*Математические структуры и моделирование
2017. № 3(43). С. 16–28*

УДК 512.642:519.17
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.3.16-28

РЁБЕРНАЯ СВЯЗНОСТЬ ВЕРШИН ПОЛИЭДРОВ

Т.К. Рустюмов
математик, пенсионер, e-mail: rtk777@mail.ru
С.Т. Рустюмова
математик, директор Центра, e-mail: svrustjumova@mail.ru

Центр обучения математике

Аннотация. Авторы в начале статьи на конкретном примере в 3-хмерном пространстве демонстрируют необычное и до сих пор неизвестное свойство векторов. Для векторных пространств любой конечной размерности вводится понятие «конический базис», на основе которого доказываются новые свойства векторных пространств. Понятие конического базиса и некоторые другие новые идеи, позволяют доказать рёберную связность вершин полиэдров.

Ключевые слова: векторное пространство, вектор, конус, полиэдральный конус, конечнопорождённый конус, политоп, полиэдр, неравенство.

Введение

Построим конкретный пример множества из четырёх векторов $\{\mathbf{V_4}\} = \{\mathbf{x}.\mathbf{y}, \mathbf{z}, (-\mathbf{t})\}$ в 3-хмерном пространстве (определение самих векторов см. под рис. 1), которые не имеют крайних гиперплоскостей (опор):

Обозначим в $\mathbf{E^3}$ через $\mathbf{G_i}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ гиперплоскость, проходящую через два линейно независимых вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{t}$ (и начало координат), с номером $\mathbf{i}$.

В нашем случае мы имеем всего шесть возможных «крайних» гиперплоскостей $\mathbf{G_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{G_2}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\mathbf{G_3}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{G_4}(\mathbf{x}, (-\mathbf{t}))$, $\mathbf{G_5}(\mathbf{y}, (-\mathbf{t}))$, $\mathbf{G_6}(\mathbf{z}, (-\mathbf{t}))$ для $\{\mathbf{V_4}\} = \{\mathbf{x}.\mathbf{y}, \mathbf{z}, (-\mathbf{t})\}$.

Покажем аналитически, что в нашем примере «крайние» гиперплоскости $\mathbf{G_i}(\mathbf{r}, \mathbf{t}))$ строго разделяют оставшиеся два вектора $\{\{\mathbf{V_4}\}\backslash\{\mathbf{r},\ \mathbf{t}\}\}$.

В самом деле, для конуса $\mathbf{C} = \mathbf{cone}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и его «крайних» гиперплоскостей $\mathbf{G_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{G_2}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{G_3}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ пусть сначала выбрано $\mathbf{G_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда нормалью этой «крайней» гиперплоскости будет оставшийся вектор $\mathbf{z}$=(0,0,1). Следовательно, имеем скалярные произведения $(\mathbf{z}, \mathbf{z})$=1>0, а $(\mathbf{z}, (-\mathbf{t}))$=$-1 < 0$, т. е. оставшиеся вектора $\mathbf{z}$ и $(-\mathbf{t})$ строго разделяются нашей «крайней» гиперплоскостью $\mathbf{G_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Аналогично показывается, что «крайние» гиперплоскости $\mathbf{G_2}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{G_3}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ строго разделяют оставшиеся два вектора, не входящие в определение соответствующей «крайней» гиперплоскости.

Для «крайних» гиперплоскостей $\mathbf{G_4}(\mathbf{x}, (-\mathbf{t}))$, $\mathbf{G_5}(\mathbf{y}, (-\mathbf{t}))$, $\mathbf{G_6}(\mathbf{z}, (-\mathbf{t}))$ пусть сначала выбрана «крайняя» гиперплоскость $\mathbf{G_4}(\mathbf{x}, (-\mathbf{t}))$, обозначим её нормаль

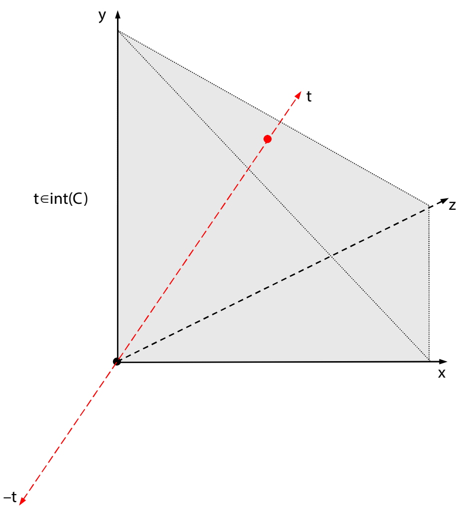

Рис. 1. Пример множества векторов $\{\mathbf{V_4}\} = \{\mathbf{x}.\mathbf{y}, \mathbf{z}, (-\mathbf{t})\}$, не имеющего «крайних» гиперплоскостей в 3-хмерном пространстве. $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$, $(-\mathbf{t}) = (-1, -1, -1)$, $\mathbf{C} = \mathbf{cone}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$

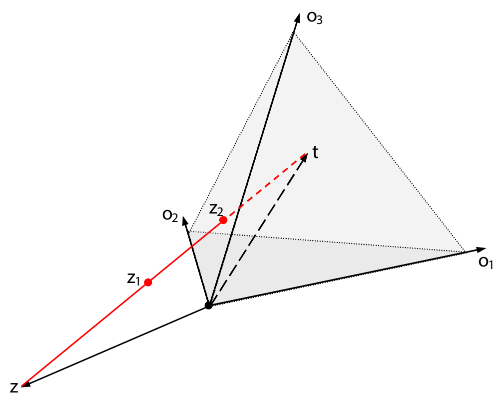

Рис. 2. Пояснение доказательства леммы для 3-х мерного пространства

через $\mathbf{n_x}$=(a,b,c), где хотя бы одна координата не нулевая. Тогда из скалярного произведения $(\mathbf{n_x}, \mathbf{x})$=0, следует (a)=0, отсюда $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ или $(\mathbf{c}) = (-\mathbf{b})$. Итак, $\mathbf{n_x}$=(0,b,−b) и мы можем принять $\mathbf{n_x}$=(0,1,−1). Тогда скалярное произведение $(\mathbf{n_x}, \mathbf{y})$=1>0, а скалярное произведение $(\mathbf{n_x}, \mathbf{z})$=−1<0, т.е. «крайняя» гиперплоскость $\mathbf{G_4}(\mathbf{x}, (-\mathbf{t}))$ строго разделяет оставшиеся два вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$.

