Математические структуры и моделирование
2017. № 4(44). С. 49–52

УДК 512.57
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.4.49-52

ВЕРХНИЙ ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

А.Н. Кабанов
к.ф.-м.н., e-mail: m01kab@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Получено описание верхнего гиперцентрального ряда группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница над произвольным полем. Вычислена длина гиперцентрального ряда.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, унитреугольный автоморфизм, гиперцентр.

В статьях автора [1,2] было представлено описание центральной серии группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница до первого предельного ординала включительно.

В данной работе представлено описание всей верхней центральной серии указанной группы и вычислена её гиперцентральная длина.

Напомним, что неассоциативная алгебра L над полем F с билинейным произведением $[\cdot,\cdot]$ называется (правой) алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется (правое) тождество Лейбница:

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y].$$

Или, что то же самое,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Отсюда видно, что $[x, [y, y]] = 0$.

Из тождества Лейбница также следует, что любой элемент алгебры L можно представить, как линейную комбинацию элементов вида $[[[[a, b], c], d], ...]$, поэтому для краткой записи будем опускать скобки, положив

$$[[a, b], c] = abc.$$

Более того, примем записи

$$[[a, b], b] = ab^2, [[[a, b], b], b] = ab^3 \text{ и т. п.}$$

Пусть L_n – свободная алгебра Лейбница над полем F с множеством свободных порождающих $Xn = x_1, ..., x_n$.

Выделим в группе $AutL_n$ всех автоморфизмов алгебры L_n подгруппу U_n, порождённую автоморфизмами вида:

$$\tau_i(y_i): \quad \begin{cases} x_i \to x_i + y_i, \\ x_j \to x_j, \ j \neq i, \end{cases}$$

где y_i принадлежит подалгебре, порождённой $x_{i+1}, ..., x_n$. Такая подгруппа называется группой унитреугольных автоморфизмов алгебры L_n.

Для краткости будем записывать произвольный автоморфизм φ свободной алгебры L_n с множеством свободных порождающих X_n как $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$.

Тогда произвольное отображение вида:

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n), ..., x_i + f_i(x_{i+1}, ..., x_n), ..., x_n), \tag{1}$$

где для любого i многочлен $f_i(x_{i+1}, ..., x_n) \in L_n$, определяет автоморфизм из U_n, и группа U_n состоит из всех таких автоморфизмов.

В предыдущей работе [2] было доказано, что центральный ряд группы U_n состоял из подгрупп Z_α ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$), состоящих из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_{n-1}, x_n), x_2, ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена $f_1(x_{n-1}, x_n)$ элемент x_{n-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

При этом $Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha+1}$.

Для $0 \leqslant k \leqslant n-3$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_{n-k-1}, x_2, ..., x_n), ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена f_1 элемент x_{n-k-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для $n-2 \leqslant k \leqslant 2n-6$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_n), x_2 + f_2(x_{2n-k-3}, ..., x_n), x_3, ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена f_2 элемент x_{2n-k-3} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для $2n-5 \leqslant k \leqslant 3n-10$ выделим в группе U_n следующие подгруппы $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$), состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_n), x_2 + f_2(x_2, ..., x_n), x_3 + f_3(x_{3n-k-6}, ..., x_n), x_4, ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена f_3 элемент x_{3n-k-6} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Для произвольного k, находящегося в пределах $(i-1)n - \frac{(i+2)(i-1)}{2} \leqslant k \leqslant in - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$, подгруппа $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$) состоит из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_n), ..., x_i + f_i(x_{in-k-\frac{i(i+1)}{2}}, ..., x_n), x_{i+1}, ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена f_i элемент $x_{in-k-\frac{i(i+1)}{2}}$ встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Наконец, для $k = \frac{n(n-3)}{2}$ выделим подгруппу $Z_{k\omega+\alpha}$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$), состоящую из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_n), ..., x_{n-2} + f_{n-2}(x_{n-1}, x_n), x_{n-1}, x_n)$, причём в одночленах многочлена f_{n-2} элемент x_{n-1} встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

И выделим ещё одну группу для $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Группа $Z_{k\omega+1}$ состоит из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_n), ..., x_{n-1} + f_{n-1}(x_n), x_n)$.

Очевидно, что последняя группа совпадает с U_n.

