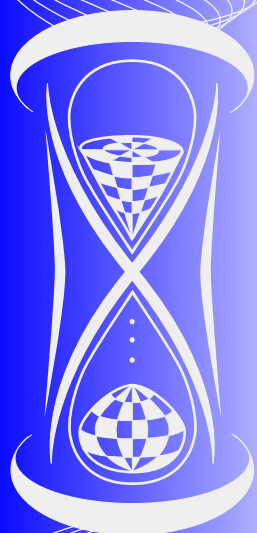


ISSN 2222-8772

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ



№ 2(42)
2017

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 2(42)

Омск
2017

Математические структуры и моделирование. — Омск : Омский государственный университет, 2017. — № 2(42). — 145 с.

ISSN 2222-8772 (print)

ISSN 2222-8799 (online)

Редакционная коллегия

А. К. Гуц	главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
Д. Н. Лавров	ответственный за выпуск редактор, зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
Н. Ф. Богаченко	технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
С. В. Белим	д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой информационной безопасности, проректор по научной работе, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
А. Ю. Веснин	д.ф.-м.н., профессор Новосибирского государственного университета, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией прикладного анализа, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.
В. П. Голубятников	доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
С. И. Горлов	доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
А. Г. Гринь	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
В. А. Еровенко	доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь.
B. Zilber	Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
А. Н. Кабанов	канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского.
П. А. Корчагин	доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ).
V. Kreinovich	Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
A. A. Fedorenko	Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
A. Jadczyk	Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-57908 от 28 апреля 2014 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Россия, Омская обл., г. Омск, пр. Мира д. 55А.

Дата выхода в свет: 30.06.2017.

Тираж 100 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- И.П. Бесценный. *О редукции модальностей в деонтических исчислениях* 5
- В.В. Варламов. *Квантование массы и группа Лоренца* 11
- В.А. Шапцев. *Введение зависимости в схему испытаний Бернулли* 29
- V.N. Stepanov. *The Method of Spherical Harmonics for Integral Transforms on a Sphere* 36

Прикладная математика и моделирование

- С.В. Белим, Т.Б. Смирнова, А.Н. Мироненко. *Применение метода построения ассоциативных правил к анализу деятельности общественных организаций* 49
- В.П. Голубятников. *Вопросы существования устойчивого цикла в одной модели молекулярного репрессилатора* 59
- Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Равновесная динамика лесных экосистем с учётом взаимосвязи «растительность-почва»* 68
- В.А. Шовин, В.В. Гольяпин. *Латентный анализ на базе метода штрафных функций для многомерных бинарных показателей* 80
- В.А. Шовин. *FRiS-компактность групп пациентов с артериальной гипертензией* 88
- Н.С. Новаковский. *Аналитическое и численное представление звуковых характеристик обобщённой центрированной волны* 94
- Д.Н. Лавров, А.А. Лаптев, М.А. Мамонтова. *Идентификация параметрической модели изменения численности зачисленных абитуриентов по малой выборке* 105
- O. Kosheleva, V. Kreinovich. *What is the Best Way to Add Large Number of Integers: Number-by-Number as Computers Do or Lowest-Digits-Than-Next-Digits-Etc as we Humans Do?* 115

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



Компьютерные науки

А.А. Сеньковская, И.И. Фураева. *Моделирование и оптимизация процесса распределения человеческих ресурсов и аудиторного фонда вуза на основе анализа учебных планов*.....119

G. Muela, C. Servin, V. Kreinovich. *How to Make Machine Learning Robust Against Adversarial Inputs*.....127

Информационная безопасность

Д.М. Бречка, А.А. Литвиненко. *Разработка системы мандатного управления доступом для операционных систем семейства Windows*.....131

Страничка памяти

Колоколов Александр Александрович141

О РЕДУКЦИИ МОДАЛЬНОСТЕЙ В ДЕОНТИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ

И.П. Бесценный

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: ibests@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Рассматриваются формальные теории деонтической логики, основанные на исчислении высказываний генценовского типа. Анализируются синтаксические и семантические различия между алетическими и деонтическими исчислениями в аспекте редукции последовательностей идущих подряд модальных знаков.

Ключевые слова: модальная логика, деонтические исчисления, семантика Крипке.

В данной работе рассматриваются формальные теории, основанные на исчислении высказываний генценовского типа ИС [1, с. 11–17]. Будем использовать с сохранением нумерации из [1, с. 12–13] те же основные правила вывода, а также следующие допустимые правила:

$$\text{Т. } \frac{\Gamma_1 \vdash \Phi; \Gamma_2, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Psi};$$

$$9\text{а. } \frac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\Phi};$$

$$9\text{б. } \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}.$$

Формулы модальных исчислений определяются, как в ИС, с добавлением фразы

- Если Φ — формула, то $\Box\Phi$, $\Diamond\Phi$ — тоже формулы.

При этом полагаем по определению $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$.

Добавляя в ИС схему аксиом

$$\text{А2. } \Box(\Phi \rightarrow \Psi) \vdash \Box\Phi \rightarrow \Box\Psi$$

и правило Гёделя

$$\text{Г. } \frac{\vdash \Phi}{\vdash \Box\Phi},$$

получаем минимальное модальное исчисление I, которое служит основой как для алетических, так и для деонтических модальных исчислений.

Нетрудно убедиться, что в I допустимы правила вывода

$$B. \frac{\vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Box \Phi \rightarrow \Box \Psi};$$

$$BB. \frac{\Phi \vdash \Psi}{\Box \Phi \vdash \Box \Psi};$$

$$B\Box a. \frac{\Phi \vdash \Psi}{\Diamond \Phi \vdash \Diamond \Psi}.$$

В алетических модальных исчислениях формулы $\Box A$, $\Diamond A$ (где A — пропозициональная переменная) выражают степень соответствия объективным закономерностям и имеют содержательный смысл «необходимо истинно A » и «возможно истинно A » соответственно.

В деонтических модальных исчислениях они выражают степень соответствия моральным и этическим нормам и правилам, поэтому их содержательный смысл будет « A обязательно» и « A разрешено» соответственно.

Субъективный характер норм и правил, которые устанавливаются в обществе, можно синтаксически подчеркнуть различием в аксиомах для алетических и деонтических исчислений. Алетическое исчисление T получается из I добавлением схемы аксиом

$$A1. \Box \Phi \vdash \Phi.$$

Деонтическое исчисление D получается из I добавлением схемы аксиом

$$D1. \Box \Phi \vdash \Diamond \Phi.$$

Синтаксически аксиомы D1 являются следствием аксиом A1 и их обращения по правилам 9a и 9б:

$$\frac{\Box \neg \Phi \vdash \neg \Phi}{\Phi \vdash \Diamond \Phi} (9ab).$$

Поэтому исчисление D содержится в T, но не совпадает с ним. При добавлении других аксиом различие будет сказываться на правилах редукции идущих подряд модальных знаков.

Невыполнение A1 в деонтических исчислениях можно интерпретировать как «не всегда общепринятые нормы являются логически обоснованными» или «обязательность действия не гарантирует его совершения в действительности».

Аксиомы D1 обеспечивают внутреннюю непротиворечивость самих норм: «если что-то обязательно, то оно не может быть запрещено».

Вопросы адекватности интерпретаций теорем деонтических исчислений в качестве логического обоснования реальных нормативных систем являются предметом дискуссии как среди логиков, так и среди представителей философии, социологии и правоведения. Большой обзор различных подходов содержится в [2]. Целью данной работы является только лишь выявление синтаксических различий.

Предложение 1. В исчислении D являются допустимыми правила вывода

$$\Gamma a. \frac{\Phi \vdash}{\Box \Phi \vdash};$$

$$\Gamma б. \frac{\vdash \Phi}{\vdash \Diamond \Phi}.$$

Доказательство. Если доказуема секвенция $\Phi \vdash$, то её можно получить только по правилу 10. Значит, для некоторой формулы Ψ доказуемы $\Phi \vdash \Psi$, $\Phi \vdash \neg \Psi$ и поэтому

$$\frac{\frac{\Phi \vdash \Psi}{\Box \Phi \vdash \Box \Psi}; (BB) \quad \frac{\frac{\Phi \vdash \neg \Psi}{\Box \Phi \vdash \Box \neg \Psi}; (BB) \quad \frac{\Box \Psi \vdash \Diamond \Psi}{\Box \neg \Psi \vdash \neg \Box \Psi} (9ab)}{\Box \Phi \vdash \neg \Box \Psi} (T) \quad \Box \Phi \vdash \quad (10).$$

Таким образом, Γa допустимо. Для обоснования $\Gamma б$ достаточно принципа двойственности:

$$\frac{\frac{\vdash \Phi}{\neg \Phi \vdash} (9b) \quad \frac{\neg \Phi \vdash}{\Box \neg \Phi \vdash} (\Gamma a)}{\vdash \Diamond \Phi} (9a)$$

■

Правила вывода Γa и $\Gamma б$ похожи на правило Гёделя по внешнему виду. Их деонтическая интерпретация может быть сформулирована следующим образом: «недопустимо делать обязательным логическое противоречие» и «нельзя запретить тождественную истинность».

Известна связь между аксиомами модальных исчислений и свойствами отношения достижимости R в семантике Крипке $K = \langle W, R, v, G \rangle$. Чтобы аксиома A1 была тождественно истинной, необходимо и достаточно рассматривать только такие семантики, в которых отношение R является рефлексивным (wRw для всех $w \in W$). Для тождественной истинности аксиомы D1 требуется не рефлексивность отношения R , а следующее свойство «неограниченной достижимости» (serial):

$$\forall w \exists w' : wRw'.$$

Более подробно связь между аксиомами и свойствами отношения R показана в [4].

В [2] обсуждаются также разные подходы к интерпретации рядом стоящих модальных знаков. Следуя [3], назовём модальностью любую последовательность подряд идущих знаков $\neg$, $\Box$, $\Diamond$. В исчислениях T и D имеется бесконечно много не эквивалентных друг другу модальностей.

В алетических исчислениях рассматривается схема аксиом

$$A3. \Box \Phi \vdash \Box \Box \Phi.$$

Отметим, что А3 тождественно истинна тогда и только тогда, когда отношение достижимости R в семантике Крипке транзитивно. В исчислении S4, полученном из Т добавлением аксиом А3, существует всего 14 не эквивалентных друг другу модальностей ([3], метатеорема 14).

Исчисление DS4, полученное из D добавлением аксиом А3, таким свойством не обладает.

Теорема 1. Секвенция вида $\underbrace{\Box \dots \Box A}_k \vdash \underbrace{\Box \dots \Box A}_{k-1}$ не доказуема в DS4 ни для какого натурального числа $k > 0$.

Доказательство. Пусть $W = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество неотрицательных целых чисел, R — отношение «меньше» ($<$), $G = 0$. Очевидно, что R нерerefлексивно, транзитивно и обладает свойством «неограниченной достижимости». Зафиксируем произвольное натуральное число k и положим $v(w, A) = 1 \Leftrightarrow w \geq k$. (В дальнейшем изложении будем вместо $v(w, \Phi) = 1$ писать кратко $w \models \Phi$, а вместо $v(w, \Phi) = 0$ использовать запись $w \not\models \Phi$.) В полученной таким образом семантике Крипке для исчисления DS4 выполнено

$$\begin{aligned} k-1 &\models \Box A, \\ k-2 &\models \Box \Box A, \\ &\vdots \\ 0 &\models \underbrace{\Box \dots \Box A}_k. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} k-1 &\not\models A, \\ k-2 &\not\models \Box A, \\ &\vdots \\ 0 &\not\models \underbrace{\Box \dots \Box A}_{k-1}. \end{aligned}$$

Значит, секвенция вида $\underbrace{\Box \dots \Box A}_k \vdash \underbrace{\Box \dots \Box A}_{k-1}$ не доказуема, ввиду непротиворечивости исчисления DS4. ■

Доказанная теорема опровергает утверждение о редукции модальностей в исчислении DS4, приведённое в [3] (метатеорема 41).

Теперь рассмотрим схему аксиом

$$A4. \neg \Box \Phi \vdash \Box \neg \Box \Phi.$$

Подстановка $\neg \Phi$ в А4 вместо Φ приводит к другой форме этой схемы аксиом:

$$A4'. \Diamond \Phi \vdash \Box \Diamond \Phi.$$

Обращение A4 (по правилам 9ab) даёт

$$A4''. \Diamond \Box \Phi \vdash \Box \Phi.$$

Отметим [4], что A4 тождественно истинна тогда и только тогда, когда отношение достижимости R в семантике Крипке евклидово. То есть

$$\forall w \forall v \forall u ((wRv \wedge wRu) \rightarrow vRu).$$

В исчислении S5, полученном из T добавлением аксиом A4, доказуема схема аксиом A3. Поэтому S4 содержится в S5. Это соответствует факту, что рефлексивное евклидово отношение является симметричным и транзитивным. Также известно, что в S5 выполнено следующее правило редукции модальностей: любая цепочка идущих подряд модальных знаков эквивалентна последнему из них.

Обозначим через DS^* исчисление, полученное из D добавлением аксиом A4. Их деонтический смысл может быть выражен как «если действие разрешено, то обязательно его разрешать» (для A4') или «если разрешено приказывать, то следует приказывать» (для A4''). В отличие от алетических исчислений имеет место следующая теорема:

Теорема 2. В DS^* не доказуемы аксиомы A3.

Доказательство. Рассмотрим семантику Крипке $K = \langle W, R, v, G \rangle$, где $W = \{G, F, H\}$, GRF, FRF, FRH, HRH, HRF . Свойство «неограниченной достижимости» и евклидовость R проверяются непосредственно. Пусть $F \models A$, $H \not\models A$. Тогда $G \models \Box A$, $F \not\models \Box A$, поэтому $G \not\models \Box \Box A$. Таким образом, посылка A3 истинна, а заключение ложно. A3 не доказуема, ввиду непротиворечивости. ■

Тем не менее, в исчислении DS^* имеют место некоторые интересные в аспекте редукции модальностей свойства.

Предложение 2. В исчислении DS^* для произвольной формулы Φ доказуемы секвенции:

$$M1. \Diamond \Box \Phi \vdash \Box \Diamond \Phi;$$

$$M2. \Box \Box \Phi \vdash \Box \Phi;$$

$$M3. \vdash \Box(\Box \Phi \rightarrow \Phi).$$

Доказательство. M1. Применим последовательно правило вывода T (транзитивность импликации) к A4'', D1 и A4'.

M2. Подставляя $\Box \Phi$ в схему D1, получим $\Box \Box \Phi \vdash \Diamond \Box \Phi$. Применение правила вывода T к этой секвенции и A4'' даёт требуемое.

M3. Известно, что в любом модальном исчислении с допустимым правилом вывода ВВ доказуема секвенция $\Box \Phi \vee \Box \Psi \vdash \Box(\Phi \vee \Psi)$. Подставим в неё $\neg \Box \Phi$ и Φ , получим $\Box \neg \Box \Phi \vee \Box \Phi \vdash \Box(\neg \Box \Phi \vee \Phi)$. Из эквивалентности $\Phi \rightarrow \Psi \equiv \neg \Phi \vee \Psi$ следует $\Diamond \Box \Phi \rightarrow \Box \Phi \vdash \Box(\Box \Phi \rightarrow \Phi)$. Посылка этой секвенции совпадает с A4'', значит, заключение является доказуемой формулой. ■

Заметим, что $M1$ и $M2$ соответствуют таким свойствам отношения R , как слабая направленность и слабая плотность [4]. Для $M3$ соответствие неизвестно.

Схема $M2$ не доказуема в $DS4$ (см. теорему 1), а $A3$ не доказуема в DS^* . Следовательно, для редукции модальностей требуется объединение схем $A3$ и $A4$. В исчислении $DS5$, получаемом из D добавлением $A3$, и $A4$, выполняется правило редукции такое же, как в алетическом исчислении $S5$. Но деонтическая интерпретация в этом исчислении вызывает сомнения в адекватности.

Более перспективным является изучение исчислений, получаемых из $DS4$ добавлением $M3$ или $M2$. Очевидно, что $M2$ является логическим следствием $M3$ и $A2$.