Аналогично показывается, что и «крайние» гиперплоскости $\mathbf{G_5}(\mathbf{y}, (-\mathbf{t}))$ и $\mathbf{G_6}(\mathbf{z}, (-\mathbf{t}))$ строго разделяют оставшиеся два вектора, не входящие в определение соответствующей «крайней» гиперплоскости.

То есть в этом случае, для примера, в $\mathbf{E^3}$ — **вообще нет «крайних» гиперплоскостей (опор) и невозможно построение полиэдрального конуса для набора векторов** $\{\mathbf{V_4}\}$.

Примечание (визуальное моделирование). Рис. 1 легко смоделировать на углу прямоугольного стола. Надо взять два карандаша или две ручки. Один карандаш надо поставить вертикально на выбранном углу стола — этот карандаш и ребра угла стола будут определять координаты (x, y, z). Второй карандаш надо направить из выбранного угла стола в сторону вектора $(-1, -1, -1)$ — это и будут четыре вектора с рис. 1. Теперь, как бы вы не проводили «крайнюю» гиперплоскость (в виде тонкой тетради или листа картона) через два любых линейно независимых вектора (и начало координат), эта гиперплоскость будет строго разделять два оставшихся вектора.

Будем придерживаться следующих, почти традиционных, обозначений и определений.

Через $\mathbf{E^d}$ — обозначим $\mathbf{d}$-мерное векторное пространство, т. е. пространство $\mathbf{d}$-плексов $\mathbf{x}$=$(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \ldots, \mathrm{x_d})$, состоящее из действительных чисел $\mathrm{x_i}$, где $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{d}$.

Будем называть $\mathbf{d}$-плекс **точкой** или **вектором** пространства $\mathbf{E^d}$.

Начало координат, точку $(0, 0, \ldots 0)$ будем обозначать через $\mathbf{0}$.

Выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ называется любой вектор $\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{m}} \lambda_{\mathbf{i}} \mathbf{v_i}$, где $\lambda_{\mathbf{i}} \geqslant 0$, и $\mathbf{i} \in 1,2,...,m$ с дополнительным условием $\sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{m}} \lambda_{\mathbf{i}} = 1$. Выпуклая комбинация векторов для кратности обозначается $\mathbf{conv}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m})$ и называется **выпуклой оболочкой** векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$.

Конической комбинацией векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ называется любой вектор $\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{m}} \lambda_{\mathbf{i}} \mathbf{v_i}$, где $\lambda_{\mathbf{i}} \geqslant 0$, для $\mathbf{i} \in 1,2,...,m$. Коническая комбинация векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ для краткости обозначается $\mathbf{cone}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m})$ и называется **выпуклым конусом**, а вектора $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ называются **образующими** конуса.

Остовом конуса называется минимальный набор его образующих, т.е. только те вектора $\mathbf{v_i}$, которые нельзя выразить через другие образующие в виде конической комбинации.

Конус называется **заострённым**, если он не содержит подпространств (кроме точки $\mathbf{0}$).

Считаем $\mathbf{d}$-конусом в $\mathbf{E^d}$, конус с $\mathbf{d}$ линейно независимыми образующими $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}$ и с вершиной в точке $\mathbf{0}$. Для нас $\mathbf{d}$-конус удобен тем, что он всегда полиэдральный ($\mathbf{d}$-конус является заострённым) и его гиперплоскости легко определяются через нормали к любым $(\mathbf{d}\text{-}\mathbf{1})$ линейно независимым векторам его остова.

Для $\mathbf{d}$-конуса $\mathbf{C}$ в $\mathbf{E^d}$, имеющего остов из $\mathbf{d}$ линейно независимых векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}$, обозначим через $\mathbf{C^-} = \mathbf{cone}(-\mathbf{v_1}, -\mathbf{v_2}, \ldots, -\mathbf{v_d})$.

Конус называется **конечнопорождённым** векторами $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m})$, если он является конической комбинацией всех или некоторых векторов $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m})$ (это выпуклый конус). Конечнопорождённый конус в некоторых учебниках называют многогранным конусом, что не совсем корректно в случае конического базиса, который не имеет ни отделяющих, ни крайних гиперплоскостей (см. далее теорему 1 и следствие 2 из неё).

Конус называется **полиэдральным**, если он является пересечением конечного числа линейных замкнутых полупространств (т. е. не строгих неравенств), проходящих через $\mathbf{0}$, и содержащих не нулевые векторы.

Изолированную точку $\mathbf{0}$ (начало координат) мы не будем считать ни полиэдральным ни конечнопорождённым конусом (см. пункт **Пояснение** в доказательстве теоремы 2).

Если $\mathbf{G}$ гиперплоскость в $\mathbf{E^d}$ с нормалью $\mathbf{n}$, т. е. $\mathbf{G} = \{\mathbf{x} \backslash (\mathbf{xn} = \mathbf{0})\}$, то будем обозначать полупространство $\mathbf{G^+} = \{\mathbf{x} \backslash (\mathbf{xn} \geqslant \mathbf{0})\}$ и $\mathbf{G^-} = \{\mathbf{x} \backslash (\mathbf{xn} \leqslant \mathbf{0})\}$. Как обычно, в фигурных скобках указываем некоторые множества.

