

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ УЧЁТЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИНЫ

С.Л. Дерябин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

А.С. Кирьянова

аспирант, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Аннотация. В работе рассматриваются трёхмерные изэнтропические течения политропного газа в условиях действия силы тяжести. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики для политропного газа. При показателе политропы $\gamma = 7.02$ эта система описывает движение воды. В системе вводится ортогональная криволинейная система координат. Для постановки задачи о распаде специального разрыва в системе делается вырожденная замена переменных, а именно: зависимые и независимые переменные меняются ролями. В новых переменных для системы ставится начально-краевая задача с данными на звуковой характеристике и дополнительным условием. Решение начально-краевой задачи строится в виде степенных рядов. Доказывается сходимость построенных рядов в области от поверхности слабого разрыва до границы газ-вакуум включительно. Для определения закона движения границы газ-вакуум выписывается квазилинейная система уравнений с частными производными, которая с помощью характеристического параметра сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: математическое моделирование, политропный газ, вакуум, сила тяжести, система уравнений газовой динамики, граница газ-вакуум, задача о распаде специального разрыва, начально-краевая задача, звуковая характеристика.

Введение

Задачи об истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил рассматривались ранее [1]–[6]. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [1]. В работах [7]–[8] при описании движения воды предложена модель газовой динамики для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 7.02$. Представляется, что эта модель сжимаемой сплошной среды является адекватной физической природе жидкости и позволит получить новые содер-

жательные результаты. В данной работе использование значений политропы $\gamma = 7.02$ будет моделировать течения воды.

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются трёхмерные изэнтропические течения политропного газа с уравнением состояния $p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$ и следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; \mathbf{U} — вектор скорости газа; t, x, y, z — независимые переменные; u^1, u^2, w — декартовы координаты вектора скорости газа; ρ — плотность газа; p — давление; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа.

Пусть в момент $t = 0$ вертикальная непроницаемая стенка Γ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что на газ действует сила тяжести (см. рис. 1). Будет предполагаться, что в начальный моменты времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_\Gamma > 0$, то есть имеет место разрыв плотности газа.

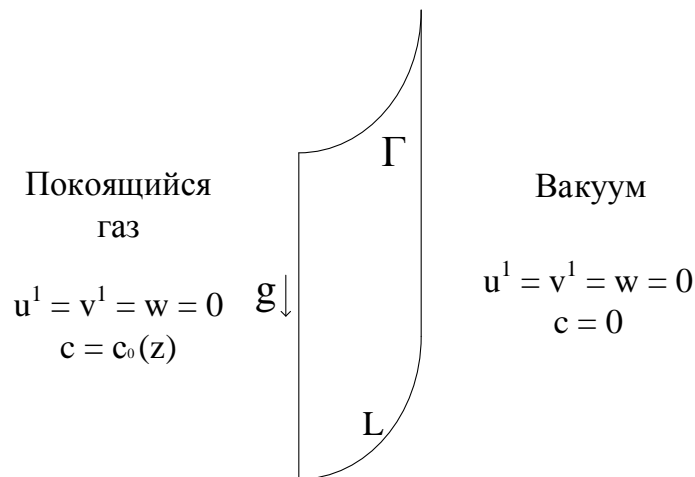


Рис. 1. Области покоя и вакуума

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум (см. рис. 2). В результате распада разрыва возникает волна разрежения, отделённая от области покоящегося газа поверхностью Γ_{12} , являющейся звуковой характеристикой этих течений. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_{02} .

Далее для описания воды будем использовать уравнения состояния для давления политропного газа $p = \frac{s^2 \rho^\gamma}{\gamma}$ с показателем политропы $\gamma = 7.02$, $s = 1$ [7], [8].