$M3$ имеет вполне приемлемый деонтический смысл «обязательно считать, что если действие обязательно, то оно выполняется». Обращение $M3$ (также доказуемое в DS^*): $\vdash \Box(\Phi \rightarrow \Diamond\Phi)$ тоже имеет деонтический смысл «обязательно считать, что если действие логически истинно, то оно разрешено». Так как схема $A1$ не доказуема в модальных исчислениях, то те части предложений в кавычках, которые идут после слов «обязательно считать, что» не всегда истинны. Таким образом, налицо кажущийся парадокс: утверждение может быть не истинным, но в обществе обязательно считать, что оно верно. Другие парадоксы деонтических логик приведены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. М. : ИНФРА-М; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. 224 с.
2. Ивин А.А. Логика норм. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1973. 124 с.
3. Костюк В.Н. Элементы модальной логики. Киев : Наукова думка, 1978. 180 с.
4. Goldblatt R. Logics of time and computation. CSLI Lecture Notes No. 7, 1992.

ON THE REDUCTION OF MODALITIES IN DEONTIC CALCULI

I.P. Bestsennyi

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ibests@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Formal theories of deontic logic based on the Gensen-type propositional calculus are considered. Syntactic and semantic differences between the alethic and deontological calculi are analyzed in the aspect of reduction of sequences of successive modal signs.

Keywords: modal logic, deontic calculi, Kripke semantic.

Дата поступления в редакцию: 27.03.2017

КВАНТОВАНИЕ МАССЫ И ГРУППА ЛОРЕНЦА

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsui.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Массовый спектр локализованных состояний квантовых микрообъектов исследуется в рамках холистической (нелокальной) схемы Гейзенберга. Предполагается, что квантовый микрообъект как объект модуса потенции существует вне пространства-времени и представляется в виде суперпозиции векторов состояния несепарабельного гильбертова пространства. Показывается, что массы состояний лептонного (за исключением нейтрино) и адронного секторов спектра материи пропорциональны массе покоя электрона с точностью до 0,41%.

Ключевые слова: спектр масс, группа Лоренца, циклические представления, массовые формулы, квантование массы.

1. Введение

Как известно, одной из важнейших нерешённых проблем теоретической физики является проблема описания спектра масс элементарных частиц (это одна из 30 проблем из списка Гинзбурга [1]). Некоторые успехи в систематизации адронных спектров были достигнуты на основе $SU(3)$ - и $SU(6)$ -теорий (см., например, [2]). В последнее время предпринимались попытки описания массового распределения барионных октетов в рамках кварковой модели и её расширений [3,4]. Однако динамические симметрии ($SU(N)$ -теории) оставляют вне рамок рассмотрения лептонный сектор спектра элементарных частиц. Кроме того, выделенное положение занимает калибровочный сектор (сектор так называемых полей-переносчиков взаимодействий). Такое тройственное разделение спектра элементарных частиц является характерной чертой стандартной модели (СМ), в которой постулируется существование трёх типов «фундаментальных частиц» (кварки, лептоны и калибровочные бозоны). Нетрудно видеть, что реализованная в СМ схема описания спектра элементарных частиц является редукционистской схемой, согласно которой все члены адронного сектора (барионы и мезоны) строятся из кварков, а лептонам и калибровочным бозонам придаётся статус фундаментальных частиц.

Как известно, антитезой редукционизму является холизм (учение о целом). Схемой описания спектра элементарных частиц с позиции холизма (альтернативой к редукционизму СМ) является подход Гейзенберга [5–7]. Согласно Гейзенбергу, в основании всего многообразия элементарных частиц лежит

некий *субстрат энергии*, математическая (теоретико-групповая) форма которого (полученная посредством *фундаментальных симметрий*) есть **спектр материи**. Каждый уровень (*состояние*) спектра материи задаётся представлением группы фундаментальной симметрии. Каждая элементарная частица представляет собой тот или иной энергетический уровень этого спектра. Существенной отличительной особенностью такого описания является отсутствие фундаментальных частиц. Гейзенберг утверждает, что понятие «состоит из» (основное понятие редукционизма) не работает в физике частиц. Если продолжить применять это понятие, то получим ответ, что каждая данная частица состоит из всех известных частиц. По этой причине ни одна из элементарных частиц принципиально не выделяется среди других в качестве фундаментальной частицы [6]. В подходе Гейзенберга мы имеем фундаментальные симметрии вместо фундаментальных частиц. Гейзенберг разделяет все известные в физике частиц симметрии на две категории: *фундаментальные (первичные) симметрии* (такие как группа Лоренца, дискретные симметрии, конформная группа) и *динамические (вторичные) симметрии* (такие как $SU(3)$, $SU(6)$ и т. д.). В рамках редукционистского описания главенствующим является понятие *структуры*, отсюда следует и понятие «частицы» как основной структурной составляющей, посредством которой построены все объекты макромира. В рамках холистического описания таким понятием является понятие *симметрии*. На квантовом уровне структура трансформируется в симметрию. Прямой же перенос на квантовый уровень таких понятий макромира как «частица» приводит к недоразумениям и парадоксам. По меткому выражению М.А. Маркова: «Мы часто "входим" в микромир с макроскопической невежливостью, "в пальто и калошах"» [8, с. 34]. Как следствие, макропонятие «частица» приобретает на микроуровне совершенно иррациональный характер. Вот что пишет Д.Н. Клышко: «Итак, мы приходим к заключению, что *фотон как элементарная частица оптического поля не имеет разумного чёткого определения и, следовательно, является, по предполагаемому определению, метафизической категорией*» [9]. Применение термина «элементарная частица» к описанию квантового микрообъекта затемняет существо дела, создавая иллюзию справедливости редукционизма и макроязыка на микроуровне. Квантовый мир – это *суперпозиционный (нелокальный) мир*. В [10,11] дано определение квантового микрообъекта как суперпозиции векторов состояния несепарабельного спин-зарядового гильбертова пространства, т. е., по определению, микрообъект, принадлежа модусу потенциального, является *нелокальным объектом*¹

¹ К пониманию квантового микрообъекта как нелокального объекта приводят непосредственные эксперименты: «... после первого светоделителя фотон присутствует как бы в обоих плечах интерферометра одновременно, хотя в первом акте эксперимента он находился только в одном плече. Это необычное поведение в пространстве и носит название *квантовой нелокальности*. Её нельзя объяснить с позиций привычных пространственных интуиций здравого смысла, обычно присутствующих в макромире. Причина, по-видимому, состоит в том, что векторы квантовых состояний принадлежат гильбертову векторному пространству, для которого пространственная локальность вовсе не является обязательной» [12]. И далее: «Для нас важно то, что в научном мире серьёзно обсуждаются возможности существования объектов вне пространства-времени. Ещё раз в этой связи подчеркнём, что векторы квантовых состо-

до всякого измерения. После измерения (редукции квантовой суперпозиции) микрообъект переходит на модус актуального, являя собой одно из возможных состояний, реализуемых в эксперименте.

Редукционизм предполагает, что материя на микроуровне имеет композиционную структуру². Композиционная структура — это свойство макромира. На квантовом уровне *композицию* заменяет *суперпозиция*. Это прямое следствие квантовой нелокальности. Макроскопические представления о частицах и композиционной структуре неприменимы к нелокальному объекту.

В настоящей статье исследуется спектр масс «элементарных частиц»³, т. е. спектр масс актуализированных (локализованных) состояний нелокального

яний, принадлежащие гильбертовому векторному пространству, не подвержены стандартным пространственно-временным ограничениям» [12].

²Согласно модели кварков все наблюдаемые адроны являются связанными состояниями либо трёх кварков (барионы), либо кварка и антикварка (мезоны). Здесь по умолчанию предполагается, что кварки не являются исключительно математическими объектами (например, как спиноры), а обладают некоторой «реальностью», хотя и ненаблюдаемой непосредственно в опыте (в силу так называемого конфайнмента). На раннем этапе развития теории унитарной симметрии большинством теоретиков считалось, что кварковая гипотеза является не более чем удобной математической схемой, позволяющей частично упорядочить адронные спектры. Вот что пишут Ю.Б. Румер и А.И. Фет: «Гипотеза кварков пока не привела ни к каким новым физическим результатам (по сравнению с $SU(3)$ -теорией без кварков). Формулы кваркового состава являются лишь перефразировкой на «кварковый» язык результатов теории представлений группы $SU(3)$ » [2, с. 230]. И далее: «... по данному супермультиплету (в смысле теории представлений, т.е. заданному, например, степенью представления) нельзя ни определить спин его частиц, ни даже указать, состоит ли он из фермионов или бозонов. Представление о кварках не вносит в этот вопрос ничего нового. Поэтому предположение о том, что частицы состоят из кварков, может показаться довольно бесплодным. Лишь обнаружение кварков в природе может придать этой гипотезе такую же убедительность, какую имеет, например, представление о составе атомных ядер из протонов и нейтронов» [2, с. 231]. Как известно, кварки так и не были обнаружены в свободном состоянии. Эксперименты по глубоко неупругому рассеянию на протонах выявили спектроскопические неоднородности, которые сразу же были интерпретированы как свидетельства о наличии «зернистой» структуры протона. Так возникла партонная модель. Далее «зёрна» (партоны) были отождествлены с кварками (однако отождествление партоны $\equiv$ кварки далеко не является очевидным). В рамках холистического (нелокального) описания спектроскопические неоднородности («зернистая» структура) состояний могут быть интерпретированы следующим образом. В [11] показано, что состояния (циклические представления) вида $(l, 0) \oplus (0, l)$ имеют тривиальную жорданову структуру, что соответствует спектру «точечной» частицы. В то время как состояния вида $(ll) \oplus (l, l)$ обладают нетривиальной жордановой структурой, т. е. соответствующие им циклические представления содержат инвариантные подпространства (имеются элементарные делители выше первого порядка), что и приводит к спектру неоднородной («составной») частицы.

³Очевидно, что термин «элементарные частицы» — это всё те же «калоши» Маркова, т. е. своего рода ментальный «костыль», которым пользуется человеческое сознание в попытках понять природу квантового мира. В связи с этим уместно вспомнить радикальный лозунг «There are no particles», размещённый на сайте Э. Джуса (<http://decoherence.de>), и вкупе с ним «There is no time at a fundamental level». Нетрудно видеть, что «фундаментальный уровень» Джуса — это модус потенции (квантовый домен), существующий вне пространства-времени. На этом уровне принцип локализации Бора-Розенфельда не имеет смысла и, следовательно, не имеет смысла понятие «частица» точно также, как и понятие «волна». Так называемый «корпускулярно-волновой дуализм» на самом деле является *псевдодуализмом*.

квантового микрообъекта⁴. Спектр этих состояний образует спектр материи по Гейзенбергу. Сам же микрообъект нелокален и существует как суперпозиция векторов состояния несепарабельного гильбертова пространства вне пространства-времени Минковского. Структура спектра материи организуется в рамках конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала, где циклические представления операторной алгебры (оператора энергии) определяются фундаментальной симметрией, задаваемой группой Лоренца. В рамках данной реализации операторной алгебры⁵ выводится массовая формула, определяющая энергетический вес каждого уровня спектра материи. Полученный спектр приводит к растущему («бальмероподобному») спектру масс «элементарных частиц». Такое поведение спектра масс частиц было впервые замечено Ёитиро Намбу более 60 лет тому назад и позднее отмечалось многими авторами (см. литературу в п.2). Намбу и его последователи, ограничившись эмпирическими формулами, не предложили теоретического обоснования найденной зависимости. В п.3–7 настоящей статьи предпринимается попытка дать теоретическое обоснование этого феномена.

2. Эмпирические формулы

В 1952 г. Намбу [13] первым обратил внимание на существование эмпирических («бальмероподобных») зависимостей в спектре масс элементарных частиц, подчиняющихся следующей формуле:

$$m_N = (N/2) 137 \cdot m_e, \quad (1)$$

где N — положительное целое число, m_e — масса электрона. Далее, в 1979 г. Барут [14] предложил массовую формулу для лептонов:

$$m(N) = m_e \left(1 + \frac{3}{2} \alpha^{-1} \sum_{n=0}^{n=N} n^4 \right), \quad (2)$$

где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Согласно (2) массы электрона, мюона и τ -лептона определяются при $N = 0, 1$ и 2 соответственно. В дальнейшем эмпирические зависимости вида (1) изучались многими авторами (см. [15–19]). Формула Намбу (1) может быть записана также через постоянную тонкой структуры:

$$m = \frac{N}{2\alpha} m_e, \quad (3)$$

что приводит к так называемому α -квантованию масс элементарных частиц (см. [15, 18]).

⁴Частица, регистрируемая в детекторе (на фотопластинке, в камере Вильсона, в пузырьковой камере и т. д.), является только одним из множества потенциально возможных состояний квантового микрообъекта.

⁵Очевидно, что при другой реализации операторной алгебры (например, посредством конформной группы в качестве фундаментальной симметрии) структура спектра материи будет иной.

В 2003 г. Сидхарт [20, 21] предложил следующую эмпирическую формулу:

$$\text{mass} = 137 \cdot m \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4)$$

где m и n — положительные целые числа. Формула Сидхарта (4) описывает весь спектр масс элементарных частиц (известный на момент 2003 г.) с точностью до 3 %. В [21] предпринимались попытки связать числа m и n с квантовыми числами гармонического осциллятора. Однако теоретический смысл этих чисел, как и числа N в других «бальмероподобных» формулах (формулы (1)–(3)), остаётся неясным.

3. Группа Лоренца и массовая формула

Как известно, универсальное накрытие собственной группы Лоренца $SO_0(1, 3)$ (группа вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$) задаётся спинорной группой

$$\text{Spin}_+(1, 3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2 : \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1 \right\} = \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Пусть $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathfrak{g}}$ — произвольное линейное представление собственной группы Лоренца $SO_0(1, 3)$ и пусть $A_i(t) = T_{a_i(t)}$ — инфинитезимальный оператор, соответствующий вращению $a_i(t) \in SO_0(1, 3)$. Аналогично, пусть $B_i(t) = T_{b_i(t)}$, где $b_i(t) \in SO_0(1, 3)$ — гиперболическое вращение. Элементы A_i и B_i образуют базис групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_3, & [A_2, A_3] &= A_1, & [A_3, A_1] &= A_2, \\ [B_1, B_2] &= -A_3, & [B_2, B_3] &= -A_1, & [B_3, B_1] &= -A_2, \\ [A_1, B_1] &= 0, & [A_2, B_2] &= 0, & [A_3, B_3] &= 0, \\ [A_1, B_2] &= B_3, & [A_1, B_3] &= -B_2, \\ [A_2, B_3] &= B_1, & [A_2, B_1] &= -B_3, \\ [A_3, B_1] &= B_2, & [A_3, B_2] &= -B_1. \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Перейдём к комплексной оболочке групповой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, определяя операторы

$$X_l = \frac{1}{2}i(A_l + iB_l), \quad Y_l = \frac{1}{2}i(A_l - iB_l), \quad (6) \\ (l = 1, 2, 3).$$

Используя соотношения (5), находим

$$[X_k, X_l] = i\varepsilon_{klm}X_m, \quad [Y_l, Y_m] = i\varepsilon_{lmn}Y_n, \quad [X_l, Y_m] = 0. \quad (7)$$

Из соотношений (7) следует, что каждое из множеств операторов X и Y генерирует группу $SU(2)$ и эти две группы коммутируют между собой. Таким образом, из соотношений (7) следует, что в рамках комплексной оболочки группа $SL(2, \mathbb{C})$, по существу, эквивалентна группе $SU(2) \otimes SU(2)$ (данный изоморфизм, безусловно, имеет локальный характер, т. е. вблизи единицы группы, поскольку $SL(2, \mathbb{C})$ некомпактна). На рис. 1 представлена система зацепляющихся (циклических) конечномерных представлений группы Лоренца.