Размерность векторов $\{\mathbf{V}\}$ обозначается $\mathbf{dim}(\{\mathbf{V}\})$ и определяется как размерность минимального подпространства, содержащего вектора $\{\mathbf{V}\}$.

Символом $||\{\mathbf{V}\}||$ обозначается количество векторов $\{\mathbf{V}\}$.

Аббревиатура СЛН является сокращением слов Система Линейных Неравенств.

Далее изложим некоторые новые свойства векторов в многомерных векторных пространствах конечной размерности, которые нам необходимы для доказательства рёберной связности вершин политопов и полиэдров.

1. Конические базисы и их основные свойства

Определение 1. *Коническим базисом в* $\mathbf{E^d}$ *называется множество векторов* $\{\mathbf{V}\}=\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$*, такое, что любой вектор из* $\mathbf{E^d}$ *выражается через вектора* $\{\mathbf{V}\}$ *некой конической комбинацией (т.е. с неотрицательными коэффициентами).*

Это определение означает, что $\mathbf{cone}(\{\mathbf{V}\}) = \mathbf{E^d}$ и $\mathbf{dim}(\{\mathbf{V}\}) = \mathbf{d}$.

Лемма 1. *(О существовании конических базисов). В* $\mathbf{E^d}$ *существуют конические базисы.*

Доказательство. Пусть в $\mathbf{E^d}$ заданы $\mathbf{d}$ линейно независимых векторов $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ (с началом в точке $\mathbf{0}$), которые образуют $\mathbf{d}$-мерный полиэдральный конус $\mathbf{C}$ с образующими–остовом $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ и ровно $\mathbf{d}$ гипергранями. Пусть вектор $\mathbf{t}$ принадлежит $\mathbf{int}(\mathbf{C})$.

Тогда для любого вектора $\mathbf{z}$, не принадлежащего конусу $\mathbf{C}$ и $\mathbf{z} \neq \gamma\mathbf{t}$, где $\gamma < 0$, вектор $\mathbf{z}$ и $\mathbf{t}$ можно соединить отрезком $\mathbf{[z,\ t]}$ (ведь $\mathbf{E^d}$ тоже выпуклое множество), который пересечёт некоторую гипергрань конуса $\mathbf{C}$ в точке $\mathbf{z_1}$, принадлежащей отрезку $\mathbf{[z,\ t]}$.

Если $\mathbf{z_1}$ ещё не принадлежит выпуклому конусу $\mathbf{C}$, то на отрезке $\mathbf{[z,\ t]}$ можно найти точку $\mathbf{z_2}$, образованную пересечением некой другой гиперграни конуса $\mathbf{C}$, и которая находится ближе к точке $\mathbf{t}$, чем точка $\mathbf{z_1}$ (расстояния на отрезке определяются очень просто). Поскольку различных гиперграней у конуса $\mathbf{C}$ ровно $\mathbf{d}$, то мы, в конце концов, найдём точку $\mathbf{z_i}$, где $\mathbf{i} < \mathbf{d}$, которая принадлежит гиперграни конуса $\mathbf{C}$ и

$$\mathbf{z_i} = \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{d}} \beta_{\mathbf{i}}\mathbf{v_i},$$

где $\beta_{\mathbf{i}} \geqslant 0$. Тогда верно представление

$$\alpha\mathbf{z} + (\mathbf{1} - \alpha)\mathbf{t} = \mathbf{z_i} = \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{d}} \beta_{\mathbf{i}}\mathbf{v_i},$$

где $\beta_{\mathbf{i}} \geqslant 0$ и $\mathbf{1} > \alpha > \mathbf{0}$, т. е. $\alpha \neq 0$, т. к. $\mathbf{t} \in \mathbf{int}(\mathbf{C})$. Это означает, что вектор $\mathbf{z}$ можно представить в виде

$$\alpha\mathbf{z} = \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{d}} \beta_{\mathbf{i}}\mathbf{v_i} + (\mathbf{1} - \alpha)(-\mathbf{t}),$$

где $\mathbf{1} > \alpha > \mathbf{0}$, а это означает, что множество векторов $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}, (-\mathbf{t})\}$ по вышеприведённому определению является коническим базисом в $\mathbf{E^d}$. ■

Свойства классических базисов, определяющих размерность векторного пространства, существенным образом отличаются от свойств конических базисов. Ясно, что если к исходному коническому базису $\{\mathbf{V}\}$ добавить произвольное множество векторов, то получим новое множество — новый конический базис $\{\mathbf{V}^+\}$ с большим количеством векторов, чем у первоначального $\{\mathbf{V}\}$.

Поэтому конические базисы, в отличие от линейно независимых векторов, могут содержать любое количество векторов, но их число должно быть строго больше, чем размерность исходного пространства.

Такое свойство конических базисов вызывает затруднения при работе с ними, но некоторые трудности преодолимы и дают возможность получить важные результаты в теории линейных неравенств, которые без рассмотрения конических базисов не могли быть получены.

Теперь докажем основное свойство конических базисов.

Теорема 1. *(Об основном свойстве конических базисов). Множество векторов $\{\mathbf{V}\}$ ранга $\mathbf{d}$ в $\mathbf{E^d}$ является коническим базисом тогда и только тогда, когда любая гиперплоскость, проходящая через начало координат, не является отделяющей гиперплоскостью для всех векторов из $\{\mathbf{V}\}$.*

Доказательство. Необходимость: Рассмотрим в $\mathbf{E^d}$ любую гиперплоскость $\mathbf{G}$ (с замкнутыми полупространствами $\mathbf{G}^+$ и $\mathbf{G}^-$ и с нормалью $\mathbf{n_g}$), проходящую через начало координат. Такая гиперплоскость $\mathbf{G}$ не может быть отделяющей любого из своих двух полупространств $\mathbf{G}^+$ или $\mathbf{G}^-$ для всех векторов $\{\mathbf{V}\}$.