Свободная граница Γ_{02} — это граница между водой и воздухом. Поскольку плотность воды и воздуха существенно отличаются, будет предполагаться, что на свободной поверхности Γ_{02} плотность жидкости будет равна нулю во все моменты времени:

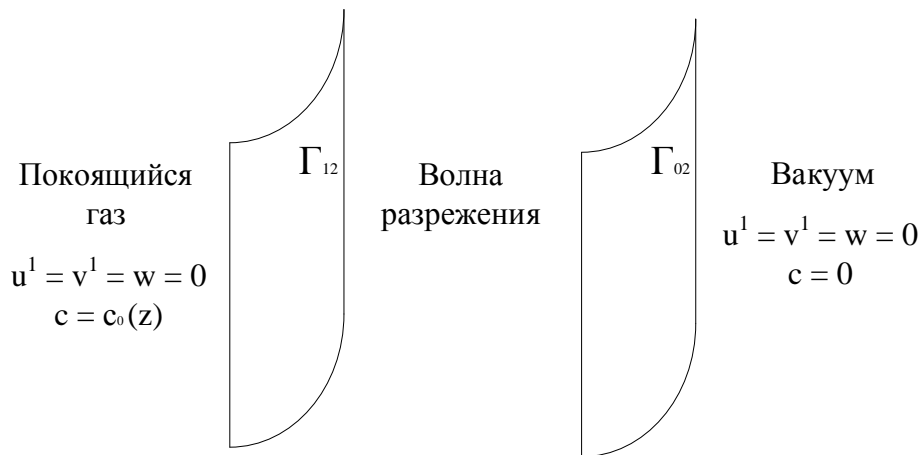


Рис. 2. Области покоя, вакуума и волны разрежения

$$\rho(t, x, y, z)|_{\Gamma_{02}} = 0.$$

Последнее предположение делает используемую модель приближенной.

В работе будут строиться законы движения: свободной поверхности Γ_{02} , поверхности слабого разрыва Γ_{12} и волна разрежения.

Система уравнений, описывающая трёхмерные изэнтропические течения идеального политропного газа в форме Громеки-Лэмба в условиях действия силы тяжести с учётом уравнения состояния, имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} c_t + \mathbf{U} \cdot \text{grad}c + \frac{\gamma - 1}{2} c \cdot \text{div}\mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}_t + \text{rot}\mathbf{U} \times \mathbf{U} + \frac{1}{2} \text{grad}U^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c \cdot \text{grad}c &= \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{F} = \{0, 0, -g\}$, g — ускорение свободного падения.

Вертикальная поверхность Γ является линейчатой поверхностью. В плоскости $z = 0$ задаётся линия L , которая, двигаясь вдоль оси Oz , определяет поверхность Γ .

Пусть линия L задаётся параметрически

$$x = \phi_1(\xi), \quad y = \phi_2(\xi),$$

или в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$.

Делается переход от декартовых координат x, y, z к новым ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z по следующим формулам

$$x = \phi_1(\xi) + \eta n_1(\xi), \quad y = \phi_2(\xi) + \eta n_2(\xi), \quad z = z',$$

или в векторной форме $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\xi) + \eta \mathbf{n}(\xi)$

Здесь $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства, ξ — параметр, с помощью которого задаётся L , η — расстояние от Γ , измеренное вдоль нормали, $\mathbf{n}(\xi) = \{n_1, n_2\}$ — единичный нормальный вектор к линии

L . Далее для определённости будет предполагаться, что вектор \mathbf{n} направлен внутрь вакуума.

Якобиан преобразования равен $J = \mathbf{R}_\eta \mathbf{R}_\xi \mathbf{R}_z$. Если $|\mathbf{r}_\xi| \neq 0$ в точке $\xi = \xi^0$ на линии L ($\eta = 0$), то эта точка $M^0(\xi_0, 0)$ не является особой точкой линии L . В дальнейшем это предполагается выполненным. Тогда якобиан преобразования J будет отличен от нуля в точке $M^0(\xi_0, 0)$ и её окрестности.