Теорема 1. *Введённые выше подгруппы $Z_i \subseteq Z_{i+1}$ составляют верхний центральный ряд группы U_n.*

Доказательство. Напомним, что в центральном ряде $Z_k(U_n)/Z_{k-1}(U_n) = Z(U_n/Z_{k-1})$.

Допустим, что для некоторого $0 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-3)}{2}$ и некоторого $1 \leqslant \alpha < \omega$ множества $Z_1 \subseteq ... \subseteq Z_{k\omega+\alpha-1}$ являются частью гиперцентрального ряда.

Пусть k находится в пределах $(i-1)n - \frac{(i+2)(i-1)}{2} \leqslant k \leqslant in - \frac{(i+1)(i+2)}{2}$. Введём обозначение $j = in - k - \frac{i(i+1)}{2}$. Подставляя в j границы для k, убеждаемся, что $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Пусть $\varphi = (x_1 + g_1(x_2, ..., x_n), ..., x_i + g_i(x_j, ..., x_n), x_{i+1}, ..., x_n) \in Z_{k\omega+\alpha}$, а ψ – произвольный унитреугольный автоморфизм вида (1).

Рассмотрим композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$. В $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ действия этих композиций на координаты $x_1, ..., x_{i-1}$ совпадают. На координатах $x_{i+1}, ..., x_n$ эти действия совпадают даже в U_n.

Осталось рассмотреть, как эти автомофрзимы действуют на x_i. Имеем:

$$x_i^{\varphi\psi} = x_i + f_i(x_{i+1}, ..., x_n) + g_i(x_j + f_j, ..., x_n),$$

$$x_i^{\psi\varphi} = x_i + g_i(x_j, ..., x_n) + f_i(x_{i+1}, ..., x_n).$$

В многочлене $g_i(x_j + f_j, ..., x_n)$ по сравнению с $g_i(x_j, ..., x_n)$ появляются одночлены, в которых переменная x_j встречается меньшее число раз. Таким образом, в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ $x_i^{\varphi\psi} = x_i^{\psi\varphi}$. Следовательно, композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ совпадают. Это означает, что $\varphi \in Z_{k\omega+\alpha}(U_n)$.

Если же использовать автоморфизм $\varphi = (x_1, ..., x_t + g_t, ..., x_n)$, где $t > i$, и рассмотреть разность $x_t^{\varphi\psi} - x_t^{\psi\varphi} = g_{t+1}(x_{t+2} + f_{t+2}, ..., x_n) - g_{t+1}(x_{t+2}, ..., x_n)$, то мы увидим, что в общем случае в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$ эти композиции различаются.

А допуская, что в автоморфизме φ в одночленах многочлена g_i переменная x_j содержится α или более раз, мы в общем случае можем получить в одночлене разности $x_i^{\varphi\psi} - x_i^{\psi\varphi}$ переменную x_j $\alpha - 1$ или более раз. Что снова даёт нам $\varphi\psi \neq \psi\varphi$ в $U_n/Z_{k\omega+\alpha-1}$.

Значит, автоморфизмов другого вида, кроме указанных выше, в $Z_{k\omega+\alpha}(U_n)$ нет.

В предельном случае при $\alpha = \omega$ получаем $Z_{k\omega+\alpha} = Z_{(k+1)\omega}$.

Так как для Z_α при $1 \leqslant \alpha < \omega$ утверждение доказано в [2], по индукции получаем то, что и требовалось доказать. ■

Как отмечалось выше, подгруппа $Z_{k\omega+1}$ при $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ совпадает с U_n. Отсюда видим следующее свойство этой группы.

Следствие 1. *Группа унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница гиперцентральна длины $\frac{(n-1)(n-2)}{2}\omega + 1)$.*

Литература

1. Кабанов А.Н. Центр группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов IV Международной научной конференции (Омск, 11 ноября 2016 г.). 2016. С. 78–80.
2. Кабанов А.Н. Центральный ряд группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница // Математические структуры и моделирование, 2017. № 3(43). С. 12–15.

THE UPPER HYPERCENTRAL SERIES OF THE GROUP OF UNITRIANGULAR AUTOMORPHISMS OF A FREE LEIBNIZ ALGEBRA

A.N. Kabanov
Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: m01kab@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The upper hypercentral series of the group of unitriangular automorphisms of a free Leibniz algebra over an arbitrary field is described. The length of this series is obtained.

Keywords: Leibniz algebra, unitriangular automorphism, hypercenter.

Дата поступления в редакцию: 10.11.2017