменту времени [18]. Действительно, рассмотрим ряд основных процессов λ, μ, ν, \dots , которым соответствуют истинные меры длительности $C_\lambda \varphi_\lambda(\tau_\lambda), C_\mu \varphi_\mu(\tau_\mu), C_\nu \varphi_\nu(\tau_\nu), \dots$, где $C_\lambda, C_\mu, C_\nu, \dots$ — масштабные факторы, соответствующие процессам λ, μ, ν, \dots . Принимая во внимание объективную

реальность и универсальность времени, т. е. независимость измеренной величины длительности между любыми событиями i и j от механизма $(\lambda, \mu, \nu, \dots)$ измеряющих её стандартных часов (разумеется, в одной и той же системе отсчёта), следует сделать вывод, что должно иметь место соотношение

$$C_\lambda \varphi_\lambda(\tau_\lambda(i, j)) = C_\mu \varphi_\mu(\tau_\mu(i, j)) = C_\nu \varphi_\nu(\tau_\nu(i, j)) = \dots \quad \forall i \prec j. \quad (6)$$

Соотношение (6) означает, что все основные процессы λ, μ, ν, \dots , которые фигурируют в измерениях как независимые, в действительности не протекают абсолютно независимо: они «согласованы», т. е. имеется *априорная взаимосвязь* их ключевых характеристик $\tau_\lambda, \tau_\mu, \tau_\nu, \dots$, которая не связана с явлением «распространения действия» в пространстве⁶, а обусловлена их *общим существованием во времени*. Фактически эта взаимосвязь свидетельствует о едином осуществлении («течении») основных процессов, которое в философии ассоциируется с понятием о едином Мировом процессе. Как видим в (6), данная взаимосвязь относится к временному аспекту и охватывает одновременные мировые события. Во временном аспекте нет «распространения» (как и нет «расстояний») — весь Мир проецируется на ось времени в одну временную точку — так что априорная связь (6) может рассматриваться как «мгновенное» действие, или действие на расстоянии. Именно такая априорная взаимосвязь способна обеспечить метрику пространства-времени.

Естественно, немедленно возникает вопрос: «Как мы можем выявить существование такой априорной взаимосвязи в наших наблюдениях?» В принципе, обнаруживается следующий путь: следует обратить внимание на необратимые процессы, поскольку они относятся к классу основных процессов, точнее — на внешние необратимые процессы и сложные системы, которые имеют внутреннюю структуру и пребывают в различных внутренних состояниях. В таких системах имеются соответствующие внутренние необратимые процессы, поэтому должно наблюдаться иницирующее влияние на внутреннее состояние сложных систем со стороны внешних необратимых процессов.

Таким образом, на основе заключений Фридмана и Синга о возможных способах измерения временных интервалов и решения проблемы стандартных часов Уитроу выявляется априорная взаимосвязь одновременных мировых событий, которая способна обуславливать метрику пространства-времени, и может быть указано физическое явление, которое должно быть связано с его структурой. В следующем разделе будут рассмотрены наглядные экспериментальные подтверждения этих выводов.

4. Примеры проявления структуры Мира событий

Иницирующая роль внешних необратимых процессов в мироздании капитально обсуждалась в монографии И. Пригожина [19]. Его общетеоретические

⁶Пример подобной взаимосвязи можно увидеть в физическом явлении, которое скрывается за известным в физике частиц принципом Паули.

рассуждения являются действительно значимыми в свете многочисленных экспериментальных результатов Козырева, который за двадцать лет до появления идей Пригожина о «конструктивной роли» необратимых процессов в возникновении, существовании и эволюции сложных систем, «о времени и сложности в физических науках» обнаружил и целенаправленно исследовал фундаментальнейшее физическое явление — явление дистанционного воздействия внешних необратимых процессов на состояние вещества сложных систем вплоть до изменения свойств вещества и протекающих в нём явлений (см. [12, с. 165–190, 363–383, 385–400]).

Согласно выводам п. 3, за этим, по своей сути не силовым, воздействием⁷ стоит априорная (постоянная и непрерывная) взаимосвязь одновременных мировых событий. Если действительно априорная взаимосвязь ключевых характеристик основных процессов, принадлежащих одному моменту времени, — физическая реальность, то при ориентации соответствующего телескопа на *истинное* положение звезды (или звёздной системы) необратимые процессы, происходящие в звезде, должны незамедлительно вызывать изменение состояния материальной системы, находящейся в фокальной плоскости телескопа [13, с. 138]. Например, если в качестве системы, т. е. датчика, используется некоторый резистор, должна измениться его физическая характеристика, т. е. сопротивление. Так что, сканируя на небесной сфере суточную параллель звезды или звёздной системы в окрестности её видимого положения, мы можем реакцией такого датчика зарегистрировать её *истинное* положение. Причем, измеряя угловое расстояние $\Delta\alpha$ между направлением на видимую звезду⁸ и тем направлением телескопа, в котором датчик даёт реакцию, можно проверить интерпретацию этого направления как *направления именно на истинную звезду* с помощью следующих формул, которые определяют тригонометрический параллакс звезды π в секундах дуги (см. рис. 1):

$$\pi = \frac{1 \text{ а. е.}}{1 \text{ год}} \cdot \frac{\mu_\alpha}{c \Delta\alpha_\odot} = 3,26 \frac{\mu_\alpha}{\Delta\alpha_\odot}, \quad (7)$$

$$\Delta\alpha_\odot = \Delta\alpha - A_\alpha, \quad (8)$$

где c — скорость света в вакууме, μ_α — собственное движение звезды по прямому восхождению α , а $\Delta\alpha_\odot$ — угловое расстояние между видимой и истинной звёздой по прямому восхождению, отнесённое к Солнцу, а A_α — разность

⁷Пользуясь терминологией кибернетики, его (как и воздействие, скрывающееся за упомянутым принципом Паули) следует рассматривать как информационное (ср. с термином «информационный процесс»). В связи с этим обратим внимание на главный принцип существования сложных структурированных систем (П.К. Анохин, см., например, [20, с. 51]): самым существенным фактором в организации целостной системы является циркуляция в ней информации; только благодаря непрерывному обмену информацией между отдельными частями системы может осуществляться их организованное взаимодействие, заканчивающееся полезным эффектом.

⁸Заметим, что поскольку в исследуемом явлении отсутствует «носитель» воздействия — данная взаимосвязь априорная (т. е. «врождённая»), для неё явление рефракции отсутствует. Поэтому целесообразно наблюдать звезду, когда она находится в меридиане и рефракция её света будет ничтожной, тогда не требуется учитывать соответствующие поправки на рефракцию в формуле (8).

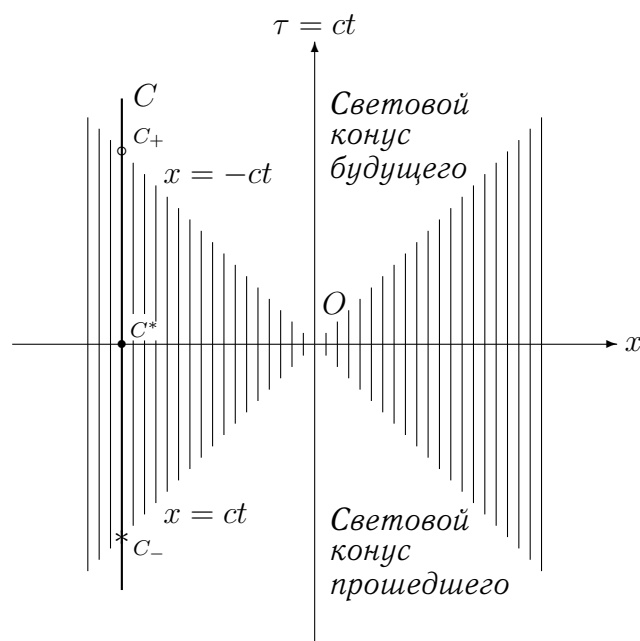


Рис. 2. Сечение светового конуса плоскостью (x, τ) . Обозначения: O — наблюдатель на Земле, C — мировая линия звёздного объекта (звезда или звёздная система), C_-, C^* и C_+ — события «Видимый», «Истинный» и «Симметричный звёздный объект»

соответствуют двум событиям, находящимся на световом конусе¹⁰, а именно:

1. Когда телескоп направлен на проекцию на небесную сферу четырёхмерного события C_- (см. рис. 2) — это положение объекта в прошлом, в момент, когда им был испущен свет, достигший Земли в момент наблюдения ($N.V!$: это положение на небесной сфере отличается по положения видимого объекта на величину рефракции на момент наблюдения).

2. Когда телескоп направлен на проекцию на небесную сферу четырёхмерного события C_+ (см. рис. 2) — это положение объекта в будущем, в момент, когда его достигнет световой сигнал, испущенный с Земли в момент наблюдения.

Действительно, Козырев сразу обнаружил эти две реакции своего датчика¹¹ и на этой основе сделал заключение о физической реальности геометрии Минковского [26]. Здесь имеет смысл заметить, что Мир Минковского лежит в основе релятивистской теории гравитации Власова–Логунова–Мествиришвили [27].

Для полученного заключения о реальности геометрии Минковского весьма наглядны и доказательны следующие результаты сканирования суточной

¹⁰Напомним, что события на световом конусе относятся к одному и тому же моменту времени.

¹¹При наблюдении реакции датчика на проекцию события «Видимая звезда» в случае, когда рефракция ничтожна и эта проекция совпадает с видимой звездой, чтобы снять вопрос о влиянии светового излучения на датчик, он проводил наблюдения при закрытой апертуре телескопа дюралевой диафрагмой.

параллели такого протяжённого крупномасштабного звёздного объекта как туманность Андромеды (галактика М 31) [28] (см. [13, с. 160–166]):

- наблюдались три реакции датчика на проекции протяжённых событий «Видимая М 31», «Истинная М 31» и «Симметричная М 31»;
- одновременный визуальный контроль с помощью визирного приспособления, который осуществлялся во время этого наблюдения, не обнаружил какого-либо небесного объекта, который бы проецировался на чувствительный элемент датчика во время записи профилей проекций событий «Истинная М 31» и «Симметричная М 31»;
- размер профилей проекций протяжённых событий «Истинная М 31» и «Симметричная М 31» по прямому восхождению и по склонению соответствует размерам туманности Андромеды;
- угловые расстояния и между проекциями событий «Видимая М 31» и «Истинная М 31», и между проекциями событий «Истинная М 31» и «Симметричная М 31» составляют $(188 \pm 2)''$ по прямому восхождению и $(34 \pm 2)''$ по склонению, что соответствует принятым данным наблюдений по этой галактике;
- *N. V!*: угловое расстояние между проекцией события «Видимая М 31» и видимой М 31 было порядка $23''$ по склонению, что соответствует значению рефракции видимого положения этого небесного объекта на момент наблюдения — это значение равно $23,6''$;
- наконец, структура всех трёх профилей имеет одну и ту же особенность — в центре галактики имеет место уменьшение реакции датчика, что соответствует карте распределения нейтрального водорода в туманности Андромеды, полученной с помощью наблюдательных данных [29]; оно оказалось подобным гигантскому пончику с дыркой в центре вместо ожидаемого дископодобного распределения, которое соответствует распределению звёзд в этой галактике.

Таким образом, имеются данные астрономических наблюдений, которые демонстрируют физическую реальность Мира событий Минковского, — козыревский датчик даёт реакцию на проекции на небесную сферу соответствующих событий, которые ещё не наступили (события «Симметричная звезда», «Симметричная звёздная система») и которые уже состоялись (события «Видимая звезда», «Видимая звёздная система») и которые не совпадают с видимым небесным объектом. Эти факты должны напомнить утверждение Эйнштейна, что ни точка в пространстве и ни момент во времени, когда что-либо произошло, не обладают физической реальностью, а только само событие [5, с. 25].

5. Заключение

Подведём итоги. В целом предложенный концептуальный обзор показал, что развитие представлений о пространстве-времени как о математической структуре, обусловленной причинными отношениями (которые являются её основанием), выводят на обнаружение существенно новых физических взаимосвязей

и соответствующих им явлений. Главное достижение, полученное на этом пути, — создание принципиально нового метода астрономических наблюдений. Он открывает следующие заманчивые перспективы:

- возможность экспериментального исследования структуры пространства-времени, прежде всего его метрических отношений;
- возможность экспериментального исследования с помощью соответствующих телескопов влияния космических процессов и явлений на существование и развитие наземных структурированных систем (физических, биологических, геологических);
- возможность получения принципиально новой астрономической информации, не связанной с каким-либо излучением, распространяющимся в пространстве и поставляющим информацию из далёкого прошлого, а получение доступа к информации, которая относится к ранее недоступным моментам.

Наконец, этот метод астрономических наблюдений весомо подтвердил важное гносеологическое утверждение Эйнштейна о том, что физической реальностью обладает именно точка пространства-времени, а не точка пространства сама по себе и не сам момент времени, когда что-либо произошло, что полностью соответствует определению пространства-времени как математической модели физической реальности, другими словами — как формы существования материи, из чего и исходил Александров.¹²

ЛИТЕРАТУРА

1. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М. : Мир, 1979. С. 18–33.
2. Минковский Г. Пространство и время // УФН. 1959. Т. 69, вып. 2. С. 303–320.
3. Александров А.Д. О содержании теории относительности // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. М. : Наука, 1979. С. 117–137.

¹²Так что в наших экспериментах и наблюдениях мы должны знать, что наша система отсчёта, строго определённая, состоит из отдельной мировой линии (наземный наблюдатель) и ортогональной триады четырёхмерных векторов, ортогональных к ней [16, гл. III, § 5]. Три взаимноортогональных единичных вектора, которые формируют нашу «пространственную» систему отсчёта, на самом деле суть те самые четырёхмерные векторы (пространственноподобные), которые ортогональны единичному касательному (к мировой линии наблюдателя) времениподобному вектору. С помощью реакции сложных систем на необратимые процессы в звёздах и звёздных системах мы можем наблюдать проекции на небесную сферу определённых точек Мира событий как образы соответствующих небесных тел. Геометрия астрономических наблюдений для риманова пространства-времени была детально разработана Сингом [16]. Геометрия солнечных наблюдений для пространства-времени Минковского аналогичным образом рассмотрена в монографии [13]. В отличие от звёздных наблюдений наблюдения с помощью солнечных телескопов происходят в системе отсчёта наземного наблюдателя, где проекция на небесную сферу события «Истинное Солнце» и местоположение самого Солнца различаются на величину порядка четырёх солнечных диаметров. Это дало возможность осуществить неординарный «Солнечный эксперимент» [13], который играет роль *experimentum crucis* для утверждения о физической реальности мировых событий.

4. Фридман А.А. Мир как пространство и время. 2-е изд. М. : Наука, 1965. 112 с.
5. Эйнштейн А. Сущность теории относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 2. М. : Наука, 1966. С. 5–82.
6. Каллис В. О tempora, o mores! «Мюнхенская религиозная беседа» — запрет на объективную модель физической реальности // Еженедельник ОИЯИ «ДУБНА: наука, содружество, прогресс». Дубна, 2013. № 43(4183). С. 6–7. URL: <http://www.info.jinr.ru/jinrmag/win/2013/43/mo43.htm>.
7. Beyerchen A.D. Wissenschaftler unter Hitler. Physiker im Dritten Reich / Vorwort K.D. Bracher. Frankfurt/M, Berlin, Wien : Ullstein, 1982. 379 S.
8. Гуц А.К. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности. Омск : ООО «УниПак», 2008. 334 с.
9. Логунов А.А. Лекции по теории относительности. Современный анализ проблемы. М. : Изд-во МГУ, 1984. 223 с.
10. Сазанов А.А. Четырёхмерный мир Минковского. М. : Наука, ГРФМЛ, 1988. 224 с.
11. Friedmann A.A. The World as Space and Time. Montreal : Minkowski Institute Press, 2014. 100 p.
12. Козырев Н.А. Избранные труды. Л. : Изд-во ЛГУ, 1991. 447 с.
13. Еганова И.А. Природа пространства-времени. Новосибирск : Изд-во СО РАН, филиал «Гео», 2005. 271 с.
14. Kozurev N. Sources of Stellar Energy and the Theory of the Internal Constitution of Stars // Prog. Phys. 2005. V. 3. P. 61–99.
15. Alexandrov A.D. A contribution to chronometry // Canad. J. Math. 1967. V. 19, No. 6. P. 1119–1128.
16. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. М. : ИИЛ, 1963. 432 с.
17. Уитроу Дж.Дж. Естественная философия времени. М. : Прогресс, 1964. 432 с.
18. Eganova I.A. The World of events reality: instantaneous action as a connection of events through time // Relativity, Gravitation, Cosmology / Eds.: V.V. Dvoeglazov, A.A. Espinoza Garrido. New York : Nova Science Publishers, Inc., 2004. P. 149–162.
19. Пригожин И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. М. : Наука, 1985. 328 с.
20. Алексеев Г.Н. Энергоэнтропика. М. : Знание, 1983. 192 с.
21. Lavrent'ev M.M., Eganova I.A. Kozurev's method of astronomical observations: information from true positions of stars, stellar systems, and planets // Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics: «Pro» and «Contra» / Eds.: A.E. Chubykalo, V. Pope, R. Smirnov–Rueda. New York : Nova Science Publishers, Inc., 1999. P. 100–115.
22. Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звёзд на резистор // ДАН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 352–355.
23. Акимов А.Е., Ковальчук Г.У., Медведев В.Г., Олейник В.К., Пугач А.Ф. Предварительные результаты астрономических наблюдений неба по методике Н.А. Козырева / Ред. О.В. Мороженко. Препринт ГАО АН Украины ГАО-92-5Р. Киев, 1992. 16 с.
24. Oleinik V.P. Faster-than-light transfer of a signal in electrodynamics // Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics: «Pro» and «Contra» / Eds.: A.E. Chubykalo, V. Pope, R. Smirnov–Rueda. New York : Nova Science Publishers, Inc., 1999. P. 237–255.

25. Займидорога О.А. Естественный закон перехода заряженной частицы в связанное состояние под действием электроскалярного поля. Препринт ОИЯИ Р4-2016-91. Дубна, 2016. 12 с.
26. Козырев Н.А. Астрономическое доказательство реальности четырёхмерной геометрии Минковского // Проявление космических факторов на Земле и звёздах. М., Л., 1980. С. 85–93.
27. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации. М. : Наука, 1989. 304 с.
28. Козырев Н.А., Насонов В.В. О некоторых свойствах времени, обнаруженных астрономическими наблюдениями // Проявление космических факторов на Земле и звёздах. М., Л., 1980. С. 76–84.
29. Roberts M.S. A high-resolution 21-cm hydrogen-line survey of the Andromeda Nebula // *Astrophys. J.* 1966. V. 144. P. 639–656.

FOUNDATION OF MINKOWSKI'S WORLD AS A MATHEMATICAL STRUCTURE: TO THE ANSWER FOR RIEMANN'S QUESTION

I.A. Eganova¹

Ph.D.(Phys.-Math.), Senior Scientist Researcher, e-mail: eganova@math.nsc.ru

W. Kallies²

Ph.D.(Phys.-Math.), Dr.rer.nat., Head Scientist Researcher, e-mail: wkallies@jinr.ru

¹Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

²Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Abstract. In the given article B. Riemann's gnoseological question about an internal cause of initiation of metric relations in space with respect to the World of events (space-time) is raised. On the whole, the relevance of Riemann's question for space-time is shown: its decision visualizes the physical foundation of Minkowski's World, gives new notations about interconnections in the World of events and appreciably new methods for experimental investigations. An executed in the article conceptual review of historical development of A.D. Alexandrov's approach to the Riemann's question is made according to the following plan. **1.** Previously, it was shown that Alexandrov's approach is completing the definite sequence of investigations, namely of H. Minkowski, A.A. Friedman, and N.A. Kozyrev, in the World of events history. **2.** Further, along Alexandrov's line, it is determined that on the basis of Friedman's and J.L. Synge's analysis of methods of temporal intervals measurements and G.J. Whitrow's decision of the problem of the standard clock choice an innate (a priori) interconnection of simultaneous world events, that is able to create the space-time metric, is revealed. **3.** Then we are taking into consideration that the essence of physical processes, which are used for the temporal intervals measurements, indicates in fact some way to finding a possibility of observations of a certain physical phenomenon which is connected with the a priori interconnection of simultaneous world events. Some mathematical relation indicating that as this phenomenon figures the revealed and successively learned by Kozyrev distance-type action of external irreversible processes changing the internal state of any complex, structured systems,

that can be in various internal states, is obtained and analyzed. This phenomenon, in principle, justifies the known I. Prigogine's notations about a constructive function of irreversible processes in the appearance, existence, and evolution of complex systems. **4.** And finally, some results of astronomical observations, which testify about properties of the Minkowski's World structure, are considered and new possibilities for investigations of various branches of science are enumerated.

Keywords: Minkowski's World, World of events, space-time, space-time metric, measurements of temporal intervals, standard clock problem, irreversible processes.

Дата поступления в редакцию: 25.07.2017

ВЕРХНИЙ ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

А.Н. Кабанов

к.ф.-м.н., e-mail: m01kab@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Получено описание верхнего гиперцентрального ряда группы унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница над произвольным полем. Вычислена длина гиперцентрального ряда.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, унитарный автоморфизм, гиперцентр.

В статьях автора [1,2] было представлено описание центральной серии группы унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница до первого предельного ординала включительно.

В данной работе представлено описание всей верхней центральной серии указанной группы и вычислена её гиперцентральная длина.

Напомним, что неассоциативная алгебра L над полем F с билинейным произведением $[\cdot, \cdot]$ называется (правой) алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется (правое) тождество Лейбница:

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y].$$

Или, что то же самое,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Отсюда видно, что $[x, [y, y]] = 0$.

Из тождества Лейбница также следует, что любой элемент алгебры L можно представить, как линейную комбинацию элементов вида $[[[a, b], c], d], \dots$, поэтому для краткой записи будем опускать скобки, положив

$$[[a, b], c] = abc.$$

Более того, примем записи

$$[[a, b], b] = ab^2, [[[a, b], b], b] = ab^3 \text{ и т. п.}$$

Пусть L_n – свободная алгебра Лейбница над полем F с множеством свободных порождающих $X_n = x_1, \dots, x_n$.

Выделим в группе $\text{Aut}L_n$ всех автоморфизмов алгебры L_n подгруппу U_n , порождённую автоморфизмами вида:

$$\tau_i(y_i) : \begin{cases} x_i \rightarrow x_i + y_i, \\ x_j \rightarrow x_j, \quad j \neq i, \end{cases}$$

где y_i принадлежит подалгебре, порождённой x_{i+1}, \dots, x_n . Такая подгруппа называется группой унитреугольных автоморфизмов алгебры L_n .

Для краткости будем записывать произвольный автоморфизм φ свободной алгебры L_n с множеством свободных порождающих X_n как $\varphi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда произвольное отображение вида:

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, \dots, x_n), \dots, x_i + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n), \dots, x_n), \quad (1)$$

где для любого i многочлен $f_i(x_{i+1}, \dots, x_n) \in L_n$, определяет автоморфизм из U_n , и группа U_n состоит из всех таких автоморфизмов.

В предыдущей работе [2] было доказано, что центральный ряд группы U_n состоял из подгрупп Z_α ($1 \leq \alpha \leq \omega$), состоящих из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_{n-1}, x_n), x_2, \dots, x_n)$, причём в одночленах многочлена $f_1(x_{n-1}, x_n)$ элемент x_{n-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

При этом $Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha+1}$.

Для $0 \leq k \leq n - 3$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_{n-k-1}, x_2, \dots, x_n), \dots, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_1 элемент x_{n-k-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для $n - 2 \leq k \leq 2n - 6$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n), x_2 + f_2(x_{2n-k-3}, \dots, x_n), x_3, \dots, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_2 элемент x_{2n-k-3} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для $2n - 5 \leq k \leq 3n - 10$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n), x_2 + f_2(x_2, \dots, x_n), x_3 + f_3(x_{3n-k-6}, \dots, x_n), x_4, \dots, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_3 элемент x_{3n-k-6} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для произвольного k , находящегося в пределах $(i - 1)n - \frac{(i+2)(i-1)}{2} \leq k \leq in - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$, подгруппа $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq \omega$) состоит из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_i + f_i(x_{in-k-\frac{i(i+1)}{2}}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_i элемент $x_{in-k-\frac{i(i+1)}{2}}$ встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Наконец, для $k = \frac{n(n-3)}{2}$ выделим подгруппу $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq \omega$), состоящую из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n-2} + f_{n-2}(x_{n-1}, x_n), x_{n-1}, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_{n-2} элемент x_{n-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

И выделим ещё одну группу для $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Группа $Z_{k\omega+1}$ состоит из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n-1} + f_{n-1}(x_n), x_n)$.

Очевидно, что последняя группа совпадает с U_n .

Теорема 1. Введённые выше подгруппы $Z_i \subseteq Z_{i+1}$ составляют верхний центральный ряд группы U_n .

Доказательство. Напомним, что в центральном ряде $Z_k(U_n)/Z_{k-1}(U_n) = Z(U_n/Z_{k-1})$.

Допустим, что для некоторого $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ и некоторого $1 \leq \alpha < \omega$ множества $Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_{k\omega+\alpha-1}$ являются частью гиперцентрального ряда.

Пусть k находится в пределах $(i-1)n - \frac{(i+2)(i-1)}{2} \leq k \leq in - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$. Введём обозначение $j = in - k - \frac{i(i+1)}{2}$. Подставляя в j границы для k , убеждаемся, что $i+1 \leq j \leq n-1$.

Пусть $\varphi = (x_1 + g_1(x_2, \dots, x_n), \dots, x_i + g_i(x_j, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) \in Z_{k\omega+\alpha}$, а ψ – произвольный унитарный автоморфизм вида (1).

Рассмотрим композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$. В $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ действия этих композиций на координаты x_1, \dots, x_{i-1} совпадают. На координатах x_{i+1}, \dots, x_n эти действия совпадают даже в U_n .