Для перехода в системе (1) к ортогональным криволинейным координатам ξ, η, z необходимо вычислить коэффициенты Ламе:

$$H_1 = |\mathbf{R}_\eta| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{R}_\xi| = |\mathbf{r}_\xi + \eta \mathbf{n}_\xi|, \quad H_3 = |\mathbf{R}_z| = 1.$$

Поскольку $\mathbf{n}_\xi = -k(\xi)\mathbf{r}_\xi$ [10], где $k(\xi)$ — значение кривизны линии L , то $H_2 = |\mathbf{r}_\xi|(1 - k(\xi)\eta)$. Заметим, что на поверхности Γ $H_2|_\Gamma = |\mathbf{r}_\xi| \neq 0$. Коэффициент Ламе обращается в ноль при $\eta = \frac{1}{k(\xi)}$, то есть в точках пространства, удалённых от Γ в направлении нормали на расстояние, равное радиусу кривизны линии L .

Заметим, что функция $H_{2\eta} = -k(\xi)|\mathbf{r}_\xi|$ зависит только от независимой переменной ξ , а функция H_2 , зависит от неизвестной функции $\eta(t, \xi, c, z)$.

Система уравнений (1) для данной криволинейной системы координат имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} c_t + c_\eta u + \frac{1}{H_2} c_\xi v + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left(u_\eta + \frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u + \frac{H_{2z}}{H_2} w \right) &= 0, \\ u_t + u_\eta u + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c c_\eta &= 0, \\ v_t + v_\eta u + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u v + \frac{H_{2z}}{H_2} v w + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c c_\xi &= 0, \\ w_t + w_\eta u + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w - \frac{H_{2z}}{H_2} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= -g. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u, v, w — проекции вектора скорости газа на координатные оси η, ξ, z соответственно. В этой системе координат переменная z сохраняется и поэтому в качестве неизвестной функции сохраняется третья координата вектора скорости газа w .

Если в системе (1) положить $u^1 = u^2 = w = 0$, то, как и в [6], первые три уравнения выполняются тождественно, а в четвёртом уравнении получим $\frac{2}{\gamma - 1} c c_z = -g$. Интегрируя полученное уравнение, имеем $c = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$ — распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь c_{00} — скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z \leq \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}. \quad (3)$$

Причём на верхней границе при $z = \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}$ волна разрежения примыкает к вакууму. В данной работе волна разрежения будет построена для внутрен-

них точек интервала (3). Конфигурация течения в окрестности непроницаемой стенки $z = 0$ и верхней границы газ-вакуум рассматриваться не будет.

Для построения волны разрежения, как и ранее [1] при решении задачи о распаде разрыва, в системе (2) делается замена переменных. Независимая переменная η и неизвестная функция c меняются ролями, то есть за независимые переменные берутся t, c, ξ, z , а за неизвестные функции η, u, v, w . В результате такой замены вместо системы (2) получается система:

$$\begin{aligned} \eta_t &= u - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right], \\ \eta_c \left(u_t + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 \right) + \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) u_c + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ \eta_c \left(v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} uv \right) + \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) v_c - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c \eta_\xi &= 0, \\ \eta_c \left(w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w \right) + \left(u - \eta_t - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w \right) w_c - \frac{2}{\gamma - 1} c \eta_z &= -g \eta_c. \end{aligned} \quad (4)$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \eta_t &= u - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v - \eta_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right], \\ \eta_c \left(u_t + \frac{1}{H_2} u_\xi v + u_z w - \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2 \right) - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. & \\ \left. + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] u_c + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ \eta_c \left(v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w + \frac{H_{2\eta}}{H_2} uv \right) - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. & \\ \left. + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] v_c - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{H_2} c \eta_\xi &= 0, \\ \eta_c \left(w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w \right) - \frac{\gamma - 1}{2} c \left[u_c + \right. & \\ \left. + \eta_c \left(\frac{1}{H_2} v_\xi + w_z + \frac{H_{2\eta}}{H_2} u \right) - \frac{1}{H_2} \eta_\xi v_c - \eta_z w_c \right] w_c - \frac{2}{\gamma - 1} c \eta_z &= -g \eta_c. \end{aligned} \quad (5)$$

Закон движения характеристики Γ_{12} ($\eta = \eta_0(t, \xi, z)$) определяется из решения дифференциальной задачи [9]

$$\eta_{0t} = c_0(z) \sqrt{1 + \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi|(1 - k(\xi)\eta_0)} \eta_{0\xi}^2 + \eta_{0z}^2}, \quad \eta(0, \xi, z) = 0. \quad (6)$$