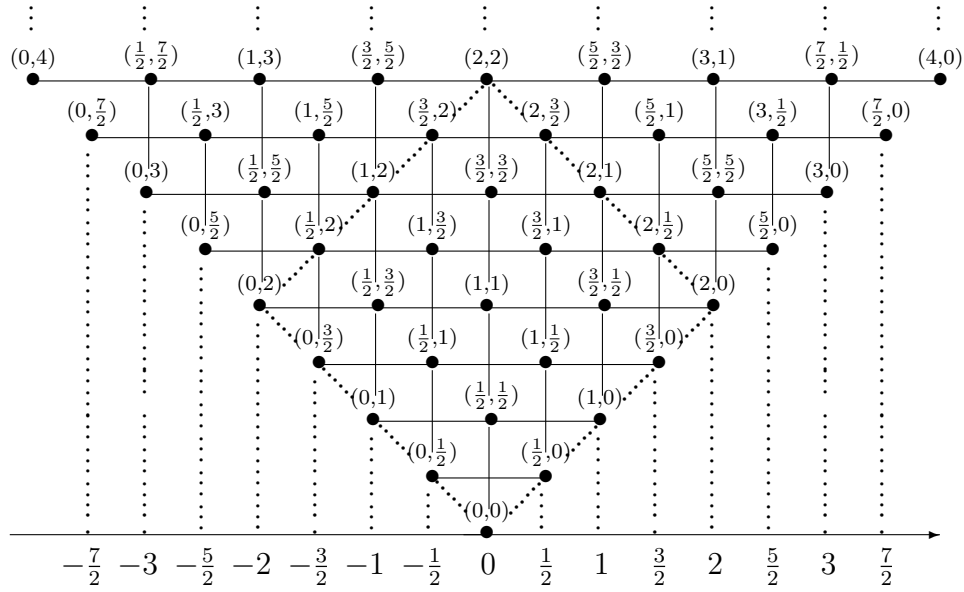


Рис. 1. Система зацепляющихся представлений $(l, \bar{l})$ группы Лоренца.
На оси отмечены значения спиновых линий

Уравнения движения для произвольных спиновых цепочек (спиновых мультиплетов)

$$\tau_{li}, \tau_{l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}}, \tau_{l+1, l-1}, \tau_{l+\frac{3}{2}, l-\frac{3}{2}}, \dots, \tau_{li}$$

(горизонтальные линии конуса представлений на рис. 1) в бивекторном пространстве $\mathbb{R}^6$ имеют вид [22, 23]

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{li} \frac{\partial \psi}{\partial a_j} - i \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{li} \frac{\partial \psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)} \psi = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a_j} - i \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)} \psi = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+1, l-1} \frac{\partial \psi}{\partial a_j} - i \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+1, l-1} \frac{\partial \psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)} \psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+\frac{3}{2}, i-\frac{3}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a_j} - i \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{l+\frac{3}{2}, i-\frac{3}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial a_j^*} + m^{(s)} \dot{\psi} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{il} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial a_j} + i \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^{il} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial a_j^*} + m^{(s)} \psi = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где спин $s = l - i$ изменяется следующим образом:

$$l - i, l - i + 1, l - i + 2, l - i + 3, \dots, i - l.$$

Система (8) описывает состояния частиц с различными массами и спинами. Масса состояния $m^{(s)}$, соответствующая уровню энергии $H_E \simeq \text{Sym}_{(k,r)}$, определяется формулой⁶

$$m^{(s)} = m_e \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(i + \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

где $s = |l - i|$.

Спектр материи и конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала

Как известно, в основании алгебраической формулировки квантовой теории лежит конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала (ГНС), заключающаяся в каноническом соответствии $\omega \leftrightarrow \pi_\omega$ между состояниями и циклическими представлениями C^* -алгебры [28–30]. В [31] показано, что основные энергетические уровни (состояния) спектра материи строятся на основе циклических представлений в рамках конструкции ГНС. Конкретная реализация операторной алгебры (оператора энергии) осуществляется посредством спинорной структуры (морфизмы спинорной структуры задают заряд и дискретные симметрии [32–39]), ассоциированной с каждым циклическим представлением. Чистые состояния (циклические представления), задающие уровни спектра материи, подразделяются относительно заряда (действия псевдоавтоморфизма спинорной структуры) на подмножества заряженных, нейтральных и истинно нейтральных состояний. Структура спектра материи задаётся разбиением физического гильбертова пространства (пространства состояний) на когерентные подпространства [31]

$$\mathbf{H}_{\text{phys}} = \bigoplus_{b, \ell \in \mathbb{Z}} \left[\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(b, \ell) \oplus \mathbf{H}_{\text{phys}}^0(b, \ell) \oplus \mathbf{H}_{\text{phys}}^{\bar{0}}(b, \ell) \right], \quad (10)$$

⁶Спектр масс и его зависимость от представлений группы Лоренца, характеризующиеся парой (l, i) , были даны в [24]. Стандартное рассмотрение предполагает зависимость спектра масс только от спина s (представление группы Лоренца фиксировано). Как известно, в этом случае возникает нефизический спектр масс, $m_i \sim 1/s_i$, т. е. для очень больших спинов s_i , массы очень малы. Первая массовая формула этого типа была дана Майораной [25]. Похожие массовые формулы рассматривались Гельфандом и Ягломом [26] (см. подробное историческое рассмотрение в [27]). В статье [24] показано, что для представлений (l, i) группы Лоренца масса пропорциональна $(l + 1/2)(i + 1/2)$. Отсюда непосредственно следует, что частицы (более точно, локализованные состояния квантового микрообъекта) с *одинаковым* спином, но *отличными* массами описываются *различными* представлениями группы Лоренца.

где

$$\mathbf{H}_{\text{phys}}^Q(b, \ell) = \bigoplus_{s=-|l-i|}^{|l-i|} \mathbf{H}^{2|s|+1} \otimes \mathbf{H}^Q(b, \ell) \otimes \mathbf{H}_{\infty}, \quad Q = \{\pm, 0, \bar{0}\}.$$

Здесь b и ℓ — собственные числа барионного B и лептонного L зарядов, образующие целочисленный спектр. При значениях электрического заряда $Q = \{\pm, 0, \bar{0}\}$ имеем три базовых подпространства: подпространство заряженных состояний $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(b, \ell)$, подпространство нейтральных состояний $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(b, \ell)$ и подпространство истинно нейтральных состояний $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\bar{0}}(b, \ell)$.

4. Лептонный сектор

Лептонный сектор спектра материи образуют состояния, принадлежащие когерентным подпространствам $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(0, \ell)$ и $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(0, \ell)$ ⁷, где лептонное число (аромат) ℓ принимает три значения: $\ell_{\alpha} = \{\ell_e, \ell_{\mu}, \ell_{\tau}\}$. Все состояния (частицы) лептонного сектора являются фермионами спина $1/2$, следовательно, согласно конструкции ГНС они описываются циклическими представлениями, принадлежащими линиям спина $1/2$ и $-1/2$. Для заряженных лептонов имеем следующие когерентные подпространства:

$$\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(0, \ell_{\alpha}) = \mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{H}^{\pm}(0, \ell_{\alpha}) \otimes \mathbf{H}_{\infty}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_{\text{phys}}^{*\mp}(0, \ell_{\alpha}) = \mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{H}^{\mp}(0, \ell_{\alpha}) \otimes \mathbf{H}_{\infty}. \quad (12)$$

Заряженные лептоны e^{-} , μ^{-} , τ^{-} и их античастицы (e^{+} , μ^{+} , τ^{+}) образуют кубитоподобные несепарабельные состояния в пространствах (11) и (12) соответственно.

Определим массы заряженных лептонов согласно формуле (9). Наименьшая масса покоя соответствует электрону

$$m_e = 0,511 \text{ MeV}.$$

Это экспериментальное значение массы электрона входит в качестве константы в формулу (9), т. е. базового значения массы, относительно которого далее отсчитываются теоретические массы состояний («элементарных частиц»). Следующим по массе лептоном является мюон μ^{-} с экспериментальным значением массы

$$m_{\mu} = 105,66 \text{ MeV}, \quad (13)$$

что приблизительно в 207 раз (206,77) больше массы электрона. Этому значению соответствует циклическое представление (l, i) на линии спина $1/2$ при $l = 14$ и $i = 27/2$:

$$m_{\mu}^{\frac{1}{2}} = m_e \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(i + \frac{1}{2} \right) = 103,73. \quad (14)$$

⁷Или $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\bar{0}}(0, \ell)$ в случае, если нейтрино являются майорановскими частицами (истинно нейтральные фермионы).

Абсолютная погрешность между экспериментальным (13) и вычисленным (14) значениями равна $-1,93$; относительная погрешность: $-1,98\%$.

Аналогично для τ -лептона с экспериментальным значением массы

$$m_\tau = 1776,84 \text{ MeV} \quad (15)$$

имеем циклическое представление $(l, \dot{l})$ на линии спина $1/2$ при $l = 117/2$, $\dot{l} = 58$ с массой

$$m_{\tau}^{\frac{1}{2}} = m_e \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(\dot{l} + \frac{1}{2} \right) = 1763,72. \quad (16)$$

Абсолютная погрешность между (15) и (16) равна $-13,12$; относительная погрешность: $-0,74\%$.⁸

Нейтринные состояния спектра материи описываются в рамках когерентных подпространств $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(0, \ell)$ (дираковские нейтрино) или $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\bar{0}}(0, \ell)$ (майорановские нейтрино). Все нейтринные состояния являются нейтральными (или истинно нейтральными) фермионами спина $1/2$. Согласно конструкции ГНС эти состояния задают циклические представления линий спина $1/2$ и $-1/2$. Для дираковских нейтрино имеем два экземпляра когерентных подпространств, переходящих друг в друга под действием псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ спинорной структуры:

$$\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(0, \nu_\alpha) = \mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{H}^0(0, \nu_\alpha) \otimes \mathbf{H}_\infty, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\text{phys}}^0(0, \nu_\alpha) = \mathbf{H}^2 \otimes \bar{\mathbf{H}}^0(0, \nu_\alpha) \otimes \mathbf{H}_\infty. \quad (18)$$

В случае майорановских нейтрино для каждого сорта нейтрино ($\nu_\alpha = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$) имеем единственный экземпляр когерентного подпространства

$$\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\bar{0}}(0, \nu_\alpha) = \mathbf{H}^2 \otimes \bar{\mathbf{H}}^0(0, \nu_\alpha) \otimes \mathbf{H}_\infty \quad (19)$$

(в этом случае псевдоавтоморфизм спинорной структуры вырождается в тождественное преобразование).

Вне зависимости от вида нейтрино (дираковского или майорановского) все нейтринные состояния задаются квантовыми суперпозициями

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i, \quad (20)$$

⁸В связи с массами заряженных лептонов уместно вспомнить ещё одну эмпирическую массовую формулу. В 1983 г. Койде [40] предложил следующую формулу:

$$m_e + m_\mu + m_\tau = \frac{2}{3} (\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2,$$

связывающую массы заряженных лептонов. Интересно отметить, что предсказанное Койде (на основании этой формулы) значение массы τ -лептона (1777 MeV) практически идеально совпадает с современным экспериментальным значением массы этой частицы (см. (15)), в то время как на момент 1983 г. это значение равнялось 1784 MeV. О формуле Койде, её интерпретациях и приложениях см. [41–43].

где ν_i — массовые нейтринные состояния, $U_{\alpha i}$ — элементы матрицы смешивания Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (ПМНС)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \exp(-i\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} \exp(-i\delta) & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь угол смешивания θ_{12} описывает «солнечные» и «реакторные» осцилляции, а угол θ_{23} служит для описания «атмосферных» и «ускорительных» осцилляций [44]. Таким образом, все нейтрино образуют суперпозиционные несепарабельные состояния вида (20) в когерентных подпространствах (17)–(18) или (19).

Нейтринные осцилляции показывают, что лептонное число (аромат) для нейтрино не сохраняется, т.е. нейтрино с определённым ароматом не является частицей с определённой массой, а представляет собой квантовую суперпозицию массивных состояний нейтрино⁹.

5. Мезонный сектор

Мезонный сектор спектра материи образуют состояния, принадлежащие когерентным подпространствам $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(0, 0)$ и $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(0, 0)$ или $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(0, 0)$, где лептонное ℓ и барионное b числа равны нулю. Все мезоны являются состояниями с целым спином. Следовательно, согласно конструкции ГНС все мезонные состояния описываются циклическими представлениями, принадлежащими линиям целочисленного спина с ненулевой массой. Ниже приведены таблицы для линий спина 0, 1, 2, включающие все известные на настоящий момент (со-

⁹Следует отметить, что матрица смешивания U лишь ради удобства приписывается нейтрино, на самом деле она является общей лептонной матрицей смешивания [45]. Следует ли тогда ожидать, что вместо заряженного лептона с определённым ароматом существует квантовая суперпозиция $\ell_i = \sum_{\alpha} U_{\alpha i} \ell_{\alpha}$ и, как следствие, осцилляции заряженных лептонов [45]? Естественнo предположить, что суперпозиционная структура (20), характерная для нейтрино, является также и общей чертой для всех объектов микромира. По всей видимости, отсутствие экспериментальных свидетельств в пользу существования осцилляций заряженных лептонов заключается в том, что для большинства практических случаев разность квадратов масс заряженных лептонов оказывается слишком велика для того, чтобы заряженные лептоны могли рождаться в когерентной квантовой суперпозиции.

гласно Particle Data Group [46]¹⁰) мезоны данных спинов. В первом столбце каждой таблицы указаны стандартное обозначение состояния и его масса в MeV. Второй столбец таблицы содержит вычисленное (согласно (9)) значение массы соответствующего состояния. Третий столбец содержит относительную погрешность между экспериментальным и вычисленным значениями. В четвёртом столбце приведены параметры l и $\bar{l}$ соответствующего циклического представления.

Таблица 1. Мезоны: линия спина 0

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор.)	Погр-сть %	$(l, \bar{l})$
1.	$\pi - 139,57$	139,12	-0,32	(16, 16)
2.	$K - 493,67$	491,07	-0,52	(61/2, 61/2)
3.	$f_0(500)$	507,03	+1,40	(31, 31)
4.	$\eta - 547,86$	539,74	-1,46	(32, 32)
5.	$\eta'(958) - 957,78$	966,94	+0,95	(43, 43)
6.	$a_0(980)$	989,29	+0,94	(87/2, 87/2)
7.	$f_0(980) - 990$	989,29	-0,07	(87/2, 87/2)
8.	$\eta(1295)$	1277,50	-1,35	(99/2, 99/2)
9.	$\pi(1300)$	1303,18	+0,24	(50, 50)
10.	$f_0(1370)$	1381,74	+0,85	(103/2, 103/2)
11.	$\eta(1405) - 1408,8$	1408,44	-0,02	(52, 52)
12.	$K_0^*(1430)$	1435,39	+0,37	(105/2, 105/2)
13.	$a_0(1450)$	1435,39	-1,00	(105/2, 105/2)
14.	$\eta(1475)$	1462,61	-0,84	(53, 53)
15.	$f_0(1500)$	1490,08	-0,66	(107/2, 107/2)
16.	$f_0(1710) - 1723 \pm \frac{6}{5}$	1719	-0,23	(115/2, 115/2)
17.	$\pi(1800) - 1812 \pm 12$	1809,07	-0,16	(59, 59)
18.	$D - 1869,62$	1870,39	+0,04	(60, 60)
19.	$D_s^\pm - 1968,30$	1964,28	-0,21	(123/2, 123/2)
20.	$D_{s0}^*(2317)^\pm - 2317,7 \pm 0,6$	2328,24	+0,48	(67, 67)
21.	$\eta_c(1S) - 2983,6 \pm 0,61$	2990,50	+0,23	(76, 76)
22.	$\chi_{c0}(1P) - 3414,75$	3394,19	-0,60	(81, 81)
23.	$\eta_c(2S) - 3639,2 \pm 1,2$	3648,67	+0,26	(84, 84)
24.	$\chi_{c0}(3915) - 3918,4 \pm 1,9$	3912,34	-0,15	(87, 87)
25.	$B - 5279,29$	5264,45	-0,28	(101, 101)
26.	$B_s^0 - 5366,79$	5368,69	+0,04	(102, 102)
27.	$B_c^\pm - 6275 \pm 1$	6296,03	+0,32	(221/2, 221/2)
28.	$\chi_{b0}(1P) - 9859,44$	9873,03	+0,14	(277/2, 277/2)
29.	$\chi_{b0}(2P) - 10232,5$	10231,37	-0,006	(141, 141)

¹⁰В таблицы включены только состояния, имеющие, как минимум, трёхзвёздочный статус. Как известно, согласно PDG спины всех наблюдаемых на настоящий момент состояний заключены в диапазоне $0, 1/2, 1, \dots, 11/2$. К сожалению, ограниченные рамки статьи не позволяют рассмотреть весь наблюдаемый диапазон спиновых линий.

