Математические структуры и моделирование
2017. №4(44). С. 26–32

УДК 519.214
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.4.26-32

О ПРИТЯЖЕНИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия для притяжения к нормальному закону определённого класса функций от зависимых случайных величин. Эти условия включают в себя так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, притяжение к нормальному закону, минимальные условия слабой зависимости.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждения, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Следуя [1], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ – целая часть x.

Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta,\ \eta_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\eta_n \overset{d}{\sim} \theta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\eta_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [2, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [2, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0,1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Всюду в настоящей работе $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ будет обозначать стационарную в узком смысле последовательность. Пусть $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$. Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону.

В статье [3] получены необходимые и достаточные условия (включающие в себя условия слабой зависимости) для стационарных последовательностей, обеспечивающие притяжение сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ к нормальному закону. В настоящей работе этот результат обобщён на случай, в котором вместо сумм S_n участвуют симметрические функции $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$.

Пусть $1 \leqslant p < 2$, $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, $A_n = \mathbf{E}X_n$, $\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{1/p}$, $\widehat{X}_n = X_n - A_n$, $B_n(p) = \| \widehat{X}_n \|_p \cdot \|\mathcal{N}(0,1)\|_p^{-1}$. Последовательностями вида $B_n(p)$ осуществляется масштабная нормировка в предельных теоремах о сходимости к нормальному закону для последовательностей, удовлетворяющих условию φ-перемешивания, сильного перемешивания и пр. (см., например, [4]).

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\mathbf{E}\exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_n\} \cdot \mathbf{E}\exp\{itB_{n+m}^{-1}(p)X_m\} \to 0, \quad (\mathrm{R_f})$$

$n + m \to \infty$ (символ $n + m \to \infty$ означает, что $n \to \infty$, а $m = m(n)$ — произвольная последовательность натуральных чисел).

Ясно, что условие $(\mathrm{R_f})$ можно записать так:

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \overset{d}{\sim} \frac{\widehat{X}_n}{B_{n+m}(p)} + \frac{\widehat{X}_m}{B_{n+m}(p)}, \quad n + m \to \infty, \qquad (1)$$

(здесь и далее через $\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\widehat{Y}_k \overset{d}{=} Y_k$, $k = 1, 2, ..., n$).

Если $B_n(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\gamma_n = B_{n+m}^{-1}(p)(A_n + A_m - A_{n+m}) \to 0$, $n + m \to \infty$, то будем говорить, что выполнено условие нормировки (N).

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$B_n^{-1}(p)\, \widehat{X}_n \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty \qquad (2)$$

и выполнялось условие нормировки (N)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $(\mathrm{R_f})$*, последовательность* $\{B_n^{-p}(p)| \widehat{X}_n |^p\}$ *была равномерно интегрируемой и при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} k\mathbf{P}\{| \widehat{X}_n | \geqslant \varepsilon B_{nk}(p)\} = 0. \qquad (3)$$

Замечание 1. Данный результат обобщает теорему 1 из [3], в которой $X_n = S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а условие $(\mathrm{R_f})$ принимает вид

$$\frac{S_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \overset{d}{\sim} \frac{\widehat{S}_n}{B_{n+m}(p)} + \frac{\widehat{S}_m}{B_{n+m}(p)}, \quad n + m \to \infty. \qquad (\mathrm{R})$$

Условие (R) интерпретировалось в [3] как минимальное условие слабой зависимости, при котором последовательность S_n притягивается к нормальному закону. В настоящей работе условие $(\mathrm{R_f})$ является не только условием слабой зависимости, но и накладывает значительные ограничения на вид функции f, заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин.

В работе [5] получен аналогичный теореме 1 результат, дающий необходимые и достаточные условия для применимости центральной предельной теоремы к симметрическим функциям от зависимых величин, и аналог условия $(\mathrm{R_f})$ интерпретировался там так же, как в настоящей статье.

Лемма 1. *Последовательность* $\{B_n^2\}$ *является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а* B_n *– правильно меняющейся последовательностью порядка* $1/2$) *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$B_{n+m}^2 \sim B_n^2 + B_m^2, \quad n+m \to \infty. \tag{4}$$

Утверждение леммы доказано в [6].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Необходимость.

Пусть выполнены соотношение (2) и условие нормировки (N). Тогда

$$B_n^{-p}(p)|\ \widehat{X}_n\ |^p \xrightarrow{d} |\mathcal{N}(0,1)|^p, \quad n \to \infty, \quad B_n^{-p}(p)\mathbf{E}|\ \widehat{X}_n\ |^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p.$$

Отсюда следует равномерная интегрируемость последовательности $\{B_n^{-p}(p)|\ \widehat{X}_n\ |^p\}$ (см., например, [7, теорема 5.4]). Далее, так как $B_{nk}(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 (условие (N)), то при любом натуральном k (не зависящем от n) $B_{nk}(p) \sim \sqrt{k}B_n(p),\ n \to \infty$. Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} k\mathbf{P}\left\{|\ \widehat{X}_n\ | \geqslant \varepsilon B_{nk}(p)\right\} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} k\mathbf{P}\left\{|\mathcal{N}(0,1)| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}B_n(p)\right\} = 0.$$

то есть выполняется условие (3).