В самом деле, если какое-то полупространство ($\mathbf{G}^+$ или $\mathbf{G}^-$) является отделяющей гиперплоскостью для векторов $\{\mathbf{V}\}$, то в другом полупространстве гиперплоскости $\mathbf{G}$, были бы не нулевые вектора из $\mathbf{E^d}$ (например, одна из нормалей $\mathbf{n_g}$ или $(-\mathbf{n_g})$), которые нельзя выразить через вектора $\{\mathbf{V}\}$ с неотрицательными коэффициентами (т.е. в виде конической комбинации), что противоречит тому, что $\{\mathbf{V}\}$ является коническим базисом.

Отсюда следует, что для любой гиперплоскости $\mathbf{G}$, в полупространствах ($\mathbf{G}^+$ и $\mathbf{G}^-$) должны быть вектора из $\{\mathbf{V}\}$, которые строго отделяются гиперплоскостью $\mathbf{G}$.

Достаточность: Из векторов $\{\mathbf{V}\}$ выделим некоторый $\mathbf{d}$-конус $\mathbf{C} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d})$, что несложно сделать, выделив из матрицы векторов линейно независимые вектора, ведь $\mathbf{dim}(\{\mathrm{V}\}) = \mathbf{d}$.

Обозначим $\mathbf{T}=\{\mathrm{V}\}\backslash\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$, а $\mathbf{R=conv(\{T\})}$ — выпуклая оболочка векторов $\mathbf{T}$.

Рассмотрим $\mathbf{S} = (\mathbf{C}^-) \cap \mathbf{R}$. Если $\mathbf{S}$ не содержит внутренние вектора из $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}^-$, то выпуклые множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}^-$ можно отделить некой гиперплоскостью $\mathbf{G}$ (здесь мы опираемся на теоретико-множественную теорему об отделимости выпуклых множеств, см., например, [5]). При этом можно считать, что гиперплоскость $\mathbf{G}$ проходит через точку $\mathbf{0}$.

В самом деле, если $\mathbf{G}$ проходит через некоторую грань конуса $\mathbf{C}^-$ (но не содержит внутренних точек $\mathbf{C}^-$), то гиперплоскость $\mathbf{G}$ тоже проходит через $\mathbf{0}$, как и все грани $\mathbf{C}^-$.

Если же гиперплоскость $\mathbf{G}$ строго отделяет конус $\mathbf{C}^-$, пересекая конус $\mathbf{C}^+$, то гипергрань $\mathbf{G}$ можно параллельно сдвинуть в точку $\mathbf{0}$, при этом сдвинутая $\mathbf{G_0}$ будет отделять $\mathbf{C}^-$ и $\mathbf{R}$.

Действительно, если бы гиперплоскость $\mathbf{G_0}$ содержала внутренние точки конуса $\mathbf{C}^-$, то $\mathbf{G_0}$ обратно сдвинутая параллельно до гиперплоскости $\mathbf{G}$, продолжала бы пересекать конус $\mathbf{C}^-$ по внутренним точкам, т. к. конус $\mathbf{C}^-$ не ограничен.

Итак, мы можем считать отделяющую гиперплоскость $\mathbf{G}$, проходящей через начало координат. Хотя гиперплоскость $\mathbf{G}$ может содержать какие-то граничные точки $\mathbf{C}^-$ и $\mathbf{R}$, но по нашему предположению гиперплоскость $\mathbf{G}$ не содержит внутренние точки $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}^-$.

Допустим теперь, $\mathbf{R}$ лежит в полупространстве $\mathbf{C}^+$, тогда $\mathbf{C}^-$ лежит в полупространстве $\mathbf{G}^-$. А это означает, что $\mathbf{d}$-конус $\mathbf{C}$ будет лежать в полупространстве $\mathbf{G}^+$. Отсюда следует, что вектора $\mathbf{d}$-конуса $\mathbf{C} = \mathbf{cone}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d})$ и выпуклой оболочки $\mathbf{T}=\{\mathbf{V}\}\backslash\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ лежат в одном полупространстве $\mathbf{G}^+$. То есть все вектора $\mathbf{\{V\}}$ отделяются гиперплоскостью $\mathbf{G}^+$, а это противоречит условию теоремы.

Отсюда следует, что $\mathbf{S} = (\mathbf{C}^-) \cap \mathbf{R}$ содержит внутренние точки как конуса $\mathbf{C}^-$, так и выпуклой оболочки $\mathbf{R}$. Пусть вектор $\mathbf{w}$ является внутренней точкой $\mathbf{C}^-$ и $\mathbf{R}$. Тогда вектор $\mathbf{w}$ является выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{T}=\{\mathbf{V}\}\backslash\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ (частный случай конической комбинации) и одновременно $\mathbf{w}$ принадлежит $\mathbf{C}^-$.