Осталось рассмотреть, как эти автоморфизмы действуют на x_i . Имеем:

$$x_i^{\varphi\psi} = x_i + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n) + g_i(x_j + f_j, \dots, x_n),$$

$$x_i^{\psi\varphi} = x_i + g_i(x_j, \dots, x_n) + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n).$$

В многочлене $g_i(x_j + f_j, \dots, x_n)$ по сравнению с $g_i(x_j, \dots, x_n)$ появляются одноклассовые, в которых переменная x_j встречается меньшее число раз. Таким образом, в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ $x_i^{\varphi\psi} = x_i^{\psi\varphi}$. Следовательно, композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ совпадают. Это означает, что $\varphi \in Z_{k\omega+\alpha}(U_n)$.

Если же использовать автоморфизм $\varphi = (x_1, \dots, x_t + g_t, \dots, x_n)$, где $t > i$, и рассмотреть разность $x_t^{\varphi\psi} - x_t^{\psi\varphi} = g_{t+1}(x_{t+2} + f_{t+2}, \dots, x_n) - g_{t+1}(x_{t+2}, \dots, x_n)$, то мы увидим, что в общем случае в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ эти композиции различаются.

А допуская, что в автоморфизме φ в одночленах многочлена g_i переменная x_j содержится α или более раз, мы в общем случае можем получить в одночлене разности $x_i^{\varphi\psi} - x_i^{\psi\varphi}$ переменную x_j $\alpha - 1$ или более раз. Что снова даёт нам $\varphi\psi \neq \psi\varphi$ в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$.

Значит, автоморфизмов другого вида, кроме указанных выше, в $Z_{k\omega+\alpha}(U_n)$ нет.

В предельном случае при $\alpha = \omega$ получаем $Z_{k\omega+\alpha} = Z_{(k+1)\omega}$.

Так как для Z_α при $1 \leq \alpha < \omega$ утверждение доказано в [2], по индукции получаем то, что и требовалось доказать. ■

Как отмечалось выше, подгруппа $Z_{k\omega+1}$ при $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ совпадает с U_n . Отсюда видим следующее свойство этой группы.

Следствие 1. Группа унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница гиперцентрального типа длины $\frac{(n-1)(n-2)}{2}\omega + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов А.Н. Центр группы унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов IV Международной научной конференции (Омск, 11 ноября 2016 г.). 2016. С. 78–80.
2. Кабанов А.Н. Центральный ряд группы унитарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница // Математические структуры и моделирование, 2017. № 3(43). С. 12–15.

**THE UPPER HYPERCENTRAL SERIES OF THE GROUP OF UNITRIANGULAR
AUTOMORPHISMS OF A FREE LEIBNIZ ALGEBRA****A.N. Kabanov**

Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: m01kab@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The upper hypercentral series of the group of unitriangular automorphisms of a free Leibniz algebra over an arbitrary field is described. The length of this series is obtained.

Keywords: Leibniz algebra, unitriangular automorphism, hypercenter.

Дата поступления в редакцию: 10.11.2017

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОБОСНОВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Н.В. Михайлова

к.ф.н., доцент, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Уже при становлении математического анализа проявилось противоречие между его способностью получать конкретные математические результаты и специфическими трудностями его обоснования. Статья посвящена проблемно-ориентированному обоснованию математического анализа.

Ключевые слова: обоснование современного математического анализа, проблемно-ориентированный подход, аспекты философии математики.

Введение

Обоснование математики относится к числу важнейших философских проблем, решаемых в виде гносеологической процедуры философской рефлексии оснований математики и системного анализа принципов математической теории. Обоснование математики состоит из двух взаимосвязанных уровней – математического и философского. Если сущность первого выявляется через применение направления обоснования к конкретной теории, что составляет чисто математическую работу, то сущность второго характеризуется тем, что каждая программа обоснования нуждается еще и в философском анализе ее соответствия исходной философско-методологической задаче. Обоснование математики методологически строго впервые было сформулировано Давидом Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий, по сути провозгласив законность любой такой теории, даже не взирая на возможность ее содержательной интерпретации. Такая установка Гильберта по-прежнему актуальна в философии современной математики, так как математики следят за непротиворечивостью. Есть даже некоторая «усталость» от старых обосновательных проблем, хотя в философии науки за непротиворечивостью никто «не гонится». Часть методологических трудностей обоснования математического анализа имеет не только технический, а концептуально прагматический характер, что делает уместной необходимость рассмотреть более широкий философско-методологический подход.

Вначале предстоит выяснить, что понимается под словом «обоснование». Оно часто употребляется в философско-научном лексиконе. В литературе по логике и методологии науки используются различные способы и методы обоснования, например, доказательство, подтверждение, объяснение, интерпретация,

практическая реализация. Если акцентировать внимание только на доказательстве, то понятие «обоснования» оказывается производным от понятия «доказательства», что не очень способствует выявлению самостоятельного осмысления проблемы обоснования математики. Кроме того, понятие «формального доказательства» по существу представляет собой историческую условность, для этого достаточно реконструировать историю обоснования математического анализа, в которой принципиально не достижим отказ от неформальной интуиции, поскольку нельзя формально доказать непротиворечивость самой математики в целом. С точки зрения подтверждения, укрепляющего веру в обосновываемое знание, под обоснованием математики в довольно широком философском контексте иногда понимается попытка найти такую содержательную теорию, из которой можно вывести всю математику при предварительном методологическом условии непротиворечивости используемой теории. Наконец, если говорить о практической реализации, то следует отметить укоренившуюся в математике практику неявного собирательного употребления словосочетания «обоснование математики», которое предполагает обоснование математических теорий всеми имеющимися в математике методологическими средствами.

1. Проблема обоснования математического анализа

Чтобы философия математики не оказалась чисто философским занятием, можно сузить вопрос об обосновании математики следующим образом: какая именно часть современной математики нуждается в обосновании? Можно заключить, что речь идёт о современном математическом анализе. Но почему в проблеме обоснования такое внимание уделяется обоснованию математического анализа? Как авторитетно считает философ математики В.Я. Перминов: «В 30-х годах прошлого века П. Бернайс сформулировал некоторый критерий успешной или состоявшейся программы обоснования математики, который сводится к тому, что любая такая программа должна быть способной обосновать математический анализ. Смысл критерия ясен. Математический анализ – центральная дисциплина современной математики, являющаяся идейным истоком большинства существующих математических теорий и основой большей части приложений математики» [1, с. 20]. Заметим, что ни она из известных на сегодня программ обоснования современной математики не удовлетворяет критерию успешности Бернайса. Трудность построения концепции обоснования математического анализа связана с тем, что никакой опыт и изошренное экспериментирование не соответствуют с абсолютной точностью природе математических идеализаций. В общефилософском плане обоснование математического анализа необходимо ещё и для того, чтобы найти средства, гарантирующие надёжность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств.

В теоретической и практической математической деятельности приходится анализировать различные функциональные зависимости, поэтому математический анализ, изучающий такого рода зависимости, представляет сейчас наиболее важный раздел современной математики. В истории математики по сути отмечается: «Слабой стороной математики XVIII в. было отсутствие обос-

нования её важнейших частей. Был развит аппарат анализа бесконечно малых без достаточной работы над его строгим логическим обоснованием» [2, с. 370]. Несмотря на использование различных способов обоснования анализа, они не являлись удовлетворительными объяснениями, пока не появились методы, основанные на понятии предельного перехода, не содержащего логических пробелов. Кроме того, с помощью понятия предела получили объяснение такие важнейшие понятия математического анализа как «производная», «интеграл», «непрерывность функции», «сумма ряда» и другие. Заметим, что уже при становлении теорий математического анализа стало проявляться внутренне присущее ему специфическое противоречие между способностью получать конкретные практически важные результаты и философскими трудностями объяснения или обоснования его новых понятий и применяемых методов. Отметим также, что математический анализ практически реально опирается на теорию действительных чисел, изучение которых привело математику к рассмотрению бесконечных множеств.

Известно, что после того, как немецкий математик Карл Вейерштрасс переформулировал все определения математического анализа на языке $\varepsilon - \delta$, появились математические объекты, не подвластные интуитивному восприятию, например, функции, непрерывные на всём интервале, но тем не менее нигде не дифференцируемые, или непрерывные функции, не являющиеся монотонными ни на каком интервале их области определения, которые изначально представлялись как парадоксальные, «потому что они абсолютно оторваны от геометрической интуиции. Они обладают лишь формальным численным смыслом, избегая любого представления, доступного интуитивному схватыванию» [3, с. 12]. Большое влияние на математику оказала разработанная Вейерштрассом система логического обоснования математического анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Например, функциональное определение дельта-функции – это, по существу, продолжение традиции обоснования математического анализа, восходящей к систематическому использованию понятия «предела» в работах О. Коши и К. Вейерштрасса. Но хотя с точки зрения обоснования математического анализа Вейерштрасс, по существу, заложил строгие логические основания для исчисления бесконечно малых, направление исследований обоснования математического анализа всё же не было закончено, так как не было философско-методологически выяснено значение бесконечного для математики.

Философы математики нередко игнорируют рассуждения профессиональных математиков о проблеме обоснования, относящиеся к практическому решению конкретных задач, считая их недостаточно важными, или неотрефлексированными, хотя ими проведен анализ специфики математической истины, выявлена взаимосвязь между доказуемостью и достоверностью, а также проанализировано практическое использование компьютера в математических доказательствах. Целесообразно «математику называть проблемно-ориентированной, а соответствующую ей философию – концептуальным прагматизмом» [5, с. 67]. С точки зрения математического знания проблемно-ориентированное обоснование математики включает в себя несколько аспектов: во-первых, доведение мате-

математических теорий до принятого современного уровня строгости; во-вторых, полноценная аргументация существования новых математических объектов; в-третьих, учёт саморазвития математических теорий при решении конкретных задач и избавления их от возможных противоречий. Заметим, что проблемная ситуация обычно создаётся путём формулирования теоретических утверждений в виде задач, для решения которых необходим концептуальный прагматизм при анализе и трансформации имеющихся знаний. В истории становления математического анализа надёжными представлялись такие математические теории, которые соответствовали различным уровням теоретической строгости, направленные на практическое решение математических задач в силу необходимости математики.

Рассмотрим следующую задачу, доступную пониманию тех, кто знаком с понятием «функции». Сколько решений имеет уравнение вида $y^2 - 1 = 0$? Как правило обычно выделяют два очевидных решения $y = 1$ и $y = -1$. Но все ли это решения указанного уравнения, и могут ли у него существовать другие решения? Содержательный ответ на, казалось бы, неразрешимый вопрос далеко не очевиден, как может показаться на первый взгляд, потому что проблемно-ориентированный ответ на этот вопрос утвердительный, что можно считать довольно неожиданным, а для кого-нибудь вообще неверным. Но в математике, с учётом концептуального прагматизма, не принято торопиться с выводами. Пусть $y = f(x)$, где функция $f(x) = -1$ для любого отрицательного значения переменной x , и $f(x) = 1$ для любого положительного значения переменной x и для $x = 0$. Возводя y в квадрат, получим, что $y^2 = (f(x))^2 = 1$ для любого значения переменной x , а это означает, что функция $y = f(x)$ является решением уравнения $y^2 - 1 = 0$. А сколько ещё решений подобного рода этого уравнения существует? Да сколько угодно – множество решений бесконечно. Как замечают по этому поводу математики Е.В. Шикин и Г.Е. Шикина: «История математики вообще полна примерами того, как встреча с неразрешимой задачей (в данном случае – с неразрешимым уравнением) приводила к расширению класса объектов, из которого (старого) выбирались претенденты на решение и в котором (новом) нужное решение задачи (уравнения) содержалось» [5, с. 112]. То есть чтобы ответить на поставленный выше, по существу, проблемно-ориентированный вопрос – сколько решений имеет данное уравнение вида $y^2 - 1 = 0$, вначале надо было специально уточнить – в каком именно классе математических объектов ищется его решение.

Другой не менее важный методологический аспект интерпретации проблемно-ориентированных задач математического анализа состоит в том, что, вообще говоря, современный математический анализ можно различать в широком и узком смысле. Например, как определяют их историки математики С.С. Петрова и С.С. Демидов: «Анализ в узком смысле – это дифференциальное и интегральное исчисление. Анализ в широком смысле – это вся совокупность математических дисциплин, представляющих непосредственное развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления» [6, с. 7]. Математический анализ в широком смысле – это хорошо развитые сейчас области современного математического анализа, например, такие как вещественный,

комплексный и функциональный анализ, обоснование которых непосредственно связано с проблемой бесконечного. Прогресс в обосновании математического анализа зависит сегодня уже не столько от изобретения принципиально новых методов логического анализа, сколько от углубления исследований по методологии математики. Укажем на известную ограниченность стандартной теории распределений применительно к нелинейным задачам, что послужило причиной применения философии концептуального прагматизма к обоснованию введения новых обобщённых функций, для которых можно достаточно корректно определить их произведение.

Задача обоснования умножения обобщённых функций основана на интуитивном введении вместо распределений новых математических объектов, которые, обладая свойствами распределений, допускают ещё и формально корректную операцию умножения, при которой распределения естественно вкладываются в классы новых объектов. Для конструктивно введённых операций умножения используются классы «новых обобщённых функций», построенные французским математиком Жаном-Франсуа Коломбо. Произведение функции, разрывной в точке, как обобщённой функции, и дельта-функции уже не принадлежит классическому пространству обобщённых функций, что приводит к целому ряду неудобств при исследовании задач дифференциальных уравнений с новыми обобщёнными функциями, содержащими произведение обобщённой и разрывной функций, но наиболее существенным оказывается то, что решением дифференциального уравнения в философско-методологической интерпретации является не разрывная функция, а обобщённая функция Коломбо. Так, философ науки Л.А. Микешина утверждает, что «общенаучные методологические принципы тесно смыкаются и взаимодействуют с философскими и не всегда возможно четко их разграничить и квалифицировать» [7, с. 275]. Многочисленные примеры из функционального анализа показывают, что целостность направлений обоснования, реализующая концептуальный прагматизм математического анализа, проясняет сущность проблемно-ориентированного обоснования.

2. Заключение

В заключении отметим, что обзор проблемы обоснования математики позволяет выявить слабость методологических и философских предпосылок предыдущих программ обоснования математики – логицизма, формализма и интуиционизма. Расхождение между интуиционизмом, или одним из его направлений – конструктивизмом, и платонизмом, или реализмом, в оценке онтологического статуса объектов математики сосредоточено на том, что платонизм признаёт существование объектов независимо от мышления человека, а конструктивизм требует предъявления этих абстрактных объектов независимо от онтологических предпосылок. В математическом анализе устоявшиеся понятия «непрерывной функции» и «дифференцируемой функции» имеют общность, которая распространяется за интуитивные представления о них. Однако с помощью канторова множества можно, например, построить даже такую непрерывную монотонную функцию, производная которой почти всюду равна нулю, а источ-

ником столь интуитивно непонятного примера является канторово множество. Поэтому без строго формальной математической процедуры интуитивно довольно трудно понять, почему функция Кантора почти нигде не растёт, хотя она ощутимо растёт на множестве нулевой меры, в связи с чем её образно называют ещё и «канторовой лестницей». При этом устойчивость проблемно-ориентированного обоснования математического анализа обеспечивается ещё и тем, что если есть реальное взаимодействие противоположностей, то они не достигают антагонизма, поскольку элементы проблемного синтеза не исключают друг друга, а характеризуют целостность в рамках новой концепции обоснования современной математики.

Проблемно-ориентированный подход обоснования математики, даже на примере абстрактных объектов математического анализа, фиксирует также, каков должен быть содержательный уровень математических теорий и как концепция обоснования математики характеризуется системной целостностью. Системность обосновательных процедур означает, что они представляют связное, неразрывное целое, в котором целостность концепции обоснования математического анализа вытекает из философского единства и качественного многообразия современной математики и из того, что обе эти важные характеристики являются проявлением её самоорганизации. В современном математическом анализе широко используется синтез разных подходов к пониманию новых проблемно-ориентированных задач. Конкретный математический пример проблемно-ориентированного синтеза очень разных направлений и разделов математики, таких как теория чисел, математический анализ и дифференциальные уравнения, демонстрирует алгебра обобщённых функций Коломбо, в которой практически вводится произведение любых двух элементов из классического пространства обобщённых функций, хотя в общем случае это произведение является уже обобщённой функцией Коломбо и не принадлежит классическому пространству распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перминов В.Я. Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль : ЯГПУ, 2004. С. 9–24.
2. Дорофеева А.В. Проблема обоснования математики переменных величин // Высшая математика. Гуманитарные специальности. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Дрофа, 2003. С. 370–374.
3. Фрейдельмейер Ж.-П. Что история говорит нам о преподавании анализа // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Калуга : КГПУ, 2002. Вып. 4. С. 45–62.
4. Проблемно-ориентированный подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм / Отв. ред. В.В. Целищев. Новосибирск : Наука, 2001. 154 с.
5. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике). М. : Едиториал УРСС, 2001. 272 с.
6. Петрова С.С., Демидов С.С. Развитие математического анализа // Очерки по истории математики / Под ред. Б.В. Гнеденко. М. : Издательство МГУ, 1997. С. 7–93.

7. Микешина Л.А. Методологические формы знания и деятельности как ценности науки // Эпистемология ценностей. М. : РОССПЭН, 2007. С. 272–284.

PROBLEM-ORIENTED JUSTIFICATION OF THE MODERN MATHEMATICAL ANALYSIS

N.V. Michailova

Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

Abstract. Formation of the mathematical analysis revealed a contradiction between its ability to receive concrete mathematical results and specific difficulties of its justification. Article considers problem-oriented justification of the mathematical analysis.

Keywords: justification of the modern mathematical analysis, problem-oriented approach, philosophy of mathematics aspects.

Дата поступления в редакцию: 17.08.2017

ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЗОНДОВОЙ ДИАГНОСТИКИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

В.И. Струнин

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: strunin@omsu.ru

В.В. Шкуркин

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: zeya47@rambler.ru

А.А. Ляхов

ст. преподаватель, e-mail: lyahov@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Предложена автоматизированная система для проведения зондовых измерений в низкотемпературной плазме. Регистрация вольт-амперных характеристик производится с помощью универсальной платы сбора данных. Двукратное дифференцирование характеристик осуществляется с помощью программно реализованного цифрового фильтра. Приведён пример восстановления функции распределения по энергии из экспериментальной зондовой характеристики воздушной плазмы пониженного давления. Обсуждается влияние ширины окна цифрового фильтра на точность определения температуры электронов.

Ключевые слова: зонд Ленгмюра, фильтр Савицкого-Голея, дифференцирование экспериментальных зависимостей, автоматизация измерений.

Введение

При изучении кинетики процессов, протекающих в химически активной плазме, которая используется для осаждения различных покрытий, большое значение имеет информация о параметрах электронной компоненты плазмы. Экспериментально эта информация может быть получена в результате применения различных методов диагностики плазмы. Одним из широко применяемых в настоящее время является метод электрических зондов [2].

Метод предложен и обоснован Ленгмюром и, несмотря на то, что это было сделано достаточно давно (1923 г.), метод не утратил своего значения до настоящего времени. Большим достоинством электрических зондов является возможность определения локальных значений параметров в точке, где находится зонд. Другим преимуществом зондовых методов является простота измерений, не требующих специальной сложной аппаратуры.

Результаты зондовых измерений — вольт-амперная характеристика (ВАХ), — зависимость тока на зонд от его потенциала относительно плазмы, а также её производные по потенциалу зонда при определённых условиях позволяют

определить такие параметры свободных электронов плазмы, как их плотность и энергетический спектр. Особенности применения зондов для диагностики электронной компоненты плазмы, а также методы обработки результатов измерения достаточно полно изложены в ряде работ [1–3].

Наиболее общий подход при анализе результатов зондовых измерений опирается на формулу Дрювестейна, связывающую вторую производную тормозящего участка ВАХ по потенциалу зонда с энергетическим спектром электронов плазмы [1]:

$$\frac{d^2i}{dV^2} = \frac{2\pi n_0 e^3}{m^2} f_0(eV),$$

где e , m — электрический заряд и масса электрона соответственно, n_0 — концентрация электронов, f_0 — функция распределения электронов по скоростям.

В свою очередь, определить вторую производную ВАХ возможно как техническими, так и численными методами. В случае применения первых производится непосредственное дифференцирование характеристики зонда средствами аналоговой вычислительной техники на базе операционных усилителей, либо применением различных модуляционных методов.

Применение вторых связано с решением обратной задачи, которая, применительно к рассматриваемому случаю, является некорректно поставленной и для решения требует нетривиального алгоритма [4]. Альтернативой решению обратной задачи являются различные алгоритмы численного дифференцирования [5], в том числе с использованием методов цифровой обработки сигналов [7]. Все из перечисленных методов обладают определёнными достоинствами и недостатками.

Прямое дифференцирование ВАХ обладает низкой помехоустойчивостью и не обеспечивает приемлемой точности определения второй производной. Модуляционные методы требуют применения дополнительных технических средств, к которым предъявляются достаточно жёсткие требования при постановке эксперимента.

Применение численных методов для определения второй производной зондовой характеристики снижает требования к аппаратному оформлению эксперимента. В автоматизированной системе зондовой диагностики, которая предложена в данной работе, программное обеспечение регистрации ВАХ зонда дополнено процедурами цифровой фильтрации [8], с помощью которых выполняется дифференцирование результата измерений. При таком способе определения d^2i/dV^2 затраты вычислительных ресурсов оказываются ниже, чем при восстановлении производной по методу решения обратной задачи.

Состав комплекса

Структурная схема аналоговой части системы зондовой диагностики приведена на рис.1. Для регистрации ВАХ использована плавающая система, реализующая метод противозонда [1]. Для развёртки характеристики зонда

используется генератор развёртки ГР, являющийся, по сути, мощным операционным усилителем с выходным напряжением до 80 В. Дополнительный источник напряжения $U_{см}$ обеспечивает поддержание системы электродов в области потенциала изолированного зонда. Ток, текущий в зондовой цепи после нормализации преобразователем ток-напряжение $I \rightarrow U$ и ограничения спектра фильтром нижних частот ФНЧ, передаётся для измерения.

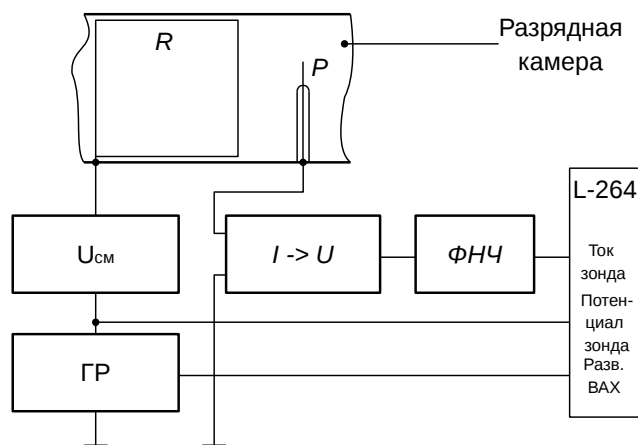


Рис. 1. Структурная схема системы зондовой диагностики. P — зонд Ленгмюра, R — опорный электрод, ГР — генератор развёртки, $U_{см}$ — источник смещения, $I \rightarrow U$ — преобразователь ток-напряжение, ФНЧ — фильтр нижних частот, L-264 — плата сбора данных с установленными АЦП и ЦАП

Управление компонентами аналоговой подсистемы, а также оцифровка аналоговых величин осуществляется персональным компьютером. В качестве интерфейса между компьютером и аналоговой частью системы используется карта сбора данных L-264 производства L-card [9], установленная в слот расширения системной магистрали компьютера. В состав карты входит 12-разрядный аналого-цифровой преобразователь (АЦП), с помощью которого оцифровываются сигналы, соответствующие потенциалу и току зонда, а входящий в состав оборудования карты цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) используется для управления генератором развёртки.

Массивы оцифрованных данных в дальнейшем передаются процедурам, осуществляющих их обработку. В частности, двукратное дифференцирование зондовой характеристики выполняется подпрограммой, реализующей цифровой фильтр Савицкого-Голея [6].

Результаты измерений

На рис. 2,а) приведены результаты регистрации вольт-амперной характеристики в плазме газового разряда в воздухе при давлении газа 0,64 Тор и токе разряда 80 мА. Эта ВАХ была использована для определения второй производной тока зонда по потенциалу с помощью фильтра Савицкого-Голея с различной полушириной окна $m = 16, 20, 24$ (см. рис. 2,б) и рис. 3).

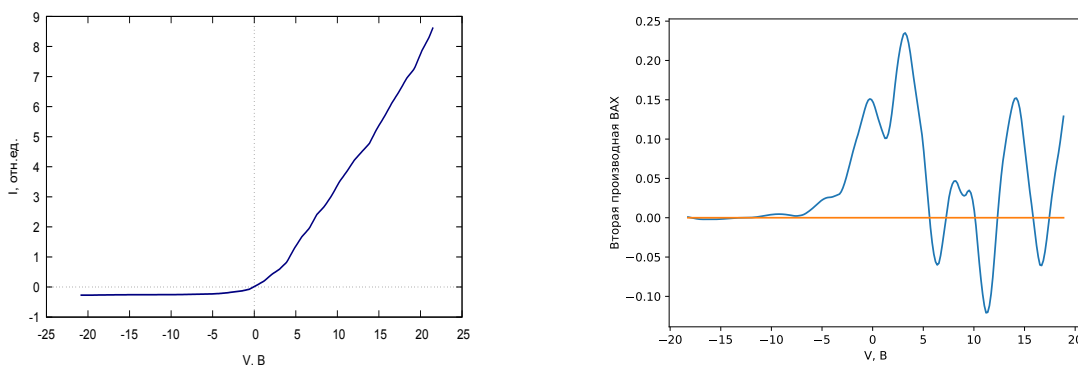


Рис. 2. а) вольт-амперная характеристика ленгмюровского зонда в плазме воздуха при давлении 0,64 Тор и токе разряда 80 мА; б) вторая производная, полученная цифровым фильтром с полушириной окна $m=16$

На этих рисунках видно, что сглаженность второй производной улучшается с ростом полуширины окна.