Далее, из (2) следует, что при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\exp\{itB_n^{-1}(p)(X_n - A_n)\} \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left|\mathbf{E}\exp\left\{\frac{itX_{n+m}}{B_{n+m}(p)}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{\frac{itX_n}{B_{n+m}(p)}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{\frac{itX_m}{B_{n+m}(p)}\right\}\right|.$$

Как указывалось выше, выполнение соотношения $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$ при любом $t \in \mathbf{R}$ равносильно условию $(\mathrm{R_f})$.

Поскольку $B_n^2(p)$ – правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$B_{n+m}^2(p) \sim B_n^2(p) + B_m^2(p),\ n \to \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leqslant c \leqslant 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что

$$B^{-2}_{n_2+m_2}(p)B^2_{n_2}(p) \to c, \quad B^{-2}_{n_2+m_2}(p)B^2_{m_2}(p) \to 1-c, \qquad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$B^{-1}_{n_2+m_2}(p)(X_{n_2} - A_{n_2}) \to 0 \quad (B^{-1}_{n_2+m_2}(p)(X_{m_2} - A_{m_2}) \to 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \to 0$, $n \to \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (4)

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2+m_2} - A_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\} \sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \sim$$

$$\sim \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2} - A_{n_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\} \cdot \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{m_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\}, \quad n \to \infty.$$

Отсюда с помощью условия (N) получаем

$$\Delta(n_2) = \left|\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2+m_2} - A_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\} - \right.$$

$$\left. -\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2} - A_{n_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\} \cdot \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{m_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)}\right\}\exp\{it\gamma_{n_2}\}\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \to 0$, $n \to \infty$, то есть выполнено условие $(\mathrm{R_f})$.

Достаточность.

Пусть теперь выполнены условия $(\mathrm{R_f})$ и (3), а последовательность $\left\{B_n^{-p}(p)| \widehat{X}_n |^p\right\}$ равномерно интегрируема. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{| \widehat{X}_n | \geqslant NB_n(p)\right\} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}| \widehat{X}_n |^p}{N^p B_n^p(p)} = \frac{\mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p}{N^p} \to 0, \ N \to \infty.$$

Из теоремы Прохорова (см., например, [7, с. 58]) следует теперь, что последовательность $\{B_n^{-1}(p) \widehat{X}_n\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$ такую, что при $n \to \infty$

$$B^{-1}_{n_1}(p) \widehat{X}_{n_1} \xrightarrow{d} \xi, \quad B^{-1}_{m_1}(p)(X_{m_1} - A_{m_1}) \xrightarrow{d} \eta,$$

$$B^{-1}_{n_1+m_1}(p)(X_{n_1+m_1} - A_{n_1+m_1}) \xrightarrow{d} \zeta, \tag{6}$$

где $m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и ζ – случайные величины. При этом поскольку последовательность $\{B_n^{-p}| \widehat{X}_n |^p\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E}|\xi|^p = \lim_{n\to\infty} B^{-1}_{n_1}\mathbf{E}| \widehat{X}_{n_1} |^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p, \ \mathbf{E}|\eta|^p = \mathbf{E}|\zeta|^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p,$$

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\zeta = 0. \tag{7}$$

Из ограниченных последовательностей

$$\alpha_{n_1} = \frac{B_{n_1}(p)}{\sqrt{B^2_{n_1}(p) + B^2_{m_1}(p)}}, \quad \beta_{n_1} = \frac{B_{m_1}(p)}{\sqrt{B^2_{n_1}(p) + B^2_{m_1}(p)}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_2} \to \alpha, \quad \beta_{n_2} \to \beta, \quad n \to \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Тогда

$$\frac{\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}}{\sqrt{B^2_{n_2}(p) + B^2_{m_2}(p)}} = \alpha_{n_2} B^{-1}_{n_2}(p)(\widehat{X}_{n_2} - A_{n_2}) +$$
$$+\beta_{n_2} B^{-1}_{m_2}(p)(\widehat{X}_{m_2} - A_{m_2}) \xrightarrow{d} \alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}. \tag{8}$$

Понятно, что $\alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (1) и (6)

$$B^{-1}_{n_2+m_2}(p)(\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2+m_2}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [2, с. 216] из (8) и (9) вытекает

$$\frac{\sqrt{B^2_{n_2}(p) + B^2_{m_2}(p)}}{B_{n_2+m_2}(p)} \to C_1, \ \frac{A_{n_2+m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}}{B_{n_2+m_2}(p)} \to C_2, \ 0 < C_1, C_2 < \infty. \tag{10}$$

Из (8) и (10) выводим, что вместе с последовательностями $\{B^{-p}_{n_2}(p)|\widehat{X}_{n_2} - A_{n_2}|^p\}$ и $\{B^{-p}_{m_2}(p)|\widehat{X}_{m_2} - A_{m_2}|^p\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{B^{-p}_{n_2+m_2}(p)|\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - A_{n_2+m_2}|^p\}$ и из (9) получаем теперь

$$\gamma_{n_2} = B^{-1}_{n_2+m_2}(p)(A_{n_2+m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}) \to \mathbf{E}\zeta = 0.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\gamma_{n_2} \to 0, \ n \to \infty$. Это означает, что $\gamma_n \to 0, \ n \to \infty$.