Таблица 2. Мезоны: линия спина 1

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \bar{l})$
1.	$\rho(770) - 775,26$	777,1	+0,24	(39, 38)
2.	$\omega(782) - 782,65$	797,16	+1,93	(79/2, 77/2)
3.	$K^*(892)$	901,28	+1,04	(42, 41)
4.	$\phi(1020) - 1019,46$	1011,78	-0,76	(89/2, 89/2)
5.	$h_1(1170)$	1177,22	+0,61	(48, 47)
6.	$b_1(1235) - 1229,5$	1226,78	-0,22	(49, 48)
7.	$a_1(1260)$	1251,95	-0,63	(99/2, 97/2)
8.	$K_1(1270) - 1272 \pm 7$	1277,37	+0,42	(50, 49)
9.	$f_1(1285) - 1281,9$	1277,37	-0,35	(50, 49)
10.	$\pi_1(1400)$	1408,32	+0,59	(105/2, 103/2)
11.	$K_1(1400) - 1403 \pm 7$	1408,32	+0,38	(105/2, 103/2)
12.	$K_1^*(1410) - 1414 \pm 15$	1408,32	-0,40	(105/2, 103/2)
13.	$f_1(1420) - 1426,4$	1435,27	+0,62	(53, 52)
14.	$\omega(1420)$	1435,27	+0,62	(53, 52)
15.	$\rho(1450)$	1462,48	+0,86	(107/2, 105/2)
16.	$\pi_1(1600)$	1602,37	+0,15	(56, 55)
17.	$\omega(1650)$	1660,11	+0,61	(57, 56)
18.	$\phi(1680)$	1689,37	+0,56	(115/2, 113/2)
19.	$K^*(1680)$	1689,37	+0,56	(115/2, 113/2)
20.	$\rho(1700)$	1689,37	-0,62	(115/2, 113/2)
21.	$D^*(2007)^0 - 2006,97$	1995,97	-0,55	(125/2, 123/2)
22.	$D^*(2010)^\pm$	1995,97	-0,69	(125/2, 123/2)
23.	$\phi(2170) - 2175,97 \pm 15$	2192,19	+0,79	(131/2, 129/2)
24.	$D_1(2420)^0$	2432,74	+0,53	(69, 68)
25.	$D_{s1}(2460)^\pm$	2468,13	+0,33	(139/2, 137/2)
26.	$D_{s1}(2536)^\pm$	2539,67	+0,14	(141/2, 139/2)
27.	$D_{s1}^*(2700)^\pm - 2709 \pm 4$	2722,99	+0,52	(73, 72)
28.	$J/\psi(1S) - 3096,916$	3108,79	+0,38	(78, 77)
29.	$\chi_{c1}(1P) - 3510,66$	3520,15	+0,27	(83, 82)
30.	$\chi_c(1P) - 3525,38$	3520,15	-0,16	(83, 82)
31.	$\psi(2S) - 3686,09$	3691,85	+0,16	(85, 84)
32.	$\psi(3770) - 3773,15 \pm 0,33$	3779,23	+0,16	(86, 85)
33.	$\chi(3872) - 3871,69 \pm 0,17$	3867,63	-0,10	(87, 86)
34.	$\chi(3900) - 3888,7 \pm 3,4$	3912,22	+0,60	(175/2, 173/2)
35.	$\psi(4040) - 4039 \pm 1$	4047,50	+0,18	(89, 88)
36.	$\psi(4160) - 4191 \pm 5$	4185,09	-0,14	(181/2, 179/2)
37.	$\chi(4260) - 4251 \pm 9$	4278,08	+0,64	(183/2, 181/2)
38.	$\chi(4360) - 4354 \pm 10$	4372,12	+0,42	(185/2, 183/2)
39.	$\psi(4415) - 4421 \pm 4$	4419,51	-0,03	(93, 92)
40.	$\chi(4430) - 4478 \pm \frac{15}{18}$	4467,12	-0,24	(187/2, 185/2)
41.	$\chi(4660) - 4665 \pm 10$	4660,32	-0,10	(191/2, 189/2)
42.	$B^* - 5325,1$	5316,32	-0,16	(102, 101)

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \dot{l})$
43.	$B_s^* - 5415,4 \pm {}^{1,8}_{1,5}$	5421,07	+0,10	(103, 102)
44.	$B_1(5721)^0$	5741,47	+0,36	(106, 105)
45.	$B_{s1}(5830)^0 - 5828,4$	5850,31	+0,37	(107, 106)
46.	$\Upsilon(1S) - 9460,30 \pm 0,26$	9451,33	-0,09	(136, 135)
47.	$\chi_{b1}(1P) - 9892,78$	9872,90	-0,20	(139, 138)
48.	$\Upsilon(2S) - 10023,26$	10015,47	-0,08	(140, 139)
49.	$\chi_{b1}(2P) - 10255,46$	10231,24	-0,24	(283/2, 281/2)
50.	$\Upsilon(3S) - 10355,2$	10376,37	+0,20	(285/2, 283/2)
51.	$\chi_{b1}(3P) - 10512,1 \pm 2,3$	10522,51	+0,09	(287/2, 285/2)
52.	$\Upsilon(4S) - 10579,4$	10595,97	+0,16	(144, 143)
53.	$\Upsilon(10860) - 10876 \pm 11$	10892,35	+0,15	(146, 145)
54.	$\Upsilon(11020) - 11019 \pm 8$	11042,07	+0,21	(147, 146)

Таблица 3. Мезоны: линия спина 2

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \dot{l})$
1.	$f_2(1270) - 1275,5$	1276,99	+0,12	(101/2, 97/2)
2.	$a_2(1320) - 1318,3$	1328,60	+0,78	(103/2, 99/2)
3.	$K_2^*(1430)$	1434,89	+0,34	(107/2, 103/2)
4.	$f_2'(1525)$	1517,87	-0,50	(55, 53)
5.	$\eta_2(1645) - 1617 \pm 5$	1630,73	+0,85	(57, 55)
6.	$\pi_2(1670) - 1672 \pm 3$	1659,73	-0,73	(115/2, 111/2)
7.	$K_2(1770) - 1773 \pm 8$	1778,28	+0,29	(119/2, 115/2)
8.	$K_2(1820) - 1816 \pm 13$	1808,56	-0,40	(60, 58)
9.	$\pi_2(1880)$	1869,88	-0,54	(61, 59)
10.	$f_2(1950)$	1963,77	+0,70	(125/2, 121/2)
11.	$f_2(2010)$	1995,58	-0,72	(63, 61)
12.	$f_2(2300)$	2293,37	-0,29	(135/2, 131/2)
13.	$f_2(2340)$	2327,73	-0,52	(68, 66)
14.	$D_2^*(2460)^0 - 2462,6 \pm 0,6$	2467,75	+0,20	(70, 68)
15.	$D_2^*(2460)^\pm - 2464,3 \pm 1,6$	2467,75	+0,14	(70, 68)
16.	$\chi_{c2}(1P) - 3556,2$	3562,30	+0,17	(84, 82)
17.	$\chi_{c2}(2P) - 3927,2 \pm 2,6$	3911,83	-0,39	(88, 86)
18.	$B_2^*(5747)^0 - 5739 \pm 5$	5741,08	+0,04	(213/2, 209/2)
19.	$B_{s2}^*(5840)^0$	5849,92	+0,17	(215/2, 211/2)
20.	$\chi_{b2}(1P) - 9912,21$	9943,67	+0,32	(140, 138)
21.	$\Upsilon(1D) - 10163,7 \pm 1,4$	10158,68	-0,04	(283/2, 279/2)
22.	$\chi_{b2}(2P) - 10268,65$	10230,87	-0,37	(142, 140)

6. Барионный сектор

Барионный сектор разбивается относительно заряда на два множества когерентных подпространств: заряженные барионы с полуцелым спином (все барионы имеют полуцелый спин) из подпространств $\mathbf{H}_{\text{phys}}^{\pm}(b, 0)$; нейтральные барионы полуцелого спина (состояния из когерентных подпространств вида $\mathbf{H}_{\text{phys}}^0(b, 0)$). По соображениям, отмеченным выше, ограничимся здесь рассмотрением трёх фермионных линий спина 1/2, 3/2 и 5/2.

Таблица 4. Барионы: линия спина 1/2

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \bar{l})$
1.	$p - 938,27$	933,85	-0,47	(85/2, 42)
2.	$n - 939,56$	933,85	-0,60	(85/2, 42)
3.	$\Lambda - 1115,68$	1116,79	+0,09	(93/2, 46)
4.	$\Sigma - 1189,37$	1189,60	+0,02	(48, 95/2)
5.	$\Xi - 1314,86$	1316,08	+0,09	(101/2, 50)
6.	$\Lambda(1405)$	1395,03	-0,70	(52, 103/2)
7.	$N(1440)$	1448,94	+0,60	(53, 105/2)
8.	$N(1535)$	1531,72	-0,21	(109/2, 54)
9.	$\Lambda(1600)$	1588,19	-0,73	(111/2, 55)
10.	$\Delta(1620) \approx 1630$	1616,80	-0,80	(56, 111/2)
11.	$N(1650) \approx 1655$	1645,67	-0,56	(113/2, 56)
12.	$\Sigma(1660)$	1674,80	+0,89	(57, 113/2)
13.	$\Lambda(1670)$	1674,80	+0,28	(57, 113/2)
14.	$N(1710)$	1704,18	-0,34	(115/2, 57)
15.	$\Sigma(1750)$	1733,82	-0,92	(58, 115/2)
16.	$\Lambda(1800)$	1793,86	-0,34	(59, 117/2)
17.	$\Lambda(1810)$	1824,27	+0,78	(119/2, 59)
18.	$\Delta(1910) \approx 1890$	1885,84	-0,22	(121/2, 60)
19.	$\Lambda_c^+ - 2286,46$	2276,76	-0,42	(133/2, 66)
20.	$\Sigma_c(2455) - 2453,97 \pm 0,14$	2450,50	-0,16	(69, 137/2)
21.	$\Xi_c - 2467,93 \pm_{0,40}^{0,28}$	2486,01	+0,60	(139/2, 69)
22.	$\Xi'_c(2578)$	2557,81	-0,78	(141/2, 70)
23.	$\Lambda_c(2595)^+ - 2592,25 \pm 0,28$	2594,09	+0,07	(71, 141/2)
24.	$\Omega_c^0(2697)$	2704,46	+0,27	(145/2, 72)
25.	$\Xi_c(2790)$	2779,32	-0,38	(147/2, 73)
26.	$\Lambda_b^0 - 5620,2 \pm 1,6$	5660,60	+0,72	(105, 209/2)
27.	$\Sigma_b^+ - 5807,8 \pm 2,7$	5823,10	+0,26	(213/2, 106)
28.	$\Xi_b^0 - 5792,4 \pm 3,0$	5768,68	-0,40	(106, 211/2)
29.	$\Xi_b^- - 5792,4 \pm 3,0$	5768,68	-0,40	(106, 211/2)
30.	$\Sigma_b^- - 5815,2$	5823,10	+0,08	(213/2, 106)
31.	$\Lambda_b(5912)^0 - 5912,11 \pm 0,26$	5932,71	+0,35	(215/2, 107)
32.	$\Xi'_b(5935)^- - 5935,02 \pm 0,5$	5932,71	-0,04	(215/2, 107)
33.	$\Omega_b^- - 6048,0 \pm 1,9$	6043,34	-0,08	(217/2, 108)

Таблица 5. Барионы: линия спина 3/2

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \bar{l})$
1.	$\Delta(1232)$	1239,17	+0,58	(99/2, 48)
2.	$\Sigma(1385)$	1394,77	+0,70	(105/2, 51)
3.	$N(1520)$	1531,47	+0,75	(55, 107/2)
4.	$\Lambda(1520)$	1531,47	+0,75	(55, 107/2)
5.	$\Xi(1530)$	1531,47	+0,09	(55, 107/2)
6.	$\Delta(1600)$	1587,93	-0,75	(56, 109/2)
7.	$\Sigma(1670)$	1674,55	+0,27	(115/2, 56)
8.	$\Omega^- - 1672,45$	1674,55	+0,12	(115/2, 56)
9.	$\Lambda(1690)$	1703,93	+0,82	(58, 113/2)
10.	$N(1700)$	1703,93	+0,23	(58, 113/2)
11.	$\Delta(1700)$	1703,93	+0,23	(58, 113/2)
12.	$N(1720)$	1733,57	+0,79	(117/2, 57)
13.	$\Xi(1820)$	1824,01	+0,22	(60, 117/2)
14.	$N(1875)$	1885,59	+0,56	(61, 119/2)
15.	$\Lambda(1890)$	1885,59	-0,23	(61, 119/2)
16.	$N(1900)$	1916,76	+0,88	(123/2, 60)
17.	$\Delta(1920)$	1916,76	-0,17	(123/2, 60)
18.	$\Sigma(1940)$	1948,19	+0,42	(62, 121/2)
19.	$\Sigma_c(2520) - 2518,41 \pm 0,21_{0,19}$	2521,53	+0,12	(141/2, 69)
20.	$\Lambda_c(2625)^+ - 2628,11 \pm 0,19$	2630,37	+0,08	(72, 141/2)
21.	$\Xi_c(2645)$	2630,37	-0,55	(72, 141/2)
22.	$\Omega_c(2770)^0 - 2765,9 \pm 2,0$	2779,07	+0,33	(74, 145/2)
23.	$\Xi_c(2815) - 2816,6 \pm 0,9$	2816,89	+0,07	(149/2, 73)
24.	$\Sigma_b^{*+} - 5829,0 \pm 3,4$	5822,85	-0,10	(107, 211/2)
25.	$\Sigma_b^{*-} - 5836,4 \pm 2,8$	5822,85	-0,23	(107, 211/2)
26.	$\Lambda_b(5920)^0 - 5919,81 \pm 0,23$	5932,45	+0,21	(108, 213/2)
27.	$\Xi(5945)^0 - 5948,9 \pm 1,5$	5987,64	+0,65	(217/2, 107)
28.	$\Xi_b^*(5955)^- - 5955,33 \pm 0,13$	5987,64	+0,54	(217/2, 107)

Таблица 6. Барионы: линия спина 5/2

	Состояние и масса (эксп.)	Масса (теор)	Погр-сть %	$(l, \bar{l})$
1.	$N(1675)$	1674,04	-0,06	(58, 111/2)
2.	$N(1680) \approx 1685$	1674,04	-0,35	(58, 111/2)
3.	$\Sigma(1775)$	1762,95	-0,66	(119/2, 57)
4.	$\Lambda(1820)$	1823,5	+0,19	(121/2, 58)
5.	$\Lambda(1830)$	1823,5	-0,35	(121/2, 58)
6.	$\Delta(1905) \approx 1880$	1885,08	+0,27	(123/2, 59)
7.	$\Sigma(1915)$	1916,25	+0,06	(62, 119/2)
8.	$\Delta(1930) \approx 1950$	1947,67	-0,12	(125/2, 60)
9.	$\Xi(2030)$	2043,49	+0,66	(64, 123/2)
10.	$\Lambda(2110)$	2108,64	-0,06	(65, 125/2)
11.	$\Lambda_c(2880)^+ - 2881,53 \pm 0,35$	2892,77	+0,39	(76, 147/2)

7. Квантование массы

Таблицы I–VI показывают, что массы элементарных частиц пропорциональны массе электрона $m_e = 0,511 \text{ MeV}$ с точностью до 0,41%. Учитывая принцип эквивалентности массы и энергии, можно утверждать, что массовая формула

$$m^{(s)} = m_e \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(i + \frac{1}{2} \right),$$

задающая массу (энергию) состояния (циклическое представление (l, i)), в некотором смысле эквивалентна известному соотношению

$$E = h\nu,$$

где роль «кванта массы» играет масса электрона m_e .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными // УФН. 1999. Т. 169. С. 419–441.
2. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970.
3. Guzey V., Polyakov M.V. SU(3) systematization of baryons // arXiv:hep-ph/0512355 (2005).
4. Melde T., Plessas W., Sengl B. Quark-Model Identification of Baryon Ground and Resonant States // arXiv:0806.1454 [hep-ph] (2008).
5. Гейзенберг В. Природа элементарных частиц // УФН. 1977. Т. 121. С. 657–668.
6. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
7. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
8. Марков М.А. О трёх интерпретациях квантовой механики. М. : Наука, 1991.
9. Клышко Д.Н. Квантовая оптика: квантовые, классические и метафизические аспекты // УФН. 1994. Т. 164. С. 1187–1214.
10. Варламов В.В. Комплексный момент и спин-зарядовое гильбертово пространство // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 5–22.
11. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. P. 5008–5045.
12. Белинский А.В. Квантовая нелокальность и отсутствие априорных значений измеряемых величин в экспериментах с фотонами // УФН. 2003. Т. 173. С. 905–909.
13. Numbu Y. An Empirical Mass Spectrum of Elementary Particles // Prog. Theor. Phys. 1952. V. 7. P. 595–596.
14. Barut A.O. Lepton mass formula // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1251.
15. Mac Gregor M.H. Models for Particles // Lett. Nuovo Cim. 1970. V. 7. P. 211–214.
16. Shah G.N., Mir T.A. Pion and muon mass difference: a determining factor in elementary particle mass distribution // Mod. Phys. Lett. A. 2008. V. 23. P. 53.
17. Mir T.A., Shah G.N. Order in the mass spectrum of elementary particles // arXiv:0806.1130 [physics.gen-ph] (2008).
18. Greulich K.O. Calculation of the Masses of All Fundamental Elementary Particles with an Accuracy of Approx. 1% // J. Mod. Phys. 2010. V. 1. P. 300–302.