Как известно [3], вторая производная зондового тока пересекает ось потенциалов в точке потенциала пространства V_s , т. е. энергетическому спектру электронов будет соответствовать участок второй производной от точки потенциала пространства в сторону отрицательных потенциалов (на рис.2,б) это участок левее точки $V \approx 5$ В). В соответствии с этим область расположения функции распределения электронов определялась сдвигом нуля оси потенциала в точку потенциала пространства с последующей инверсией всех отрицательных значений потенциала.

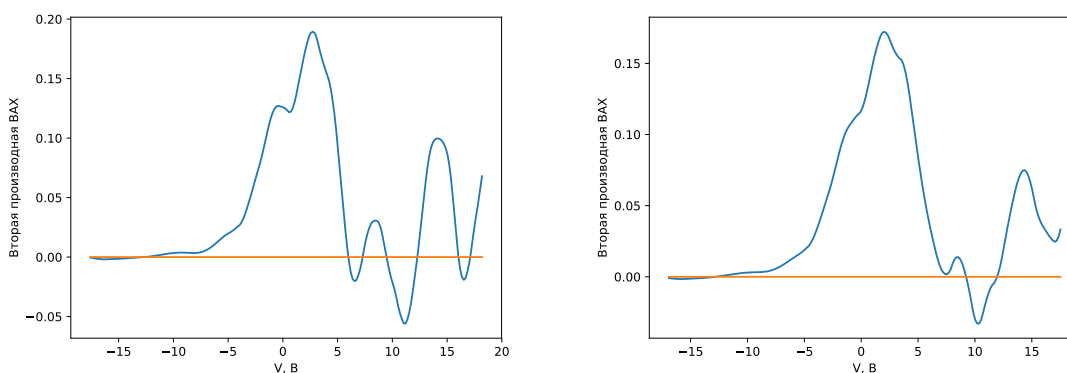


Рис. 3. Результат двукратного дифференцирования зондовой характеристики цифровым фильтром с параметрами а) $m=2$; б) $m=24$

Выделенные таким способом участки второй производной, соответствующие

энергетическому спектру электронов, нормировались с помощью выражения:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon = A$$

и затем использовались для определения средней энергии электронов:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где A — константа нормировки.

Значения $\bar{\varepsilon}$, соответствующие параметрам полуширины окна $m=16, 20, 24$, оказались равными 5,25; 5,67 и 6,64 эВ соответственно. Таким образом, увеличение полуширины окна сопровождается увеличением средней энергии электронов. Это можно объяснить «растягиванием» кривой второй производной по оси потенциала с ростом полуширины окна. В связи с этим возникает вопрос о выборе оптимального параметра окна m , что представляет собой отдельную задачу.

Разработанный комплекс позволяет проводить зондовые измерения в низкотемпературной плазме: осуществлять программное управление измерительной частью со стороны ПК, регистрировать вольт-амперные характеристики зондов Ленгмюра и выполнять их математическую обработку. Результаты, представленные в работе, демонстрируют возможность снижения трудоёмкости зондовой диагностики плазмы благодаря применению современных средств автоматизации и алгоритмов обработки измерительной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Ю.М., Перель В.И. Зондовые методы исследования плазмы // УФН 1963. Т. 81. С. 409–452.
2. Зондовые методы исследования низкотемпературной плазмы / Демидов В.И. [и др.] М. : Энергоатомиздат, 1996. 240 с.
3. Новгородов М.З. Экспериментальное исследование электрических и оптических характеристик положительного столба тлеющего разряда в молекулярных газах // Труды ФИАН 1974. Т. 78. С. 60–116
4. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск : Наука, 1982. 240 с.
5. Trunec D. The numerical differentiation of probe characteristics // Contrib. Plasma Phys. 1992. V. 32. P. 523–534.
6. Savitzky A., Golay M. Smoothing and differentiation of data by simplified leastsquares procedures // Anal. Chem. 1964. V.36. P. 1627–1639.
7. Fujita F., Yamazaki H. Determination of electron energy distribution function of plasma by digital processing from Langmuir probe characteristic // Jpn. J. Appl. Phys. 1990. V. 29. P. 2139–2144.

8. Ляхов А.А., Шкуркин В.В. Применение фильтров Савицкого–Голея для обработки вольтамперных характеристик зондов Ленгмюра // Вестник Омского университета 2012. Вып. 4. С. 72–76.
9. Официальный сайт фирмы L-card. URL: <http://lcard.ru>.

SOFTWARE AND HARDWARE EQUIPMENT FOR PROBE DIAGNOSTICS OF LOW-TEMPERATURE PLASMAS

V.I. Strunin

Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: strunin@omsu.ru

V.V. Shkurkin

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: zeya47@rambler.ru

A.A. Lyahov

Assistant Professor, e-mail: lyahov@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Automated system for probe measurements in low-temperature plasmas is considered. To acquire of current-voltage characteristics a multifunctional data-acquisition board is used. The double differentiation of characteristics is provided by the programmed digital filter. The test probe characteristic of air lower pressure plasma was obtained and the electron energy distribution function was recovered from it. The influence of filter's parameter on the accuracy of electron mean energy measurements is also discussed.

Keywords: Langmuir probe, Savitsky-Goley filter, differentiation of experimental curves, automated measurements.

Дата поступления в редакцию: 23.11.2017

DOES THE UNIVERSE REALLY EXPAND FASTER THAN THE SPEED OF LIGHT: KINEMATIC ANALYSIS BASED ON SPECIAL RELATIVITY AND COPERNICAN PRINCIPLE

Reynaldo Martinez

Student, e-mail: martinez76@miners.utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In the first approximation, the Universe's expansion is described by the Hubble's law $v = H \cdot R$, according to which the relative speed v of two objects in the expanding Universe grows linearly with the distance R between them. This law can be derived from the Copernican principle, according to which, cosmology-wise, there is no special location in the Universe, and thus, the expanding Universe should look the same from every starting point. The problem with the Hubble's formula is that for large distance, it leads to non-physical larger-than-speed-of-light velocities. Since the Universe's expansion is a consequence of Einstein's General Relativity Theory (GRT), this problem is usually handled by taking into account GRT's curved character of space-time. In this paper, we consider this problem from a purely kinematic viewpoint. We show that if we take into account special-relativistic effects when applying the Copernican principle, we get a modified version of the Hubble's law, in which all the velocities are physically meaningful – in the sense that they never exceed the speed of light.

Keywords: cosmological expansion, Copernican principle, special relativity, faster-than-speed-of-light.

1. Introduction

Universe's expansion and Hubble's law: reminder. Since the 1920s, it is known that distant galaxies are moving away, with a speed v which is proportional to the distance R : $v = H \cdot R$. This empirical formula is known as the *Hubble's law*.

The empirical discovery of the Universe's expansion turned out to be in perfect accordance with Einstein's General Relativity theory, according to which the Universe cannot be stationary: it either expands or retracts. Moreover, the expansion predicted by General Relativity is in very good accordance with the Hubble's law; see, e.g., [1].

Hubble's law follows from the Copernican principle. Later, it turned out that the Hubble's law can be derived from the so-called *Copernican principle*,

according to which, from the cosmological viewpoint, there is no special location in the Universe, and thus, the expanding Universe should look the same from every starting point. This principle is named after Copernicus, which argued that, contrary to the then-prevalent opinion, there is nothing special about the location of Earth in space – and moreover, if we do not try to place Earth at the center of the Universe, our description of celestial mechanics becomes much clearer and simpler; see, e.g., [1].

The problem with the Hubble's law. From the physical viewpoint, the Hubble's law has a problem: for large distances R , the corresponding velocity v exceeds the speed of light c . This runs contrary to one of the main principles of special relativity, according to which physical velocities cannot exceed c (see, e.g., [1]).

How this problem is solved now. Since the Universe's expansion is a consequence of Einstein's General Relativity Theory (GRT), this problem is usually handled by taking into account GRT's curved character of space-time [1].

What we do in this paper. In this paper, we consider this problem from a purely kinematic viewpoint.

We show that if we take into account special-relativistic effects when applying the Copernican principle, we get a modified version of the Hubble's law, in which all the velocities are physically meaningful – in the sense that they never exceed the speed of light.

The structure of the paper. We start, in Section 2, by reminding the readers how, in the non-relativistic case, the Copernican principle leads to the Hubble's law. Then, in Section 3, we show that a special-relativistic modification of this derivation leads to a physically meaningful special-relativistic modification of the Hubble's law.

2. How the Hubble's Law Is Derived from the Copernican Principle: A Brief Reminder

What we want to analyze. We want to find out how the relative velocity v of two galaxies depends on the distance R between them.

We can safely assume that the dependence $v(R)$ is continuous – even differentiable.

Copernican principle: reminder. With respect to the Universe's expansion, the Copernican principle states that the expansion should look the same from every starting point.

Consequences of this principle. The Copernican principle states that, for any real number $R > 0$, if we take an object A at a distance R from the Earth, then, from the viewpoint of this object, the Universe's expansion looks the same as from the Earth. In other words, an object B which is at a distance r from the object A along the line Earth A (and which is thus at the distance $R + r$ from the Earth) moves with velocity $v(r)$ relative to the object A .

Relative to the Earth, the object A moves with the velocity $v(R)$. When B moves with velocity $v(r)$ relative to the object A , and the object A moves relative to the Earth with the velocity $v(R)$, we can conclude, in the non-relativistic case, that B moves with the velocity

$$v(R) + v(r)$$

relative to the Earth.

On the other hand, since the object B is located at the distance $R + r$ from the Earth, it moves with the velocity

$$v(R + r)$$

relative to the Earth. By comparing the above two expressions for the B -relative-to-Earth velocity, we conclude that

$$v(R + r) = v(R) + v(r) \tag{1}$$

for all $R > 0$ and $r > 0$.

This formula implies the Hubble's law. Indeed, by applying the formula (1) multiple times, we conclude that

$$v(r_1 + \dots + r_n) = v(r_1) + \dots + v(r_n)$$

for all possible values $r_1, \dots, r_n > 0$. In particular, for every natural number n , for $r_1 = \dots = r_n = \frac{1}{n}$, we have $r_1 + \dots + r_n = 1$ and thus,

$$v(1) = \underbrace{v\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + v\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ times}}.$$

So, $v(1) = n \cdot v\left(\frac{1}{n}\right)$, hence $v\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot v(1)$.

Similarly, for any natural number m , for $r_1 = \dots = r_m = \frac{1}{n}$, we get

$$v\left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{v\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + v\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ times}},$$

thus

$$v\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot v\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot v(1).$$

So, for rational numbers $R = \frac{m}{n}$, we have $v(R) = H \cdot R$, where we denoted $H \stackrel{\text{def}}{=} v(1)$.

Since we assumed that the dependence $v(R)$ is continuous, and every real number can be approximated, with arbitrary accuracy, by rational numbers, we conclude that $v(R) = H \cdot R$ for all real values $R > 0$. This is exactly the Hubble's law.

3. What If We Take Special Relativity into Account

Let us recall the above situation. Let us consider the same situation: we have the Earth, we have an object A at distance R from the Earth, and we have an object B at the distance $R + r$ from the Earth along the same line as the object A . Relative to the Earth:

- the object A moves with velocity $v(R)$, and
- the object B moves with the velocity $v(R + r)$.

The expansion should look the same from the viewpoint of the object A as it looks from the viewpoint of the Earth.

Let us take relativistic effects into account. In the non-relativistic case, from the viewpoint of the object A , the object B was at the distance r . However, in the relativistic case, since the object A is moving with velocity $v(R)$ relative to Earth, the distance AB shrinks to $\tilde{r} = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v(R)}{c}\right)^2}$; see, e.g., [1]. Therefore, from the viewpoint of the object A , B moves with velocity $v(\tilde{r})$ relative to A .

We need to combine the A -relative-to-Earth and B -relative-to- A velocities into the B -relative-to-Earth velocity. In the non-relativistic case, we simply added the given velocities. In the relativistic case, we need to use the special-relativity formula for such a combination: $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$; see, e.g., [1]. In particular, for $v_1 = v(R)$ and $v_2 = v(\tilde{r})$, we conclude that

$$v(R + r) = \frac{v(R) + v(\tilde{r})}{1 + \frac{v(R) \cdot v(\tilde{r})}{c^2}} = \frac{v(R) + v \left(r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v(R)}{c}\right)^2} \right)}{1 + \frac{v(R) \cdot v \left(r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v(R)}{c}\right)^2} \right)}{c^2}}.$$

This formula can be simplified if we consider an auxiliary function $u(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v(R)}{c}$ instead of the desired function $v(R)$. For this auxiliary function, the above formula takes the following simplified form:

$$u(R + r) = \frac{u(R) + u \left(r \sqrt{1 - (u(R))^2} \right)}{1 + u(R) \cdot u \left(r \sqrt{1 - (u(R))^2} \right)}. \tag{2}$$

What can we derive from this equation? Since we assumed that the dependence $v(R)$ is differentiable, we can differentiate both sides of the equality (2) by r and take $r = 0$.

In the left-hand side, we get the derivative $u'(R)$. In the right-hand side, we can use the usual formula for the derivative of the ratio:

$$(f/g)'(r) = \frac{f'(r) \cdot g(r) - f(r) \cdot g'(r)}{(g(r))^2},$$

thus

$$(f/g)'(0) = \frac{f'(0) \cdot g(0) - f(0) \cdot g'(0)}{(g(0))^2},$$

For $f(r) = u(R) + u \left(r\sqrt{1 - (u(R))^2} \right)$, we have $f(0) = v(R)$ and

$$f'(r) = u' \left(r\sqrt{1 - (u(R))^2} \right) \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2}.$$

So, for $r = 0$, we have

$$f'(0) = u'(0) \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2}.$$

Similarly, for $g(r) = 1 + u(R) \cdot u \left(r\sqrt{1 - (u(R))^2} \right)$, we have $g(0) = 1$ and

$$g'(r) = u(R) \cdot u' \left(r\sqrt{1 - (u(R))^2} \right) \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2}.$$

So, for $r = 0$, we have

$$g'(0) = u(R) \cdot u'(0) \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2}.$$

Let us denote $u'(0)$ by h . Then, by equating the derivatives of both sides of the formula (2), we conclude that

$$\begin{aligned} u'(R) &= \frac{\left[h \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2} \right] \cdot 1 - u(R) \cdot \left[u(R) \cdot h \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2} \right]}{1^2} = \\ &= \left[h \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2} \right] - \left[(u(R))^2 \cdot h \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2} \right], \end{aligned}$$

hence

$$\frac{du}{dR} = u'(R) = h \cdot \sqrt{1 - (u(R))^2} \cdot (1 - (u(R))^2).$$

By moving all the terms related to u to the left-hand side and all the terms related to R to the right-hand side, we get

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2} \cdot (1 - u^2)} = h \cdot dR.$$

By integrating both sides, we get

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2} \cdot (1 - u^2)} = \int h \cdot dR = h \cdot R + C,$$

for some integration constant C .

To find the expression for the integral in the left-hand side, we can substitute $u = \sin(\theta)$, then $du = \cos(\theta) \cdot d\theta$, and the integral takes the form

$$\int \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \cdot (1 - \sin^2(\theta))} = \int \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta)} \cdot \cos^2(\theta)} = \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}.$$

This integral is known – it is equal to $\tan(\theta)$, hence $\tan(\theta) = h \cdot R + C$. For $R = 0$, we have $v(0) = \sin(\theta)$, hence $\theta = 0$, $\tan(\theta) = 0$, and thus, $C = 0$ and $\tan(\theta) = h \cdot R$. Here,

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}},$$

so

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} = h \cdot R.$$

By squaring both sides and multiplying both sides by the resulting denominator, we get

$$u^2 = (1 - u^2) \cdot h^2 \cdot R^2 = h^2 \cdot R^2 - u^2 \cdot h^2 \cdot R^2.$$

By moving the terms containing u^2 to the left-hand side, we get

$$u^2 \cdot (1 + h^2 \cdot R^2) = h^2 \cdot R^2,$$

hence

$$u^2 = \frac{h^2 \cdot R^2}{1 + h^2 \cdot R^2},$$

therefore

$$u(R) = \frac{h \cdot r}{\sqrt{1 + h^2 \cdot R^2}}.$$

So, for $v(R) = c \cdot u(R)$, we get

$$v(R) = \frac{c \cdot h \cdot r}{\sqrt{1 + h^2 \cdot R^2}}.$$

If we denote $H \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot h$, so that $h = \frac{H}{c}$, we get the following formula.

Resulting formula.

$$v(R) = \frac{H \cdot R}{\sqrt{1 + \left(\frac{H \cdot R}{c}\right)^2}}.$$

For this formula, as one can easily see, the velocity never exceeds the speed of light.

Acknowledgments.

This work was supported in part by the National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

REFERENCES

1. Feynman R., Leighton R., Sands M. The Feynman Lectures on Physics // Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.

**ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ЛИ ВСЕЛЕННАЯ РАСШИРЯЕТСЯ БЫСТРЕЕ,
ЧЕМ СКОРОСТЬ СВЕТА: КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРИНЦИПА
КОПЕРНИКА**

Р. Мартинес

студент, e-mail: martinez76@miners.utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В первом приближении расширение Вселенной описывается законом Хаббла $v = H \cdot R$, согласно которому относительная скорость v двух объектов в расширяющейся Вселенной растёт линейно с расстоянием R между ними. Этот закон может быть получен из принципа Коперника, согласно которому космологически нет особого местоположения во Вселенной, и, следовательно, расширяющаяся Вселенная должна выглядеть одинаково с каждой отправной точки. Проблема с формулой Хаббла заключается в том, что для больших расстояний это приводит к нефизическим скоростям, превышающим скорость света. Поскольку расширение Вселенной является следствием общей теории относительности Эйнштейна (ОТО), эту проблему обычно решают учитывая искривлённость пространства-времени в ОТО. В этой статье мы рассматриваем эту проблему с чисто кинематической точки зрения. Мы показываем, что если учесть эффекты специальной теории относительности при применении принципа Коперника, мы получим модифицированную версию закона Хаббла, в которой все скорости физически значимы — в том смысле, что они никогда не превышают скорость света.

Ключевые слова: космологическое расширение, принцип Коперника, специальная теория относительности, сверхсветовая скорость.

Дата поступления в редакцию: 30.08.2017

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ УЧЁТЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИНЫ

С.Л. Дерябин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

А.С. Кирьянова

аспирант, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Аннотация. В работе рассматриваются трёхмерные изэнтропические течения политропного газа в условиях действия силы тяжести. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики для политропного газа. При показателе политропы $\gamma = 7.02$ эта система описывает движение воды. В системе вводится ортогональная криволинейная система координат. Для постановки задачи о распаде специального разрыва в системе делается вырожденная замена переменных, а именно: зависимые и независимые переменные меняются ролями. В новых переменных для системы ставится начально-краевая задача с данными на звуковой характеристике и дополнительным условием. Решение начально-краевой задачи строится в виде степенных рядов. Доказывается сходимость построенных рядов в области от поверхности слабого разрыва до границы газ-вакуум включительно. Для определения закона движения границы газ-вакуум выписывается квазилинейная система уравнений с частными производными, которая с помощью характеристического параметра сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: математическое моделирование, политропный газ, вакуум, сила тяжести, система уравнений газовой динамики, граница газ-вакуум, задача о распаде специального разрыва, начально-краевая задача, звуковая характеристика.

Введение

Задачи об истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил рассматривались ранее [1]–[6]. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [1]. В работах [7]–[8] при описании движения воды предложена модель газовой динамики для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 7.02$. Представляется, что эта модель сжимаемой сплошной среды является адекватной физической природе жидкости и позволит получить новые содер-

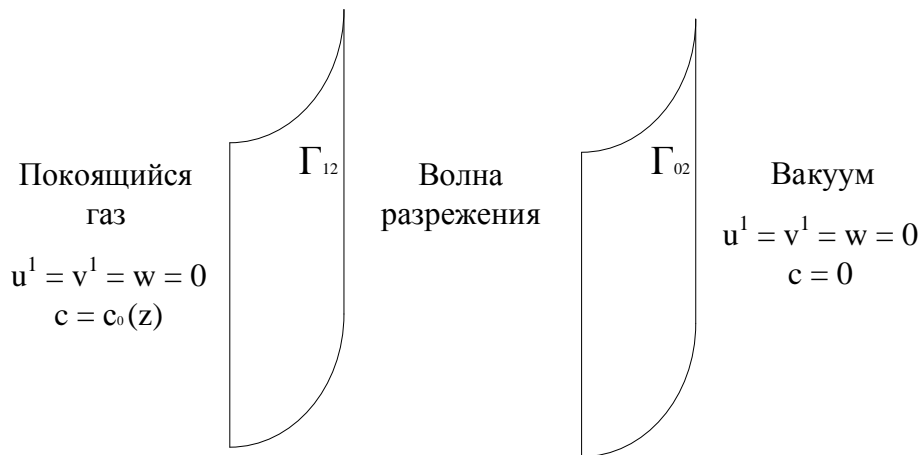


Рис. 2. Области покоя, вакуума и волны разрежения

$$\rho(t, x, y, z)|_{\Gamma_{02}} = 0.$$

Последнее предположение делает используемую модель приближенной.

В работе будут строиться законы движения: свободной поверхности Γ_{02} , поверхности слабого разрыва Γ_{12} и волна разрежения.

Система уравнений, описывающая трёхмерные изэнтропические течения идеального политропного газа в форме Громеки-Лэмба в условиях действия силы тяжести с учётом уравнения состояния, имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} c_t + \mathbf{U} \cdot \text{grad}c + \frac{\gamma - 1}{2} c \cdot \text{div}\mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}_t + \text{rot}\mathbf{U} \times \mathbf{U} + \frac{1}{2} \text{grad}U^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c \cdot \text{grad}c &= \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{F} = \{0, 0, -g\}$, g — ускорение свободного падения.

Вертикальная поверхность Γ является линейчатой поверхностью. В плоскости $z = 0$ задаётся линия L , которая, двигаясь вдоль оси Oz , определяет поверхность Γ .

Пусть линия L задаётся параметрически

$$x = \phi_1(\xi), \quad y = \phi_2(\xi),$$

или в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$.

Делается переход от декартовых координат x, y, z к новым ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z по следующим формулам

$$x = \phi_1(\xi) + \eta n_1(\xi), \quad y = \phi_2(\xi) + \eta n_2(\xi), \quad z = z',$$

или в векторной форме $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\xi) + \eta \mathbf{n}(\xi)$

Здесь $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства, ξ — параметр, с помощью которого задаётся L , η — расстояние от Γ , измеренное вдоль нормали, $\mathbf{n}(\xi) = \{n_1, n_2\}$ — единичный нормальный вектор к линии

L . Далее для определённости будет предполагаться, что вектор \mathbf{n} направлен внутрь вакуума.

Якобиан преобразования равен $J = \mathbf{R}_\eta \mathbf{R}_\xi \mathbf{R}_z$. Если $|\mathbf{r}_\xi| \neq 0$ в точке $\xi = \xi^0$ на линии L ($\eta = 0$), то эта точка $M^0(\xi_0, 0)$ не является особой точкой линии L . В дальнейшем это предполагается выполненным. Тогда якобиан преобразования J будет отличен от нуля в точке $M^0(\xi_0, 0)$ и её окрестности.

Для перехода в системе (1) к ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z необходимо вычислить коэффициенты Ламе:

$$H_1 = |\mathbf{R}_\eta| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{R}_\xi| = |\mathbf{r}_\xi + \eta \mathbf{n}_\xi|, \quad H_3 = |\mathbf{R}_z| = 1.$$

Поскольку $\mathbf{n}_\xi = -k(\xi)\mathbf{r}_\xi$ [10], где $k(\xi)$ — значение кривизны линии L , то $H_2 = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k(\xi)\eta)$. Заметим, что на поверхности Γ $H_2|_\Gamma = |\mathbf{r}_\xi| \neq 0$. Коэффициент Ламе обращается в ноль при $\eta = \frac{1}{k(\xi)}$, то есть в точках пространства, удалённых от Γ в направлении нормали на расстояние, равное радиусу кривизны линии L .

Заметим, что функция $H_{2\eta} = -k(\xi)|\mathbf{r}_\xi|$ зависит только от независимой переменной ξ , а функция H_2 , зависит от неизвестной функции $\eta(t, \xi, c, z)$.

Система уравнений (1) для данной криволинейной системы координат имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} c_t + c_\eta u + \frac{1}{H_2} c_\xi v + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left(u_\eta + \frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u + \frac{H_{2z}}{H_2} w \right) &= 0, \\ u_t + u_\eta u + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c c_\eta &= 0, \\ v_t + v_\eta u + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u v + \frac{H_{2z}}{H_2} v w + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c c_\xi &= 0, \\ w_t + w_\eta u + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w - \frac{H_{2z}}{H_2} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= -g. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u, v, w — проекции вектора скорости газа на координатные оси η, ξ, z соответственно. В этой системе координат переменная z сохраняется и поэтому в качестве неизвестной функции сохраняется третья координата вектора скорости газа w .

Если в системе (1) положить $u^1 = u^2 = w = 0$, то, как и в [6], первые три уравнения выполняются тождественно, а в четвёртом уравнении получим $\frac{2}{\gamma - 1} c c_z = -g$. Интегрируя полученное уравнение, имеем $c = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$ — распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь c_{00} — скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z \leq \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}. \quad (3)$$

Причём на верхней границе при $z = \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}$ волна разрежения примыкает к вакууму. В данной работе волна разрежения будет построена для внутрен-

них точек интервала (3). Конфигурация течения в окрестности непроницаемой стенки $z = 0$ и верхней границы газ-вакуум рассматриваться не будет.