Это означает, что множество векторов $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v2}, \ldots, \mathbf{v_d}, \mathbf{w}\}$, где вектор $\mathbf{w}$ является выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{\{V\}}$, будет коническим базисом по лемме 1 (о существовании конических базисов). ■

Следствие 1. *Если для множества векторов $\{\mathbf{V}\}$ ранга $\mathbf{d}$ можно найти хотя бы одну, проходящую через начало координат отделяющую гиперплоскость для векторов из $\{\mathbf{V}\}$, то это множество векторов $\{\mathbf{V}\}$ не является коническим базисом.*

Следствие 2. *Если множество векторов $\{\mathbf{V}\}$ ранга $\mathbf{d}$ является коническим базисом, то любая гиперплоскость, проходящая через начало координат (в том числе и крайние гиперплоскости, проходящие через $(\mathbf{d}-\mathbf{1})$ линейно независимых вектора из $\{\mathbf{V}\}$), не является отделяющей гиперплоскостью для векторов из $\{\mathbf{V}\}$. То есть в этом случае множество отделяющих (в том числе и крайних) гиперплоскостей для $\{\mathbf{V}\}$ будет пустым множеством.*

Теорема 2. *(О возможности построения полиэдрального конуса векторов). Для множества векторов $\{\mathbf{V}\}$ ранга $\mathbf{d}$ в $\mathbf{E^d}$ можно построить полиэдральный конус тогда и только тогда, когда множество векторов $\{\mathbf{V}\}$ не является коническим базисом.*

Доказательство. Необходимость: из теоремы-1 мы знаем, что для конических базисов нельзя построить отделяющую гиперплоскость, а значит и полиэдральный конус.

Достаточность: для множества векторов **{V}**, не являющихся коническим базисом, возможно построение полиэдрального конуса.

Создадим СЛН

$$v_j x \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где нормалями неравенств являются вектора из $\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$.

Мы будем рассматривать СЛН (1) как пару двойственных конусов. Известно, что СЛН (1) всегда совместна, т. к. имеет решением хотя бы точку **0**.

Но нас не устраивает случай, когда решением является только точка **0**, мы не считаем одну точку **0** полиэдральным конусом.

Пояснение. Здесь есть одна тонкость. Когда решением СЛН (1) является единственная точка **0**, то вектора из **{V}**, возможно, образуют конический базис (см. теорему 8.1 из [1]) и не могут иметь отделяющих гиперплоскостей (см. теорему 1 из данной статьи).

В особом случае, когда решения (1) образуют полиэдральный конус, содержащий не нулевые вектора, тогда для векторов **{V}** можно построить полиэдральный конус (см. далее доказательство этой теоремы).

Мы покажем, что решением СЛН (1) является полиэдральный конус, содержащий не нулевые векторы, в случае, если **{V}** не образуют конического базиса.

Поскольку вектора **{V}** не образуют конического базиса, то по основной теореме 1 о конических базисах, существует отделяющая гиперплоскость **G** с нормалью **n**, проходящая через точку **0** и отделяющая все вектора **{V}**.

Так как вектора из **{V}** лежат в другом полупространстве (в полупространстве $\mathbf{G}^-$), чем нормаль **n**, то нормаль этой отделяющей гиперплоскости **n** будет решением СЛН (1).

Более того, эта нормаль **n** с любым неотрицательным коэффициентом тоже является решением (1), и тогда система (1) имеет неограниченные решения — следовательно, существует выпуклый полиэдральный конус **C** решений созданной СЛН (1), ведь конус **C** является пересечением полупространств из СЛН (1). Размерность конуса **C** может быть от **1** до **d**.

Кроме того, этот выпуклый полиэдральный конус решений **C** является заострённым. В самом деле, если $\mathbf{C_0}$ является не нулевым подпространством **C**, то множество векторов **{V}** должно лежать в грани, ортогональной $\mathbf{C_0}$, имеющей размерность менее **d**, т. е. **{V}** должно иметь размерность менее **d**, что противоречит условию теоремы.

Если существует выпуклый полиэдральный заострённый конус решений **C**, построенной СЛН (1), то существует и его двойственной выпуклый конус $\mathbf{C}^*$ — коническая оболочка нормалей СЛН (1), т. е. заданных векторов **{V}**. Заострённый полиэдральный выпуклый конус **C** имеет единственный остов, т. е. вектора-ребра полиэдрального конуса **C**, коническими комбинациями которых образуется весь конус **C**.

Каждое ребро остова конуса **C** является нормалью крайней гиперплоскости выпуклого конуса $\mathbf{C}^*$, т. е. у конуса $\mathbf{C}^*$ существуют крайние гиперплоскости, которые проходят через (**d-1**) линейно независимых векторов из **{V}**.

Отметим также, что даже если конус решений СЛН (1), т.е конус $\mathbf{C}$ является всего лишь одним лучом $\mathbf{r}$, которое также будет и нормалью единственной гиперплоскости $\mathbf{G_r}$ конуса $\mathbf{C}^*$, даже в этом случае гиперплоскость $\mathbf{G_r}$, соответствующая нормали $\mathbf{r}$, содержит $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых векторов из $\mathbf{\{V\}}$, которые определяют гиперплоскость $\mathbf{G_r}$.

Только теперь можно просто перебирать наборы из $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых векторов из $\mathbf{\{V\}}$ и найти все крайние гиперплоскости $\mathbf{C}^*$ (которые существуют, как это показано выше), но с одним уточнением. Выбранное множество из $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых векторов, которое определяет крайнюю гиперплоскость $\mathbf{G_f}$, может содержать в гиперплоскости $\mathbf{G_f}$ более чем $\mathbf{(d\text{-}1)}$ вектор из $\mathbf{\{V\}}$, и эти вектора тоже могут участвовать в образовании крайней гиперплоскости $\mathbf{G_f}$.

Это означает, что может быть несколько различных наборов из $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых векторов, которые будут определять одну и ту же крайнюю гиперплоскость $\mathbf{G_f}$.

Но нормаль $\mathbf{n_f}$ как ребро остова конуса $\mathbf{C}$ у этих крайних гиперплоскостей будет единственной, и именно нормаль $\mathbf{n_f}$ позволит нам исключать не совпадающие множества из $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых векторов, которые создают совпадающие крайние гиперплоскости с нормалью $\mathbf{n_f}$. ■

Замечание. Условие $\mathbf{dim}(\{\mathbf{V}\}) = \mathbf{d}$ важно. Если $\mathbf{dim}(\{\mathbf{V}\}) = \mathbf{k}<\mathbf{d}$ и $\|\{\mathbf{V}\}\|>\mathbf{k}$, то вектора $\mathbf{\{V\}}$ в подпространстве $\mathbf{E^k}$ могут образовывать конический базис и не иметь отделяющих гиперплоскостей.