Задача (6) по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение, что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12} :

$$u|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = 0, \quad w|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = 0, \quad c|_{\eta=\eta_0(t,\xi,z)} = c_0(z). \quad (7)$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (5) с данными на характеристике Γ_{12} (7). Поскольку Γ_{12} — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [11]. Если бы поверхность Γ_{12} убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Поскольку стенка $\eta = 0$ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных t, ξ, c, z служит [1] соотношение

$$\eta(0, c, z, \xi) = 0. \quad (8)$$

2. Построение волны разрежения

Теорема 1. *Существует t_0 такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности $M_0(\xi_0, \eta_0(t_0, \xi_0, z_0))$ существует единственное локально-аналитическое решение задачи (5), (7), (8) о распаде специального разрыва.*

Доказательство. Доказательство теоремы состоит, как и в [1], в сведении задачи (5), (7), (8) к характеристической задаче Коши стандартного вида [11]. ■

Разложим решение задачи (5), (7), (8) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, \xi, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\xi, c, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{\eta, u, v, w\}. \quad (9)$$

В системе (5) положим $t=0$ и с учётом (8) получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (9):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_0 + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}v_{0c} &= 0, \\ -\frac{\gamma - 1}{2} cu_{0c}w_{0c} &= 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим простейшую систему дифференциальных уравнений:

$$u_{0c} = \pm \frac{2}{\gamma - 1}, \quad v_{0c} = 0, \quad w_{0c} = 0.$$

Выбор направления вектора \mathbf{n} позволяет определить знак в первом уравнении системы. Это знак минус. В результате интегрирования системы с учётом (7) имеем:

$$\eta_1 = -2\alpha c + \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad u_0 = -\frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0(z)), \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0.$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$. Заметим, что $\eta_{1\xi} = 0$, $\eta_{1c} = -2\alpha$, $\eta_{1z} = \frac{2}{\gamma - 1}c_{0z}(z)$.

Продифференцируем систему (5) по t , положим $t=0$ и с учётом (8) получим:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= u_1 + \frac{\gamma - 1}{2}c \left(u_{1c} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0} u_0 \eta_{1c} \right), \quad H_2^0 = |\mathbf{r}_\xi|, \\ cu_{1c} - \alpha u_1 &= \frac{2}{\gamma - 1} \alpha k(\xi) c(c - c_0(z)), \\ cv_{1c} - 2\alpha v_1 &= 0, \\ cw_{1c} - 2\alpha w_1 &= 2\alpha g + \frac{4}{(\gamma - 1)^2} cc_{0z}(z). \end{aligned}$$

В результате интегрирования имеем:

при $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{8(\gamma - 2)(\gamma + 1)}{(3\gamma - 5)(\gamma - 3)(\gamma - 1)} k(\xi) c_0^{2-\alpha}(z) c^\alpha + \\ &+ \frac{2}{\gamma - 1} \alpha \frac{1}{2 - \alpha} k(\xi) c^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \alpha \frac{1}{1 - \alpha} k(\xi) c_0(z) c, \\ v_1 &= 0, \\ w_1 &= w_{10}(z) c^{2\alpha} - \frac{2}{\gamma - 1} c_{0z}(z) c - g; \end{aligned}$$

при $\alpha = 1$ ($\gamma = 3$)

$$u_1 = u_{10}(z) c + k(\xi) c^2 - k(\xi) c_0(z) c \ln c;$$

при $\alpha = 2$ ($\gamma = \frac{5}{3}$)

$$u_1 = u_{10}(z) c^2 + 6k(\xi) c^2 \ln c + 6k(\xi) c_0(z) c.$$

Продифференцируем систему (5) по t дважды и с учётом (8) получим:

$$\begin{aligned} \eta_3 &= u_2 + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{2c} + F_{21}(c, z, \xi), \\ cu_{2c} - 2\alpha u_2 &= F_{22}(c, \xi, z), \\ cv_{2c} - 4\alpha v_2 &= F_{23}(c, \xi, z), \\ cw_{2c} - 4\alpha w_2 &= F_{24}(c, \xi, z). \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
F_{21} &= -2\eta_{1z}w_1 + \frac{\gamma-1}{2}c \left[-2\eta_{1z}w_{1c} + \eta_{2c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 + \right. \\
&\quad \left. + 2\eta_{1c} \left(w_{1z} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_1 - \frac{H_{2\eta}}{H_2^{02}}|\mathbf{r}_\xi|k(\xi)\eta_1u_0 \right) \right], \\
F_{22} &= -\eta_{1c}u_{0z}w_1 - \frac{1}{2}\eta_{2c}u_1 + \\
&\quad + \frac{\gamma-1}{2}c \left[\frac{1}{2}\eta_{2c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 + \eta_{1c} \left(w_{1z} + \frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_1 - \frac{H_{2\eta}}{H_2^{02}}\eta_1u_0 \right) - \eta_{1z}w_{1c} \right] + \\
&\quad + \frac{\gamma-1}{2}cu_{1c} \left(u_{1c} + \eta_{1c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 \right), \\
F_{23} &= \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi|} c \left(u_{1\xi} + \frac{\gamma-1}{2}cu_{1c\xi} \right), \\
F_{24} &= \frac{2}{\gamma-1}c\eta_{2z} - g\eta_{2c} + (\gamma-1)c \left(u_{1c} + \eta_{1c}\frac{H_{2\eta}}{H_2^0}u_0 \right) w_{1c}.
\end{aligned}$$

Эти функции имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
F_{21} &= c^{2\alpha+1}p_{11}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{12}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{13}(\xi, z) + c^3p_{14}(\xi, z) + c^2p_{15}(\xi, z) + \\
&\quad + cp_{16}(\xi, z) + p_{10}(\xi, z), \\
F_{22} &= c^{2\alpha+1}p_{21}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{22}(\xi, z) + c^{2\alpha-1}p_{23}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{24}(\xi, z) + c^4p_{25}(\xi, z) + \\
&\quad + c^3p_{26}(\xi, z) + c^2p_{27}(\xi, z) + cp_{28}(\xi, z) + p_{20}(\xi, z), \\
F_{23} &= c^{\alpha+1}p_{31}(\xi, z) + c^3p_{32}(\xi, z) + c^2p_{33}(\xi, z), \\
F_{24} &= c^{3\alpha-1}p_{41}(\xi, z) + c^{2\alpha+1}p_{42}(\xi, z) + c^{2\alpha}p_{43}(\xi, z) + c^{\alpha+1}p_{44}(\xi, z) + c^\alpha p_{45}(\xi, z) + \\
&\quad + c^{\alpha-1}p_{46}(\xi, z) + c^3p_{47}(\xi, z) + c^2p_{48}(\xi, z) + cp_{49}(\xi, z) + p_{40}(\xi, z).
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
u_2 &= c^{2\alpha} \left[u_{20}(z) + \int \frac{1}{2}F_{22}(c, z, \xi)c^{-2\alpha-1}dc \right], \\
v_2 &= c^{4\alpha} \left[v_{20}(z) + \int F_{23}(c, z, \xi)c^{-4\alpha-1}dc \right], \\
w_2 &= c^{4\alpha} \left[w_{20}(z) + \int F_{24}(c, z, \xi)c^{-4\alpha-1}dc \right].
\end{aligned}$$

После интегрирования получаем следующую структуру для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
u_2 &= c^{2\alpha+1}q_{21}(\xi, z) + c^{2\alpha}q_{22}(\xi, z) + c^{2\alpha-1}q_{23}(\xi, z) + c^{\alpha+1}q_{24}(\xi, z) + c^4q_{25}(\xi, z) + \\
&\quad + c^3q_{26}(\xi, z) + c^2q_{27}(\xi, z) + cq_{28}(\xi, z) + q_{29}(\xi, z)c^{2\alpha} \ln c + q_{20}(\xi, z), \\
v_2 &= c^{\alpha+1}q_{31}(\xi, z) + c^3q_{32}(\xi, z) + c^2q_{33}(\xi, z), \\
w_2 &= c^{3\alpha-1}q_{41}(\xi, z) + c^{2\alpha+1}q_{42}(\xi, z) + c^{2\alpha}q_{43}(\xi, z) + c^{\alpha+1}q_{44}(\xi, z) + c^\alpha q_{45}(\xi, z) + \\
&\quad + c^{\alpha-1}q_{46}(\xi, z) + c^3q_{47}(\xi, z) + c^2q_{48}(\xi, z) + cq_{49}(\xi, z) + q_{40}(\xi, z).
\end{aligned}$$