Для построения волны разрежения, как и ранее [1] при решении задачи о распаде разрыва, в системе (2) делается замена переменных. Независимая переменная η и неизвестная функция c меняются ролями, то есть за независимые переменные берутся t, c, ξ, z , а за неизвестные функции η, u, v, w . В результате такой замены вместо системы (2) получается система:

$$\begin{aligned} \eta_t &= u - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right], \\ \eta_c \left(u_t + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 \right) &+ \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) u_c + \frac{2}{\gamma - 1} c = 0, \\ \eta_c \left(v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} uv \right) &+ \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) v_c - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c \eta_\xi = 0, \\ \eta_c \left(w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w \right) &+ \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) w_c - \frac{2}{\gamma - 1} c \eta_z = -g \eta_c. \end{aligned} \quad (4)$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \eta_t &= u - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right], \\ \eta_c \left(u_t + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 \right) &- \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. \\ &+ \left. \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] u_c + \frac{2}{\gamma - 1} c = 0, \\ \eta_c \left(v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} uv \right) &- \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. \\ &+ \left. \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] v_c - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c \eta_\xi = 0, \\ \eta_c \left(w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w \right) &- \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. \\ &+ \left. \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] w_c - \frac{2}{\gamma - 1} c \eta_z = -g \eta_c. \end{aligned} \quad (5)$$

Закон движения характеристики Γ_{12} ($\eta = \eta_0(t, \xi, z)$) определяется из решения дифференциальной задачи [9]

$$\eta_{0t} = c_0(z) \sqrt{1 + \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi|(1 - k(\xi)\eta_0)} \eta_{0\xi}^2 + \eta_{0z}^2}, \quad \eta(0, \xi, z) = 0. \quad (6)$$

Задача (6) по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение, что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12} :

$$u|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = 0, \quad w|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = 0, \quad c|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = c_0(z). \quad (7)$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (5) с данными на характеристике Γ_{12} (7). Поскольку Γ_{12} — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [11]. Если бы поверхность Γ_{12} убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Поскольку стенка $\eta = 0$ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных t, ξ, c, z служит [1] соотношение

$$\eta(0, c, z, \xi) = 0. \quad (8)$$

2. Построение волны разрежения

Теорема 1. *Существует t_0 такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности $M_0(\xi_0, \eta_0(t_0, \xi_0, z_0))$ существует единственное локально-аналитическое решение задачи (5), (7), (8) о распаде специального разрыва.*

Доказательство. Доказательство теоремы состоит, как и в [1], в сведении задачи (5), (7), (8) к характеристической задаче Коши стандартного вида [11]. ■

Разложим решение задачи (5), (7), (8) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, \xi, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\xi, c, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{\eta, u, v, w\}. \quad (9)$$

В системе (5) положим $t=0$ и с учётом (8) получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (9):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_0 + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}v_{0c} &= 0, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}w_{0c} &= 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим простейшую систему дифференциальных уравнений:

$$u_{0c} = \pm \frac{2}{\gamma - 1}, \quad v_{0c} = 0, \quad w_{0c} = 0.$$

Выбор направления вектора \mathbf{n} позволяет определить знак в первом уравнении системы. Это знак минус. В результате интегрирования системы с учётом (7) имеем:

$$\eta_1 = -2\alpha c + \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad u_0 = -\frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0(z)), \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0.$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$. Заметим, что $\eta_{1\xi} = 0$, $\eta_{1c} = -2\alpha$, $\eta_{1z} = \frac{2}{\gamma - 1}c_{0z}(z)$.

Продифференцируем систему (5) по t , положим $t=0$ и с учётом (8) получим:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= u_1 + \frac{\gamma - 1}{2}c \left(u_{1c} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0} u_0 \eta_{1c} \right), \quad H_2^0 = |\mathbf{r}_\xi|, \\ cu_{1c} - \alpha u_1 &= \frac{2}{\gamma - 1} \alpha k(\xi) c(c - c_0(z)), \\ cv_{1c} - 2\alpha v_1 &= 0, \\ cw_{1c} - 2\alpha w_1 &= 2\alpha g + \frac{4}{(\gamma - 1)^2} cc_{0z}(z). \end{aligned}$$

В результате интегрирования имеем:

при $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{8(\gamma - 2)(\gamma + 1)}{(3\gamma - 5)(\gamma - 3)(\gamma - 1)} k(\xi) c_0^{2-\alpha}(z) c^\alpha + \\ &+ \frac{2}{\gamma - 1} \alpha \frac{1}{2 - \alpha} k(\xi) c^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \alpha \frac{1}{1 - \alpha} k(\xi) c_0(z) c, \\ v_1 &= 0, \\ w_1 &= w_{10}(z) c^{2\alpha} - \frac{2}{\gamma - 1} c_{0z}(z) c - g; \end{aligned}$$

при $\alpha = 1$ ($\gamma = 3$)

$$u_1 = u_{10}(z) c + k(\xi) c^2 - k(\xi) c_0(z) c \ln c;$$

при $\alpha = 2$ ($\gamma = \frac{5}{3}$)

$$u_1 = u_{10}(z) c^2 + 6k(\xi) c^2 \ln c + 6k(\xi) c_0(z) c.$$

Продифференцируем систему (5) по t дважды и с учётом (8) получим:

$$\begin{aligned} \eta_3 &= u_2 + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{2c} + F_{21}(c, z, \xi), \\ cu_{2c} - 2\alpha u_2 &= F_{22}(c, \xi, z), \\ cv_{2c} - 4\alpha v_2 &= F_{23}(c, \xi, z), \\ cw_{2c} - 4\alpha w_2 &= F_{24}(c, \xi, z). \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
F_{21} &= -2\eta_{1z}w_1 + \frac{\gamma-1}{2}c \left[-2\eta_{1z}w_{1c} + \eta_{2c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta_{1c} \left(w_{1z} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_1 - \frac{H_{2\eta}}{H_2^{02}}|\mathbf{r}_\xi|k(\xi)\eta_1u_0 \right) \right], \\
F_{22} &= -\eta_{1c}u_{0z}w_1 - \frac{1}{2}\eta_{2c}u_1 + \\
&\quad + \frac{\gamma-1}{2}c \left[\frac{1}{2}\eta_{2c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 + \eta_{1c} \left(w_{1z} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_1 - \frac{H_{2\eta}}{H_2^{02}}\eta_1u_0 \right) - \eta_{1z}w_{1c} \right] + \\
&\quad + \frac{\gamma-1}{2}cu_{1c} \left(u_{1c} + \eta_{1c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 \right), \\
F_{23} &= \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi|} c \left(u_{1\xi} + \frac{\gamma-1}{2}cu_{1c\xi} \right), \\
F_{24} &= \frac{2}{\gamma-1}c\eta_{2z} - g\eta_{2c} + (\gamma-1)c \left(u_{1c} + \eta_{1c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 \right) w_{1c}.
\end{aligned}$$

Эти функции имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
F_{21} &= c^{2\alpha+1}p_{11}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{12}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{13}(\xi, z) + c^3p_{14}(\xi, z) + c^2p_{15}(\xi, z) + \\
&\quad + cp_{16}(\xi, z) + p_{10}(\xi, z), \\
F_{22} &= c^{2\alpha+1}p_{21}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{22}(\xi, z) + c^{2\alpha-1}p_{23}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{24}(\xi, z) + c^4p_{25}(\xi, z) + \\
&\quad + c^3p_{26}(\xi, z) + c^2p_{27}(\xi, z) + cp_{28}(\xi, z) + p_{20}(\xi, z), \\
F_{23} &= c^{\alpha+1}p_{31}(\xi, z) + c^3p_{32}(\xi, z) + c^2p_{33}(\xi, z), \\
F_{24} &= c^{3\alpha-1}p_{41}(\xi, z) + c^{2\alpha+1}p_{42}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{43}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{44}(\xi, z) + c^\alpha p_{45}(\xi, z) + \\
&\quad + c^{\alpha-1}p_{46}(\xi, z) + c^3p_{47}(\xi, z) + c^2p_{48}(\xi, z) + cp_{49}(\xi, z) + p_{40}(\xi, z).
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
u_2 &= c^{2\alpha} \left[u_{20}(z) + \int \frac{1}{2}F_{22}(c, z, \xi)c^{-2\alpha-1}dc \right], \\
v_2 &= c^{4\alpha} \left[v_{20}(z) + \int F_{23}(c, z, \xi)c^{-4\alpha-1}dc \right], \\
w_2 &= c^{4\alpha} \left[w_{20}(z) + \int F_{24}(c, z, \xi)c^{-4\alpha-1}dc \right].
\end{aligned}$$

После интегрирования получаем следующую структуру для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
u_2 &= c^{2\alpha+1}q_{21}(\xi, z) + c^{2\alpha}q_{22}(\xi, z) + c^{2\alpha-1}q_{23}(\xi, z) + c^{\alpha+1}q_{24}(\xi, z) + c^4q_{25}(\xi, z) + \\
&\quad + c^3q_{26}(\xi, z) + c^2q_{27}(\xi, z) + cq_{28}(\xi, z) + q_{29}(\xi, z)c^{2\alpha} \ln c + q_{20}(\xi, z), \\
v_2 &= c^{\alpha+1}q_{31}(\xi, z) + c^3q_{32}(\xi, z) + c^2q_{33}(\xi, z), \\
w_2 &= c^{3\alpha-1}q_{41}(\xi, z) + c^{2\alpha+1}q_{42}(\xi, z) + c^{2\alpha}q_{43}(\xi, z) + c^{\alpha+1}q_{44}(\xi, z) + c^\alpha q_{45}(\xi, z) + \\
&\quad + c^{\alpha-1}q_{46}(\xi, z) + c^3q_{47}(\xi, z) + c^2q_{48}(\xi, z) + cq_{49}(\xi, z) + q_{40}(\xi, z).
\end{aligned}$$

Продифференцируем систему (5) по t k раз и с учётом (8), получим

$$\begin{aligned}\eta_{k+1} &= u_k + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{kc} + F_{k1}(c, z, \xi), \\ cu_{kc} - 2\alpha u_k &= F_{k2}(c, \xi, z), \\ cv_{kc} - 4\alpha v_k &= F_{k3}(c, \xi, z), \\ cw_{kc} - 4\alpha w_k &= F_{k4}(c, \xi, z).\end{aligned}$$

Здесь $F_{k1}, F_{k2}, F_{k3}, F_{k4}$ — функции, заданные известным образом, зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (9).

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}u_k &= c^{\alpha k} \left[u_{k0}(z) + \int \frac{1}{2} F_{k2}(c, z, \xi) c^{-\alpha k - 1} dc \right], \\ v_k &= c^{2\alpha k} \left[v_{k0}(z) + \int F_{k3}(c, z, \xi) c^{-2\alpha k - 1} dc \right], \\ w_k &= c^{2\alpha k} \left[w_{k0}(z) + \int F_{k4}(c, z, \xi) c^{-2\alpha k - 1} dc \right].\end{aligned}$$

Структура решения для $\alpha = 1, 2$ в целом совпадает с полученной выше и здесь не приводится в виду громоздкости.

Анализ структуры коэффициентов ряда (9) приводит к следующим леммам.

Лемма 1. Коэффициенты ряда (9) при $k \geq 1, 1 < \gamma < 3$ имеют следующую структуру: $\mathbf{f}_k(c, z, \xi) = \mathbf{f}_k^0(z, \xi) + c\mathbf{P}_k(c, c \ln c, c^\alpha)$, где \mathbf{P}_k есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем Ak ($A = \text{const}$). Коэффициенты многочленов — функции, зависящие от z, ξ .

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (9). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{f}_k обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и \mathbf{f}_k обладают нужной структурой.

На основании леммы 1 можно утверждать, что структура решения задачи (5), (7), (8) следующая:

$$\begin{aligned}\eta &= \eta^0(t, z, \xi) + c\eta^1(t, c, z, \xi), \\ u &= u^0(t, z, \xi) + cu^1(t, c, z, \xi), \\ v &= v^0(t, z, \xi) + cv^1(t, c, z, \xi), \\ w &= w^0(t, z, \xi) + cw^1(t, c, z, \xi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\eta^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ u^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ v^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ w^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}\tag{10}$$

Для $\eta^0(t, z, \xi)$, $u^0(t, z, \xi)$, $v^0(t, z, \xi)$, $w^0(t, z, \xi)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Ряды (10) являются решением следующей задачи:*

$$\begin{aligned}\eta_t + \frac{1}{H_2} \eta_\xi v + \eta_z w &= u, \quad \eta(0, z, \xi) = 0; \\ u_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + u_z w &= \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2, \quad u(0, z, \xi) = \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z); \\ v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w &= -\frac{H_{2\eta}}{H_2} uv, \quad v(0, z, \xi) = 0; \\ w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w &= -g, \quad w(0, z, \xi) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

В этой системе для простоты восприятия верхние нулевые индексы опущены.

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (11) и сравнением полученных рядов с рядами (10). Ряды оказываются равными. Система (11) не имеет особенностей, поэтому задача (11) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами. Следовательно, ряды (10) сходятся. На основании приведённых лемм доказывается следующая

Теорема 2. *Для $1 < \gamma < 3$, при $0 \leq t \leq t_*$ область сходимости рядов (10), а также рядов $\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_z, \mathbf{f}_c, \mathbf{f}_\xi$ покрывает всю зону течения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (11).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1] и проводится по методике [11], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используется теорема 1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. ■

Проведём исследование задачи (11). С помощью введения характеристического параметра данная система уравнений с частными производными сводится

к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [12].

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{H_2}v, & \frac{dz}{d\tau} &= w, & \frac{d\eta}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2, & \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{H_{2\eta}}{H_2}uv, & \frac{dw}{d\tau} &= -g. \end{aligned} \quad (12)$$

Из первого уравнения системы (12) получим $t = \tau$. Интегрируя седьмое уравнение системы (12), будем иметь $w = -gt$.

Умножая пятое уравнение в системе (12) на u , шестое на v , складывая их, получим:

$$uu_\tau + vv_\tau = 0. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (13), имеем:

$$u^2 + v^2 = C^2, \quad (14)$$

где C — константа, определяемая точкой на исходной поверхности Γ . Если мы на поверхности Γ возьмём точку с координатами (ξ_0, z_0) , то C определится из формулы $C = \frac{2}{\gamma - 1}c_0(z)$. И тогда

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1}c_0(z) \right)^2. \quad (15)$$

Система (12) в общем случае не интегрируется, но при задании конкретного значения кривизны $k(\xi)$ может быть исследована численными методами.

3. Выводы

Проведённые исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Доказаны локальная по времени и глобальная по пространству теоремы существования и единственности поставленной начально-краевой задачи.
2. В виде сходящихся рядов построено течение газа в области волны разреза от поверхности слабого разрыва до границы газ-вакуум включительно.
3. Для определения закона движения границы газ-вакуум и значений газодинамических параметров на ней получена система обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Построенное решение задачи о распаде разрыва является аналитическим в интервале $1 < \gamma < 3$. Для моделирования течений воды необходимо задать $\gamma = 7.02$. Поэтому, построенное решение может быть использовано для моделирования течений, возникающих после разрушения плотины только приближенно. В этом проявляется ограниченность метода построения аналитических решений. Заметим, что в плоско-симметричном случае [6] решение построено при $\gamma > 1$. Это позволяет надеяться, что и в трёхмерном случае приближенные решения будут адекватны физической природе жидкости.

Благодарности

В заключении авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
2. Дерябин С.Л. Трёхмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.
3. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакууме // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН. 2010. Т. 16. С. 63–74.
5. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, 2015. 191 с.
6. Дерябин С.Л., Кирьянова А.С. Обобщение центрированной волны Римана при учёте силы тяжести // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 44–53.
7. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 2. С. 206–218.
8. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Результаты расчётов // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 3. С. 362–373.
9. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
10. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Москва : Изд. Едиториал УРСС, 2003. 432 с.
11. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
12. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.

MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FLOWS UNDER GRAVITY IS APPEARING AS A RESULT OF DAMAGE TO THE DAM

S.L. Deryabin

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

A.S. Kiryanova

Second Year Graduate Student, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The paper examines the three-dimensional isentropic flows of a polytropic gas under the action of gravity. As a mathematical model, a system of equations of gas dynamics for a polytropic gas is used. With the polytropic index $\gamma = 7.02$, this system describes the movement of water. The system introduces an orthogonal curvilinear coordinate system. To formulate the problem of the disintegration of a special discontinuity, the system makes a degenerate change of variables, namely: dependent and independent variables change roles. In new variables, an initial-boundary value problem with data on the sound characteristic and an additional condition is posed for the system. The solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of power series. The convergence of the constructed series in the region from the surface of a weak discontinuity to the gas-vacuum boundary is proved. To determine the law of motion of the gas-vacuum boundary, a quasilinear system of partial differential equations is written out, which, with the help of the characteristic parameter, reduces to a system of ordinary differential equations.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary, initial-boundary value problem, Riemann problem, centered wave.

Дата поступления в редакцию: 24.06.2017

ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ ФАКТОР В СИСТЕМЕ СОЦИАЛЬНО ЗНАЧИМОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А.Б. Крохалева

к.т.н., e-mail: arhipovaab@mail.ru

В.М. Белов

профессор, д.т.н., e-mail: vmbelov@mail.ru

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Аннотация. В статье рассматривается сущность и роль человеческого фактора в оценке качества социально значимой деятельности. Представлена эволюция данной категории, начиная с периода работ неоклассиков до настоящего времени. Предложено определение человеческого фактора в контексте социально значимой деятельности. Для описания компонентного состава интегрального показателя человеческого фактора определена классификация по различным основаниям: форма воплощения, характер взаимодействия внутри системы, содержание знаний, субъект человеческого фактора. Проанализированы основные подходы к оценке человеческого фактора. Предложена двухкомпонентная модель оценки человеческого фактора в социально значимой деятельности, состоящая из блоков качественного и количественного анализа данных с использованием лингвистической, балльной и интервальной шкал. Количественная компонента представляет собой интегральную оценку характеристик, измеряемых при помощи комплекса медицинских приборов и аппаратов, комбинации психофизиологических тестов. Качественная компонента содержит оценку трудно формализованных характеристик в условиях неопределённости исходных данных.

Ключевые слова: человеческий фактор, нечёткая логика, интервальный анализ, оценка качества, социально значимая деятельность.

Введение

Социально значимая деятельность (СЗД) — это нормативно организованный технико-технологический цикл процессов человеческой активности, направленный на удовлетворение какой-либо социально значимой потребности.

Цикл процессов СЗД, как правило, включает:

- возникновение социально значимой потребности;
- создание деятельности по удовлетворению данной потребности;
- получение требуемого результата по итогам деятельности;
- контроль результатов и качества выполненной работы.

Под термином «оценка качества СЗД» будем понимать результат выполнения сравнения с принятыми критериями сравнения для данного вида деятельности, которые являются совокупностью собственных характеристик цикла процессов (технично-технологических, нормативно-организационных и других) с учётом человеческого фактора (ЧФ).

Важным звеном в данном случае является понятие «ЧФ».

Разработка методов комплексной оценки ЧФ невозможна без всестороннего изучения проблемы подготовки специалистов в контексте их влияния на функционирование рынка труда. Недостаточный учёт свойств человека (ЧФ) при построении систем управления может привести к неудовлетворительному решению любых производственных задач: снижению надёжности, уровня безопасности, достоверности и т. п. принимаемых решений [15].

1. Эволюция понятия «ЧФ»

Современная история формализации психологических переменных и моделей начинается в XVII веке. В послевоенный период XX века данный процесс проходил в рамках кибернетических исследований, постепенно складываясь в самостоятельную дисциплину — математическую психологию [10].

Сам термин «ЧФ» появился в середине XX века как новая междисциплинарная область знаний при описании специфики многовидового взаимодействия человека и техники в больших системах [8]. Позднее область существования указанного термина значительно расширилась, включая в себя, в первую очередь, исследования роли и места работающего человека в процессах, протекающих в сложных системах различного назначения и нацеленных на решение весьма широкого спектра задач. Одной из важнейших среди них является оценка и оптимизация влияния человека (социума) на эффективность и качество функционирования систем, включающих его.

Растущий вес и роль ЧФ, его инновационный характер, проявившийся в менеджменте качества, а также высокая результативность его учёта при решении актуальных проблем качества обусловили появление нового научно-производственного направления — управления эргономичностью.

Анализ показал, что в научной литературе до сих пор не сформировалось единого чёткого определения категории ЧФ.

В Большом толковом словаре русского языка под редакцией С.А. Кузнецова ЧФ понимают «как роль и значение человека в общественной жизни, социальных процессах с человеком как субъектом деятельности». При этом слово «фактор» раскрывается как «существенное обстоятельство, способствующее какому-либо процессу, явлению» [4].

Исторически ЧФ рассматривали в рамках идей человеческого капитала У. Петти, Ф. Кенэ, А. Смит, Ж.Б. Сэй, Дж.С. Милль, К. Маркс. Более того, развитие теории ЧФ в конце XX века произошло вместе с распространением термина «интеллектуальный капитал» [2]. Путь исследования интеллектуального фактора, его источника, специфики движения начался ещё в 60-е годы XX века в работах неоклассиков, в частности, М. Фридмана, который выделил

в составе активов предприятия гуманитарный капитал и определил некоторые его особенности. По мнению М. Фридмана, главный источник будущего дохода от гуманитарного капитала заключён в работниках фирмы [1].

В XXI веке возросли объёмы наукоёмкого производства, интеллектуальный труд распространился в самых различных областях. Уточнение содержания современного ЧФ как объекта исследования было продолжено В.С. Гойло, В.Л. Иноземцевым, Р.И. Капеляшниковым, С.М. Климовым, К.-Э. Свейби, Т. Стюартом, Э. Тоффлером, Р.И. Цвылевым, Л. Эдвинссоном и др. ЧФ аккумулирует научные знания работников, интеллектуальную собственность, накопленный опыт, общение и организационную структуру, информационные сети и имидж компании. Все эти элементы рассматриваются как факторы, от которых в той или иной степени зависит создание богатства человеческого общения.

В советский период ЧФ определяли в рамках социальной сущности человека как «катеорию через совокупность всех потенциально деятельных членов общества, их творческих способностей, нравственных и социальных качеств» [7, 16].

В постсоветский период возрастание роли ЧФ явилось объективной необходимостью, которая была обусловлена уровнем развития производительных сил и совершенствованием производственных отношений. Факторами, порождающими эту необходимость, явились:

- рост масштабности исторических целей;
- ускорение социально-экономического развития;
- изменение места и роли человека в системе общественного производства под влиянием научно-технической революции [16].

В это время было принято определение, согласно которому ЧФ олицетворял высокообразованную, хорошо профессионально подготовленную, нравственную и духовно богатую личность, выражая качественное состояние совокупной рабочей силы на современном уровне её развития с возможностью совершенствования в физическом, творческом, интеллектуальном и нравственном аспектах.

На сегодняшний день наибольшее внимание к проблемам ЧФ сосредоточено именно в социально значимых сферах (сфере образования, наукоёмких и технически сложных (опасных) отраслях, например, в авиации, горном деле и др.).

В экономической литературе, например [9], часто отождествляют понятие ЧФ и агрегатный индекс развития человеческого потенциала.

В области информационных технологий [12] ЧФ — это специалисты с определённым уровнем профессиональной квалификации, а также с многообразием психологических характеристик, знаний, опыта, стимулов и потребностей. Анализ и учёт ЧФ связан с большими трудностями, появляющимися на стыке различных профессий и областей знаний.

Некоторые авторы определяют понятие ЧФ через противопоставление понятию человеческие ресурсы. Последнее понятие основано на технократическом подходе к развитию производства, где наёмный рабочий отчуждён от себя в процессе труда. Технократический подход к рабочей силе, сводящий её к ЧФ,

кадрам, персоналу приводит к рассмотрению сущности процесса управления только в узком смысле [14].

С точки зрения социологии ЧФ, человеческий капитал, человеческий потенциал рассматривают как качества людей, определяющие результаты деятельности, в которую они вовлечены.

В сфере образования ЧФ понимают как наиболее широкое обозначение всей совокупности личностных качеств человека (мотивов поведения, потребностей, ценностных ориентаций, интересов, эмоционально-волевой сферы), влияющих на качество и производительность труда [5].

В рамках психологии безопасности, например [3], под ЧФ понимают специалистов, взаимодействующих с техникой, окружающей средой, другими специалистами, документацией. Согласно исследованиям [3], доля ЧФ неуклонно возрастает и на сегодняшний день составляет порядка 90 % на фоне убывания технического фактора в связи с качественным изменением технических характеристик.

Так, например, в авиации «ЧФ — это наука о людях в той обстановке, в которой они живут, трудятся, об их взаимодействии с машинами, процедурами и окружающей обстановкой, а также о взаимодействии людей между собой». Аспектами ЧФ определяют принципы, применимые к процессам проектирования, сертификации, подготовки кадров, эксплуатационной деятельности и технического обслуживания и нацеленные на обеспечение безопасного взаимодействия между человеком и другими компонентами различного рода систем посредством надлежащего учёта возможностей (способностей) человека [11].

Существует ряд нормативных документов, регламентирующих роль и значение ЧФ (см. табл. 1).

Если в зарубежных стандартах / требованиях (см. табл. 1) вопросы учёта ЧФ в области подготовки специалистов разработаны и имеют четкую законодательную основу, то в России проблема создания практически отсутствующей нормативной базы стоит особенно остро.

2. Сущность и классификация ЧФ

Современная концепция ЧФ не ограничивается анализом знаний, воплощённых в человеке и способствующих созидательному труду, демонстрируя более широкий подход, рассматривая как человеческий потенциал не только знания, воплощённые в человеке, но и накопленные научные знания, объективированные в новых базах данных и др., а также в отношениях с другими экономическими субъектами.

ЧФ может быть определён как специфический вклад человека в обеспечение качества и эффективности деятельности различных систем, элементом которых он является [13] (см. табл. 2).

Таким образом, ЧФ, с одной стороны, является компонентом системы, с другой, сам является системной категорией, формируя множество системных конструкций, в которых он сам выступает как их подсистема или элемент.