Теперь возникает естественный вопрос, как определить, что данное множество векторов $\mathbf{\{V\}}$ является коническим базисом или нет (теорема 1 для этого не пригодна)?

Теорема 3. *(О распознавании конического базиса). Если для множества векторов $\{\mathbf{V}\}$ ранга $\mathbf{d}$ в $\mathbf{E^d}$ любой набор из $(\mathbf{d}-\mathbf{1})$ линейно независимых векторов из $\{\mathbf{V}\}$ определяет гиперплоскость, которая не является отделяющей для векторов из $\{\mathbf{V}\}$, то множество векторов $\{\mathbf{V}\}$ не является коническим базисом.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть множество векторов $\mathbf{\{V\}}$ не является коническим базисом. Тогда по основной теореме 1 о конических базисах существует гиперплоскость, отделяющая вектора $\mathbf{\{V\}}$.

Но тогда по теореме 2 о возможности построения полиэдрального конуса векторов существует и крайняя гиперплоскость, проходящая через $\mathbf{(d\text{-}1)}$ линейно независимых вектора для множества векторов $\mathbf{\{V\}}$. Это противоречие доказывает теорему. ■

Замечание. Конечно, теорему 3 можно было сформулировать в стиле «...тогда и только тогда, когда ...». но для нас было важно ответить на поставленный вопрос и при этом усилить теорему 1 так, чтобы можно было конечным перебором определить, является ли заданное множество векторов коническим базисом или нет.

2. Реберная связность вершин политопа и полиэдра

Теорема 4. *совместная СЛН ранга* $\mathbf{d}$ *создаёт в* $\mathbf{E^d}$ *политоп (многогранник или ограниченный полиэдр) тогда и только тогда, когда нормали этой СЛН образуют конический базис.*

Доказательство. Эта теорема доказана в [1], теорема 8.1, мы её переформулировали в терминах конических базисов для удобства использования в этой статье. ■

Для дальнейшего изложения нам необходимы некоторые новые обозначения и определения: Рассмотрим СЛН в $\mathbf{E^d}$, где $\mathbf{x^T} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_d})$

$$n_j x \leqslant h_j \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где $\mathbf{n_j}$ – единичная нормаль гиперплоскости, определяемой неравенством с номером j, а $\mathbf{h_j}$ – опорное число неравенства j. Если СЛН (2) совместна, то совокупность решений (2) обозначим через $\mathbf{P}$, для определённости считаем его $\mathbf{d}$-мерным, это означает, что неравенства (гиперграни) каждой вершины $\mathbf{v}$ полиэдра $\mathbf{P}$, проходящие через эту вершину $\mathbf{v}$, образуют $\mathbf{d}$-мерный заострённый конус $\mathbf{C_v}$, т. к. конус содержит весь $\mathbf{d}$-мерный $\mathbf{P}$ и имеет вершину $\mathbf{v}$.

Множество $\mathbf{P}$ называется **политопом**, если он ограниченный, и **полиэдром**, если он неограниченный.

Политоп/полиэдр $\mathbf{P}$ имеет грани размерности от $\mathbf{0}$ (пересечение $\mathbf{d}$ линейно независимых неравенств) до **(d-1)**.

Грани $\mathbf{P}$ размерности $\mathbf{0}$ называются **вершинами**, а грани размерности $\mathbf{1}$ называются **рёбрами**.

Две вершины $\mathbf{P}$ называются **смежными**, если они соединены одним ребром.

Две вершины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ называются **рёберно связными**, если существует последовательность смежных вершин, соединяющих вершины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

Через $\mathbf{N^d}$ обозначим пространство для нормалей, которое абсолютно идентично $\mathbf{E^d}$, но где все нормали собраны воедино и имеют начало в точке $\mathbf{0}$ (это облегчит понимание доказательства теорем о рёберной связности вершин полиэдров).

Через $\mathbf{C_v^*}$ обозначим конус, образованный нормалями неравенств (2), проходящих через вершину $\mathbf{v}$, и будем его называть **конусом нормалей вершины v**, т. к. он находится в пространстве $\mathbf{N^d}$. Конус $\mathbf{C_v^*}$ тоже будет заострённым и $\mathbf{d}$-мерным, ведь он является двойственным к заострённому $\mathbf{d}$-мерному конусу $\mathbf{C_v}$ в пространстве $\mathbf{E^d}$ в вершине $\mathbf{v}$.

Через $\mathbf{P}^*$ обозначим совокупность всех нормалей $\mathbf{d}$-мерного полиэдра $\mathbf{P}$ в $\mathbf{N^d}$, определяемого неравенствами (2).

А для политопа $\mathbf{P}$, как мы знаем из теоремы 4, $\mathbf{P}^*$ является коническим базисом в $\mathbf{N^d}$.

Далее мы считаем, что СЛН (2) не имеет избыточных неравенств. Исключение избыточных неравенств можно осуществить для СЛН (2), например, по алгоритму Н.В. Черниковой из [4]. Кроме того, считаем, что политоп $\mathbf{P}$ имеет хотя бы две вершины (т. е. мы не рассматриваем однородные СЛН, которые определяют конуса только с одной вершиной или когда решением СЛН является одна точка).