Пусть $n = km + l, \ 0 \leqslant l < n$. Из условия $(\mathrm{R_f})$ и того, что $\gamma_n \to 0$, следует: если последовательность $k = k(n)$ растёт достаточно медленно, то

$$B^{-1}_n(p)\ \widehat{X}_n \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} Y_j(m) + Z(l), \quad n \to \infty, \tag{11}$$

где $Z(l), \ Y_j(m), \ j = 1, ..., k$ – независимые случайные величины и $Y_j(m) \overset{d}{=} B^{-1}_n(p)\ \widehat{X}_m, \ Z(l) \overset{d}{=} B^{-1}_n(p)\ \widehat{X}_l$. Аналогично (6) можно показать, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_1\}$ такая, что

$$B^{-1}_n(p)\ \widehat{X}_n \xrightarrow{d} \xi, \ B^{-1}_{mk}(p)\ \widehat{X}_{mk} \xrightarrow{d} \eta, \ \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = 0, \ \mathbf{E}|\xi|^p = \mathbf{E}|\eta|^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p, \tag{12}$$

а аналогично (10) —

$$B^2_{n_1}(p) \sim C_3(k_1 B^2_{m_1}(p) + B^2_{l_1}(p)),\ B^2_{k_1 m_1}(p) \sim C_4(k_1 B^2_{m_1}(p),$$

$$B^2_{m_1}(p) \sim C_5(B^2_{l_1}(p) + B^2_{m_1 - l_1}(p)) \geqslant C_4 B^2_{l_1}(p),\ 0 < C_3, C_4, C_5 < \infty, \tag{13}$$

$k_1 = k(n_1),\ m_1 = m(n_1),\ l_1 = l(n_1)$. Из (13) следует, что $B^{-1}_{n_1}(p) B_{l_1}(p) \to 0$, $B^2_{n_1} \sim C_3 C_4^{-1} B^2_{k_1 m_1}(p)$ $n \to \infty$, и поэтому

$$\mathbf{P}\{|Z(l_1)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\ \widehat{X}_{l_1}\ |^p}{B^p_{n_1}(p)} \to 0,\ n \to \infty,$$

то есть $Z(l_1) \to 0$ по вероятности, так что

$$\sum_{j=1}^{k_1} Y_j(m_1) \xrightarrow{d} \xi, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Далее, из (3) и (13) следует, что

$$\sum_{j=1}^{k_1} \mathbf{P}\{|Y_j(m_1)| \geqslant \varepsilon\} = k_1 \mathbf{P}\{|\ \widehat{X}_{m_1}\ | \geqslant \varepsilon B_{n_1}(p)\} \sim$$

$$\sim k_1 \mathbf{P}\{|\ \widehat{X}_{m_1}\ | \geqslant \varepsilon \sqrt{C_3 C_4^{-1}} B_{k_1 m_1}(p)\} \to 0,\ n \to \infty. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что ξ имеет нормальное распределение [2, с. 330], а поскольку

$$\mathbf{E}\xi = 0,\ \mathbf{E}|\xi|^p = \mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p,$$

то $\xi \overset{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$. Таким образом, из любой подпоследовательности последовательности $\{B^{-1}_n(p)\ \widehat{X}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по распределению к $\mathcal{N}(0,1)$. Это означает, что выполняется (2).

Из (2) следует, что в соотношениях (6) $\xi \overset{d}{=} \eta \overset{d}{=} \zeta \overset{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$ и в (8) $\alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta} \overset{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$, поэтому в (10) $C_1 = 1$, то есть

$$\delta_{n_2} = B^{-2}_{n_2+m_2}(p) \left(B^2_{n_2}(p) + B^2_{m_2}(p)\right) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\delta_{n_2} \to 1,\ n \to \infty$. Это означает, что $\delta_n \to 1,\ n \to \infty$, и в силу леммы 1 $\{B^2_n(p)\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
3. Гринь А.Г. О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.
4. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и её примен. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
5. Гринь А.Г. О центральной предельной теореме для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 5–11.
6. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977. 351 с.

ON THE ATTRACTION OF SYMMETRIC FUNCTIONS FROM DEPENDENT VARIABLES TO THE NORMAL LAW

A.G. Grin’
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The necessary and sufficient conditions for attracting a certain class of functions from dependent random variables to a normal law are obtained. These conditions include the so-called minimal conditions of weak dependence.

Keywords: symmetric functions of random variables, attraction to the normal law, minimal conditions of weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 10.10.2017