Таблица 1. Подходы к оценке ЧФ

Наименование документа / Title of the document	Подход к роли человека в си- стеме / Approach to the role of a person in the system
Требования ИКАО (International Civil Aviation Organization) к подготовке авиационного персонала в области ЧФ: стандарты и рекомендуемая практика	Реализована модель SHELL (2003 г.): S — Software (процедуры, символы) H — Hardware (машина) E — Environment (среда) L — Liveware (человек)
Документы организации Eurocontrol	Практические вопросы обеспечения безопасности, коллективная работа, функции работы коллектива
Документы организации European Joint Authorities	ЧФ как элемент развития, изменения уровня квалификации. Человеческая ошибка как подсистема развития ЧФ

ЧФ включает как природные, так и социальные элементы, многие из которых могут быть развиты и усовершенствованы путём физических и психологических действий, образования. Формируясь и накапливаясь в течение жизни индивида, ЧФ по мере развития производства теряет признаки природного ресурса, приобретая черты формируемого и воспроизводимого. Главным элементом здесь является непрерывное образование, которое способствует формированию социальной компоненты ЧФ.

Элементы ЧФ могут быть классифицированы по различным основаниям: форма воплощения, характер взаимодействия внутри системы, содержание знаний, субъект ЧФ.

С точки зрения субъектов как носителей ЧФ может быть индивидуальным и коллективным. Некоторые учёные классифицируют ЧФ на кадровый, организационный и потребительский, совпадающие по содержанию с человеческим и структурным.

Важнейшей частью ЧФ является универсальный потенциал, который образуется знаниями, формирующими основу отрасли деятельности. Значение универсального потенциала определяется тем, что он представляет собой базу, источник, фундамент для всех других форм потенциала.

Вторым элементом ЧФ являются накопленные научные знания. Это потенциал, основанный на технологических знаниях как форме капитального ресурса производства. Данный компонент является подвижным, изменчивым.

Он включает всю совокупность интеллектуальных активов, научные и технологические идеи, знания, опыт и квалификацию работников и т. п.

Таблица 2. Человеческий фактор как системная категория

Свойство системы / System property	Реализация в рамках ЧФ/ Implementation in the human factor
Структурность	ЧФ как сложное многомерное явление
Интеграция	ЧФ развивается во взаимодействии с окружающей средой (экономические, политические, физические и др. виды взаимодействий)
Обособленность	ЧФ является локальным выделенным фрагментом из общей совокупности
Иерархичность	ЧФ — многоаспектное понятие, состоящее из большого числа структурных инвариантов, отражающих разные стороны и свойства ЧФ как системы
Неаддитивность	Несводимость свойств ЧФ к сумме составляющих его компонентов, предполагается наличие у системы интегративных качеств

Третий элемент — социальный потенциал ЧФ. Способствует повышению производительности через вклад социальной организации общества в производство и экономический рост. Это потенциал взаимодействия, сотрудничества, формируемого в пространстве межличностных экономических и социальных отношений.

Э. Свейби, Э. Эдвинссон, Э. Брукинг предлагают включить в состав ЧФ потребительский фактор, способность которого заключается в удовлетворении запросов потребителей. Другое название для потребительского фактора, встречающееся в литературе — «потенциал клиента». Под ним понимается портфель договоров с потребителями продукции и услуг.

Отметим, что список составных ЧФ не является исчерпывающим, поскольку может быть дополнен или видоизменен. Например, допустимо дробление социального потенциала ЧФ на политический, экономический, экологический и т. д.

В рамках СЗД ЧФ можно определить, как общественное отношение, выражающее социально-экономическую форму невещественных ценностей человеческой природы, которые, становясь объектом чьей-либо собственности, на-

капливаются за счёт инвестиций, производительно используются в течение определённого времени с целью получения дохода. ЧФ не имеет материально-вещественной формы проявления, объединяет невещественные ценности интеллектуальной природы, воплощённые в работниках.

3. Роль и структура оценки ЧФ в СЗД

На сегодняшний день отсутствуют методы комплексного оценивания ЧФ ввиду сложности формализации его характеристик и количественной оценки данного многоаспектного понятия, так как особенностями проявления ЧФ выступают:

- длительный инвестиционный период;
- высокая степень риска;
- низкая степень ликвидности.

Более того, ЧФ не только влияет на развитие рынка труда и в целом на социально-экономической системы, но и сам испытывает многочисленные воздействия со стороны внешней среды. На него серьёзное влияние оказывают экономические, политические, социально-культурные и технологические факторы [6].

Изучение содержания и степени влияния ЧФ являются главными задачами оценки СЗД. В контексте оценки качества СЗД под ЧФ будем понимать определённый комплексный качественно-количественный показатель в разрезе характеристики уровня образования специалиста в соответствующей СЗД и комплекса психофизиологических свойств личности (см. рис. 1).

Психофизиологические характеристики сгруппированы в виде 4-х непересекающихся категорий качеств личности, а именно:

- энергетические, характеризующие уровень активности психофизиологических функций и систем (кровообращения, дыхания, обмена веществ и др.);
- информационные, характеризующие обработку поступившей информации и принятие на её основе решений, т. е. отражающие когнитивные процессы (мышление, память, структуру личности, индивидуальность);
- эффекторные, отвечающие за реализацию принятых решений (количественные и качественные показатели профессиональной деятельности и физиологические параметры);
- активационные, обуславливающие направленность и степень напряжённости профессиональной деятельности (уровень внимания, стрессоустойчивости, особенности мотивационной сферы и т. д.).

Таким образом, оценка ЧФ в структуре оценки качества любой СЗД является важным направлением научно-практических исследований.

При формировании комплексной оценки ЧФ, главным образом в сферах образования и информационной безопасности, необходимо учитывать существующую специфику задачи: сложность понятийного аппарата; проблемы системного подхода к обеспечению и улучшению оценки в зависимости от конкретных условий; быстроту принимаемых решений; сложность получения исходной информации для принятия решений и время, затрачиваемое на получение инфор-



Рис. 1. Компонентный состав ЧФ в СЗД

мации; сложность используемых алгоритмов получения исходной информации и алгоритмов принятия решений и т. д.

Одним из способов решения задачи комплексной оценки ЧФ в контексте СЗД может являться внедрение автоматизированных систем такой оценки. Каждая группа психофизиологических характеристик предусматривает уникальный набор методов и моделей формирования этой оценки.

Обычные методы анализа систем и моделирование на ЭВМ, основанные на точной обработке числовых данных, по существу не способны охватить огромную сложность процессов человеческого мышления и принятия решений. Оценку ЧФ в условиях неопределенности параметров её функционирования можно сформировать с использованием согласованного семейства моделей, адаптивно конструирующихся одна из другой и непрерывно совершенствующихся на основе оптимального выбора исходных данных. Для этой цели возможно предложить двухкомпонентную модель, состоящую из блоков качественного и количественного анализа данных с использованием лингвистической, балльной и интервальной шкал.

Рассмотрим их подробнее (см. рис. 2).

1. Количественный компонент (K_1) представляет собой интегральную оценку энергетических, активационных показателей. Инструментарием исследования в данном случае можно считать комплекс медицинских приборов и аппаратов (в том числе полиграф), а также комбинацию психофизиологических тестов.

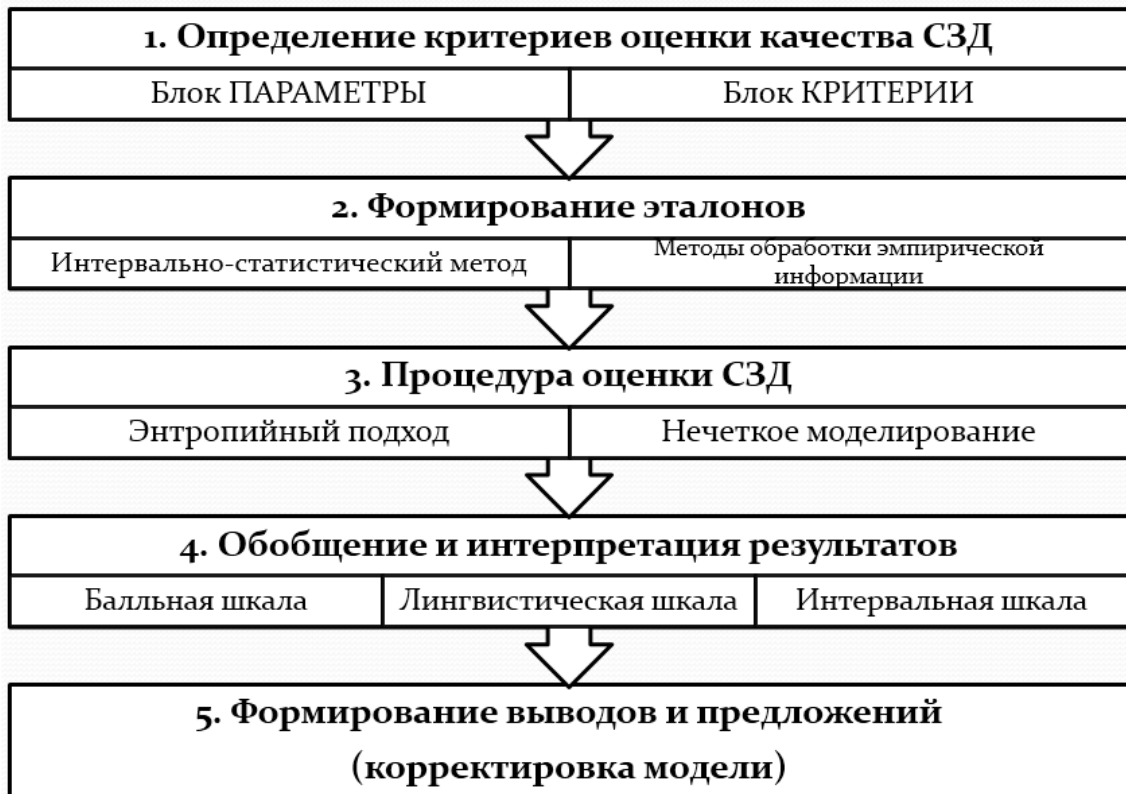


Рис. 2. Обобщённый алгоритм оценки ЧФ в СЗД

Таким образом, количественный компонент является отображением состояния энергетических (K_e) и активационных показателей (K_a):

$$K_1 \rightarrow (K_e, K_a) \quad (1)$$

или

$$(K_e, K_a) = f(K_1). \quad (2)$$

Анализ литературы показал, что на сегодняшний день не существует формальных методов описания взаимосвязи разработанных количественных методов оценки энергетических, активационных показателей и качества подготовки специалистов в рамках формирования комплексного интегрального компонента «человеческий фактор». Поэтому проблема выявления и представления данной связи имеет самостоятельное значение.

2. Качественный компонент (K_2) содержит оценку информационных и эффекторных качеств личности. В данном случае возможно предложить ряд моделей и методов, использующих в своей основе нечёткую логику и интервальный или интервально-статистический анализ.

Качественный компонент является отображением состояния информационных (K_i) и эффекторных показателей (K_p). Более того, качественный компонент отражает также многокритериальный показатель «уровень и характеристика

образования», в комплексе представляющий показатель профессиональной готовности специалиста (P_g):

$$K_2 \rightarrow (K_i, K_p, P_g) \quad (3)$$

или

$$(K_i, K_p, P_g) = f(K_2). \quad (4)$$

Здесь и далее будем рассматривать показатель «профессиональной готовности» как мультисоциометрическую характеристику, отражающую уровни компетенций специалиста в рамках профессиональной деятельности. На наш взгляд, в процессе формирования показателя «профессиональной готовности» можно рассматривать варианты решения прямой и обратной задачи:

1. Прямая задача предполагает учёт в структуре компетенций знаний, умений, навыков и исходит в оценке компетенций от оценок знаний, умений, навыков, которые весьма активно использовались в советской и постсоветской системах образования (до 1990-х гг.). Данная логическая цепочка предполагает то, что существовавшие раньше знания, умения, навыки по каждой осваиваемой дисциплине позволяли специалисту в области образования дать качественную формулировку по содержанию каждой осваиваемой компетенции.

2. Обратная задача, с которой приходится сталкиваться специалистам в области образования непосредственно в повседневной практике, заключается в попытке декомпозиции предлагаемых сверху компетенций для того, чтобы понять их содержание и реализовать на практике, в том числе контролировать их освоение.

Мы предлагаем рассматривать процесс формирования показателя профессиональной готовности в рамках прямой задачи формирования компетенций специалистов. Ниже сформулируем несколько математических постановок задач в области оценки количественных и качественных компонентов ЧФ.

I. Модель оценки качественных компонент предполагает, что группа из N экспертов отвечает на n вопросов, соответственно составленных проверяющим по нечёткой шкале. По ответам экспертов формируют нечёткое число (НЧ) Z_t ($t = [1; N]$), которому ставят в соответствие одно из эталонных. Значения НЧ, соответствующие оценке ответов всей группы экспертов на j -й раздел (вопрос) ($j = [1; n]$), определяют по формуле:

$$L_{\sim j} = \left(\sum_{t=1}^N Z_t \right) / N, \quad (5)$$

где \sum_{\sim} – нечёткое сложение, выполненное по одному из методов реализации операций нечёткой арифметики.

Суммарную оценку качественных компонент определяют с учётом ранее

вычисленных коэффициентов важности (КВ):

$$\underset{\sim}{L}S = \left(\sum_{j=1}^n P N_i * \underset{\sim}{L}j \right), \quad (6)$$

где $P N_i$ — нормализованные КВ.

Образованное $\underset{\sim}{L}S$ сравнивают с эталонными НЧ, для чего используют α -уровневое расстояние (АУР):

$$d(\underset{\sim}{L}S, \underset{\sim}{L}V_j) = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m |x_i - y_j|}{k}, \forall \mu_y \geq \alpha, \quad (7)$$

где α — заданное значение α -уровня ($0 \leq \alpha \leq 1$); $\underset{\sim}{L}V_j$ — эталонные НЧ; x_i и y_j — носители полученного и эталонного НЧ $\underset{\sim}{L}S$ и $\underset{\sim}{L}V_j$; m — количество компонентов НЧ $\underset{\sim}{L}S$; k — количество компонентов НЧ $\underset{\sim}{L}V_j$ с функцией принадлежности (ФП) $\mu_y \geq \alpha$.

Критерием соответствия $\underset{\sim}{L}S$ одному из эталонных НЧ считают минимальное АУР, которое и определяет оценку качественной компоненты.

В качестве метода определения параметров ФП наиболее эффективные и адаптивные результаты позволяет получить интервально-статистический метод (ИСМ).

II. Модель оценки количественных компонент базируется на положениях Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС 3, 3+), +), где сформулированы общекультурные, профессиональные, общепрофессиональные и профессионально-специализированные компетенции (ОК, ПК (РК), ОПК (ОРК) и ПСК (PSK)) для гуманитарного, социального и экономического цикла (ГСЭ), математического и естественнонаучного цикла (МЕЦ), а также профессионального цикла на базе дисциплин базовой и вариативной частей.

Обозначим через M набор реализуемых компетенций в рамках рабочего учебного плана исследуемого направления подготовки в разрезе теоретического (t) и практического аспекта (p) сформированности:

$$M = \langle OK^p . OK^t . PK^z . PK^t . OPK^z . OPK^t . PSK^z . PSK^t \rangle, \quad (8)$$

где $OK^p = \{OK_1^p, \dots, OK_n^p\}$ — набор рассматриваемых общекультурных компетенций, реализуемых n дисциплинами рабочего учебного плана в практическом аспекте;

$OK^t = \{OK_1^t, \dots, OK_n^t\}$ — набор рассматриваемых общекультурных компетенций, реализуемых n дисциплинами рабочего учебного плана в теоретическом аспекте;

$PK^p = \{PK_1^p, \dots, PK_m^p\}$ — набор рассматриваемых профессиональных компетенций, реализуемых m дисциплинами рабочего учебного плана в практическом аспекте;

$PK^t = \{PK_1^t, \dots, PK_m^t\}$ — набор рассматриваемых профессиональных компетенций, реализуемых m дисциплинами рабочего учебного плана в теоретическом аспекте;

$OPK^p = \{OPK_1^p, \dots, OPK_s^p\}$ — набор рассматриваемых общепрофессиональных компетенций, реализуемых s дисциплинами рабочего учебного плана в практическом аспекте;

$OPK^t = \{OPK_1^t, \dots, OPK_s^t\}$ — набор рассматриваемых общепрофессиональных компетенций, реализуемых s дисциплинами рабочего учебного плана в теоретическом аспекте;

$PSK^p = \{PSK_1^p, \dots, PSK_v^p\}$ — набор рассматриваемых профессионально-специализированных компетенций, реализуемых v дисциплинами рабочего учебного плана в практическом аспекте;

$PSK^t = \{PSK_1^t, \dots, PSK_v^t\}$ — набор рассматриваемых профессионально-специализированных компетенций, реализуемых v дисциплинами рабочего учебного плана в теоретическом аспекте.

Обозначим множество дисциплин рабочего учебного плана как $D = \{d_i\}$, $i = \overline{1..k}$, k — общее число дисциплин, k_1, k_2, k_3, k_4 — количество дисциплин, реализующих ОК, ПК, ОПК и ПСК соответственно. Итоговая матрица имеет размерность $k \times (n + m + s + v)$.

Результаты освоения студентом j -ой компетенции вида ОК дисциплины i в теоретическом и практическом аспектах представим как $dt_i^{OK_j}$ и $dp_i^{OK_j}$ соответственно. Для компетенций вида ПК, ОПК и ПСК аналогично ($dt_i^{PK_i}$ и $dp_i^{PK_i}$, $dt_i^{OPK_i}$ и $dp_i^{OPK_i}$, $dt_i^{PSK_i}$ и $dp_i^{PSK_i}$). Ограничения по реализации компетенции в рамках дисциплин учебного плана имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq dt_i^{OK_i} \leq 100; 0 \leq dt_i^{PK_i} \leq 100; \\ 0 \leq dp_i^{PK_i} \leq 100, \forall_i = 1..k, \forall_j = 1..n + m + s + v; \\ 0 \leq dt_i^{OPK_i} \leq 100; 0 \leq dp_i^{OPK_i} \leq 100, \forall_i = 1..k, \forall_j = 1..n + m + s + v; \\ 0 \leq dt_i^{PSK_i} \leq 100; 0 \leq dp_i^{PSK_i} \leq 100, \forall_i = 1..k, \forall_j = 1..n + m + s + v; \\ \sum_{i=1}^k dt_i^{OK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dt_i^{OK_i} \neq 0; \sum_{i=1}^k dp_i^{OK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dp_i^{OK_i} \neq 0; \\ \sum_{i=1}^k dt_i^{PK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dt_i^{PK_i} \neq 0; \sum_{i=1}^k dp_i^{PK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dp_i^{PK_i} \neq 0; \\ \sum_{i=1}^k dt_i^{OPK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dt_i^{OPK_i} \neq 0; \sum_{i=1}^k dp_i^{OPK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dp_i^{OPK_i} \neq 0; \\ \sum_{i=1}^k dt_i^{PSK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dt_i^{PSK_i} \neq 0; \sum_{i=1}^k dp_i^{PSK_i} \neq 0; \sum_{j=1}^{n+m+s+v} dp_i^{PSK_i} \neq 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Интегральные оценки в теоретическом и практическом контекстах рассчи-

тывают по формулам:

$$L_t = \alpha \sum_{j=1}^n PN_{OK_j} * \sum_{i=1}^k dt_i^{OK_j} * PN_i + \beta * \sum_{j=n+1}^{n+m} PN_{PK_j} * \sum_{i=1}^k dt_i^{PK_j} * PN_i + \\ + \gamma * \sum_{j=n+m+1}^{n+m+s} PN_{OPK_j} * \sum_{i=1}^k dt_i^{OPK_j} * PN_i + \\ + (1 - \alpha - \beta - \gamma) * \sum_{j=n+m+s+1}^{n+m+s+v} PN_{PSK_j} * \sum_{i=1}^k dt_i^{PSK_j} * PN_i \quad (10)$$

$$L_p = \alpha \sum_{j=1}^n PN_{OK_j} * \sum_{i=1}^k dp_i^{OK_j} * PN_i + \beta * \sum_{j=n+1}^{n+m} PN_{PK_j} * \sum_{i=1}^k dp_i^{PK_j} * PN_i + \\ + \gamma * \sum_{j=n+m+1}^{n+m+s} PN_{OPK_j} * \sum_{i=1}^k dp_i^{OPK_j} * PN_i + \\ + (1 - \alpha - \beta - \gamma) * \sum_{j=n+m+s+1}^{n+m+s+v} PN_{PSK_j} * \sum_{i=1}^k dp_i^{PSK_j} * PN_i \quad (11)$$

где PN_i — нормализованные КВ дисциплины в рамках реализации компетенций, рассчитанные на основе матрицы парных сравнений; α — КВ набора компетенций ОК; β — КВ набора компетенций ПК; γ — КВ набора компетенций ПК; $PN_{OK_j}, PN_{PK_j}, PN_{OPK_j}, PN_{PSK_j}$ — нормализованные КВ компетенций (ОК, ПК, ОПК и ПСК).

4. Перспективы исследования

В новых социально-экономических условиях, когда роль ЧФ в повышении производительности и качества труда в структуре производства значительно возрастает, эта тенденция должна находить своё отражение, прежде всего, в содержании системы непрерывного образования [5].

Современный рынок труда предъявляет особые требования к специалистам, базовыми компонентами которых являются высокий уровень профессионализма и психологической устойчивости.

Для работодателей актуальной становится разработка комплексной процедуры интегральной целостной оценки личности с учётом индивидуального своеобразия её потенциальных возможностей к обучению, развитию и совершенствованию в профессиональной деятельности, так называемого ЧФ.

Одним из инструментов, способствующих развитию ЧФ и усилению его роли, является необходимость планирования системы непрерывного образования, включая проведение научно-обоснованного профессионального психологического отбора в цепочке:

- школьник: в рамках поступления в профильные классы;

– абитуриент: при поступлении в вузы по специализированным направлениям;

– соискатель: повышение квалификации по специальности.

Профессиональный психологический отбор позволяет достаточно быстро и объективно измерять большое количество психофизиологических свойств, выявлять глубокую структуру индивидуальных особенностей личности, детерминированных физиологическими системами организма. Профессиональный психологический отбор прогнозирует возможности кандидата, а именно: его способность к обучению, а в конечном итоге — его эффективность как специалиста в процессе последующей профессиональной деятельности. Отсюда установление соответствия свойств и качеств личности соискателя требованиям выбранной профессии является главной задачей профессионального психологического отбора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedman M. The Basic Postulates of the Demand Theory // *Economic Studies Quarterly*. Vol. 14. 1963.
2. Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. СПб. : Экономическая школа, 1998. 230 с.
3. Безопасность полётов и человеческий фактор в авиации // *Материалы VI Всесоюзной научно-практической конференции 15-17 октября 1991 года*. СПб., 1991. 128 с.
4. Большой толковый словарь русского языка / гл. ред. С. А. Кузнецов. СПб. : Норинт, 2006. С. 1414.
5. Бычков А.В. Человеческий фактор в основном и дополнительном образовании (на примере технологического образования). М. : АБВ-ИЗДАТ, 2016. 88 с.
6. Гапонова С.Н., Гостилович Т.А. Взаимное влияние в развитии социально-экономической системы и человеческого фактора : монография. Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2009. 160 с.
7. Джалалов А. Человеческий фактор: философия, идеология, политика. Т. : Узбекистон, 1991. 154 с.
8. Ермаков К.С., Руссакова Е.Р. Человеческий фактор в авиации : учебное пособие. М. : МГТУ ГА, 2014. 362 с.
9. Ермоленко Н.Ю. Формы и инструменты развития человеческого фактора сферы образовательных услуг. Краснодар : Изд-во ЮИМ, 2014. 162 с.
10. Журавлёв Г.Е., Парсонс С.О., Строуп Л.Т. Психологические основы культуры безопасности атомной энергетики и промышленности (системные аспекты) // *Вып. 1. Человеческие факторы и культура безопасности атомной энергетики*. М., 1996. 143 с.
11. Лейченко С.Д., Малишевский А.В., Михайлюк Н.Ф. Человеческий фактор в авиации: Монография в 2-х книгах. Кн. 1. СПб. : Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, 2005. 473 с.
12. Липаев В.В. Человеческие факторы в программной инженерии: рекомендации и требования к профессиональной квалификации специалистов. М. : СИНТЕГ, 2009. 328 с.

13. Николаев А.В. Новые методологические подходы к исследованию человеческого фактора в информационном обществе. М. : МИЭМ, 2007. 52 с.
14. Сульповар Л.Б. Человеческий фактор в системе управления организациями. М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2004. 71 с.
15. Человеческий фактор в управлении / Под ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова. М. : КомКнига, 2006. 496 с.
16. Юзуфович Г.К., Цветков С.А. Направления и противоречия активизации человеческого фактора // Человеческий фактор и экономический прогресс : Сб. науч. тр. / Редкол.: Г.С. Вечканов и др. Л. : ЛИЭИ, 1989. 160 с.

THE HUMAN FACTOR IN THE SYSTEM OF SOCIALLY SIGNIFICANT ACTIVITY

A.B. Krohaleva

Ph.D. (Eng.), e-mail: arhipovaab@mail.ru

V.M. Belov

Dr.Sc. (Eng.), Professor, e-mail: vmbelov@mail.ru

Siberian State University of Telecommunications and Informatics

Abstract. In article the entity and a role of a human factor in an assessment of quality of socially important activities are considered. The evolution of this category is provided, since the period of operations of neoclassics until now. Determination of a human factor in the context of socially important activities is offered. For the description of component composition of an integral index of a human factor the classification by different bases is provided: the form of the embodiment, the nature of interaction in system, the content of knowledge, the subject of a human factor. Basic approaches to an assessment of a human factor are analyzed. The two-component model of an assessment of a human factor in socially important activities, consisting of units of qualitative and quantitative analysis of data with use of linguistic, mark and interval scales, is offered. The quantitative component represents an integral assessment of the measured characteristics by means of a complex of medical instruments and devices, combinations of psychophysiological tests. The qualitative component contains an assessment of difficult formalized characteristics in the conditions of uncertainty of basic data.

Keywords: human factor, fuzzy logic, interval analysis, quality assessment, socially significant activity.

Дата поступления в редакцию: 14.07.2017

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ КАФЕДРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

А.А. Сеньковская¹

аспирант, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

И.И. Фураева²

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: iurir@mail.ru

¹Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва

Аннотация. Представлены основные причины необходимости автоматизации процесса распределения учебной нагрузки кафедры. Сформулирована математическая постановка задачи распределения нагрузки кафедры. Рассмотрены основные алгоритмы, реализующие поставленную задачу, в частности, жадные алгоритмы, направленные на оптимизацию данного автоматизируемого процесса.

