*Математические структуры и моделирование*
*2017. № 3(43). С. 12–15*

УДК 512.57
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.3.12-15

# ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

**А.Н. Кабанов**
к.ф.-м.н., e-mail: m01kab@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

**Аннотация.** Получено описание центрального ряда группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница над произвольным полем.

**Ключевые слова:** алгебра Лейбница, унитреугольный автоморфизм, гиперцентр.

В статье автора [1] описывалось строение гиперцентральной серии подгруппы унитреугольных автоморфизмов, выделяемой в группе всех автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли. В работах автора [2, 3] описывалось строение гиперцентральной серии аналогичной подгруппы свободной алгебры Ли.

Ж.Л. Лоде ввёл понятие алгебры Лейбница [4] как обобщение понятия алгебры Ли. Теория алгебр Лейбница активно развивается, и многие результаты из теории алгебр Ли переносятся на алгебры Лейбница.

В данной работе представлено частичное описание центральной серии группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница.

Напомним, что неассоциативная алгебра $L$ над полем $F$ с билинейным произведением $[\cdot,\cdot]$ называется (правой) алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется (правое) тождество Лейбница:

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y].$$

Или, что то же самое,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Отсюда видно, что $[x, [y, y]] = 0$.

Кроме того, видно, что введение свойства антикоммутативности превращает тождество Лейбница в тождество Якоби, а алгебру Лейбница — в алгебру Ли. Поэтому алгебру Лейбница часто называют «некоммутативным» обобщением алгебры Ли.

Из тождества Лейбница также следует, что любой элемент алгебры $L$ можно представить как линейную комбинацию элементов вида $[[[[a, b], c], d], ...]$, поэтому для краткой записи будем опускать скобки, положив

$$[[a, b], c] = abc.$$

Более того, примем записи

$$[[a, b], b] = ab^2, [[[a, b], b], b] = ab^3 \text{ и т. п.}$$

Пусть $L_n$ — свободная алгебра Лейбница над полем $F$ с множеством свободных порождающих $X_n = x_1, ..., x_n$.

Выделим в группе $AutL_n$ всех автоморфизмов алгебры $L_n$ подгруппу $U_n$, порождённую автоморфизмами вида:

$$\tau_i(y_i): \quad \begin{cases} x_i \to x_i + y_i, \\ x_j \to x_j, \ j \neq i, \end{cases}$$

где $y_i$ принадлежит подалгебре, порождённой $x_{i+1}, ..., x_n$. Такая подгруппа называется группой унитреугольных автоморфизмов алгебры $L_n$.

Для краткости будем записывать произвольный автоморфизм $\varphi$ свободной алгебры $L_n$ с множеством свободных порождающих $X_n$ как $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$.

Тогда произвольное отображение вида:

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n), ..., x_i + f_i(x_{i+1}, ..., x_n), ..., x_n), \tag{1}$$

где для любого $i$ многочлен $f_i(x_{i+1}, ..., x_n) \in L_n$ определяет автоморфизм из $U_n$, и группа $U_n$ состоит из всех таких автоморфизмов.

Выделим в группе $U_n$ следующие подгруппы $Z_\alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant \omega)$, состоящие из автоморфизмов вида $(x_1 + f_1(x_{n-1}, x_n), x_2, ..., x_n)$, причём в одночленах многочлена $f_1(x_{n-1}, x_n)$ элемент $x_{n-1}$ встречается не более чем $\alpha - 1$ раз.

Очевидно, что $Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha+1}$.

**Теорема 1.** *Подгруппа $Z_1$ является центром группы $U_n$.*

*Доказательство.* Возьмём произвольные автоморфизмы $\varphi \in Z_1$ и $\psi \in U_n$. Согласно описанию группы $Z_1$, автоморфизм $\varphi$ имеет вид

$$\varphi = (x_1 + g_1(x_n), x_2, ..., x_n),$$

где $g_1(x_n) = \lambda_1 x_n + \lambda_2 x_n^2 + ... + \lambda_k x_n^k + ...$

Пусть $\psi$ имеет вид (1). Вычислим $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Имеем

$$\varphi\psi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n) + g_1(x_n), x_2 + f_2(x_3, ..., x_n), ..., x_n).$$

Далее

$$\psi\varphi = (x_1 + g_1(x_n) + f_1(x_2, ..., x_n), x_2 + f_2(x_3, ..., x_n), ..., x_n).$$

Убеждаемся, что эти композиции равны. Это по определению означает, что $\varphi \in Z(U_n)$.

Теперь предположим, что $\varphi = (x_1 + f_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + f_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in Z(U_n)$. Возьмём автоморфизм $\psi = (x_1 + x_i, x_2, ..., x_n)$. Тогда

$$\varphi\psi = (x_1 + x_i + f_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + f_i, x_{i+1}, ..., x_n),$$

$$\psi\varphi = (x_1 + f_1 + x_i + f_i, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + f_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Таким образом, поскольку $\varphi\psi = \psi\varphi$, следовательно, $f_i = 0$.