Лемма 2. $\mathbf{P}^*$ *является выпуклым полиэдральным конусом для любого полиэдра.*

Доказательство. Из теоремы 4 мы знаем, что только в случае политопа нормали неравенств образуют конический базис. Значит, в случае полиэдра, у нас нет конического базиса. Тогда по теореме 2 для нормалей полиэдра, т. е. для $\mathbf{P}^*$, можно построить выпуклый полиэдральный конус. ■

Теорема 5. *(О свойствах двойственных конусов различных вершин политопа и полиэдра). Пусть* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ *две различные вершины политопа или полиэдра* $\mathbf{P}$. *Тогда* $\mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{v}) \cap \mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{w}) = \varnothing$. *Для смежных вершин* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ *будет* $\mathbf{dim}((\mathbf{C}^*_\mathbf{v}) \cap (\mathbf{C}^*_\mathbf{w})) = (\mathbf{d}-\mathbf{1})$.

Доказательство. Сместим двойственные конуса $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$ и $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$ из начала координат пространства $\mathbf{N^d}$ в соответствующие вершины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ политопа или полиэдра $\mathbf{P}$ в основном пространстве $\mathbf{E^d}$. Отрезок **[v-w]** целиком лежит в $\mathbf{P}$ (свойство выпуклости $\mathbf{P}$).

Поэтому гиперплоскость $\mathbf{G_v}$ с нормалью **[w-v]**, проходящая через вершину $\mathbf{v}$, отделяет $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$, смещённую в точку $\mathbf{v}$. Это обусловлено тем, что нормаль **[w-v]** лежит в двойственном конусе для $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$ в основном пространстве $\mathbf{E^d}$. Так же гиперплоскость $\mathbf{G_w}$ с нормалью **[v-w]**, проходящая через вершину $\mathbf{w}$, отделяет $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$, смещённую в точку $\mathbf{w}$. И в этом случае нормаль **[v-w]** лежит в двойственном конусе для $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$ в основном пространстве $\mathbf{E^d}$.

Поскольку гиперплоскости $\mathbf{G_v}$ и $\mathbf{G_w}$ имеют противоположно направленные нормали, то гиперплоскости $\mathbf{G_v}$ и $\mathbf{G_w}$, смещённые в точку $\mathbf{0}$ в $\mathbf{N^d}$, совпадут, и эта совмещённая в $\mathbf{0}$ гиперплоскость будет строго отделять открытые конуса $\mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{v})$ и $\mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{w})$ в пространстве $\mathbf{N^d}$.

Если же вершины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ являются смежными для политопа или полиэдра, т. е. соединены одним конечным ребром $\mathbf{r}$ политопа или полиэдра $\mathbf{P}$, то пересечение $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$ и $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$ в пространстве $\mathbf{N^d}$ будут содержать ровно **(d-1)** линейно независимые нормали, определяющие это конечное ребро $\mathbf{r}$. Ребро определяется ровно **(d-1)** линейно независимой нормалью, т. к. нет избыточных неравенств (т. е. в этом случае соответствие взаимно однозначное).

Эта теорема верна как для политопов, так и для полиэдров. ■

Из теоремы 4, леммы 2 и теоремы 5 следует важный вывод: $\mathbf{P}^*$ любого политопа или полиэдра в $\mathbf{N^d}$ имеет плотно упакованную (без пропусков и «щелей») «сотовую» структуру конусов нормалей вершин в пространстве $\mathbf{N^d}$.

Внутренние части конусов нормалей $\mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{v})$ и $\mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{w})$ не смежных или смежных вершин $\mathbf{P}^*$ не пересекаются, и мы считаем их соответствующими вершинам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ в основном пространстве $\mathbf{E^d}$, и это соответствие взаимно однозначное: вершина $\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{v})$; вершина $\mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{int}(\mathbf{C}^*_\mathbf{w})$.

Но конуса нормалей вершин у смежных вершин $\mathbf{P}^*$ плотно соприкасаются друг с другом своими гипергранями, определяемыми (**d-1**) линейно независимыми нормалями конечного ребра, соединяющего эти смежные вершины политопа **P** (если нет избыточных неравенств, то это соответствие тоже взаимно однозначное).

Именно такое соответствие и такая сотовая структура $\mathbf{P}^*$ позволяет нам получить крайне важный и чисто геометрический результат о рёберной связности любых вершин политопа или полиэдра **P**.

Теорема 6. *Любые две различные вершины политопа являются рёберно связными.*

Доказательство. Пусть заданы две не смежные **v** и **w** вершины политопа **P**. Тогда по теореме 5 внутренние части конусов вершин $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$ и $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$ не пересекаются, хотя сами конуса этих двух вершин могут иметь строго менее **d-1** общих нормалей, т. к. вершины **v** и **w** не являются смежными.

Тогда строго внутри конусов вершин $\mathbf{C}^*_\mathbf{v}$ и $\mathbf{C}^*_\mathbf{w}$ можно найти не нулевые векторы **r** и **t** соответственно так, чтобы $\mathbf{r} \neq \lambda\mathbf{t}$, где $\lambda < \mathbf{0}$ (т. е. отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ не должен проходить через начало координат, т. е. через точку **0**).

В теореме 5 мы установили плотную сотовую структуру конического базиса $\mathbf{P}^*$ пространства $\mathbf{N^d}$. Кроме того, установили соответствие между вершинами и рёбрами заданного полиэдра **P** с соответствующими частями $\mathbf{P}^*$.

Это позволяет нам утверждать, что отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ будет пересекать конуса вершин без возвратов (т. е. нет циклов в терминах теории графов) и повторений конусов вершин, т. к. построенный отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ является отрезком прямой.