Продифференцируем систему (5) по t k раз и с учётом (8), получим

$$\begin{aligned}\eta_{k+1} &= u_k + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{kc} + F_{k1}(c, z, \xi), \\ cu_{kc} - 2\alpha u_k &= F_{k2}(c, \xi, z), \\ cv_{kc} - 4\alpha v_k &= F_{k3}(c, \xi, z), \\ cw_{kc} - 4\alpha w_k &= F_{k4}(c, \xi, z).\end{aligned}$$

Здесь $F_{k1}, F_{k2}, F_{k3}, F_{k4}$ — функции, заданные известным образом, зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (9).

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}u_k &= c^{\alpha k} \left[u_{k0}(z) + \int \frac{1}{2} F_{k2}(c, z, \xi) c^{-\alpha k - 1} dc \right], \\ v_k &= c^{2\alpha k} \left[v_{k0}(z) + \int F_{k3}(c, z, \xi) c^{-2\alpha k - 1} dc \right], \\ w_k &= c^{2\alpha k} \left[w_{k0}(z) + \int F_{k4}(c, z, \xi) c^{-2\alpha k - 1} dc \right].\end{aligned}$$

Структура решения для $\alpha = 1, 2$ в целом совпадает с полученной выше и здесь не приводится в виду громоздкости.

Анализ структуры коэффициентов ряда (9) приводит к следующим леммам.

Лемма 1. Коэффициенты ряда (9) при $k \geq 1, 1 < \gamma < 3$ имеют следующую структуру: $\mathbf{f}_k(c, z, \xi) = \mathbf{f}_k^0(z, \xi) + c\mathbf{P}_k(c, c \ln c, c^\alpha)$, где \mathbf{P}_k есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем Ak ($A = \text{const}$). Коэффициенты многочленов — функции, зависящие от z, ξ .

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (9). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{f}_k обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и \mathbf{f}_k обладают нужной структурой.

На основании леммы 1 можно утверждать, что структура решения задачи (5), (7), (8) следующая:

$$\begin{aligned}\eta &= \eta^0(t, z, \xi) + c\eta^1(t, c, z, \xi), \\ u &= u^0(t, z, \xi) + cu^1(t, c, z, \xi), \\ v &= v^0(t, z, \xi) + cv^1(t, c, z, \xi), \\ w &= w^0(t, z, \xi) + cw^1(t, c, z, \xi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\eta^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ u^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ v^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}, \\ w^0(t, z, \xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z, \xi) \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}\tag{10}$$

Для $\eta^0(t, z, \xi)$, $u^0(t, z, \xi)$, $v^0(t, z, \xi)$, $w^0(t, z, \xi)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Ряды (10) являются решением следующей задачи:*

$$\begin{aligned}\eta_t + \frac{1}{H_2} \eta_\xi v + \eta_z w &= u, \quad \eta(0, z, \xi) = 0; \\ u_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + u_z w &= \frac{H_{2\eta}}{H_2} v^2, \quad u(0, z, \xi) = \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z); \\ v_t + \frac{1}{H_2} v_\xi v + v_z w &= -\frac{H_{2\eta}}{H_2} uv, \quad v(0, z, \xi) = 0; \\ w_t + \frac{1}{H_2} w_\xi v + w_z w &= -g, \quad w(0, z, \xi) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

В этой системе для простоты восприятия верхние нулевые индексы опущены.