Ключевые слова: оптимизация, моделирование, педагогическая нагрузка, жадный алгоритм.

Введение

Объём работы профессорско-преподавательского состава в вузах устанавливается с учётом необходимости выполнения всех видов учебной, учебно-методической и научно-исследовательской работы, вытекающей из занимаемой должности, учебного плана и плана научно-исследовательской работы. Объём различных видов работ, выполняемых каждым преподавателем, устанавливается в зависимости от характера контингента обучающихся (студенты, аспиранты), от необходимости участия преподавателя в учебной, научной или методической работе, а также с учётом его индивидуальных возможностей в наиболее эффективном выполнении того или иного вида работ. Основным документом, определяющим работу каждого преподавателя на весь срок его избрания, является индивидуальный план, в который ежегодно вносится планируемая ему на текущий учебный год учебная (в часах), учебно-методическая, научно-исследовательская и другие виды работ [1].

В [2] описывается другая программа, которая позволяет автоматизировать процессы расчёта учебной нагрузки кафедры и генерации отчётных документов стандартного вида.

Для распределения учебной нагрузки можно использовать различные инструменты [1, 3], но наиболее простым и удобным является использование воз-

возможностей MS Excel. Именно для этого инструмента и рассмотрим решение некоторых наиболее часто встречающихся задач.

Постановка задачи

Задача распределения учебной нагрузки является стандартной задачей управления учебным процессом кафедры. Тем не менее, каждый вуз имеет собственные шаблоны представления как исходных данных, так и результатов распределения нагрузки. Одни вузы производят расчёт только в часах, другие же и в часах, и в кредитах. Учёт кредитов значительно увеличивает вычислительную нагрузку и длину шаблона. Сравним шаблоны представления результатов распределения (рисунки 1, 2).

КАФЕДРА "Информатика и прикладная экономика"																																															
Саввазасова К.Ж., доцент, к.п.н.																																															
№ п/п	Наименование дисциплины	Код и наименование специальности	семестр по РУП	контингент	Группы	Курс	Количество групп	Количество подгрупп	Количество студентов	Количество часов	Выяв. обучающ.	Лекции	Семинары, прат., занятия	Лабораторные занятия	СРСЛ	Рейтинговый контроль	Консультации	Экзамены	Курсовая работа	Расчётно-графический материал	Ручное д/п работы	Работа над курсовыми/диссертациями/ научное руководство	Учебная практика	Педагогическая практика	Производственная практика	Работа в ГАК	Рецензирование д/п работ и т.п.	Другие виды работ	ВСЕГО																		
1	Распределенные системы	88070300-ИС	3	4	МАК-2г/о	2	1	1	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	61,50																	
2	Распределенные системы	88070300-ИС	3	4	МАК-2г/о	2	1	1	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	61,75																	
3	Параллельное программирование	88070400-ИТ	5	3	ДИ-3г/о	2	1	1	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	28,50																	
4	Программирование баз данных	88070400-ИТ	3	2	ДИ-3г/о	2	1	1	11	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	20,75																	
Итого 1 семестр основное																78	78	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	172,50			
Итого за 1 семестр																78	78	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	172,50		
Итого 2 семестр основное																48	15	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151,25
Итого за 2 семестр																48	15	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151,25
Итого за год основное																126	93	126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	323,75
Итого за год дополнительная																0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
Итого за год																126	93	126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	323,75	

Рис. 1. Результаты распределения учебной нагрузки в часах

Информационная безопасность и защита информации																																																
Саввазасова К.Ж., доцент, к.п.н.																																																
№ п/п	Наименование дисциплины	Код и наименование специальности	семестр по РУП	контингент	Группы	Курс	Количество групп	Количество подгрупп	Количество студентов	Количество часов	Выяв. обучающ.	Лекции	Семинары, прат., занятия	Лабораторные занятия	СРСЛ	Рейтинговый контроль	Консультации	Экзамены	Курсовая работа	Расчётно-графический материал	Ручное д/п работы	Работа над курсовыми/диссертациями/ научное руководство	Учебная практика	Педагогическая практика	Производственная практика	Работа в ГАК	Рецензирование д/п работ и т.п.	Другие виды работ	ВСЕГО																			
1	Информационная безопасность и защита информации	88070300-ИС	6	2	ДИ-10г	3	1	2	17	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	34,25																	
2	Программирование прикладной информационной системы	88070300-ИС	2	3	МАК-1-3г/о	1	1	1	12	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	49,00																	
3	Инновационная практика	88070300-ИС	4	3	МАК-2г/о	2	1	1	11	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	12,00																
4	Научно-исследовательская практика	88070300-ИС	4	3	МАК-2г/о	2	1	1	11	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	17,00																
5	Основы тестирования программного обеспечения	88070400-ИТ	6	2	ДИ-3г/о	3	1	1	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	20,00																	
6	Параллельное программирование	88070400-ИТ	6	2	ДИ-3г/о	3	1	1	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	20,00																	
Итого 2 семестр дополнительное																48	15	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151,25	
Итого за 2 семестр																48	15	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151,25	
Итого за год основное																126	93	126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	323,75
Итого за год дополнительная																0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
Итого за год																126	93	126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	323,75	

Рис. 2. Результаты распределения учебной нагрузки в часах и кредитах

Как видно из представленных рисунков, количество столбцов во втором варианте значительно возрастает по сравнению с первым. Результат расчёта невозможно разместить на одном печатном листе, что требует введения дополнительных мер в виде скрытия столбцов с нулевыми суммами или использования скроллинга.

Кроме результатов по распределению нагрузки среди преподавателей требуется разделить её на основную и дополнительную, если количество ставок превышает одну. При небольшом количестве преподавателей такую задачу нетрудно решить вручную.

Для облегчения решения этой задачи в шаблон введены дополнительные строки, как показано на рисунке 3. Основная и дополнительная нагрузка суммируется отдельно для каждого семестра, если строки каким-то образом отметить как относящиеся к основной и дополнительной нагрузке. Наиболее простой способ для этого – введение дополнительного столбца с обозначениями «о» и «д», что позволяет записать в соответствующих ячейках формулы:

$$=СУММЕСЛИ(\$BX155:\$BX179;"о";N155:N179)$$

$$=СУММЕСЛИ(\$BX155:\$BX179;"д";N155:N179).$$

Итого 1 семестр основная
Итого 1 семестр дополнительная
Итого за 1 семестр
Итого 2 семестр основная
Итого 2 семестр дополнительная
Итого за 2 семестр
Итого за год основная
Итого за год дополнительная
Итого за год

Рис. 3. Строки для основной и дополнительной нагрузки

Так как большая точность при разделении нагрузки на основную и дополнительную не требуется, то можно путём перебора подобрать подходящий вариант для каждого преподавателя, как это в основном и делается. При этом, конечно, необходимо приблизительно определить количество часов или кредитов на основную или дополнительную ставку. Эту задачу, хотя и очень простую, лучше все-таки выполнить с помощью формул, как это показано на рисунке 4.

час	кред			
98,50	4,66	о		
64,00	3,40	о		
88,75	4,43	о		
58,75	3,43	о		
60,00	2,00	о		
370,00	17,92	о		
0,00	0,00	д		5,970667
370,00	17,92			
30,00	1,00	о		
30,00	1,00	о		
116,50	5,86	о		
28,00	1,62	о		
8,00	1,20	о		
10,00	1,50	о		
3,00	0,10	о		
60,00	2,00	о		
285,50	14,28	о		
0,00	0,00	д		4,759333
285,50	14,28		ставки	кредиты
655,50	32,20	о	1,00	21,46
0,00	0,00	д	0,50	10,73
655,50	32,20		1,50	32,19

Рис. 4. Подсчёт количества кредитов для основной и дополнительной нагрузки

В последней строке указано количество ставок преподавателя. Из запланированных 1,5 ставок одна ставка уходит на основную нагрузку и 0,5 – на дополнительную. В соседнем столбце справа определено количество кредитов, а в соседнем столбце слева указаны для удобства «о» и «д». Кроме этого, определены кредиты на дополнительную нагрузку для осеннего и весеннего семестров, что позволяет более точно выполнять вычисления. Если нагрузка определяется только в часах, то столбцов с кредитами не будет, а формулы будут настроены на академические часы.

При достаточно большом количестве преподавателей кафедры и/или необходимости периодически выполнять заполнение таблиц заново, возникает потребность использования отдельного алгоритма для выбора «о» и «д» в соответствующем столбце.

Сделаем математическую постановку задачи.

Имеется m строк нагрузки 1 семестра и n строк нагрузки 2 семестра, объём кредитов для каждой строки известен $b_{i,1}b_{j,2}$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). Введём векторную переменную X_k ($k = 1, \dots, m, \dots, m+n$), координаты которой принимают значения из множества $\{1, 0\}$, причём 1 – если строка входит в дополнительную нагрузку и 0 – если в основную. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом: определить X_i таким образом, чтобы выполнялись условия (1):

$$\sum_{i=1}^m X_i * b_i \approx d_1, \quad \sum_{i=m+1}^{m+n} X_i * b_i \approx d_2. \quad (1)$$

Очевидно, что в условиях (1) равенство выполняется не строго, а приближённо. Следует отметить, что погрешность вычисления в 1 семестре можно перенести во 2 семестр и улучшить за счёт этого общий результат. Тогда условия (1) можно более точно переписать в виде (2)

$$\sum_{i=1}^m X_i * b_i \approx k_1, \quad \sum_{i=m+1}^{m+n} X_i * b_i \approx k_1 + k_2 - K, \quad (2)$$

где $K = \sum_{i=1}^m X_i * b_i$.

Если ограничиться постановкой задачи в таком виде, то её нетрудно привести к последовательности двух целочисленных задач оптимизации 3.

$$F_1 = \left| \sum_{i=1}^m X_i * b_i - k_1 \right|, \\ F_2 = \left| \sum_{i=m+1}^{m+n} X_i * b_i - k_1 + k_2 - K \right|, \quad (3) \\ \min F_1, \min F_2.$$

Пока эти задачи без ограничений. Но ограничения чаще всего следует вводить, так как в дополнительную нагрузку должны входить аудиторные занятия.

Это простейшие ограничения, но они могут быть усилены за счёт более жёстких условий.

Введём вектор $D_k (k = 1, \dots, m, \dots, m + n)$, который принимает значение 1 для аудиторной нагрузки (дисциплин) и 0 – для внеаудиторной (неактивной) нагрузки. Предположим, что дополнительная нагрузка должна содержать хотя бы одну дисциплину в каждом семестре. В этом случае ограничения примут вид:

$$\sum_{i=1}^m X_i * D_i > 0, \quad \sum_{i=m+1}^{m+n} X_i * D_i > 0. \quad (4)$$

Таким образом получаем задачу целочисленной линейной оптимизации 3 с ограничениями 4. Следует учесть, что возможна ситуация, когда в нагрузке преподавателя могут отсутствовать аудиторские часы, что позволяет учитывать ограничения как желательные, а не строго обязательные.

Рассмотрим алгоритмы решения двоичных задач оптимизации с ограничениями. Сразу следует отметить, что использование инструмента MS Excel «Поиск решения» оказался малоэффективным даже для одного преподавателя. Наиболее точным является, конечно же, переборный алгоритм, или рекурсивный алгоритм с возвратом.

Количество строк нагрузки в семестре изменяется от 5 до 20, что делает точные алгоритмы непригодными. Из приближенных алгоритмов хорошо зарекомендовал себя жадный алгоритм.

Алгоритмы, предназначенные для решения задач оптимизации, обычно представляют собой последовательность шагов, на каждом из которых предоставляется некоторое множество выборов. Определение наилучшего выбора, руководствуясь принципами динамического программирования, во многих задачах оптимизации напоминает стрельбу из пушки по воробьям; другими словами, для этих задач лучше подходят более простые и эффективные алгоритмы. В жадном алгоритме (greedy algorithm) всегда делается выбор, который кажется самым лучшим в данный момент, т. е. производится локально оптимальный выбор в надежде, что он приведёт к оптимальному решению глобальной задачи.

Жадные алгоритмы не всегда приводят к оптимальному решению, но во многих задачах они дают нужный результат. Жадный метод обладает достаточной мощностью и хорошо подходит для довольно широкого спектра задач [4].

В общем случае нельзя сказать, можно ли получить оптимальное решение с помощью жадного алгоритма применительно к конкретной задаче. Но есть две особенности, характерные для задач, которые решаются с помощью жадных алгоритмов: принцип жадного выбора и свойство оптимальности для подзадач.

Принцип применения жадного алгоритма

Говорят, что к задаче оптимизации применим принцип жадного выбора, если последовательность локально оптимальных выборов даёт глобально оптимальное решение. В этом состоит главное отличие жадных алгоритмов от динами-

ческого программирования: во втором просчитываются сразу последствия всех вариантов.

Чтобы доказать, что жадный алгоритм даёт оптимум, нужно попытаться провести доказательство, аналогичное доказательству алгоритма задачи о выборе заявок. Сначала мы показываем, что жадный выбор на первом шаге не закрывает путь к оптимальному решению: для любого решения есть другое, согласованное с жадным выбором, и не хуже первого. Потом мы показываем, что подзадача, возникшая после жадного выбора на первом шаге, аналогична исходной. По индукции будет следовать, что такая последовательность жадных выборов даёт оптимальное решение.

В комбинаторике существует раздел, связанный с жадными алгоритмами – теория матроидов. При помощи этой теории часто (хотя и не всегда) можно решить задачу о применимости жадных алгоритмов.

Хотя применительно к рассматриваемой задаче нельзя доказать, что последовательность жадных выборов даёт оптимальное решение, но практическое применение этого алгоритма показало его эффективность.

Итак, алгоритм выбора дополнительной нагрузки выполняется следующим образом: вначале рассматривается 1 семестр.

Определяются активные и неактивные виды нагрузки. Если есть аудиторная нагрузка, то одна строка выбирается в дополнительную нагрузку. Из оставшихся строк выбирается строка с максимальным весом, который можно добавить в суммарную дополнительную нагрузку. Точность вычислений задаётся в 0,5 кредита.

Когда нагрузка 1 семестра выбрана, то аналогично выбирается нагрузка 2 семестра, только целевая функция изменяется согласно формуле (3), и точность вычислений можно повысить до 0,1 кредита.

Использование жадного алгоритма для 20 преподавателей показало следующий результат (рисунок 5).

	1 сем			2 сем			год		погрешность	
	план	факт	абсол	план	факт	абсол	план	факт	абсолютн	относит
1	7,228	7,6902222	-0,462222	5,702	5,173	0,529	12,93	12,86322	0,0667778	0,52%
2	6,892	7,0194444	-0,127444	6,8233	6,55494	0,26839	13,71533	13,57439	0,1409444	1,03%
3	4,822	4,9176667	-0,095667	8,124	7,92078	0,20322	12,946	12,83844	0,1075556	0,83%
4	6,6766667	6,704	-0,027333	6,227	6,10944	0,11756	12,90367	12,81344	0,0902222	0,70%
5	6,0383333	6,1171111	-0,078778	6,965	6,71983	0,24517	13,00333	12,83694	0,1663889	1,28%
6	6,516	6,8973333	-0,381333	6,4	6,02733	0,37267	12,916	12,92467	-0,0086667	0,07%
7	5,926	7,984	-2,058	7,126	5,14733	1,97867	13,052	13,13133	-0,0793333	0,61%
8	6,5293333	6,6517778	-0,122444	6,5753	6,31378	0,26156	13,10467	12,96556	0,1391111	1,06%
9	8,532	8,736	-0,204	4,4	4,25267	0,14733	12,932	12,98867	-0,0566667	0,44%
10	8,3473333	8,4145556	-0,067222	4,765	4,51678	0,24822	13,11233	12,93133	0,181	1,38%
11	4,814	4,854	-0,04	8	8	0	12,814	12,854	-0,04	0,31%
12	6	6,3333333	-0,333333	7	6,54222	0,45778	13	12,87556	0,1244444	0,96%
13	7,1373333	7,3326667	-0,195333	5,88	5,48744	0,39256	13,01733	12,82011	0,1972222	1,52%
14	7	7,6666667	-0,666667	5,9267	5,18444	0,74222	12,92667	12,85111	0,0755556	0,58%
15	5,1173333	5,2511111	-0,133778	7,656	7,36311	0,29289	12,77333	12,61422	0,1591111	1,25%
16	8	8,3333333	-0,333333	5	4,65833	0,34167	13	12,99167	0,0083333	0,06%
17	3,028	3,3256	-0,2976	3,2	3,0924	0,1076	6,228	6,418	-0,19	3,05%
18	7,2833333	7,4144444	-0,131111	5,818	5,48706	0,33094	13,10133	12,9015	0,1998333	1,53%
19	8,44	8,5824444	-0,142444	4,838	4,56244	0,27556	13,278	13,14489	0,1331111	1,00%
20	2	2,8	-0,8	4	3,61	0,39	6	6,41	-0,41	6,83%

Рис. 5. Сводные данные о распределении нагрузки

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о применимости жадного алгоритма для задачи разделения нагрузки на основную и дополнительную. В среднем на 0,5 ставки приходится, согласно таблице, 13 кредитов

(последняя строка соответствует 0,25 ставки и 6-ти кредитам). Погрешность от применения алгоритма составляет не более 0,5 кредита, причём наибольшее значение 0,41 приходится на преподавателя с минимальными весами нагрузки в 1 кредит, в остальных же случаях абсолютная погрешность не превышает 0,2, что составляет не более 3 % относительной погрешности. Следует иметь в виду, что строка нагрузки не дробилась на несколько строк с целью улучшения точности. Для преподавателей, данные которых указаны в 11, 12, 14, 18 и 20 строках в столбцах «факт» одного или обоих семестров указаны целые числа. Это показывает, что нагрузка содержит только аудиторные часы с кредитами, кратными единице. В этом случае можно ожидать наилучшего результата. Для 3 преподавателей нагрузка содержит только аудиторные часы в обоих семестрах, это 12, 18 и 20 строки. Для них нагрузку можно разделить только с точностью до единицы. Но и для них полученный результат является очень хорошим.

Сравним показатели 1 и 2 семестров. В 1, 7, 12, 14 и 20 строках самые худшие показатели по 1 семестру. Если бы для второго семестра распределение производилось независимо от 1 семестра, то суммарные показатели за год только ухудшились бы. Но тот факт, что во втором семестре учитывается результат выбора дополнительной нагрузки в 1 семестре, позволяет значительно улучшить итоговый результат. Так, например, наихудшая абсолютная погрешность 1 семестра в 7 строке $-2,058$ компенсируется тоже худшей, но положительной погрешностью, что приводит к годовой погрешности в $-0,079$. В 20 строке $-0,8$ в 1 семестре компенсируется $+0,39$ во 2 семестре, что приводит к не улучшаемому результату при ручном выполнении действий.

Сравним программное и ручное распределение на примере, представленном на рисунке 6. Как видно, ручное распределение более точное: при плане 10,73 получено 10,75. Программное же распределение получило 10,88 кредитов. Это погрешность жадного алгоритма. Но для исследуемой задачи такая погрешность допустима.

Программное			Ручное		
факт	ставка	кредиты	факт	ставка	кредиты
4,66	д		4,66	о	
3,40	о		3,40	о	
4,43	о		4,43	о	
3,43	о		3,43	д	
2,00	о		2,00	д	
13,26	о		12,49	о	
4,66	д	5,970667	5,43	д	5,970667
17,92	д		17,92	д	
1,00	д		1,00	д	
1,00	о		1,00	о	
5,86	о		5,86	о	
1,62	д		1,62	д	
1,20	о		1,20	д	
1,50	д		1,50	д	
0,10	д		0,10	о	
2,00	д		2,00	о	
8,06	о		8,96	о	
6,22	д	4,759333	5,32	д	4,759333
14,28	ставки	кредиты	14,28	ставки	кредиты
21,32	о	1,00 21,46	21,45	о	1,00 21,46
10,88	д	0,50 10,73	10,75	д	0,50 10,73
32,20	д	1,50 32,19	32,20	д	1,50 32,19

Рис. 6. Программное (слева) и ручное (справа) разделение

На рисунке 7 слева представлены результаты расчёта по описанному в про-

грамме алгоритму. В 1 семестре из планируемых 7,69 кредитов выбрано 7,23 на дополнительную нагрузку. Во 2 семестре с учётом перетекания недополученных кредитов в 1 семестре распределено 5,7 кредита, что привело к 12,93 из 12,86 планируемых. Если же, как показано в правой таблице, во втором семестре производится независимое распределение, тогда из планируемых 5,173 кредита выбрано 5,1, и это привело к суммарному количеству 12,33 из 12,86 планируемых. Этот результат хуже, чем результат в левой таблице. Таким образом, учёт недораспределения кредитов 1 семестра при распределении 2 семестра приводит к более точным результатам.

1,70	д			1,70	д		
4,53	д			4,53	д		
4,08	о			4,08	о		
3,20	о			3,20	о		
3,71	о			3,71	о		
3,74	о			3,74	о		
0,55	о			0,55	о		
1,00	д			1,00	д		
0,57	о			0,57	о		
15,85	о			15,85	о		
7,23	д	7,690222		7,23	д	7,690222	
23,08				23,08			
3,30	д			3,30	д		
1,05	о			1,05	д		
2,40	д			2,40	о		
3,20	о			3,20	о		
3,82	о			3,82	о		
0,18	о			0,18	д		
1,00	о			1,00	о		
0,57	о			0,57	д		
9,82	о			10,42	о		
5,70	д		5,173	5,10	д		5,173
15,52		ставки	кредиты	15,52		ставки	кредиты
25,67	о	1,00	25,73	26,27	о	1,00	25,73
12,93	д	0,50	12,86	12,33	д	0,50	12,86
38,60		1,50	38,59	38,60		1,50	38,59

Рис. 7. Разделение зависимое (слева) и независимое (справа)

Выводы

Разделение учебной нагрузки на основную и дополнительную позволяет выполнять дальнейшие действия, а именно формировать индивидуальные книги с нагрузкой для каждого преподавателя, а также отчёты по выполнению нагрузки.

Таким образом, применение макросов позволяет значительно упростить решение многих задач, связанных с распределением учебной нагрузки кафедры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малибекова М., Горбунов А. Технология распределения учебной нагрузки кафедры // Высшая школа Казахстана. 2002. № 2. С. 24–28.
2. Смолянов А.Г. Управление кафедрой: автоматизированный расчёт учебной нагрузки // Международный журнал «Символ науки». 2015. № 10.
3. Каюгина С.М. Автоматизированная система расчёта и распределения учебной нагрузки преподавателей кафедры вуза на базе платформы «1С» // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 11.

4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ / Под ред. И.В. Красикова. 2-е изд. М. : Вильямс, 2005.

**MODELING THE DISTRIBUTION PROCESS OF THE DEPARTMENT'S
TEACHING LOAD USING A GREEDY ALGORITHM**

A.A. Senkovskaya¹

Graduate Student, e-mail: anastassiya.senkovskaya@gmail.com

I.I. Furayeva²

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: furir@mail.ru

¹Dostoevsky Omsk State University

²Eurasian National University n.a. L.N. Gumilyov

Abstract. The main reasons for the need to automate the process of distribution of the academic load of the department are presented. The mathematical formulation of the load distribution problem of the department is formulated. The main algorithms realizing the assigned task are considered, in particular greedy algorithms aimed at optimization of this automated process.

Keywords: optimization, modeling, teaching load, greedy algorithm.

Дата поступления в редакцию: 27.10.2017

TOWARDS DECISION MAKING UNDER GENERAL UNCERTAINTY

Andrzej Pownuk

Ph.D. (Phys.-Math.), Instructor, e-mail: ampownuk@utep.edu

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. There exist techniques for decision making under specific types of uncertainty, such as probabilistic, fuzzy, etc. Each of the corresponding ways of describing uncertainty has its advantages and limitations. As a result, new techniques for describing uncertainty appear all the time. Instead of trying to extend the existing decision making idea to each of these new techniques one by one, we attempt to develop a general approach that would cover all possible uncertainty techniques.

Keywords: decision making, general uncertainty, fuzzy uncertainty, probabilistic uncertainty.

1. Formulation of the Problem

Need for decision making under uncertainty. The ultimate goal of science and engineering is to make decisions, i.e., to select the most appropriate action.

Situations when we have full information about possible consequences of each action are rare. Usually, there is some uncertainty. It is therefore important to make decisions under uncertainty.

There are many different techniques for describing uncertainty. There are many different techniques for describing uncertainty: probabilistic, fuzzy (see, e.g., [4, 10, 12]), possibilistic, interval-valued or, more generally, type-2 fuzzy (see, e.g., [6, 7]), complex-valued fuzzy [2], etc. For many of these techniques, there are known methods for decision making under the corresponding uncertainty.

All the current techniques for describing uncertainty have their advantages and their limitations. Because of the known limitations, new – more adequate – techniques for describing uncertainty appear all the time. For each of these techniques, we need to understand how to make decisions under the corresponding uncertainty.

A problem that we try to solve in this paper. At present, this understanding mostly comes technique-by-technique. A natural question is: can we develop a general framework that would allow us to make decision under general uncertainty?

The main objective of this paper is to develop such a general formalism.

Towards a precise formulation of the problem. Let us start with a monetary problem. Suppose that we need to make a financial decision, such as investing a given amount of money in a certain financial instrument (such as shares or bonds).

If we knew the exact consequences of this action, then we would know exactly how much money we will have after a certain period of time. This happens, e.g., if we simply place the given amount in a saving account with a known interest rate.

In most situations, however, we are uncertain of the possible financial consequences of this action. In other words, for each investment scheme, there are several possible consequences, with monetary amounts x_1, \dots, x_n . By using an appropriate uncertainty technique, we can describe our degree of certainty that the i -th alternative is possible by the corresponding value μ_i . Depending on the formalism for describing uncertainty,

- a value μ_i can be a number – e.g., when we use probabilistic or fuzzy uncertainty,
- it can be an interval – when we use interval-valued fuzzy,
- it can be a complex number – if we use complex-valued fuzzy,
- it can be a fuzzy set – if we use type-2 fuzzy techniques, etc.