Пусть теперь $\varphi = (x_1 + f_1(x_i, x_n), x_2, ..., x_n) \in Z_1$. Возьмём автоморфизм $\psi = (x_1, ..., x_i + x_n, ..., x_n)$. Тогда

$$\varphi\psi = (x_1 + f_1(x_i + x_n, x_n), x_2, ..., x_i + x_n, ..., x_n),$$

$$\psi\varphi = (x_1 + f_1(x_i, x_n), x_2, ..., x_i + x_n, ..., x_n).$$

Таким образом, $f_1(x_i + x_n, x_n) = f_1(x_i, x_n)$ или $f_1(x_i + x_n, x_n) - f_1(x_i, x_n) = 0$. Но в общем случае эта разность содержит несократимые одночлены. Следовательно, $f_1(x_i, x_n) = f_1(x_n)$. ■

**Теорема 2.** *Подгруппы $Z_\alpha$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$) составляют центральный ряд группы $U_n$.*

*Доказательство.* Напомним, что в центральном ряде $Z_k(U_n)/Z_{k-1}(U_n) = Z(U_n/Z_{k-1})$.

Допустим, что для некоторого $1 \leqslant \alpha < \omega$ множества $Z_1 \subseteq ... \subseteq Z_{\alpha-1}$ являются частью центрального ряда. Пусть $\varphi = (x_1 + g_1(x_{n-1}, x_n), x_2, ..., x_n) \in Z_\alpha$, а $\psi$ — произвольный унитреугольный автоморфизм вида (1).

Составляя их композиции, видим, что

$$\varphi\psi = (x_1 + f_1 + g_1(x_{n-1} + f_n, x_n), x_2 + f_2, ..., x_n),$$

$$\psi\varphi = (x_1 + g_1(x_{n-1}, x_n) + f_1, x_2 + f_2, ..., x_n).$$

Многочлен $f_n = f_n(x_n)$ состоит из одночленов вида $x_n^p$. Значит, в многочлене $g_1(x_{n-1} + f_n, x_n)$ по сравнению с $g_1(x_{n-1}, x_n)$ появляются одночлены, в которых переменная $x_{n-1}$ встречается меньшее число раз. Из вида $\varphi$ следует, что одночлены в $g_1(x_{n-1} + f_n, x_n)$ либо совпадают с одночленами в $g_1(x_{n-1}, x_n)$, либо содержат переменную $x_{n-1}$ не более чем $\alpha - 2$ раз. Следовательно, в $U_n/Z_{\alpha-1}$ композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ совпадают.

Теперь докажем, что других автоморфизмов в $Z_\alpha$ нет. Проведём рассуждения, аналогичные доказательству предыдущей теоремы.

С помощью автоморфизма $\psi = (x_1 + x_i, x_2, ..., x_n)$ можно доказать, что в автоморфизме $\varphi$ многочлены $f_i = 0$ для любого $i \geqslant 2$.

С помощью автоморфизма $\psi = (x_1, ..., x_i + x_n, ..., x_n)$ можно доказать, что в автоморфизме $\varphi$ многочлен $f_1$ не содержит переменных $x_i$ для $i \leqslant n - 2$.

А рассуждения, приведённые в данном доказательстве выше, показывают, что при наличии в $f_1$ несократимого одночлена с $\alpha$ или более включениями переменной $x_{n-1}$ многочлен $g_1(x_{n-1}+f_n, x_n)$ по сравнению с $g_1(x_{n-1}, x_n)$ в общем случае будет содержать одночлены, не зануляющиеся в $U_n/Z_{\alpha-1}$.

Таким образом, множество $Z_\alpha$ также входит в центральный ряд при условии, что туда входит $Z_{\alpha-1} \subseteq Z_\alpha$.

Так как для $Z_1$ утверждение уже доказано, по индукции получаем то, что и требовалось доказать. ■

## Литература

1. Кабанов А.Н. Гиперцентральная структура группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Сиб. мат. ж. 2009. Т. 50, № 2. С. 329–333.
2. Кабанов А.Н. Центр группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Ли // Математические структуры и моделирование. 2014. № 3 (31). С. 57–61.
3. Кабанов А.Н. Верхний центральный ряд группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Ли // Математическое и компьютерное моделирование: материалы III Международной научной конференции (Омск, 12 ноября 2015 г.). 2015. С. 100–102.
4. Loday J.-L. Une version non commutative des algebres de Lie: Les algebres de Leibniz // Enseigh. Math. 1993. V. 39. N. 3–4. P. 269–293.

## CENTER SERIES OF THE GROUP OF UNITRIANGULAR AUTOMORPHISMS OF A FREE LEIBNIZ ALGEBRA

**A.N. Kabanov**
Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: m01kab@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

**Abstract.** The center series of the group of unitriangular automorphisms of a free Leibniz algebra over an arbitrary field is described.

**Keywords:** Leibniz algebra, unitriangular automorphism, hypercenter.

*Дата поступления в редакцию: 30.08.2017*