19. Chiatti L. A Possible Model for the Mass Spectrum of Elementary Particles // *Phys. Essays*. 2012. V. 25. P. 374–386.
20. Sidharth B.G. A Formula for the Mass Spectrum of Baryons and Mesons // *arXiv:physics/030601* (2003).
21. Sidharth B.G. A QCD Generated Mass Spectrum // *arXiv:physics/0309037* (2003).
22. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations // *Int. J. Theor. Phys.* 2003. V. 42. P. 583–633.
23. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations II: Arbitrary Spin Chains // *Int. J. Theor. Phys.* 2007. V. 46. P. 741–805.
24. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // *Int. J. Theor. Phys.* 2015. V. 54. P. 3533–3576.
25. Majorana E. Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario // *Nuovo Cimento*. 1932. V. 9. P. 335–344.
26. Гельфанд И.М., Яглом А.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца // *ЖЭТФ*. 1948. Т. 18. С. 703–733.
27. Esposito S. Searching for an equation: Dirac, Majorana and the others // *Annals of Physics*. 2012. V. 327. P. 1617–1644.
28. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М. : Мир, 1976.
29. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987.
30. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986.
31. Варламов В.В. Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // *Математические структуры и моделирование*. 2016. № 3(39). С. 5–23.
32. Varlamov V.V. Fundamental Automorphisms of Clifford Algebras and an Extension of Dąbrowski Pin Groups // *Hadronic J.* 1999. V. 22. P. 497–535.
33. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // *Математические структуры и моделирование*. 2001. Вып. 7. С. 114–127.
34. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // *Int. J. Theor. Phys.* 2001. V. 40. P. 769–805.
35. Varlamov V.V. The CPT Group in the de Sitter Space // *Annales de la Fondation Louis de Broglie*. 2004. V. 29. P. 969–987.
36. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // *Phys. Lett. B*. 2005. V. 631. P. 187–191.
37. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // *Int. J. Theor. Phys.* 2012. V. 51. P. 1453–1481.
38. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // *Adv. Appl. Clifford Algebras*. 2015. V. 25. P. 487–516.
39. Варламов В.В. Спинорная структура и периодичность алгебр Клиффорда // *Математические структуры и моделирование*. 2015. № 3(35). С. 4–20.
40. Koide Y. New view of quark and lepton mass hierarchy // *Phys. Rev. D*. 1983. V. 28. P. 252.
41. Rivero A., Gsponer A. The strange formula of Dr. Koide // *arXiv:hep-*

- ph/0505220 (2005).
42. Foot R. A note on Koide's lepton mass relation // arXiv:hep-ph/9402242 (1994).
43. Esposito S., Santorelli P. A Geometric Picture for Fermion Masses // arXiv:hep-ph/9603369 (1996).
44. Ольшевский А.Г. Результаты и перспективы нейтринных реакторных экспериментов // УФН. 2014. Т. 184. С. 539–544.
45. Бедняков В.А., Наумов Д.В., Смирнов О.Ю. Физика нейтрино и ОИЯИ // УФН. 2016. Т. 186. С. 233–263.
46. Patrignani C. *et al.* (Particle Data Group) // Chin. Phys. 2016. C. V. 40. 100001. URL: <http://pdg.lbl.gov>.

MASS QUANTIZATION AND LORENTZ GROUP

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. Mass spectrum of localized states of quantum micro-objects is studied in the framework of holistic (nonlocal) Heisenberg's scheme. As an object of a fundamental level (potential reality), the quantum micro-object exists outside of space-time. It is shown that state masses of lepton (except the neutrino) and hadron sectors of matter spectrum are proportional to the rest mass of electron with an accuracy of 0,41%.

Keywords: mass spectrum, Lorentz group, cyclic representations, mass formulae, mass quantization.

Дата поступления в редакцию: 19.01.2017

ВВЕДЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ В СХЕМУ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

В.А. Шапцев

профессор, д.т.н., профессор кафедры информационных систем,
e-mail: vashaptsev@ya.ru

Тюменский государственный университет

Аннотация. Предлагается новая структура аналитического представления схемы n независимых испытаний Бернулли посредством упорядоченных подмножеств m ($m < n$) номеров успешных и $n - m$ неуспешных испытаний. При этом вероятностная характеристика типа $P_n(m)$ определяется суммированием биномиальной формулы $p^m(1 - p)^{n-m}$ по всем таким подмножествам, а не простым умножением на число сочетаний C_n^m . Приведены соответствующие выражения для вероятности успехов с двумя и $k > 2$ исходами опытов, для случаев равных и разных вероятностей исходов в различных испытаниях. В этой символике получены выражения для расчёта соответствующих вероятностей заданного количества успешных испытаний при наличии зависимости вероятностей исходов от некоторого параметра, изменяющегося во времени (от испытания к испытанию), регулярно или случайно. Таким образом, создан базис для применения схемы зависимых испытаний к оценке вероятностных характеристик сложных стохастических систем, сетевой архитектуры, в частности, характеризующих некоторым изменяющимся показателем качества. В заключении приведено выражение для математического ожидания вероятности m успешных испытаний из n в случае случайного параметра, от которого зависят вероятности исходов. Формулируется гипотеза о возможности применения конечномерной характеристической функции случайного параметра в соответствующем выражении при экспоненциальной зависимости вероятности исхода опыта от случайного параметра.

Ключевые слова: независимые испытания Бернулли, упорядоченные подмножества номеров испытаний, зависимые испытания.

Введение

Работа посвящена представлению схемы независимых испытаний Бернулли упорядоченными подмножествами номеров испытаний с целью ввести в эту схему зависимость между испытаниями, отличную от цепей Маркова. В некоторых технических приложениях это более оправдано. Таким примером является монография [1], где рассматриваемый ниже подход использован в анализе векторов ошибок при передаче дискретных сообщений.

Введём следующие обозначения. $I_n = \{1, \dots, n\}$ — упорядоченное множество номеров испытаний (опытов). $I_m^{(k)} = \{i_1^{(k)}, \dots, i_m^{(k)}\}$ — k -ое упорядоченное подмножество конкретных номеров успешных испытаний. $I_{n-m}^{(k)} = \{j_1^{(k)}, \dots, j_{n-m}^{(k)}\}$ — k -ое упорядоченное подмножество конкретных номеров неуспешных испытаний. Здесь $k \in \{1, \dots, C_n^m\}$, $I_n = I_m^{(k)} + I_{n-m}^{(k)}$.

Ниже эти обозначения распространятся на все возможные модификации схемы независимых испытаний, имеющиеся в литературе (например, [2,3]): различные вероятности альтернативных исходов в испытаниях, несколько возможных исходов с одинаковыми и различными вероятностями их осуществления в испытаниях. Во второй части статьи предлагается введение зависимости между испытаниями посредством введения зависимости вероятностей исходов от некоторого параметра, зависящего от номера испытания регулярно или случайно.

1. Новые обозначения для классических схем независимых испытаний

1.1. Схема Бернулли

В схеме n независимых испытаний Бернулли с двумя исходами и неизменными условиями опытов вероятность m -кратного успеха выражается известной формулой (например, [2]): $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где p — вероятность успеха.

Представим это выражение по-другому, с учётом введённых обозначений:

$$P_n(m) = \sum_{k=1}^{C_n^m} \prod_{i \in I_m^{(k)}} p_i \prod_{j \in I_{n-m}^{(k)}} (1 - p_j). \quad (1)$$

1.2. Разные вероятности успеха в опытах

В случае, когда условия опытов меняются, то есть вероятности успеха в разных испытаниях не равны, когда имеем $p_1, \dots, p_n$, тогда вероятность m -кратного успеха равна коэффициенту при степени z^m аргумента производящей функции $f_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z)$, где $q_i = 1 - p_i$ [3, глава 4].

В предложенных выше обозначениях соответствующая вероятность выглядит также, как и (1).

1.3. Несколько возможных результатов испытания с неизменными вероятностями

Если в неизменных условиях проводится n испытаний и в результате каждого испытания возможно s альтернатив с вероятностями p_j , $j = 1, \dots, s$, то вероятность появления m_1 раз 1-го результата, $\dots$, m_s раз s -го результата в n испытаниях равна [2, глава 4]:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) = n! \prod_{j=1}^s p_j^{m_j} / m_j!. \quad (2)$$

В наших обозначениях эта вероятность имеет вид:

$$P_n(m_1, \dots, m_s) = n! \prod_{j=1}^s \left[\prod_{i \in I_{m_j}} p_{ij} \right] / m_j!, \quad (3)$$

где $\sum_{j=1}^s I_{m_j} = I_n$, p_{ij} — вероятность j -го исхода в i -ом испытании.

1.4. Несколько возможных исходов опытов в неоднородных условиях

Если условия опытов различны, т. е. в i -м опыте событие A_j имеет вероятность p_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, s$, то $P_n(m_1, \dots, m_s)$ равна коэффициенту при произведении $z^{m_1} \dots z^{m_s}$ в разложении производящей функции $f_n(z) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^s p_{ij} z^j$ [2].

Теперь относительно просто можно выразить только вероятность конкретной конфигурации исходов n испытаний:

$$P_n(I_{m_1}, \dots, I_{m_s}) = \prod_{j=1}^s \left[\prod_{i \in I_{m_j}} p_{ij} \right]. \quad (4)$$

Вероятность же

$$P_n(m_1, \dots, m_s) = \sum_{I_{m_1}} \dots \sum_{I_{m_s}} P_n(I_{m_1}, \dots, I_{m_s}). \quad (5)$$

Всего слагаемых в этой многократной сумме равно величине $n! / \prod_{j=1}^s m_j!$. Суммирование ведётся по всем возможным конфигурациям подмножеств типа I_{m_j} . При этом необходимо помнить, что все входящие в (6) подмножества взаимосвязаны и перебираются синхронно в связке $\sum_{k=1}^s I_{m_k} = I_n$.

Если говорить о практическом применении приведённых выражений, то в контексте развития суперкомпьютеров и эксафлопсных систем, при соответствующей значимости решаемой задачи, их вычислительная сложность не является решающим фактором.

2. Зависимые испытания

Для отображения зависимых испытаний можно воспользоваться некоторой (адекватной реалиям) зависимостью вероятности результата испытания от некоторого параметра μ : $p_i = p(\mu_i) = \varphi(\mu_i)$. Функция $\varphi(\mu)$ может являться

реальным трендом некоторого показателя или параметра системы и быть гипотетическим или экспериментально оцениваемым. Параметр или показатель μ может быть случайным, в том числе случайным процессом. Тогда возникает задача определения математических ожиданий рассматриваемых вероятностей, например, $\mathbf{E}\{P_n(I_m)\} = Q_n(I_m)$. Её решение может иметь как аналитический вид в случае возможности аналитических преобразований, так и оценку методом Монте Карло, если аналитические преобразования частично или полностью невозможны.

Рассмотрим с этих позиций подпункты 1.1–1.4.

2.1. Схема Бернулли

Схема Бернулли рождена для неизменных вероятностей ожидаемого исхода опыта в серии испытаний. Поэтому в контексте зависимости эта схема не имеет смысла. Хотя формула Бернулли (биномиальное распределение) в форме (1) ценна как базовая в ниже следующих рассуждениях.

2.2. Разные вероятности успеха

Из (2), заменив p_i и p_j на $p(\mu_i)$ и $p(\mu_j)$, получаем

$$P_n(m) = \sum_{k=1}^{C_n^m} \prod_{i \in I_m^{(k)}} p(\mu_i) \prod_{j \in I_{n-m}^{(k)}} (1 - p(\mu_j)). \quad (6)$$

При этом

$$\prod_{j \in I_{n-m}^{(k)}} (1 - p(\mu_j)) = 1 + (-1)^{s=1} \sum_{j=1}^{C_{n-m}^1} p(\mu_j) + (-1)^{s=2} \sum_{l=1}^{C_{n-m}^2} \prod_{j \in I_2^{(kl)}} p(\mu_j) + (-1)^{s=3} \dots + \quad (7)$$

$$+ (-1)^{s=n-m-1} \sum_{l=1}^{C_{n-m}^{n-m-1}} \prod_{j \in I_s^{(kl)}} p(\mu_j) + (-1)^{s=n-m} \prod_{j=1}^{C_{n-m}^{n-m}} p(\mu_j) = \quad (8)$$

$$= \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \sum_{l=0}^{C_{n-m}^s} \prod_{j \in I_s^{(kl)}} p(\mu_j). \quad (9)$$

Таким образом, в условиях зависимости вероятностей успеха при 2-х-альтернативном исходе испытания от значений некоторого параметра μ_i имеем, заменив второй индекс k на s :

$$P_n(m) = \sum_{k=1}^{C_n^m} \prod_{i \in I_m^{(k)}} p(\mu_i) \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \sum_{l=0}^{C_{n-m}^s} \prod_{j \in I_s^{(kl)}} p(\mu_j). \quad (10)$$

Здесь $I_s^{(kl)}$ — l -е сочетание s элементов подмножества $I_{n-m}^{(k)}$.

2.3. Несколько возможных результатов испытания с неизменными вероятностями

Этот случай, как и п/п 2.1, не имеет смысла рассматривать, так как вероятности в этом параграфе изменяются с изменением параметра μ .

2.4. Несколько возможных исходов опытов в неоднородных условиях

Ограничимся здесь только выражением для вероятности определённой конфигурации результатов n экспериментов. Введя обозначение $p_{ij} = p_j(\mu_i)$, получаем из (4)

$$P_n(I_{m_1}, \dots, I_{m_s}) = \prod_{j=1}^s \left[\prod_{i \in I_{m_j}} p_j(\mu_i) \right]. \quad (11)$$

И, наконец,

$$P_n(m_1, \dots, m_s) = \sum_{\{I_{m_1}\}} \dots \sum_{\{I_{m_s}\}} \prod_{j=1}^s \left[\prod_{i \in I_{m_j}} p_j(\mu_i) \right], \quad (12)$$

где, в частности, $\{I_{m_2}\}$ — подмножество сочетаний 2-х номеров испытаний, соответствующих определённому исходу, мощностью C_n^2 .

Заметим, что нередко именно конкретная конфигурация исходов в последовательности испытаний (появление неисправности определённых компонентов системы) имеет смысл и интерес как с инженерной, так и с мониторинговой точек зрения. Математическое ожидание соответствующих вероятностей, типа (2.4)...(2.7), имеет значение в оценке надёжностных характеристик и эксплуатационной готовности при сравнении технических решений в сложных и больших системах.