Ясно что, когда отрезок прямой $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ какими-то своими точками находится внутри некоторого конуса вершины $\mathrm{s}(\mathbf{P}^*)$, т. е. внутри $\mathbf{C}^*_\mathbf{s}$, то он «определяет» этими точками соответствующую вершину **s(P)** исходного политопа **P**. А когда отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ пересекает гипергрань $\mathbf{G_s}$ двойственной вершины $\mathbf{C}^*_\mathbf{s}$, то этот отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ определяет на исходном полиэдре **P** ребро (т. е. такое существует), исходящее из вершины **s(P)**.

Пусть отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ будет пересекать не гипергрань $\mathbf{C}^*_\mathbf{s}$, которая должна иметь размерность (**d-1**), а некоторую грань $\mathbf{K_s}$ меньшей размерности у конуса $\mathbf{C}^*_\mathbf{s}$ текущей вершины $\mathrm{s}(\mathbf{P}^*)$. Тогда можно брать любую гипергрань $\mathbf{C}^*_\mathbf{k}$, определяемую (**d-1**) линейно независимыми нормалями, которая содержит эту грань $\mathbf{K_s}$ (т. е. и в этом случае существует ребро **P**, по которому можно продолжить движение).

В самом деле, поскольку отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ пересекает грань $\mathbf{K_s}$, то отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ будет пересекать и любую гипергрань $\mathbf{C}^*_\mathbf{k}$, содержащую грань $\mathbf{K_s}$. А это означает, что любая гипергрань $\mathbf{C}^*_\mathbf{k}$, содержащая грань $\mathbf{K_s}$, не мешает дальнейшему движению вдоль отрезка $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ к целевой вершине **w**, т. е. гипергрань $\mathbf{C}^*_\mathbf{k}$ никоим образом не «экранирует» движение к вершине **w**.

Таким образом, построенный в коническом базисе $\mathbf{P}^*$ отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$ генерирует на исходном политопе **P** некоторую простую цепь (в терминах теории графов) рёберно связанных вершин, соединяющих выбранные вершины **v** и **w**.

При этом простая цепь, сгенерированная на политопе **P**, скорее всего, будет зигзагообразной. ■

Эта теорема важна для обоснования симплекс-метода, который был предложен Д.Б. Данцигом в 1949 г. для решения задач ЛП (линейного программирования). Однако предложенный Д.Б. Данцигом алгоритм, был чисто эвристическим (т. к. не было ещё доказательства рёберной связности вершин политопов и полиэдров).

Но в 1961 г. в теории графов появляется фундаментальная теорема Балинского («**d**-многогранник является **d**-связным»), хотя только для многогранников (т. е. только для политопов, т.к. для полиэдров теорема Балинского не применима).

Однако теорема Балинского в своём доказательстве опиралась на довольно сложную теорему Уитни из теории графов (доказательство теорема Уитни можно посмотреть в [2]), которая в многочисленных простых учебниках по теории графов вообще не рассматривается.

Поэтому теорема Балинского обычно не использовалась при преподавании теории ЛП. При этом без каких-либо внятных обоснований в теории ЛП требовалась, чтобы все ресурсы задачи ЛП были ограниченными, т. к. тогда область допустимых решений будет многогранником (ограниченным полиэдром) и будет обеспечена рёберная связность вершин многогранника по теореме Балинского.

Теперь в преподавании теории ЛП можно приводить технически более простое и «наглядное» геометрическое доказательство рёберной связности вершин политопа (многогранника) для обоснования симплекс-метода ЛП без обращения к теории графов. В этом заключена ещё одна необходимость введения конических базисов.

Теорема 7. *Любые две различные вершины полиэдра являются рёберно связными.*

Доказательство. По лемме 2, в случае полиэдра, мы имеем в качестве $\mathbf{P}^*$ выпуклый полиэдральный конус. Это означает, что отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$, выбранный строго внутри для конусов вершин **v** и **w**, будет лежать строго внутри выпуклого полиэдрального конуса $\mathbf{P}^*$ и не может проходить через начало координат, т. е. через точку **0**. Поэтому отрезок $[\mathbf{r},\ \mathbf{t}]$, как и в теореме 6, будет генерировать на полиэдре **P** некоторый путь, состоящий из вершин и ребер **P** (возможно, зигзагообразный), который соединяет вершины **v** и **w**. ■

Эта важная теорема, которая опирается на **лемму 2** и **теорему 6**, долго не поддавалась доказательству.

Теорема 7 тоже имеет большое значение в теории ЛП (например, для стандартных задач ЛП и некоторых двойственных задач ЛП, где нет ограничений на значения некоторых ресурсов).

Следствие 3. *Любые две различные вершины как политопа, так и полиэдра являются рёберно связными.*

Пояснение. Это следствие 3 является объединением результатов двух теорем: теоремы 6 и теоремы 7, которые несколько различны по доказательству, но сходны по смыслу.

Литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 304 с.
2. Зыков А.А. Теория конечных графов. Т.1. СОАН Новосибирск. Наука, 1969. 543 с.
3. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М. : Мир, 1991. 360 с.
4. Черников С.Н. Линейные неравенства. М. : Наука, 1968. 488 с.
5. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука. Гл .ред. физ.-мат. лит., 1988. 335 с.

EDGE CONNECTIVITY OF POLYHEDRA VERTICES

T.K. Rustjumov
Mathematician, Pensioner, e-mail: rtk777@mail.ru
S.T. Rustjumova
Mathematician, Director of Center, e-mail: svrustjumova@mail.ru

Center Mathematical Teaching

Abstract. At the beginning of the article the authors show unusual and still unknown property of vectors by a concrete example in the 3-dimensional space. The concept of "conical basis" is introduced upon which new properties of vector space are proved for vector spaces of any finite dimension. The concept of the conical base and some other new ideas, allow us to prove the connection rib vertex polyhedra.

Keywords: vector space, vector, cone, polyhedral cone, finitely generated cone, polytope, polyhedra, inequality.

Дата поступления в редакцию: 24.08.2017