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (11) и сравнением полученных рядов с рядами (10). Ряды оказываются равными. Система (11) не имеет особенностей, поэтому задача (11) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами. Следовательно, ряды (10) сходятся. На основании приведённых лемм доказывается следующая

Теорема 2. *Для $1 < \gamma < 3$, при $0 \leq t \leq t_*$ область сходимости рядов (10), а также рядов $\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_z, \mathbf{f}_c, \mathbf{f}_\xi$ покрывает всю зону течения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (11).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1] и проводится по методике [11], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используется теорема 1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. ■

Проведём исследование задачи (11). С помощью введения характеристического параметра данная система уравнений с частными производными сводится

к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [12].

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{H_2}v, & \frac{dz}{d\tau} &= w, & \frac{d\eta}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= \frac{H_{2\eta}}{H_2}v^2, & \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{H_{2\eta}}{H_2}uv, & \frac{dw}{d\tau} &= -g. \end{aligned} \quad (12)$$

Из первого уравнения системы (12) получим $t = \tau$. Интегрируя седьмое уравнение системы (12), будем иметь $w = -gt$.

Умножая пятое уравнение в системе (12) на u , шестое на v , складывая их, получим:

$$uu_\tau + vv_\tau = 0. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (13), имеем:

$$u^2 + v^2 = C^2, \quad (14)$$

где C — константа, определяемая точкой на исходной поверхности Γ . Если мы на поверхности Γ возьмём точку с координатами (ξ_0, z_0) , то C определится из формулы $C = \frac{2}{\gamma - 1}c_0(z)$. И тогда

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1}c_0(z) \right)^2. \quad (15)$$

Система (12) в общем случае не интегрируется, но при задании конкретного значения кривизны $k(\xi)$ может быть исследована численными методами.

3. Выводы

Проведённые исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Доказаны локальная по времени и глобальная по пространству теоремы существования и единственности поставленной начально-краевой задачи.
2. В виде сходящихся рядов построено течение газа в области волны разреза от поверхности слабого разрыва до границы газ-вакуум включительно.
3. Для определения закона движения границы газ-вакуум и значений газодинамических параметров на ней получена система обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Построенное решение задачи о распаде разрыва является аналитическим в интервале $1 < \gamma < 3$. Для моделирования течений воды необходимо задать $\gamma = 7.02$. Поэтому, построенное решение может быть использовано для моделирования течений, возникающих после разрушения плотины только приближенно. В этом проявляется ограниченность метода построения аналитических решений. Заметим, что в плоско-симметричном случае [6] решение построено при $\gamma > 1$. Это позволяет надеяться, что и в трёхмерном случае приближенные решения будут адекватны физической природе жидкости.

Благодарности

В заключении авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
2. Дерябин С.Л. Трёхмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.
3. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакууме // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН. 2010. Т. 16. С. 63–74.
5. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, 2015. 191 с.
6. Дерябин С.Л., Кирьянова А.С. Обобщение центрированной волны Римана при учёте силы тяжести // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 44–53.
7. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 2. С. 206–218.
8. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Результаты расчётов // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 3. С. 362–373.
9. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
10. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Москва : Изд. Едиториал УРСС, 2003. 432 с.
11. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
12. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.

MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FLOWS UNDER GRAVITY IS APPEARING AS A RESULT OF DAMAGE TO THE DAM

S.L. Deryabin

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

A.S. Kiryanova

Second Year Graduate Student, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The paper examines the three-dimensional isentropic flows of a polytropic gas under the action of gravity. As a mathematical model, a system of equations of gas dynamics for a polytropic gas is used. With the polytropic index $\gamma = 7.02$, this system describes the movement of water. The system introduces an orthogonal curvilinear coordinate system. To formulate the problem of the disintegration of a special discontinuity, the system makes a degenerate change of variables, namely: dependent and independent variables change roles. In new variables, an initial-boundary value problem with data on the sound characteristic and an additional condition is posed for the system. The solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of power series. The convergence of the constructed series in the region from the surface of a weak discontinuity to the gas-vacuum boundary is proved. To determine the law of motion of the gas-vacuum boundary, a quasilinear system of partial differential equations is written out, which, with the help of the characteristic parameter, reduces to a system of ordinary differential equations.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary, initial-boundary value problem, Riemann problem, centered wave.

Дата поступления в редакцию: 24.06.2017