2.5. Стохастический параметр, сопровождающий испытания

Рассмотрим случай, когда параметр, от которого зависят вероятности исходов испытаний, имеет случайный характер и вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ имеет конечномерную функцию или конечномерную плотность распределения вероятностей. Тогда исследователя может интересовать математическое ожидание $E\{\dots\}$ вероятностей (7), (8) или (10). Ограничимся здесь иллюстрацией этой операции на примере выражения (7):

$$E\{P_n(m)\} = \sum_{k=1}^{C_n^m} \sum_{s=0}^{n-m} \sum_{l=0}^{C_{n-m}^s} E\left\{ \prod_{i \in I_m^{(k)}} \prod_{j \in I_s^{(kl)}} p(\mu_i) p(\mu_j) \right\}. \quad (13)$$

Если вероятности зависят от параметра экспоненциально, то математическое ожидание в (11) становится конечномерной характеристической функцией случайного параметра. Если вероятности зависят от параметра, как степени целого показателя, то мы будем иметь дело со смешанными моментами случайного параметра. Рассмотрение этих и других вариантов зависимости вероятностей исходов испытаний от некоторого показателя системы, моделируемой схемой последовательности испытаний, может являться предметом дальнейших исследований.

Заключение

Сферами применения результатов пункта 2 являются следующие прикладные задачи. Надёжность сетевых объектов, отображаемых графами со случайными рёбрами: сети связи, сети передачи данных, сеть трубопроводов, сеть электрических проводов и так далее. Возможно применение этих выражений при оценке качества передачи данных по каналам связи со случайными параметрами, вероятности безошибочной передачи сообщений в командных системах. Автор намерен получить на базе этих результатов конечные выражения для математических ожиданий при некоторых конкретных зависимостях $p(\mu_i)$ и случайном параметре μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Коржик В.И., Финк Л.М. Кодирование дискретных сообщений в каналах с переменной структурой. М. : Связь, 1975. 250 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев : Высшая школа, 1979. 408 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.Ф. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М. : АКАДЕМИЯ, 2003. 448 с.
4. Райгородский А.М. Модели случайных графов. М. : МЦНМО, 2011. 136 с.

ABOUT DEPENDENCE IN THE BERNOULLI TRIALS**V.F. Shaptsev**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vashaptsev@ya.ru

Tyumen State University

Abstract. Analytical representation of scheme is discussed in independent Bernoulli trials by means of the ordered subsets of m ($m < n$) numbers of successful and $n - m$ numbers of failed tests. The probabilistic description of $P_n(m)$ is determined by summing the binomial formula $p^m(1 - p)^{n-m}$ for all such subsets rather than a simple multiplication by the number of combinations C_n^m . Some appropriate expressions are given for the probability of success with $k > 2$ outcome of the experiments for the cases of equal and different probabilities of outcomes in different trials. In these symbolics, expressions for calculating the corresponding probabilities of the number of successful tests is specified in the presence of dependence of outcomes probabilities on a parameter varying in time (from test to test), regularly or accidentally. Thus, the basis is created for application of the scheme of dependent tests to estimate the probabilistic characteristics of complex stochastic systems, network architectures, in particular, characterized by some varying measure of quality. In conclusion, we present the expression for the mathematical expectation of the probability of m successful trials out of n in the case of random parameter on which the probabilities of outcomes depend. Hypothesis about the possibility of using finite-dimensional characteristic function of the random parameter in the corresponding expression for the case of exponential dependence of the probability of the outcome from the random parameter is written.

Keywords: independent Bernoulli trials, ordered subsets of tests numbers, dependent tests.

Дата поступления в редакцию: 11.02.2017

THE METHOD OF SPHERICAL HARMONICS FOR INTEGRAL TRANSFORMS ON A SPHERE

V.N. Stepanov

Associate Professor, Ph.D. (Math), e-mail: stpnv@yandex.ru

Omsk State Technical University

Abstract. The integral convolution-type equations of the first kind on the sphere are important for the geometric tomography. They have been studied by many researchers. In this paper, we consider the uniqueness and stability of solutions of such equations. We prove the uniqueness of the solution for the equation with the kernel of convolution type and obtain a formula for the average value of a function on a subsphere. The latter is used for the deriving of the inversion formula of Radon spherical transformation on sphere. For the Blaschke-Levy equation and for the convolution type singular integral equations of the linear transfer theory, the uniqueness theorems are proved and find estimates for the stability of solutions are found. In all the cases we use the expansion of a function into series of spherical harmonics.

Keywords: geometric tomography, convolution-type equations of the first kind, uniqueness, stability, Radon spherical transform, inversion formula, Blaschke-Levy equation, equation with a singular kernel.

1. Introduction and preliminaries

Let S^{n-1} be the unit sphere in $\mathbb{R}^n$, $|S^{n-1}|$ be its volume, $u, v \in S^{n-1}$, $u^\perp$ be the orthogonal complementary subspace for u , $S_u^{n-2} = S^{n-1} \cap u^\perp$ be the big subsphere, $\langle, \rangle$ be the inner product and σ_{n-1} be the spherical $(n-1)$ -dimensional Lebesgue measure on S^{n-1} . In the geometric tomography, equations of the first kind with the following convolution type integral operators on a sphere are important:

$$(Kz)(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) z(v) \sigma_{n-1}(dv), u \in S^{n-1}.$$

In the cases $K(\langle u, v \rangle) = \delta(\langle u, v \rangle)$, where $\delta(t)$ is the delta-function at zero, $K(\langle u, v \rangle) = |\langle u, v \rangle|$, $K(\langle u, v \rangle) = |\langle u, v \rangle|^\alpha$, $K(\langle u, v \rangle) = \chi(\langle u, v \rangle)$, where $\chi(t)$ is Heaviside's function, the integral transforms are well-known. They are called Radon spherical transform $\mathcal{R}z$, cosine-transform $\mathcal{C}z$, α -cosine-transform $\mathcal{C}_\alpha z$, and hemispherical transform $\mathcal{H}z$, respectively.

The transforms above have the following geometrical meaning: if $(n-1)z(v) = \rho^{n-1}(v)$, where $\rho(v)$, is the radial function of a star body $\mathbf{B}$, then the Radon transform $(\mathcal{R}z)(u)$ is the volume of the intersection of $\mathbf{B}$ with the subspace $u^\perp$. If

$z(v)$ is the product of principal curvature radii of the closed smooth convex surface $\partial\mathbf{B}$ in a point with normal v , then $2(\mathcal{C}z)(u)$ is the $(n-1)$ -dimensional volume of the projection of the convex body $\mathbf{B}$ onto the subspace $u^\perp$, and $(\mathcal{H}z)(u)$ is the area of the "lit" part of the surface $\partial\mathbf{B}$. Thus the inversion formulas for the integral transforms and the uniqueness and stability of the solution of the integral equations are of great interest.

Integral transforms with the kernels $|\langle u, v \rangle|$, $|\langle u, v \rangle|^\alpha$, $\chi(\langle u, v \rangle)$ are closely related to the Radon spherical transform. For example, the cosine transformation $\mathcal{C}$ is connected with the Radon transform $\mathcal{R}$ via the Laplace-Beltrami operator Δ_S on S^{n-1} due to the identity $\square\mathcal{C} = \mathcal{R}$, where $\square = (\Delta_S + n - 1)/(2 \cdot |S^{n-2}|)$ [10, 11]. The expansion of functions into series of spherical harmonics is a powerful tool in the investigation of the convolution-type equations (see, for example, [18]). Thus the following theorem is useful.

Theorem 1 (Funk-Hecke theorem, [3]). *Let $K(t)$ be a bounded measurable function on $[-1, 1]$ and $Y_k(u)$ be a spherical harmonic of order k . Then*

$$\int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) Y_k(v) \sigma_{n-1}(dv) = \lambda_k Y_k(u), \quad u \in S^{n-1}, \quad (1)$$

where

$$\lambda_k = \frac{|S^{n-2}| \Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \int_{-1}^1 K(t) C_k^{(n/2-1)}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \quad (2)$$

and $C_k^{(n/2-1)}(t)$ are the Gegenbauer polynomials.

The Funk-Hecke formula can be extended onto the case of the kernel $K(t) \in L_1[-1, 1]$ (see [3]).

In this paper, we apply the method of spherical harmonics to the problem of uniqueness for the solutions of convolution-type equations of the first kind. We got the inversion formula for the spherical Radon transform on S^3 and proved estimates of the solutions stability of α -cosine transform and equation with singular kernel.

2. Uniqueness of the solution of the equation for measure

We consider the equation of the first kind

$$f(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) \mu(dv), \quad (3)$$

where μ is the unknown signed measure on S^{n-1} . Let $\{Y_k(u)\}$ be a complete system of spherical functions on S^{n-1} and $\mathcal{M}$ be Banach space of signed measures (charges) on S^{n-1} . Let us introduce moments of the signed measure with respect to the system $\{Y_k(u)\}$:

$$\mu_k = \int_{S^{n-1}} Y_k(u) \mu(du). \quad (4)$$

Lemma 1. *The signed measure μ on S^{n-1} is uniquely defined by its moments μ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, with respect to system $\{Y_k(u)\}$.*

Proof. Let μ_1 and μ_2 be two measures whose moments coincide. Set $\mu = \mu_1 - \mu_2$. It is sufficient to prove that the equalities

$$\int_{S^{n-1}} Y_k(u) \mu(du) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

imply $\mu = 0$. Any polynomial is a linear combination of spherical harmonics on S^{n-1} . It follows from Weierstrass's Theorem that the linear span of spherical harmonics is dense in the Banach space of all continuous functions on the sphere

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(u) \mu(du) = 0$$

for any continuous function $\varphi(u) \in C(S^{n-1})$. Thus $\mu = 0$, since the space of measures is dual to the space of continuous functions. ■

Theorem 2. *If $K(\langle u, v \rangle) \in L_1[-1, 1]$ and the system of its eigenfunctions is complete in $L_1(S^{n-1})$, then the equation (3) admits at most one solution in $\mathcal{M}$.*

Proof. Multiplying equation (3) by $Y_k(u)$, integrating it over the Lebesgue measure σ_{n-1} , and applying Fubini's theorem, we get:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} f(u) Y_k(u) \sigma_{n-1}(du) &= \int_{S^{n-1}} Y_k(u) \left(\int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) \mu(dv) \right) \sigma_{n-1}(du) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \sigma_{n-1}(du) \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) Y_k(u) \mu(dv) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) Y_k(u) \sigma_{n-1}(du) \right) \mu(dv). \end{aligned}$$

According to Funk-Hecke formula (1),

$$\int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) Y_k(v) \sigma_{n-1}(dv) = \lambda_k Y_k(u), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where λ_k same for any spherical harmonics of order k , $k = 0, 1, 2, \dots$. This equality together with (4) imply

$$f_k = \int_{S^{n-1}} f(u) Y_k(u) \sigma_{n-1}(du) = \lambda_k \mu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Since the system of eigenfunctions is complete, $\lambda_k \neq 0$. Hence the Fourier coefficients f_k of the function $f(u)$ uniquely define the moments of μ by the equality $\mu_k = f_k / \lambda_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Applying Lemma 1, we conclude that the measure μ is uniquely determined by its moments. ■

3. The average of a function over subspheres and spherical transform of harmonics

Let u be the pole of S^{n-1} , $v \in S^{n-1}$ and $\gamma = \widehat{(u, v)}$. Point $v \in S^{n-1}$ can be presented as $v = (v' \sin \gamma, \cos \gamma)$, where $v' \in S_u^{n-2} = S^{n-1} \cap u^\perp$.

The Lebesgue measure σ_{n-1} on sphere S^{n-1} and Lebesgue measure $\sigma_{n-2,\gamma}$ on subsphere $S_\gamma^{n-2} = \{v \in S^{n-1} : \langle u, v \rangle = \cos \gamma\}$ are subject to the equality $\sigma_{n-1}(dv) = \sin^{n-2} \gamma d\gamma \sigma_{n-2,\gamma}(dv'), 0 \leq \gamma \leq \pi/2$ [12]. For a function $f(v)$ on S^{n-1} we define its average value on the subsphere S_γ^{n-2} as

$$\tilde{f}(\gamma, u) = \frac{1}{|S_\gamma^{n-2}|} \int_{S_\gamma^{n-2}} f(v) \sigma_{n-2,\gamma}(dv).$$

Since $|S_\gamma^{n-2}| = \sin^{n-2} \gamma |S^{n-2}|$ and $\sigma_{n-2,\gamma}(dv) = \sigma_{n-2,\gamma}(\sin \gamma dv') = \sin^{n-2} \gamma \sigma_{n-2}(dv')$, if $\gamma = \text{const}$, $v' \in S_u^{n-2}$, we have

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\gamma, u) &= \frac{1}{|S_\gamma^{n-2}|} \int_{S_\gamma^{n-2}} f(v) \sigma_{n-2,\gamma}(dv) = \\ &= \frac{1}{\sin^{n-2} \gamma |S^{n-2}|} \int_{S_u^{n-2}} f(v' \sin \gamma, \cos \gamma) \sin^{n-2} \gamma \sigma_{n-2}(dv') = \\ &= \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S_u^{n-2}} f(v' \sin \gamma, \cos \gamma) \sigma_{n-2}(dv'). \end{aligned} \quad (5)$$

We use the δ -function to obtain the formula for the average. Let us consider the integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(|y| - 1) \cdot \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma) f(y) dy,$$

where $\delta(|y| - 1) \cdot \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma)$ is the direct product of the delta functions and $f(y)$ is the smooth finite continued of $f(v)$, $v \in S^{n-1}$, in the area $y \in \mathbb{R}^n : 0 < r < |y| < R, 0 < r < 1 < R$.

According to the formula [5],

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(P(x)) f(x) dx = \int_{P(x)=0} \frac{f(x) d\sigma_x}{|DP(x)|},$$

where $P(x) = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)\} = \{0, 0, \dots, 0\}$ is the $(n - k)$ -surface in $\mathbb{R}^n$, $|DP| = \sqrt{\det \langle \nabla p_i, \nabla p_j \rangle}$ is the square root of the Gram determinant of the vectors $\{\nabla p_1(x), \nabla p_2(x), \dots, \nabla p_k(x)\}$, $d\sigma$ is the element of surface area $P(x) = \bar{0}$, for $p_1(y) = \delta(|y| - 1)$, $p_2(y) = \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma)$ we get:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(|y| - 1) \cdot \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma) f(y) dy &= \int_{|y|=1, \langle x/|x|, y \rangle = \cos \gamma} \frac{f(y) \sigma_{n-2,\gamma}(dy)}{\sqrt{1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2 |y|^2}}} = \\ &= \int_{|y|=1, \langle x/|x|, y \rangle = \cos \gamma} \frac{f(y) \sigma_{n-2,\gamma}(dy)}{\sin \gamma}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\gamma, u) &= \frac{1}{\sin^{n-2} \gamma |S^{n-2}|} \int_{\langle u, v \rangle = \cos \gamma} f(v) \sigma_{n-2, \gamma}(dv) = \\
&= \frac{1}{\sin^{n-3} \gamma |S^{n-2}|} \int_{\langle u, v \rangle = \cos \gamma} \frac{f(v) \sigma_{n-2, \gamma}(dv)}{\sin \gamma} = \\
&= \frac{1}{\sin^{n-3} \gamma |S^{n-2}|} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(|y| - 1) \cdot \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma) f(y) dy \Big|_{x=u} = \quad (6) \\
&= \frac{1}{\sin^{n-3} \gamma |S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \delta(\langle x/|x|, y \rangle - \cos \gamma) f(y) \sigma_{n-1}(dy) \Big|_{x=u}.
\end{aligned}$$

To find out the average value of spherical harmonics $Y_k(u)$, let us use the Funk-Hecke formula and (6). We have:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_k(\gamma, u) &= \frac{1}{\sin^{n-3} \gamma |S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \delta(\langle x/|x|, v \rangle - \cos \gamma) Y_k(v) \sigma_{n-1}(dv) \Big|_{x=u} = \\
&= \frac{Y_k(u)}{\sin^{n-3} \gamma |S^{n-2}|} \cdot \frac{|S^{n-2}| \Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \cdot \int_{-1}^1 \delta(t - \cos \gamma) C_k^{(n/2-1)}(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = \\
&= \frac{\Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\sin^{n-3} \gamma \Gamma(k+n-2)} \cdot C_k^{(n/2-1)}(\cos \gamma) \sin^{n-3} \gamma Y_k(u) = \\
&= \frac{\Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \cdot C_k^{(n/2-1)}(\cos \gamma) Y_k(u).
\end{aligned}$$

Thus, the average value of the spherical harmonic $Y_k(u)$ over the subsphere $S_\gamma^{n-2} = \{v \in S^{n-1} : \langle u, v \rangle = \cos \gamma\}$ is equal to

$$\tilde{Y}_k(\gamma, u) = \frac{\Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} C_k^{(n/2-1)}(\cos \gamma) Y_k(u). \quad (7)$$

For the spherical Radon transform of the spherical harmonics $Y_{2k}(u)$, formula (7) means that

$$(\mathcal{R}Y_{2k})(u) = \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S_u^{n-2}} Y_{2k}(v) \sigma_{n-2}(dv) = \frac{\Gamma(n-2) \Gamma(2k+1)}{\Gamma(2k+n-2)} C_{2k}^{(n/2-1)}(0) Y_{2k}(u). \quad (8)$$

4. The inversion formula for Radon spherical transform on S^3

The results concerning the Radon transform on $\mathbb{R}^n$ at Riemannian manifolds of negative and positive curvature are given in the monographs [6], [9], [14] and in the article of [17] B. Rubin. The central point of the Radon transform is the reconstruction of a function by its integrals on submanifolds. Starting with the classical results by Funk [13], Radon [16], a lot of different variants of inversion formulas for Radon spherical transform and the related integral transforms were

obtained. The history of the inversion formulas can be found in the article [17] by B. Rubin. In the case $n \geq 3$, the inversion formula for the spherical Radon transform $\mathcal{R}$ was obtained by Helgason in 1959, but it was not published until 1990. It is presented in [14], Theorem 3.13, p. 54. Note that the Radon transform is used in the solution of the inverse problems of the scattering theory [15]. The problem is to restore the shape, size, and the electromagnetic parameters of the scattering body. Our goal is to derive the inversion formula for the spherical Radon on S^3 by the method of spherical harmonics.