For another investment scheme, we can have n' different possible consequences, with monetary values $x'_1, \dots, x'_{n'}$ and degrees of certainty $\mu'_1, \dots, \mu'_{n'}$.

To make a decision, we need to compare this investment, in particular, with situations like placing money in a saving account, in which we simply get a fixed amount of money after the same period of time.

- If this fixed amount of money is too small, then investing in an uncertain financial instrument is clearly better.
- If this fixed amount of money is sufficiently large, then getting this fixed amount of money is clearly better than investing in an uncertain financial instrument.

There should be a threshold value of the fixed amount at which we go from the instrument being preferable to a fixed amount being preferable. This threshold fixed amount of money is thus equivalent, to the user, to the investment in an uncertain instrument.

So, for each uncertain investment, in which we get:

- the amount x_1 with degree of possibility μ_1 ,
- the amount x_2 with degree of possibility μ_2 ,
- \dots ,
- amount x_n with degree of possibility μ_n ,

we have an equivalent amount of money. We will denote this equivalent amount of money by $f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$.

Our goal is to find out how this equivalent amount of money depends on the values x_i and μ_i . Once we know the equivalent amount of money corresponding to each uncertain investment, we will be able to select the best of the possible investments: namely, it is natural to select the investment for which the corresponding equivalent amount of money is the largest possible.

What about non-financial decision making situations? It is known (see, e.g., [3, 5, 8, 11]) that decisions of a rational person can be described as optimizing a certain quantity called *utility*.

Thus, in general, we have the following problem: for each uncertain situation, in which we get:

- utility x_1 with degree of possibility μ_1 ,
- utility x_2 with degree of possibility μ_2 ,
- \dots ,
- utility x_n with degree of possibility μ_n ,

we have an equivalent utility value. We will denote this equivalent utility value by $f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$.

Our goal is thus to find out how this equivalent utility value depends on the values x_i and μ_i . Once we know the equivalent utility value corresponding to each possible decision, we will be able to select the best of the possible decisions: namely, it is natural to select the decision for which the corresponding equivalent utility value is the largest possible.

Comment. In the following text, to make our thinking as understandable as possible, we will mostly talk about financial situations – since it is easier to think about money than about abstract utilities. However, our reasoning is applicable to utilities as well.

2. Analysis of the Problem

First reasonable assumption: additivity. We are interested in finding a function $f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ of $2n$ variables.

Suppose that the money that we get from the investment comes in two consequent payments. In the i -th alternative, we first get the amount x_i , and then – almost immediately – we also get the amount y_i .

We can consider the resulting investment in two different ways. First, we can simply ignore the fact that the money comes in two installments, and just take into account that in each alternative i , we get the amount $x_i + y_i$. This way, the equivalent amount of money is equal to

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \mu_1, \dots, \mu_n).$$

Alternatively, we can treat both installments separately:

- in the first installment, we get x_i with uncertainty μ_i ,
- in the second installment, we get y_i with uncertainty μ_i .

Thus:

- the first installment is worth the amount $f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$, and
- the second installment is worth the amount $f(y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$.

The overall benefit is the sum of the amounts corresponding to both installments. So, in this way of description, the overall money value of the original investment is equal to the sum of the money values of the two installments:

$$f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n) + f(y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_n).$$

The equivalent benefit of the investment should not depend on the way we compute it, so the two estimates should be equal:

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \mu_1, \dots, \mu_n) = f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n) + f(y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_n).$$

Functions satisfying this property are known as *additive*. Thus, we can say that for each combination of values μ_1, \dots, μ_n , the dependence on x_1, \dots, x_n is additive.

Second reasonable assumption: bounds. No matter what happens, we get at least $\min_i x_i$ and at most $\max_i x_i$. Thus, the equivalent benefit of an investment cannot be smaller than $\min_i x_i$ and cannot be larger than $\max_i x_i$:

$$\min_i x_i \leq f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n) \leq \max_i x_i.$$

What we can conclude from the first two assumptions. It is known (see, e.g., [1]) that every bounded additive function is linear, i.e., that we have

$$f(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n c_i(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot x_i.$$

So, instead of a function of $2n$ variables, we now have a simpler task for finding n functions $c_i(\mu_1, \dots, \mu_n)$ of n variables.

Nothing should depend on the ordering of the alternatives. The ordering of the alternatives is arbitrary, so nothing should change if we change this ordering. For example, if we swap the first and the second alternatives, then instead of

$$c_1(\mu_1, \mu_2, \dots) \cdot x_1 + c_2(\mu_1, \mu_2, \dots) \cdot x_2 + \dots$$

we should have

$$c_2(\mu_2, \mu_1, \dots) \cdot x_1 + c_1(\mu_2, \mu_1, \dots) \cdot x_2 + \dots$$

These two expressions must coincide, so the coefficients at x_1 must coincide, and we must have

$$c_2(\mu_2, \mu_1, \dots) = c_1(\mu_1, \mu_2, \dots).$$

In general, we should thus have

$$c_i(\mu_1, \dots, \mu_n) = c_1(\mu_i, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n).$$

Thus, the above expression should have the form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_1(\mu_i, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) \cdot x_i.$$

Now, the problem is to find a single function $c_1(\mu_1, \dots, \mu_n)$ of n variables.

Combining alternatives with the same outcomes. Based on the above formula, the value $c_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ corresponds to $f(1, 0, \dots, 0)$, i.e., to a situation when we have:

- the value 1 with degree of possibility μ_1 ,
- the value 0 with degree of possibility μ_2 ,
- \dots ,
- the value 0 with degree of possibility μ_n .

In alternatives 2 through n , we have the same outcome 0, so it makes sense to consider them as a single alternative. To find the degree of possibility of this combined alternatives, we need to apply some “or”-operation \oplus to the degrees of possibility μ_2, \dots, μ_n of individual alternatives.

For probabilities, this combination operation is simply the sum $a \oplus b = a + b$, for fuzzy, it is a t-conorm, etc. In general, the degree of certainty of the combined alternative is equal to $\mu_2 \oplus \dots \oplus \mu_n$. Thus, the equivalent value of this situation is equal to $c_1(\mu_1, \mu_2 \oplus \dots \oplus \mu_n)$. So, we have

$$c_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = c_1(\mu_1, \mu_2 \oplus \dots \oplus \mu_n),$$

and the above expression for the equivalent benefit takes the following form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_1(\mu_i, \mu_1 \oplus \mu_{i-1} \oplus \mu_{i+1} \oplus \dots \oplus \mu_n) \cdot x_i.$$

Now, the problem is to find a single function $c_1(\mu_1, \mu_2)$ of two variables.

Let us simplify this problem even further.

Yet another reasonable requirement. Let us consider a situation in which we have three alternatives, i.e., in which, we get:

- the amount x_1 with degree of possibility μ_1 ,
- the amount x_2 with degree of possibility μ_2 , and
- the amount x_3 with degree of possibility μ_3 .

According to the above formula, for this situation, the equivalent benefit is equal to

$$c_1(\mu_1, \mu_2 \oplus \mu_3) \cdot x_1 + c_1(\mu_2, \mu_1 \oplus \mu_3) \cdot x_2 + c_1(\mu_3, \mu_1 \oplus \mu_2) \cdot x_2.$$

On the other hand, we can consider an auxiliary situation A in which we get:

- the amount x_1 with degree of possibility μ_1 and
- the amount x_2 with the degree of possibility μ_2 .

This situation is equivalent to the amount

$$x_A = c_1(\mu_1, \mu_2) \cdot x_1 + c_1(\mu_2, \mu_1) \cdot x_2,$$

and the degree of possibility of this auxiliary situation can be obtained by applying the corresponding “or”-operation to the degrees μ_1 and μ_2 and is thus, equal to $\mu_A = \mu_1 \oplus \mu_2$.

By replacing the first two alternatives in the original 3-alternative situation with the equivalent alternative, we get the equivalent situation, in which we get:

- the value x_A with degree of possibility μ_A and
- the value x_3 with degree of possibility μ_3 .

For this equivalent situation, the equivalent amount is equal to

$$c_1(\mu_A, \mu_3) \cdot x_A + c_1(\mu_3, \mu_A) \cdot x_3.$$

Substituting the expressions for x_A and μ_A into this formula, we conclude that the equivalent amount is equal to

$$\begin{aligned} & c_1(\mu_1 \oplus \mu_2, \mu_3) \cdot (c_1(\mu_1, \mu_2) \cdot x_1 + c_1(\mu_2, \mu_2) \cdot x_2) + c_1(\mu_3, \mu_1 \oplus \mu_2) \cdot x_3 = \\ & = c_1(\mu_1 \oplus \mu_2, \mu_3) \cdot c_1(\mu_1, \mu_2) \cdot x_1 + c_1(\mu_1 \oplus \mu_2, \mu_3) \cdot c_1(\mu_2, \mu_2) \cdot x_2 + \\ & \quad + c_1(\mu_3, \mu_1 \oplus \mu_2) \cdot x_3. \end{aligned}$$

We get two expressions for the same equivalent amount. These expressions must coincide. This means, in particular, that the coefficients at x_1 at both expressions must coincide, i.e., that we should have

$$c_1(\mu_1, \mu_2 \oplus \mu_3) = c_1(\mu_1 \oplus \mu_2, \mu_3) \cdot c_1(\mu_1, \mu_2).$$

What can we extract from this requirement. Let us consider an auxiliary function $c(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(a, b \ominus a)$, where $b \ominus a$ is an inverse to \oplus , i.e., the value for which $a \oplus (b \ominus a) = b$.

By definition of the new operation \ominus , we have

$$b = (a \oplus b) \ominus b.$$

Thus, we have

$$c(a, a \oplus b) = c_1((a \oplus b) \ominus a) = c_1(a, b).$$

In other words, for every a and b , we have

$$c_1(a, b) = c(a, a \oplus b).$$

Substituting this expression for $c_1(a, b)$ into the above formula, we conclude that

$$c(\mu_1, \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) = c(\mu_1 \oplus \mu_2, \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \cdot c_1(\mu_1, \mu_1 \oplus \mu_2).$$

The left-hand side depends only on two values $x \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1$ and $z \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3$, and does not depend on the value $y \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \oplus \mu_3$:

$$c(x, z) = c(y, z) \cdot c(x, y).$$

Thus, if we fix some value y_0 , we conclude that

$$c(x, z) = g(z) \cdot h(x),$$

where we denoted $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} c(y_0, z)$ and $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} c(x, y_0)$.

Describing $c_1(a, b)$ in terms of the auxiliary function $c(a, b)$, we can transform the expression for the equivalent monetary value to

$$\sum_{i=1}^n c(\mu_i, \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_n) \cdot x_i.$$

Substituting the expression $c(x, z) = g(z) \cdot h(x)$ into this formula, we conclude that the equivalent monetary value takes the form

$$\sum_{i=1}^n h(\mu_i) \cdot g \cdot x_i,$$

where we denoted $g \stackrel{\text{def}}{=} g(\mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_n)$.

For the case when $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, the boundedness requirement implies that the equivalent value is equal to x_1 . Thus, we have

$$x_1 = \sum_{i=1}^n h(\mu_i) \cdot g \cdot x_1.$$

Dividing both sides by x_1 , we conclude that

$$1 = g \cdot \sum_{i=1}^n h(\mu_i)$$

and hence, that

$$g = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h(\mu_i)}.$$

So, the equivalent monetary value is equal to the following expression:

$$\frac{\sum_{i=1}^n h(\mu_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n h(\mu_i)}.$$

So, now we are down to a single unknown function $h(\mu)$.

3. Conclusions

General conclusion. We need to decide between several actions. For each action, we know the possible outcomes x_1, \dots, x_n , and for each of these possible outcomes i , we know the degree of possibility μ_i of this outcome. The above analysis shows that the benefit of each action can then be described by the following formula

$$\frac{\sum_{i=1}^n h(\mu_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n h(\mu_i)},$$

for an appropriate function $h(\mu)$.

How can we find the function $h(\mu)$? If we have two alternatives with the same outcome $x_1 = x_2$, then we can:

- either treat them separately, leading to the terms

$$h(\mu_1) \cdot g(\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \dots) \cdot x_1 + h(\mu_2) \cdot g(\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \dots) \cdot x_1 + \dots$$

- or treat them as a single alternative x_1 , with degree of possibility $\mu_1 \oplus \mu_2$, thus leading to the term

$$h(\mu_1 \oplus \mu_2) \cdot g(\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \dots) \cdot x_1.$$

These two expressions must coincide, so we must have

$$h(\mu_1 \oplus \mu_2) = h(\mu_1) + h(\mu_2).$$

Let us show, on two specific cases, what this leads to.

Probabilistic case. In this case, the values μ_i are probabilities, and as we have mentioned, we have $\mu_1 \oplus \mu_2 = \mu_1 + \mu_2$. So, the above condition takes the form

$$h(\mu_1 + \mu_2) = h(\mu_1) + h(\mu_2).$$

Thus, in the probabilistic case, the function $h(\mu)$ must be additive.

The higher probability, the more importance should be given to the corresponding alternative, so the function $h(\mu)$ should be monotonic. It is known (see, e.g., [1]) that every monotonic additive function is linear, so we must have $h(\mu) = c \cdot \mu$ for some constant c . Thus, the above formula for the equivalent amount takes the form

$$\frac{\sum_{i=1}^n c \cdot \mu_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n c \cdot \mu_i}.$$

For probabilities, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. So, dividing both the numerator and the denominator by c , we conclude that the equivalent benefit has the form

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_i.$$

This is exactly the formula for the expected utility that appears when we consider the decision of rational agents under probabilistic uncertainty [3, 5, 8, 11].

Fuzzy case. In the fuzzy case, $a \oplus b$ is a t-conorm. It is known (see, e.g., [9]) that every t-conorm can be approximated, with arbitrary accuracy, by an Archimedean t-conorm, i.e., by a function of the type $G^{-1}(G(a) + G(b))$, where $G(a)$ is a strictly increasing continuous function and G^{-1} denotes the inverse function. Thus, from

the practical viewpoint, we can safely assume that the actual t-conorm operation $a \oplus b$ is Archimedean:

$$a \oplus b = G^{-1}(G(a) + G(b)).$$

In this case, the condition $a \oplus b = c$ is equivalent to

$$G(a) + G(b) = G(c).$$

The requirement that

$$h(\mu_1 \oplus \mu_2) = h(\mu_1) + h(\mu_2)$$

means that if $a \oplus b = c$, then

$$h(a) + h(b) = h(c).$$

In other words, if $G(a) + G(b) = G(c)$, then

$$h(a) + h(b) = h(c).$$

If we denote $A \stackrel{\text{def}}{=} G(a)$, $B \stackrel{\text{def}}{=} G(b)$, and $C \stackrel{\text{def}}{=} h(c)$, then $a = G^{-1}(A)$, $b = G^{-1}(B)$, $c = G^{-1}(C)$, and the above requirement takes the following form: if $A + B = C$, then

$$h(G^{-1}(A)) + h(G^{-1}(B)) = h(G^{-1}(C)).$$

So, for the auxiliary function $H(A) \stackrel{\text{def}}{=} h(G^{-1}(A))$, we have $A + B = C$ implying that $H(C) = H(A) + H(B)$, i.e., that $H(A + B) = H(A) + H(B)$. The function $H(A)$ is monotonic and additive, hence $H(A) = k \cdot A$ for some constant k .

So, $H(A) = h(G^{-1}(A)) = k \cdot A$. Substituting $A = G(a)$ into this formula, we conclude that

$$h(G^{-1}(G(a))) = h(a) = k \cdot G(a).$$

Thus, in the fuzzy case, the equivalent monetary value of each action is equal to

$$\frac{\sum_{i=1}^n k \cdot G(\mu_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n k \cdot G(\mu_i)}.$$

Dividing both the numerator and the denominator by the constant k , we get the final formula

$$\frac{\sum_{i=1}^n G(\mu_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n G(\mu_i)},$$

where $G(a)$ is a “generating” function of the t-conorm, i.e., a function for which the t-conorm has the form

$$G^{-1}(G(a) + G(b)).$$

Fuzzy case: example. For example, for the algebraic sum t-conorm

$$a \oplus b = a + b - a \cdot b,$$

we have

$$1 - a \oplus b = (1 - a) \cdot (1 - b)$$

and thus,

$$-\ln(1 - a \oplus b) = (-\ln(1 - a)) + (-\ln(1 - b)),$$

so we have $G(a) = -\ln(1 - a)$.

Thus, the formula for the equivalent amount takes the form

$$\frac{\sum_{i=1}^n \ln(1 - \mu_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - \mu_i)}.$$

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award "UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative" from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Aczél J., Dhombres H. *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
2. Dick S. Toward complex fuzzy logic // *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2005. Vol. 13, No. 3. P. 405–414.
3. Fishburn P.C. *Utility Theory for Decision Making*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1969.
4. Klir G., Yuan B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
5. Luce R.D., Raiffa R. *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Dover, New York, 1989.
6. Mendel J.M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.
7. Mendel J.M., Wu D. *Perceptual Computing: Aiding People in Making Subjective Judgments*. IEEE Press and Wiley, New York, 2010.
8. Nguyen H.T., Kosheleva O., Kreinovich V. Decision making beyond Arrow's "impossibility theorem", with the analysis of effects of collusion and mutual attraction // *International Journal of Intelligent Systems*. 2009. Vol. 24, No. 1. P. 27–47.
9. Nguyen H.T., Kreinovich V., Wojciechowski P. Strict Archimedean t-norms and t-conorms as universal approximators // *International Journal of Approximate Reasoning*. 1998. Vol. 18, No. 3–4. P. 239–249.

10. Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2006.
11. Raiffa H. Decision Analysis. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.
12. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965, Vol. 8. P. 338–353.

О ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ ПРИ ОБЩЕЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

А. Повнук

к.ф.-м.н., ст. преподаватель, e-mail: ampownuk@utep.edu

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Существуют методы принятия решений при некоторых типах неопределённости, такие как вероятностные, нечёткие и т. д. Каждый из соответствующих способов описания неопределённости имеет свои преимущества и ограничения. В результате все время появляются новые методы описания неопределённости. Вместо того чтобы пытаться последовательно расширять существующую идею принятия решений на каждый из этих новых методов, мы пытаемся разработать общий подход, который будет охватывать все возможные методы неопределённости.

Ключевые слова: принятие решений, общая неопределённость, нечёткая неопределённость, вероятностная неопределённость.

Дата поступления в редакцию: 21.03.2017

WHY STABLE TEAMS ARE MORE EFFICIENT IN EDUCATION

Francisco Zapata

Ph.D. (Phys.-Math.), Instructor, e-mail: fazg74@gmail.com

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. It is known that study groups speed up learning. Recent studies have shown that stable study groups are more efficient than shifting-membership groups. In this paper, we provide a theoretical explanation for this empirical observation.

Keywords: study groups, stable groups, shifting-membership groups.

1. Formulation of a Problem

Group work, its success and its challenges. It is well known that study groups and group work enhance education.

Of course, one needs to be cautious when using student groups. There is always a serious danger that, when the class results are largely depending on a group work, a weaker student in a team will “hide” behind his team’s success and not learn as much compared to learning strategies involving more individual responsibility.

Shifting-membership groups as a way to deal with group work challenges. To deal with the above problem, practicing educators use shifting-membership groups, in which groups are changing from one assignment to another.

A recent empirical result: stable teams are more efficient. The use of shifting-membership groups raised a natural question: is there a negative side effect in their use? In other words, does the constant change in student groups affect the effectiveness of group-related education?

Recent studies have shown that indeed, the use of shifting-membership groups leads to a drastic decrease in the education efficiency; see [1,2].

Remaining question and what we do in this paper. While the papers [1,2] list possible reasons why stable groups are more efficient, this somewhat unexpected recent empirical fact largely remains unexplained.

In this paper, we provide a simple explanation for this recently observed empirical phenomenon.

2. Analysis of the Problem

Why group work is efficient in the first place. In the usual educational environment, a student learns new things either from the instructor or from reading the corresponding textbook (and other teaching materials). In contrast, in a study group, students also learn from each other. This way, when a student learns some new material, he or she teaches others and thus, they all learn more efficiently.

Let us describe this idea in quantitative terms.

Towards a quantitative description of group learning. Let us first consider a simple model, in which all the students have the same learning rates for all parts of the material.

Usually:

- reading a book on your own and trying to understand the material is difficult, but
- once a student understood the material and explains to others, the other students understand it much faster.

Let r denote the time needed to understand one page of the material when a student studies on his/her own, and let $r' \ll r$ be the time need to understand one page when someone else – who already understood the material – explains this material.

Let L denote the overall number of pages that students need to learn as part of this particular assignment.

Under these assumptions, let us analyze:

- how much time a student needs to study the given material on his/her own and
- how much time a student needs if he or she studies in a group.

In this analysis, we will denote the number of students in a group by s .

Case when a student studies on his/her own. If each student studies on his/her own, then the student needs time

$$L \cdot r \tag{1}$$

to learn the material.

Case when students study in a group. When s students form a study team, they divide L pages into s parts of size $\frac{L}{s}$, so that each student learns his/her own part and then teaches others.

- Learning $\frac{L}{s}$ pages on one's own takes time $\frac{L}{s} \cdot r$.
- Teaching this material to other students requires time $\frac{L}{s} \cdot r'$.
- Finally, learning the remaining part $L - \frac{L}{s}$ of the material takes time

$$L \cdot r' - \frac{L}{s} \cdot r'.$$

As a result, the overall time that each student needs to learn the material is equal

to

$$\frac{L}{s} \cdot r + \frac{L}{s} \cdot r' + \left(L \cdot r' - \frac{L}{s} \cdot r' \right) = \frac{L}{s} \cdot r + L \cdot r'. \quad (2)$$

When is group study more efficient. By comparing the expressions (1) and (2), we conclude that the group study is more efficient if

$$\frac{L}{s} \cdot r + L \cdot r' < L \cdot r. \quad (3)$$

Dividing both sides of this inequality by L and multiplying both sides by s , we get an equivalent inequality

$$r + s \cdot r' \leq s \cdot r.$$

i.e., equivalently, $s \cdot r' < r \cdot (s - 1)$ and

$$\frac{s}{s - 1} < \frac{r}{r'}. \quad (4)$$

Thus:

- for a group of $s = 2$ students, this condition is equivalent to $r > 2r'$;
- for a group of 3 students, it is equivalent to $r > 1.5 \cdot r'$;
- for a group of 4 students, it is equivalent to $r > 1.33 \cdot r'$, etc.

The ratio $\frac{r}{r'}$ is usually much larger than 2. This explains why group work is usually much more efficient than individual studies.

In reality, students' rate is somewhat different on different parts of the material. The above formula (2) for the efficiency of group learning does not depend on whether groups are stable or are recombined after each task. This independence comes from the fact that we only took into account the average learning times and thus, implicitly assumed that:

- all the students have the same learning time r , and that
- the above common learning time is the same on all parts of the material.

In reality, different students have different learning times, and, moreover, for each student i , the learning time r_{ij} may change depending on what part j of the material the student is learning.

Let us show that if we take these differences into account, we will be able to explain why stable groups are empirically more efficient.

3. Resulting Explanation

To provide the desired explanation, let us analyze how the individual differences affect the group's learning time in the case of shifting groups and in the case of stable groups.

Case of shifting-membership groups. In the case of shifting-membership groups, when groups are re-combined with every task, members of the new group do not know who is more capable to learning which part of the material. Thus, when

they divide the learning material between different group members, they divide randomly. As a result, for each part j of the material, the groups' learning time is proportional to the mean learning time $\bar{r}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s r_{ij}$. Thus, in effect, we get the original formula (2) for the time which is needed to learn all the material.

Case of stable groups. On the other hand, in a stable group, students get to learn each other's strong and weak points. As a result, when the overall material is distributed between the students, each student gets the part in which his or her learning rate is the highest.

Thus, for each piece j of the material, the group's learning time is determined not by the *mean* learning time, but by the *smallest* learning time

$$r_j^{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i=1, \dots, s} r_{ij}.$$

This explains why stable groups are more efficient. We have shown that:

- for the shifting groups, the overall learning time is proportional to the mean of different learning times, while
- for the stable groups, the learning time is proportional to the smallest of the individual learning times.

The smallest of s different numbers is always smaller than the mean. This explains why stable groups are more efficient.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award "UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative" from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Walker A., Bush A., Sanchagrin K., Holland J. We've got to keep meeting like this: a pilot study comparing academic performance in shifting-membership cooperative groups versus stable-membership cooperative groups in an introductory-level lab // College Teaching. 2017. Vol. 65, No. 1. P. 9–16.
2. Zhang P., Ding L., Mazur E. Peer instruction in introductory physics: a method to bring about positive changes in students' attitudes and beliefs // Physical Review: Physics Education Research. 2017. Vol. 113. Paper 010104.

**ПОЧЕМУ СТАБИЛЬНЫЕ КОМАНДЫ БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫ
В ОБРАЗОВАНИИ**

Ф. Запата

к.ф.-м.н., преподаватель, e-mail: fazg74@gmail.com

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Известно, что учебные группы ускоряют обучение. Недавние исследования показали, что стабильные учебные группы более эффективны, чем группы с меняющимися участниками. В этой статье мы даем теоретическое объяснение этому эмпирическому наблюдению.

Ключевые слова: учебные группы, стабильные группы, группы с меняющимися участниками.

Дата поступления в редакцию: 21.03.2017

THE ONSAGER CONJECTURE: A PEDAGOGICAL EXPLANATION

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In 1949, a Nobelist Lars Onsager considered liquid flows with velocities changing as r^α for spatial points at distance r , and conjectured that the threshold value $\alpha = 1/3$ separates the two possible regimes: for $\alpha > 1/3$ energy is always preserved, while for $\alpha < 1/3$ energy is possibly not preserved. In this paper, we provide a simple pedagogical explanation for this conjecture.

Keywords: Euler equations, hydrodynamics, Onsager conjecture.