Theorem 3. *If $z(u)$ is a sufficiently smooth even function on S^3 , then the inversion formula for the spherical Radon transform on S^3*

$$(\mathcal{R}z)(u) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^3 \cap u^\perp} z(v) \sigma_2(dv)$$

has the following form:

$$z(u) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}z)(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0}.$$

Proof. The average of the spherical harmonic $Y_{2k}(u)$ on the subsphere $S_u^2 = S^3 \cap u^\perp$ (i.e., the spherical Radon transform on S^3) is given by the formula (8). If $n = 4$, $C_{2k}^{(1)}(0) = (-1)^k$, hence

$$(\mathcal{R}Y_{2k})(u) = \tilde{Y}_{2k}(\pi/2, u) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2k+1)}{\Gamma(2k+2)} C_{2k}^{(1)}(0) Y_{2k}(u) = \frac{(-1)^k}{2k+1} Y_{2k}(u). \quad (9)$$

We claim that

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}Y_{2k})(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0}$$

coincides with $Y_{2k}(u)$.

We transform the integral and use the formulas (5) and (7):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}Y_{2k})(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{2(-1)^k}{2\pi(2k+1)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle > \sqrt{t}} Y_{2k}(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle > \sqrt{t}} Y_{2k}(v' \sin \gamma, \cos \gamma) \sin^2 \gamma \cos \gamma \sigma_2(dv') d\gamma \Big|_{t=0} = \frac{4\pi(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cdot \\ & \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\arccos \sqrt{t}} \sin^2 \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_u^{n-2}} Y_{2k}(v' \sin \gamma, \cos \gamma) \sigma_2(dv') \right) d\gamma \Big|_{t=0} = \quad (10) \\ &= \frac{4(-1)^k}{2k+1} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\arccos \sqrt{t}} \tilde{Y}_{2k}(\gamma, u) \sin^2 \gamma \cos \gamma d\gamma \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\arccos \sqrt{t}} C_{2k}^{(1)}(\cos \gamma) \sin^2 \gamma \cos \gamma d\gamma \Big|_{t=0} \cdot Y_{2k}(u). \end{aligned}$$

Let $I(t)$ denote the second derivative of the integral. We find it by differentiating with the respect to the parameter t .

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\arccos \sqrt{t}} C_{2k}^{(1)}(\cos \gamma) \sin^2 \gamma \cos \gamma d\gamma = \frac{d}{dt} \left[-\frac{C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})(1-t)\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \right]' = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\sqrt{1-t} C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t}) \right]' = \frac{C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} - \frac{\sqrt{1-t}}{2} \cdot \frac{dC_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{dt} = \\ &= \frac{C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} - \frac{\sqrt{1-t}}{4\sqrt{t}} \cdot \frac{dC_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{d\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

For the Gegenbauer polynomials there is the following differentiation formula [3]:

$$(1-t^2) \frac{dC_{2k}^{(1)}(t)}{dt} = (2k+2)tC_{2k}^{(1)}(t) - (2k+1)C_{2k+1}^{(1)}(t).$$

Applying it, we get

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} - \frac{\sqrt{1-t}}{4\sqrt{t}(1-t)} \left[(2k+2)\sqrt{t}C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t}) - (2k+1)C_{2k+1}^{(1)}(\sqrt{t}) \right] = \\ &= \frac{C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} - \frac{(2k+2)C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} + \frac{(2k+1)C_{2k+1}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = \\ &= -\frac{(2k+1)C_{2k}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{1-t}} + \frac{(2k+1)C_{2k+1}^{(1)}(\sqrt{t})}{4\sqrt{t}\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

It follows from the equality [3]

$$\begin{aligned} C_{2k+1}^{(1)}(s) &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (1)_{2k+1-m} (2s)^{2k+1-2m}}{m!(2k+1-2m)!} = \frac{(1)_{2k+1} (2s)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^{k-1} (1)_{k+2} (2s)^3}{3!(k-1)!} + \frac{(-1)^k (1)_{k+1} (2s)^1}{1!(k)!}, \end{aligned}$$

where $(1)_p = \Gamma(p+1)/\Gamma(1) = p!$ that

$$\begin{aligned} \left. \frac{C_{2k+1}^{(1)}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \right|_{t=0} &= \frac{2(-1)^k (1)_{k+1}}{1!k!} = \frac{2(-1)^k \Gamma(k+2)}{\Gamma(1)k!} = \frac{2(-1)^k (k+1)!}{k!} = \\ &= 2(-1)^k (k+1). \end{aligned}$$

Thus, we get $I(0)$:

$$I(0) = \frac{(2k+1) \left[-C_{2k}^{(1)}(0) + 2(-1)^k (k+1) \right]}{4} = \frac{(-1)^k (2k+1)^2}{4} \quad (11)$$

because $C_{2k}^{(1)}(0) = (-1)^k$.

According to formula (9), (10), (11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}Y_{2k})(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0} &= \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2} \cdot \frac{(-1)^k (2k+1)^2}{4} Y_{2k}(u) = \\ &= Y_{2k}(u), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

This proves the inversion formula for the spherical harmonics $Y_{2k}(u)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Let $z(u)$ be a sufficiently smooth even function on S^3 . Let us expand it into series of spherical harmonics of even order:

$$z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k}(u).$$

Its Radon transform is

$$(\mathcal{R}z)(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{R}Y_{2k})(u).$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}z)(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\langle u, v \rangle^2 > t} (\mathcal{R}Y_{2k})(v) |\langle u, v \rangle| \sigma_3(dv) \Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k}(u) = z(u) \end{aligned}$$

and we get the inversion formula for the spherical Radon transform of an even smooth function on S^3 . ■

5. The estimate of the stability of the equation Blaschke-Levy solution

Let us consider the Blaschke-Levy equation (α -cosine transform)

$$f(u) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} |\langle u, v \rangle|^\alpha z(v) \sigma_2(dv), \quad u \in S^2, \quad (12)$$

where $\sigma_2(\cdot)$ is the Lebesgue measure on S^2 , $z(u)$ is an even function on S^2 , $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0, 2, 4, \dots, 2m, \dots$, $m \in \mathbb{N}$. We shall formulate the restrictions on $f(u)$ later assuming now that $f(u)$ is a sufficiently smooth even function.

Eigenvalues of the operator (12) can be found by the Funk-Hecke formula (2):

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |t|^\alpha C_k^{(1/2)}(t) dt.$$

The Gegenbauer polynomials $C_k^{(1/2)}(t)$ coincide with the Legendre polynomials $P_k(t)$, which satisfy the condition $P_k(-t) = (-1)^k P_k(t)$. Consequently, eigenfunctions of the equation (12) are spherical harmonics $Y_{2k}(u)$ of even order and the

corresponding eigenvalues λ_{2k} are determined by the integral

$$\lambda_{2k} = \int_0^1 t^\alpha P_{2k}(t) dt.$$

This integral converges at $\alpha > -1$ and its value is given in [4]:

$$\lambda_{2k} = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4) \cdot \dots \cdot (\alpha-2k+2)(\alpha-2k+4)}{(\alpha+1)(\alpha+3) \cdot \dots \cdot (\alpha+2k-1)(\alpha+2k+1)}.$$

Expanding the function $f(u)$ over the system of spherical functions $\{Y_{2k}(u)\}$

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k}(u),$$

where, by the Laplace formula [20],

$$Y_{2k}(u) = \frac{4k+1}{4\pi} \int_{S^2} P_{2k}(\langle u, v \rangle) f(v) \sigma_2(dv).$$

we get the solution of the equation (5.1) in a form of series:

$$z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} Y_{2k}(u),$$

where

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{\lambda_{2k}} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+3) \cdot \dots \cdot (\alpha+2k-1)(\alpha+2k+1)}{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4) \cdot \dots \cdot (\alpha-2k+2)(\alpha-2k+4)}.$$

If $\alpha > -1$ is not an even nonnegative number, then the equation (5.1) has not more than one solution.

Let us estimate the stability. Since the Legendre polynomials $P_{2k}(\langle u, v \rangle)$ are spherical functions, we have

$$P_{2k}(\langle u, v \rangle) = \frac{(-1)^\ell}{[2k(2k+1)]^\ell} \cdot \Delta_S^\ell P_{2k}(\langle u, v \rangle).$$

The surface Laplace operator S is self-adjoint. Hence

$$Y_{2k}(u) = \frac{(-1)^\ell(4k+1)}{4\pi[2k(2k+1)]^\ell} \int_{S^2} P_{2k}(\langle u, v \rangle) \Delta_S^\ell f(v) \sigma_2(dv).$$

Together with the Cauchy-Schwartz inequality and the inequality $\|P_{2k}(\langle u, v \rangle)\|_{L_2[-1,1]} \leq C_1 k^{-1/2}$, $C_1 = \text{const}$ [20], this implies

$$\begin{aligned} \|Y_{2k}(u)\|_{L_2(S^2)} &\leq \frac{(4k+1)}{4\pi[2k(2k+1)]^\ell} \|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^2)} \cdot \|P_{2k}(\langle u, v \rangle)\|_{L_2[-1,1]} \leq \\ &\leq C_2 \cdot (2k)^{-2\ell+1/2} \|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^2)}, \quad C_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

It follows from the above inequality that

$$\|Y_{2k}(u)\|_{L_2(S^2)}^2 \leq C_3 \cdot k^{1-4\ell} \|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^2)}^2, \quad C_3 = \text{const.}$$

Let us estimate the norm of the solution $z(u)$ of the equation (12) in $L_2(S^2)$.

$$\begin{aligned} \|z(u)\|_{L_2(S^2)} &= \sqrt{\int_{S^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} Y_{2k}(u) \right)^2 \sigma_2(du)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k}^2 \|Y_{2k}(u)\|_{L_2(S^2)}^2} \leq \\ &\leq C \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k}^2 k^{1-4\ell} \|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^2)}^2}, \quad C = \text{const.} \end{aligned}$$

To analyze the series $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k}^2 k^{1-4\ell}$ on the convergence we use the Gaussian criterion. The ratio

$$\frac{\beta_{2k}}{\beta_{2k+2}} = \frac{\alpha_{2k}^2}{\alpha_{2k+2}^2} \cdot \frac{(k+1)^{4\ell-1}}{k^{4\ell-1}} = \frac{(1 - \alpha/2k)^2 (1 + 1/k)^{4\ell-1}}{[1 + (\alpha + 3)/2k]^2}$$

is equivalent to

$$\frac{\beta_{2k}}{\beta_{2k+2}} = 1 + \frac{4\ell - 2\alpha - 4}{k} + \frac{\nu_k(\ell, \alpha)}{k^2},$$

where $\nu_k(\ell, \alpha)$ is bounded. By the Gaussian criterion, the series converges if $\mu = 4\ell - 2\alpha - 4 > 1$, i.e. if $\ell > (2\alpha + 5)/4$. Thus we obtain the estimates for the solution of (12) depending on α .

Theorem 4. *If $f(u) \in C^{2\ell}(S^{n-1})$, then for any $\alpha > -1, \alpha \neq 0, 2, 4, \dots, 2m$, $m \in \mathbb{N}$, there exists the unique solution of class $L_2(S^2)$ for the equation (12). Moreover, if $-1 < \alpha < -0.5$, then $\|z(u)\|_{L_2(S^2)} \leq c_1 \|\Delta_S f(u)\|_{L_2(S^2)}$; if $(4k - 1)/2 \leq \alpha < (4k + 3)/2$, then $\|z(u)\|_{L_2(S^2)} \leq c_\ell \|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^2)}$, where $\ell = k + 2, k = 0, 1, 2, \dots$.*

6. Equations with singular kernels on S^{n-1}

The analysis of some kinetic equations in the neutron transport theory [7] lead to the problem of the determination of the scattering indicatrix $z(v, t)$ from the equation

$$f(u, t) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) z(v, t) \sigma_{n-1}(dv), \quad u \in S^{n-1}, \quad t \geq 0.$$

In particular, the following equation with singular kernel was obtained in [1]:

$$f(u) = \int_{S^{n-1}} \frac{z(v) \sigma_{n-1}(dv)}{1 - \langle u, v \rangle}.$$

We consider a more general equation

$$f(u) = \int_{S^{n-1}} \frac{z(v) \sigma_{n-1}(dv)}{[1 - \langle u, v \rangle]^\alpha}. \quad (13)$$

If $\alpha < (n-1)/2$, then the kernel $K(t) = (1-t)^{-\alpha}$ satisfies condition [2]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{(1-t)^\alpha} &= \int_{-1}^1 (1-t)^{(n-2\alpha-3)/2} (1+t)^{(n-3)/2} dt = \\ &= 2^{n-1-\alpha} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-2\alpha-1}{2}\right) < \infty, \end{aligned}$$

where $B(x, y)$ is the beta-function. Thus we may use formula (2) to find the eigenvalues [19, p. 431]:

$$\lambda_k = \frac{|S^{n-2}| \Gamma(n-2) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \int_{-1}^1 (1-t)^{(n-2\alpha-3)/2} (1+t)^{(n-3)/2} C_k^{(n/2-1)}(t) dt.$$

We use the following asymptotic formula for the Gegenbauer polynomials $C_k^{(n/2-1)}(t)$ as $k \rightarrow \infty$, which was found in the paper [8]:

$$\begin{aligned} C_k^{(n/2-1)}(t) &\sim \frac{2^{n/2-1} \Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{\pi} (n-3)!} \cdot \frac{(k+n-3)!}{k! k^{n/2-1}} (1-t^2)^{-n/4+1/2} \cdot \\ &\cdot \cos[(k+n/2-1) \arccos t + (2\pi - n\pi)/4], \quad -1 < t < 1, n \geq 3. \end{aligned}$$

It follows that the eigenvalues are subject to the following asymptotic formula:

$$\begin{aligned} \lambda_k &\sim \frac{2^{n/2} \pi^{(n-2)/2}}{k^{n/2-1}} \cdot \\ &\cdot \int_{-1}^1 (1-t)^{n/4-\alpha-1} (1+t)^{n/4-1} \cos[(k+n/2-1) \arccos t + (2\pi - n\pi)/4] dt \end{aligned}$$

as $k \rightarrow \infty$. The integral converges if $\alpha < n/4$.