1. Formulation of the Problem

The equations that describe the velocity field $v(t, x)$ of an incompressible non-viscous liquid go back to Euler – and are known as *Euler equations*. In 1949, a Nobelist Lars Onsager considered solutions $v(t, x)$ to Euler's equation for which, for some constant C , we have $|v(t, x) - v(t, x')| \leq C \cdot r^\alpha$, where r denotes the distance between the points x and x' [2]. He conjectured that:

- when $\alpha > 1/3$, then all the corresponding solutions $v(t, x)$ preserve energy, while
- for $\alpha < 1/3$, there exist solutions that do not preserve energy.

This conjecture remains one of the central open problems in the foundations of hydrodynamics; see, e.g., [1] and references therein.

How can we explain this technical conjecture in simple physical terms? The main objective of this paper is to provide such an explanation.

2. Our Explanation

Starry sky and turbulent sea: two basic examples of dynamical situations.

Let us forget for a while about the modern physics with its measuring instruments, let us go back to basic phenomena which are observable with a naked eye. Most of the things that we see in the world change very slowly: seasons change year after year, weather changes from months to months, flowers blossom, rivers have annual

floods and droughts, etc. But there are two major things that change reasonably fast, so that we can see the changes in terms of hours or even seconds:

- the stars (and planets) in the sky and
- the waves on the sea surface.

What is the main difference between the starry sky and the turbulent sea?

In the sky, at any given moment of time, the picture is very simple: just a few bright dots against the black sky. However, with respect to time, the changes are very complex: it took Newton's theory of gravitation to finally explain this complex motion.

On the other hand, for the waves on the seashore, the situation is exactly opposite. If we fix a location and trace how the waves change with time, we get a simple periodic dependence. In contrast, the *spatial* shape of the wave patterns can be very complex.

In other words:

- for the starry skies, the spatial picture is simple, but the temporal dependence is complex, while
- for the waves in the sea, the temporal picture is simple, but the spatial picture is complex.

So maybe if we swap time and space, we get the relation between the starry skies and the waves in the sea? How can we relate the starry skies and the waves in the sea? It makes sense to relate the complex with the complex and the simple with the simple. In view of the above, this means:

- that we relate the temporal picture of the starry skies with the spatial picture of the waves, and
- that we relate the spatial picture of the starry skies with the temporal picture of the waves.

In other words, to properly relate the two phenomena, we need to “swap” space and time.

Let us use this idea to translate known laws of starry skies into conjectures about the waves. Thanks to Newton's laws, we know how to describe the motion of celestial bodies. Our knowledge of the waves is much less complete. Let us therefore use the time-space swap idea to translate knowledge about celestial bodies into knowledge about the waves.

For that, let us briefly recall how we can describe the motion of celestial bodies.

Newton's theory of gravitation: a brief reminder. According to Newton's theory, the acceleration a caused by a fixed body is inverse proportional to the

square of the distance to this body: $a = \frac{C}{r^2}$. What is acceleration? It is a description of how velocity v changes with time: $a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$. So, the above formula, in effect, means that

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{C}{r^2},$$

i.e., that

$$\Delta v = C \cdot \frac{\Delta t}{r^2}. \quad (1)$$

What is the scale-invariance of this formula? The numerical values of all physical quantities depend on what measuring unit we use. If we use centimeters instead of meters, all the numerical values of distance are increased by a factor of 100. Similarly, if we replace minutes by seconds, then the numerical values of all time intervals increase by a factor of 60.

In general, if we replace the unit of length with a λ times smaller one, then all the numerical values of the distance change from r to $\lambda \cdot r$. Similarly, if we replace the unit of time with a μ times smaller one, then all the numerical values of the time interval change from Δt to $\mu \cdot \Delta t$. As a result, e.g., numerical values of the velocity $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ changes from v to $\frac{\lambda}{\mu} \cdot v$.

Physical laws do not depend on the choice of the units. This does not mean, of course, that if we simply replace r with $\lambda \cdot r$, all physical formulas remain the same: one can easily see that, e.g., the above formula (1) will not remain the same under this change. What is true is that if we change the unit of distance *and* appropriately change the unit of time, then the formula (1) indeed remains invariant. Namely, in the formula (1):

- the left-hand side is multiplied by the factor $\frac{\lambda}{\mu^2}$, while
- the right-hand side changes by the factor $\frac{1}{\lambda^2}$.

For the equality to remain valid, these two factors must coincide, i.e., we must have $\frac{\lambda}{\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ and thus, $\lambda^3 = \mu^2$ and $\mu = \lambda^{3/2}$. This means that time intervals change in exactly the same way as distance to the power of 3/2: $t \sim r^{3/2}$.

Consequence of Newton's laws: phenomenon of the critical velocity. It is known that for an object to follow a circular orbit at a distance r from the central body of mass M , we need the velocity v for which $v^2 = \text{const} \cdot \frac{M}{r}$.

- If the velocity is higher, the object will fly away from this orbit.
- If the velocity is lower, the object will fall down on the central body.

The circular-motion velocity is thus a threshold velocity separating two different regimes.

The formula for this threshold velocity is invariant with respect to the same re-scaling as the Newton's formula for the gravitational force: $\mu = \lambda^{3/2}$.

What can we then conclude about waves? As we have mentioned, a reasonable idea is to take the description of celestial bodies and swap time t and spatial distance r . If we do this swap, then instead of $t \sim r^{3/2}$ we get $x \sim t^{3/2}$. In other words, the physical laws that describe the waves should remain invariant if we apply the re-scalings with $\lambda = \mu^{3/2}$.

In the description of celestial bodies, the most complex phenomenon is how velocities changes with time, so we were interested in the change

$$\Delta v = v(t + \Delta t, x) - v(t, x)$$

with time. For the waves, the most complex phenomenon is how the velocity changes in space, we are interested in how the velocity changes from one spatial location to another one. In other words, we are interested in the spatial differences $\Delta v = v(t, x + \Delta x) - v(t, x)$.

So, we need to find the dependence of Δv on the distance r between the points $x + \Delta x$ and x : $\Delta v = f(r)$. When is this dependence invariant under the above re-scaling? Under this re-scaling, the value Δv is multiplied by

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu^{3/2}}{\mu} = \mu^{1/2}.$$

Thus, the right-hand side must multiply by the same factor, i.e., we must have

$$f(\lambda \cdot r) = f(\mu^{3/2} \cdot r) = \mu^{1/2} \cdot f(r).$$

For $r = 1$ and $x = \mu^{3/2}$ – so that $\mu = x^{2/3}$ – we get

$$f(x) = \mu^{1/2} \cdot f(1) = (x^{2/3})^{1/2} \cdot f(1) = x^{1/3} \cdot f(1).$$

Thus, we conclude that $f(r) = C \cdot r^{1/3}$, where we denoted $C \stackrel{\text{def}}{=} f(1)$, and we get

$$\Delta v \sim r^{1/3}.$$

This is exactly the threshold dependence separating the two regimes according to the Onsager's conjecture.

Thus, we have indeed come up with a reasonable explanation for this conjecture.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award "UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative" from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Klainerman S. Nash's contribution to analysis in three papers // Bulletin of the American Mathematical Society. 2017. Vol. 54, No. 2. P. 283–305.
2. Onsager L. Statistical hydrodynamics // Nuovo Cimento, Ser. IX. 1949. Vol. 6, Supplement No. 2. P. 279–287.

ГИПОТЕЗА ОНСАГЕРА: ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В 1949 году Нобелевский лауреат Ларс Онзагер рассматривал жидкие течения со скоростями, изменяющимися как r^α для пространственных точек на расстоянии r , и предположил, что пороговое значение $\alpha = 1/3$ разделяет два возможных режима: при $\alpha > 1/3$ энергия всегда сохраняется, а при $\alpha < 1/3$ энергия, возможно, не сохраняется. В этой статье мы предлагаем простое педагогическое объяснение этой гипотезы.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, гидродинамика, гипотеза Онсагера.

Дата поступления в редакцию: 09.04.2017

ЭВРИСТИЧЕСКАЯ СЕТЬ ДЛЯ ПРОГРАММЫ СНАТВОТ

В.А. Шовин

научный сотрудник, e-mail: v.shovin@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН
(Омский филиал)

Аннотация. Разработан эффективный алгоритм эвристической сети по некоторым свойствам аналогичной рекуррентной нейронной сети для программы виртуального собеседника. Алгоритм усовершенствован с использованием толкового словаря русского языка. В эвристическую сеть внедрён генератор новых ответов на базе статистической информации базы знаний.

Ключевые слова: чат-бот, виртуальный собеседник, рекуррентная нейронная сеть, эвристическая сеть.

Введение

При обучении рекуррентной нейронной сети на больших объёмах данных встречается проблема перезаписи и отсутствия качественного обучения сети [1]. Поэтому для программы чат-бот актуально создание эвристической сети по свойствам аналогичной рекуррентной сети, в частности, свойства взаимозаменяемости слов и статистической связи вопросов и ответов из базы знаний. Свойство рекуррентной нейронной сети к генерации новых текстов реализовано как отдельная процедура эвристической сети.

Часто в понимании входящих вопросов пользователей сеть ограничена в небольшой базе знаний, поэтому актуально внедрение толкового словаря русского языка для отображения исходных слов в слова-значения, возможно содержащиеся в вопросах базы знаний.

Алгоритм эвристической сети внедрён в новые режимы программы ChatBot, созданной ранее с использованием AIML-разметки базы знаний [2].

1. Рекуррентная нейронная сеть

Рекуррентная нейронная сеть – вид многослойного перцептрона, у которого сигналы с нейронов выходного слоя поступают на дополнительные нейроны входного слоя, т. н. нейроны контекста [1, 2]. Рекуррентная сеть для имитации речевого общения обладает рядом свойств:

- 1) статистическая связь вопросов и ответов в базе знаний,
- 2) взаимозаменяемость слов,

3) генерация новых текстов.

Поскольку при обучении рекуррентной нейронной сети на больших объёмах данных часто возникает проблема перезаписи и некачественного обучения, возможно реализовать основные свойства рекуррентной нейронной сети в виде эвристик.

2. Эвристическая сеть

Свойство статистической связи вопросов и ответов в базе знаний и выбор подходящего ответа из базы знаний на пользовательский вопрос может быть реализовано на базе следующего алгоритма:

1. Все вопросы в базе знаний обозначим словом *patterns*.
2. Соответствующие им ответы в базе знаний словом *templates*.
3. Каждый вопрос и соответствующий ответ разбивается на массив слов: *pwords* и *twords*.
4. Вычисляются корреляции между уникальными словами. Если слово *tword* встречается в массиве слов вопроса *twords* вместе со словом *pword* в массиве слов ответа *pwords*, тогда функции корреляции между словами *tword* и *pword* прибавляется 1: $R(tword, pword) += 1$.
5. Новый пользовательский вопрос обозначим словом *question*.
6. Пользовательский вопрос разбивается на слова *qwords*.
7. Осуществляется перебор ответов *templates* из базы знаний с целью найти максимум суммы корреляций между словами из ответа *twords* и словами пользовательского вопроса *qwords*: $\max_k \left[\sum_i \sum_j R(twords_k[i], qwords[j]) \right]$, где индекс k пробегает по всем ответам *templates* в базе знаний, i и j – индексы слов в массивах слов.
8. Чтобы уменьшить влияние часто встречаемых слов, поиск максимум можно ограничить из сумм, не больших определённого порога *porog*.

Приведём пример свойства взаимозаменяемости слов при поиске ответа на пользовательский вопрос. Например, такая AIML-структура в базе знаний:

```
<category>
  <pattern>Ты любишь мир?</pattern>
  <template>
    <random>
      <li>Да люблю</li>
    </random>
  </template>
</category>
```

```
<category>
  <pattern>Я люблю мир</pattern>
  <template>
    <random>
```

```

    <li>В мире полно женщин</li>
  </random>
</template>
</category>

```

должна приводить к ответу: «Да, люблю» на пользовательский вопрос: «Ты любишь *женщин?*». Т. е. слова «мир» и «женщин» становятся взаимозаменяемыми.

Соответствующий алгоритм учёта взаимозаменяемости слов из базы знаний может быть реализован в следующей форме.

1. Вводится внутренняя функция корреляции между словами. Для этого слова из массива слов вопроса $pwords$ и ответа $twords$ базы знаний объединяются в массив $ptwords$. Вводится функция $r_k(ptwords[i], ptwords[j]) = \frac{1}{j-i}$, где $j > i$. Тогда функция внутренней корреляции между словами $R_{in}(tword, pword)$ определяется либо как сумма функций r_k , либо как их максимум, либо как их среднее по всем категориям из базы знаний.
2. Для слова $qword$ из пользовательского вопроса выбираются все слова $ptword$, коррелирующие с ним по функции $R_{in}(qword, ptword)$. На выбор ответа из базы знаний на пользовательский вопрос влияет с коэффициентом α максимум суммы функций внутренней корреляции между словами $R_{in}(qword, ptword_k)$, где индекс k пробегает по всем парам вопрос плюс соответствующий ответ из базы знаний.

Генерация нового текста может быть реализована с помощью следующего алгоритма:

1. Задаётся число влияющих слов k .
2. Подаётся на вход k слов $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и для них ищется новое слово s с наибольшей суммой $\sum_{j=1}^k R_{in}(i_j, s)$. Функция R_{in} должна учитывать, что слово i_j стояло в предложении раньше слова s . Функция R_{in} просчитывается на предложениях типа $pattern_i + \langle \rangle + template_j + \langle _end_ \rangle$, где $pattern_i$ и $template_j$ взяты из одной категории, а слово « $_end_$ » символизирует конец обучающего предложения.
3. После того как найдено новое слово s , k входящих слов заменяется на слова $\{i_2, \dots, i_k, s\}$ и ищется новое слово по шагу 2.
4. Процесс поиска новых слов завершается, когда найдено слово « $_end_$ », либо начинается повторение последовательности слов (последовательности типа 1, 2, 3, **4, 5, 4, 5**), либо превышено необходимое число слов d .

3. Внедрение толкового словаря

Когда в пользовательском вопросе встречаются слова, которых не было в базе знаний, оказывается возможным использование толкового словаря русского языка по следующему алгоритму:

1. Составить базу определений слов из толкового словаря.
2. Развернуть все слова из пользовательского вопроса по определениям. Т. е. вместо каждого слова из пользовательского вопроса взять наборы слов из определений.
3. Все слова, найденные в вопросе *pattern* из базы знаний и соответствующие словам пользовательского вопроса, оценить по коэффициенту, например, 100. Все слова пользовательского вопроса, соответствующие 1-му уровню определений, оценить по коэффициенту, например, 50.
4. Найти суммы таких оценок и выбрать такой вопрос *pattern* из базы знаний, который набрал максимум.
5. Ответ *template* из базы знаний, соответствующий найденному вопросу *pattern*, взять за ответ на пользовательский вопрос.

4. Морфологический анализатор

Для приведения слов в базовую форму и улучшения качества всех алгоритмов имитации речевого общения возможно использовать морфологический анализатор.

5. Программная реализация

Программа чат-бота была реализована в качестве Android-приложения с возрастным ограничением 18+. В приложении доступны несколько новых режимов чат-бота на базе эвристической сети.

В качестве морфологического анализатора была использована свободная JavaScript-библиотека для обработки текстов на русском языке Az.js.

Приложение доступно по адресу:

<https://play.google.com/store/apps/details?id=svlab2.chatbot3> [2].

6. Заключение

Программно реализованы режимы чат-бота на базе эвристической сети, имитирующей свойства рекуррентной нейронной сети. Алгоритм усовершенствован с помощью толкового словаря русского языка для слов, не представленных в базе знаний. Приложение ChatBot доступно для платформы Android в магазине приложений Google Play.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinyals O., Le Q. A Neural Conversational Model. arXiv:1506.05869, 22 Jul 2015.
2. Шовин В.А. Программа ChatBot — чат-бот или виртуальный собеседник // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4(40). С. 96–101.

HEURISTIC NETWORK FOR CHATBOT PROGRAM

V.A. Shovin

Scientist Researcher, e-mail: v.shovin@mail.ru

The Institution of the Russian Academy of Sciences Institute of Mathematics. S. Siberian Branch of RAS (Omsk Branch)

Abstract. An efficient algorithm for the heuristic network, with some properties similar to a recurrent neural network, for a virtual companion program is proposed in the article. The algorithm is improved with the use of an explanatory dictionary of the Russian language. A generator of new responses on the basis of statistical information knowledge base is introduced in the heuristic network.

Keywords: chatbot, virtual companion, recurrent neural network, heuristic network.

Дата поступления в редакцию: 12.02.2017

SMART CONTRACTS AND CYBERCRIME: A GAME CHANGER?

L. Brunoni

Scientific collaborator, MLaw, MArts, e-mail: luca.brunoni@he-arc.ch

O. Beaudet-Labrecque

Research Assistant, Criminologist, MAS LCE Institut de lutte contre lacriminalite
economique (ILCE), e-mail: olivier.beaudet-labrecque@he-arc.ch

Haute école de gestion Arc (HES-SO // Haute école de Suisse Occidentale),
Neuchâtel, Switzerland

Abstract. The purpose of this paper is to provide a brief explanation regarding the authors' current research in the field of the possible uses of smart contracts in cybercrime, focusing in particular on how the technology could provide a substitute for trust both in client-criminal transactions and in transactions taking place within criminal organizations. The authors share the conviction put forward by Alharby and Moorsel [1] in their 2017 analysis of blockchain-based smart contracts that there is a "lack of studies on criminal activities in smart contracts": while quality research does exist, including a paper by Juels et al. [2] detailing three types of such activities that can be facilitated by the technology, it is evident that the subject deserves a more widespread attention. Quality research, in fact, could play an important role in aiding authorities and regulators to understand the issue and react accordingly.

Keywords: smart contracts, blockchain, cybercrime, cybersecurity, criminal behavior.

1. Trust in commercial dealings

From prehistoric barter to online marketplaces, trust has always played an essential role in commercial dealings. In earlier times, people could only rely on instincts and experience when evaluating the reliability of a proposed transaction. The development of the rule of law brought more security, shifting trust from an interpersonal level to a reliance on society and institutions, which had the power to enforce transactions and provide relief to a wronged party. This shift has been essential to the development of commercial relationships as we know them today. A specific commercial field, however, has always remained detached from the conflict resolution mechanisms provided by the state, and remains ruled almost exclusively by interpersonal trust: the illegal market, which today has crossed the border into the cyber world. Dealings conducted within this context require varying levels of trust and reliability from the parties involved: a small-time drug dealer, for example, will not need the same guarantees as a major wholesaler in

order to go through with a deal, because the stakes are radically different. It is worth mentioning, moreover, that criminals active in the illegal marketplace face a double issue: on one side, they are confronted with similar economic constraints as their legal counterparts, and on the other, they are exposed to bigger legal risks.

While a good number of criminals, especially small-time, operate alone, running an illegitimate activity typically requires some level of organization. The business relationships between the members fall outside the scope of legal remedies, and when those would be available (e.g. recovering a debt that is not explicitly related to the illegal activity) they are seldom used, because either of the risk of drawing attention, or of the respect of a code of conduct according to which calling upon the authorities is a serious violation. This means that the element of trust is a paramount factor in the existence of a criminal network. There are other factors that go alongside trust, such as obedience, fear, hierarchy, family relationships, etc., which depend on the type, size, and activity of the organization.

2. Trust in cybercriminal transactions

In the realm of cybercrime, which is the focus of the authors' research, criminal networks are often populated by members who ignore the identity of their partners. Perhaps the most famous example is the organization behind the Silk Road website, a now dismantled dark net marketplace where users could buy and sell any type of illegal goods, including fire arms, drugs and counterfeit documents. The alleged mastermind behind the website, Ross Ulbricht, recruited collaborators online and tasked them with both back-end programming and customer service. Although Ulbricht ignored the real identity of the first collaborators, he later asked new recruits to send him a copy of their ID. Ulbricht, on the other hand, never disclosed his own identity. He paid his collaborators with Bitcoin taken from the revenue of the site. There was reciprocal trust in the sense that Ulbricht trusted them to do their work as requested and the collaborators trusted that he would send the agreed-upon Bitcoin. Eventually, one of these collaborators managed to steal some Bitcoin from the site, and Ulbricht allegedly retaliated by sending a man he contacted online to have the thief beat up and killed. Ulbricht paid a high price for the murder and received photo proof that the deed was done. Yet nobody died: the contract killer was in reality an undercover agent, who staged a fake murder and sent fabricated proof to his client.

3. The problem of trust

The Silk Road example pinpoints several problems that relate to trust and criminal activities in the cyber world. First of all, criminal services available on the dark web, such as the much publicized widespread availability of killers for hire, require a high degree of trust from the customer. Other sales and transactions have a way of auto-regulating themselves, especially because the offeror has a stake in keeping his customers satisfied if he hopes to acquire a reputation and grow his business; this is the case, for example, in the drug market or in the market of

viruses, hacking tools, etc. Still, a certain degree of trust is inherent to every transaction.

At an organizational level, the lack of real-life identities and the reticence criminals on the dark web show with regard to disclosing personal details constitute the main trust-related problems. Obtaining ID might have worked for Ulbricht, but it is not likely to become a standard general practice. Cryptocurrency payments — the obvious choice for transactions in an anonymous, criminal underworld — depend solely on the goodwill of the payer, especially when it comes to compensating a collaborator for his work.

4. Smart contracts

Some of the issues described above could potentially be solved through the integration of smart contracts. Smart contracts are computer programs that run securely on the blockchain; they execute autonomously according to pre-set variables, and the result, verified and inscribed into the blockchain, is virtually irreversible. This ensures that an agreed upon transaction, which typically involves a cryptocurrency transfer, takes place when the conditions set by the parties — and translated into the smart contract's code — are met. In a standard business environment, execution of agreement depends on the goodwill of the parties, and can be enforced through the court system in case of default. Smart contracts automatically enforce the desired outcome of the agreement, thus eliminating the need of trusting and depending on the other party or state authorities once the terms have been agreed.

In a criminal environment, where enforcing a deal through the court system is in general not an option, characteristics of smart contracts could become a valuable asset. The anonymity of the transaction is also guaranteed, which means that the parties can conduct deals without revealing their identities — to each other and to other parties that might observe the transaction, which includes police and prosecution authorities.

The technology could therefore play a role both in client-criminal transactions and in transaction taking place within criminal organizations. In the first case, it could help guaranteeing that both parties get what they want out of the deal, without the need of establishing trust through reputation, disclosing identity, or by making promises that, in a cybercrime environment, have little value. In the second, smart contracts could strengthen a criminal network by ensuring that every party to a criminal enterprise receives the agreed share of a determined cryptocurrency revenue stream.

While these case scenarios are certainly appealing to criminals — and worrisome to state authorities — it must be stressed that smart contracts as a technology are in their beginning phase, and that the realization of such implementations, in order to be functional and versatile enough to suit every transaction's needs, depend on whether several technical challenges can be overcome. These include, in particular, the integrations of oracles (external data feeds that input information triggering the execution of the smart contracts) capable of verifying the successful

executions of criminal transactions, and the difficulty of translating certain types of relationships between criminals in smart contract language. These obstacles are in principle no different than those faced by parties wishing to implement smart contracts for non-illegal transactions. The degree of flexibility provided by the technology simply cannot match that offered by a legal document, and as such, smart contracts are for the moment best suited for executing transactions that lack complexity and nuance.

5. Conclusion

The potential of smart contract technology as an asset in criminal activities and organizations cannot be underestimated. While it is certain that the current lack of flexibility of smart contracts and the many technical challenges to overcome currently limit the above-discussed applications, it is also undoubted that the technology will evolve quickly. It is therefore essential that quality research is conducted in the field and that authorities begin to take notice of the phenomenon, its possible impacts, and to address the issues it could generate with regard to the investigation and prosecution of cybercriminal activities.

REFERENCES

1. Alhabry M., van Moorsel A. Blockchain-Based Smart Contracts: A Systematic Mapping Study / Proceedings of the 3rd International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing, 2017.
2. Juels A., Kosba A., Shi E. The ring of gyges: Investigating the future of criminal smart contracts / Proceedings of the 2016 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security, 2016.

СМАРТ-КОНТРАКТЫ И КИБЕРПРЕСТУПНОСТЬ: ПРАВИЛА ИГРЫ МЕНЯЮТСЯ?

Л. Бруони

научный сотрудник, магистр права, магистр искусств, e-mail: luca.brunoni@he-arc.ch

О. Буде-Лабрек

Помощник по исследованиям, криминолог, магистр программы повышения квалификации по борьбе с экономической преступностью, Институт по борьбе с экономическими преступлениями (ILCE), e-mail: olivier.beaudet-labrecque@he-arc.ch

Высшая школа менеджмента Арк (Университет прикладных наук Западной Швейцарии) Невшатель, Швейцария

Аннотация. Цель данной статьи — дать краткое объяснение текущих исследований авторов в области возможного использования смарт-контрактов в киберпреступлениях, рассказав, в частности, о том, как технология может заменить доверие в транзакциях между клиентом и преступником, а также в транзакциях,

совершаемых внутри преступных организаций. Авторы разделяют убежденность, высказанную Альхарби и Мурселем [1] в 2017 г. в их анализе смарт-контрактов на основе блокчейна, об «отсутствии исследований преступной деятельности в смарт-контрактах»: качественные исследования на самом деле существуют, в частности статья Джуэлса и др. [2], описывающая три вида такой деятельности, которая может быть облегчена технологией, но очевидно, что предмет заслуживает более широкого внимания. Качественные исследования, по сути, могут сыграть важную роль в понимании этого вопроса властями и регулирующими органами, что позволит реагировать соответствующим образом.

Ключевые слова: смарт-контракты, блокчейн, киберпреступность, кибербезопасность, преступное поведение.

Дата поступления в редакцию: 04.11.2017

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате \LaTeX (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета \LaTeX и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор MiKTeX , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры И моделирование

№4(44)

Главный редактор
А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор
Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор
Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:
А.Н. Кабанов, Е.А. Илюшечкин

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск, пр. Мира, 55А
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>



Подписано в печать 05.12.2017. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 16,74. Тираж 100 экз. Заказ № 188.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, г. Омск, пр. Мира, 55А

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



17044 >