Due to the fast oscillation of the integrand, the integral is small for large k . The stationary phase method shows that the integral is $o(1)$ (see [8]), whence $\lambda_k = o(k^{-n/2+1})$ as $k \rightarrow \infty$. Moreover, there are constant $a > 0$ and $b > 0$ such that $ak^{-n/2+1} \leq |\lambda_k| \leq bk^{-n/2+1}$, $k \rightarrow \infty$. Thus, the eigenfunctions of the integral operator in the right-hand side of (13) are the spherical harmonics $Y_k(u)$ and λ_k are its eigenvalues.

Let $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(u)$, where (see [20, p. 489])

$$Y_k(u) = \frac{(n+2k-2)\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}} \int_{S^{n-1}} C_k^{(n/2-1)}(\langle u, v \rangle) f(v) \sigma_{n-1}(dv)$$

by the Laplace formula, be the expansion of the function $f(u)$ into the series of spherical harmonics. Then

$$z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} Y_k(u) \quad (14)$$

is the solution to equation (13). If $f(u) \in C^{2\ell}(S^{n-1})$, then

$$Y_k(u) = \frac{(-1)^\ell (n+2k-2)\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2} [k(n+k-2)]^\ell} \int_{S^{n-1}} C_k^{(n/2-1)}(\langle u, v \rangle) \Delta_S^\ell f(v) \sigma_{n-1}(dv).$$

Applying the $L_2(S^{n-1})$ - estimates $\|C_k^{(n/2-1)}(\langle u, v \rangle)\|_{L_2(S^{n-1})} \leq c(n)k^{n/2-2}$ [20] for the Gegenbauer polynomials, the Cauchy-Schwartz inequality, and the asymptotics of eigenvalues we get:

$$\frac{|Y_k(u)|}{|\lambda_k|} \leq \frac{c(n)k^{n/2-1-2\ell}\|\Delta_S^\ell f\|_{L_2(S^{n-1})}}{|\lambda_k|} \leq c(n)k^{-2\ell+n-2}\|\Delta_S^\ell f\|_{L_2(S^{n-1})}, \ell \geq 1,$$

$$c(n) = \text{const}.$$

Consequently, $\ell \geq 1$ implies the uniform convergence of the series (14) and the continuity of the sum.

Thus, we obtain the following result.

Theorem 5. *If $f(u) \in C^{2\ell}(S^{n-1})$ and $\ell \geq \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, then there exists the unique smooth solution of the equation (13). Moreover, it admits the following estimate:*

$$\|z(u)\|_{C(S^{n-1})} \leq c(n)\|\Delta_S^\ell f(u)\|_{L_2(S^{n-1})}.$$

REFERENCES

1. Anikonov Yu. E. Representation of solutions of kinetic equations and inverse problems. Preprint No. 94. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2002. 43 p.
2. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. New York, Toronto, London. Mc Graw-Hill Book Company, INC. 1953. 294 p.
3. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. New York, Toronto, London. Mc Graw-Hill Book Company, INC. 1953. 296 p.
4. Bateman H., Erdelyi A. Tables of integral transforms. Vol. 2. New York, Toronto, London. Mc Graw-Hill Book Company, INC. 1954. 328 p.
5. Bukhgeim A. Volterra equations and inverse problems. Utrecht, The Netherlands. 1999. 205 p.
6. Gelfand I.M., Gindikin S.C., Graev M.I. Selected Topics in Integral Geometry. American Mathematical Society. 2003. 190 p.
7. Case K., Zweifel P. Linear transport theory. University of Michigan. 1967. 384 p.
8. Stepanov V.N. The asymptotic behavior of the eigenvalues of the first-order equation // Omsk Scientific Bulletin. Omsk : Omsk State Technical University, 2011. No. 3(103). P. 41–45.
9. Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Academic Press, INC. 1984. 736 p.
10. Gardner R.J. Geometric tomography. Cambridge Univ. Press. Cambridge. New York. 1995. 424 p.
11. Goodey P., Weil W. Centrally symmetric convex bodies and the spherical Radon transform // J. Differential Geom. 1992. No. 35. P. 675–688.
12. Grinberg E., Zhang G. Convolutions, transform and convex bodies // Proc. London Math. Soc. 1999. No. 78(1). P. 77–115.
13. Funk P. Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien // Math. Ann. 1913. No. 74. P. 278–300.
14. Helgason S. Geometric Analysis on Symmetric Spaces // Math. Surveys and Monographs. AMS. 1994. No. 39. P. 45–55.

15. Perry W. On the Bojarski-Lewis inverse scattering method // IEEE Trans Antennas and Propag. 1974. V. 22, No. 6. P. 826–829.
16. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 1917. No. 69. P. 262–277.
17. Rubin B. Notes on Radon transforms in integral geometry // Fract. Calc. Appl. Anal. 2003. No. 6. P. 25–72.
18. Schneider R. The use of spherical harmonics in convex geometry // Summer school on "Fourier analytic and probabilistic methods in geometric functional analysis and convexity", Kent State University, August 13–20, 2008.
19. Schneider R. Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge Univ. Press. Cambridge. New York. 1993. 490 p.
20. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. Nauka, Moscow. 1974. 808 p. (in Russian).

МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА СФЕРЕ

В.Н. Степанов

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: stpnv@yandex.ru

Омский государственный технический университет

Аннотация. Интегральные уравнения первого рода типа свёртки на сфере S^{n-1} имеют важное значение в геометрической томографии и исследовались многими авторами. В представленной работе рассматриваются вопросы единственности и устойчивости решений таких уравнений. Доказана единственность решения относительно меры уравнения с ядром $K(\langle u, v \rangle)$ класса $L_1[-1, 1]$. Получена формула для среднего значения функции на подсферах, которая затем используется для вывода формулы обращения сферического преобразования Радона на сфере S^3 . Для уравнения Бляшке-Леви и для уравнения типа свёртки с сингулярным ядром, встречающимся в линейной теории переноса, доказаны теоремы единственности и даны оценки устойчивости решений. Во всех случаях используется метод разложения функций по полной системе сферических гармоник.

Ключевые слова: геометрическая томография, уравнение первого рода типа свёртки, единственность, устойчивость, сферическое преобразование Радона, формула обращения, уравнение Бляшке-Леви, уравнение с сингулярным ядром.

Дата поступления в редакцию: 06.12.2016

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ АССОЦИАТИВНЫХ ПРАВИЛ К АНАЛИЗУ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБЩЕСТВЕННЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

С.В. Белим

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой информационной безопасности,
e-mail: sbelim@mail.ru

Т.Б. Смирнова

д.и.н., доцент, профессор кафедры этнологии, антропологии, археологии и
музеологии, e-mail: SmirnovaTB@omsu.ru

А.Н. Мироненко

к.т.н., доцент кафедры информационной безопасности, e-mail: MironenkoAN@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье предложен математический метод анализа показателей деятельности общественных организаций, основанный на построении ассоциативных правил. В качестве транзакций использованы опросные анкеты. На основе кодирования ответов руководителей общественных организаций российских немцев построены ассоциативные правила. Выделены правила, обладающие высокой поддержкой и достоверностью. На основе ассоциативных правил построен ориентированный взвешенный граф взаимосвязей. На данном графе выполняется поиск сообществ вершин (community), связанных друг с другом сильнее, чем с остальными вершинами. Выделенное сообщество позволило выявить факторы деятельности общественных организаций российских немцев, наиболее тесно связанные друг с другом.

Ключевые слова: ассоциативные правила, общественные организации, сообщества на графах, Data Mining.

Введение

Метод формирования ассоциативных правил традиционно используется для выявления устойчивых связей между предпочтениями покупателей в торговых сетях [1, 2]. Информация, полученная после выявления ассоциативных правил, используется в дальнейшем для позиционирования товаров в торговых залах. Взаимосвязанные товары размещаются близко друг к другу для увеличения продаж. Однако в последнее время метод стал активно использоваться и в других областях исследований для выявления закономерностей на основе статистических данных, таких как обработка изображений [3, 4], анализ распространения биологических видов [5], поиск точек интереса горной промышленности по фотографиям поверхности [6] и т. д.

Метод построения ассоциативных правил в социологических исследованиях стал применяться относительно недавно. Европейское социологическое общество ESS использовало его для выявления связи между страной проживания респондента и устоявшимися стереотипами [7]. Наибольшее распространение метод построения ассоциативных правил получил при анализе социальных сетей. В статье [8] поиск ассоциативных правил используется для исследования влияния пользователей социальных сетей друг на друга. На основе анализа полученных зависимостей определяются наиболее влиятельные пользователи, через которых возможно наиболее быстрое и эффективное продвижение информации. В работах [9, 10] выявлялись ассоциативные правила, позволяющие установить связь между полом студента и выбираемыми им курсами на основе записей в Facebook. Аналогичные исследования проведены в работе [11], авторы которой исследуют влияние социальной сети Facebook на образовательный процесс студентов Турции. В работе [12] авторы на основе анализа социальных сетей выявляют факторы, влияющие на хобби пользователей. Возможности использования ассоциативных правил в криминалистике рассмотрены в работе [13]. Авторы исследуют связь между побудительными мотивами и видом преступления. В статье [14] с помощью ассоциативных правил конструируется социальная сеть на основе базы данных о террористических атаках. Работа [15] посвящена исследованию влияния характера людей на склонность к наркомании с помощью построения ассоциативных правил на базе данных из наркологических клиник. Применение метода поиска ассоциативных правил к данным переписи населения в рамках проекта SPIN представлена в статье [16].

Данная статья посвящена определению закономерностей в деятельности общественных организаций российских немцев на основе их базы данных, полученной с помощью анкетирования. База данных анкет используется для построения ассоциативных правил и выявления закономерностей между различными аспектами деятельности общественных организаций.

1. Постановка задачи и методы решения

Для использования метода построения ассоциативных правил необходимо сформировать множество возможных записей и список транзакций. В данной работе анализировалась деятельность общественных организаций российских немцев в различных регионах. Исходная информация бралась из анкет, заполнявшихся руководителями организаций. В качестве транзакции выбиралась одна анкета. Каждая анкета содержала вопросы различного формата. Первый тип вопросов предполагал два варианта ответа «Да» или «Нет». Второй тип вопросов допускал выбор одного из четырёх или пяти вариантов, причём допускался дополнительный ответ «прочее», который не кодировался, так как содержал неопределённость. Также в анкете присутствовали вопросы с недетерминированным ответом, но они не учитывались при формировании транзакций, так как все ответы были различными и не могли привести к выявлению ассоциативных правил со сколько-нибудь заметной поддержкой. Каждый вариант ответа кодировался своей записью. Вопрос обозначался идентификатором из

одной или двух латинских букв. Например, вопрос, обозначаемый «А», имел два варианта ответа, кодируемых «А1» и «А2». В вопросах, содержащих выбор из двух альтернатив, нельзя ограничиваться кодированием только одной из них, не смотря на возможность однозначного восстановления второй. Такое ограничение может приводить к потере ассоциативных правил.

Пусть I — множество всех ответов, которые могут присутствовать в транзакции. Каждая транзакция T — это набор элементов из I ($T \subseteq I$). D — множество всех транзакций. Говорят, что транзакция T содержит набор элементов X , если $X \subseteq T$ и $X \subseteq I$. Ассоциативным правилом называется импликация $X \Rightarrow Y$, где $X \subseteq I$, $Y \subseteq I$ и $X \cap Y = \emptyset$.

Каждое ассоциативное правило характеризуется некоторым набором параметров. Первый параметр, называемый поддержкой, показывает частоту встречаемости данного правила в имеющемся наборе транзакций. Поддержка правила $X \Rightarrow Y$ вычисляется как процент транзакций, содержащий множество $X \cup Y$:

$$supp(X \Rightarrow Y) = \frac{N(X \cup Y)}{|D|} \cdot 100 \%,$$

где $N(X \cup Y)$ — количество транзакций, содержащих множество $X \cup Y$.

Достоверность правила показывает, с какой вероятностью из X следует Y . Достоверность ассоциативного правила $X \Rightarrow Y$ вычисляется как процент транзакций, содержащих как X , так и Y , в множестве транзакций, содержащих X :

$$conf(X \Rightarrow Y) = \frac{supp(X \Rightarrow Y)}{supp(X)}.$$

Задача поиска ассоциативных правил состоит в нахождении наборов элементов, поддержка которых не ниже чем $minsupport$. Из найденных наборов выделяются правила с достоверностью не ниже $minconfidence$.

2. Ассоциативные правила

В общей сложности было обработано 107 анкет, каждая из которых рассматривалась как независимая транзакция. После кодирования были получены транзакции с различным числом записей от 24 до 50. На основе данных транзакций был осуществлён поиск ассоциативных правил с поддержкой не менее 60 % и достоверностью не менее 80 %. Для поиска ассоциативных правил был использован алгоритм APriori [17]. Ассоциативные правила, удовлетворяющие данным свойствам, приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Ассоциативные правила по деятельности общественных организаций российских немцев

N	Предпосылка	Следствие	<i>supp</i>	<i>conf</i>
1	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	61,68	80,72
2	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	В организации используются языковые курсы для взрослых	60,75	80,72
3	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	В организации знают о том, что Германия реализует специальные программы	62,62	80,72
4	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	62,62	81,93
5	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	62,62	80,00
6	В организации используются языковые курсы для взрослых	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	63,55	82,72
7	В организации используются языковые курсы для взрослых	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	62,62	82,72
8	В организации используются языковые курсы для взрослых	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	63,55	85,19
9	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	62,62	80,95
10	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	62,62	80,95
11	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	В организации используются языковые курсы для взрослых	64,49	82,14
12	Партнерами в работе являются организации в России	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	62,62	83,54
13	Партнерами в работе являются организации в России	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	63,55	82,28

Таблица 1. Ассоциативные правила по деятельности общественных организаций российских немцев (продолжение)

N	Предпосылка	Следствие	<i>supp</i>	<i>conf</i>
14	Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	63,55	88,16
15	В организации знают о том, что Германия реализует специальные программы	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами	64,49	80,72
16	Для изучения немецкого языка используются детские и молодёжные языковые клубы	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	50,47	90,00
17	Партнёрами в работе являются организации в России и Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	51,40	90,16
18	Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности и Предлагаются программы целевой направленности для всех возрастов	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	51,40	96,49
19	Предлагаются программы целевой направленности для всех возрастов и Интернет используется в работе центра несколько раз в день	Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности	51,40	90,16
20	Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности и Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились	Интернет используется в работе центра несколько раз в день	52,34	90,32

Ассоциативные правила в таблице 1 необходимо интерпретировать в

формате:

«Если Предпосылка, то Следствие».

Анализ показывает, что поиск ассоциативных правил позволяет выявить как достаточно очевидные взаимосвязи между различными аспектами деятельности общественных организаций, так и достаточно неожиданные влияния факторов друг на друга. При этом правила с одним утверждением в предпосылке обладают большей поддержкой, но меньшей достоверностью. Ассоциативные правила, содержащие конъюнкцию двух утверждений в предпосылке, характеризуются меньшей поддержкой, но очень высокой достоверностью. Следует отметить, что в формировании ассоциативных правил участвует всего 9 утверждений из 173 возможных. Между остальными утверждениями ассоциативные правила с достаточно высокими поддержкой и достоверностью отсутствуют.

3. Теоретико-графовый анализ

Построим граф связей на основе выявленных ассоциативных правил. В таблице 2 приведены обозначения для утверждений, встречающихся в ассоциативных правилах.

Таблица 2. Обозначения для утверждений, встречающихся в ассоциативных правилах.

v_1	Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами
v_2	Интернет используется в работе центра несколько раз в день
v_3	В организации используются языковые курсы для взрослых
v_4	Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились
v_5	Партнёрами в работе являются организации в России
v_6	Сотрудничество с МСНК осуществляется постоянно с высокой степенью эффективности
v_7	В организации знают о том, что Германия реализует специальные программы
v_8	Для изучения немецкого языка используются детские и молодёжные языковые клубы

На рисунке 1 приведён граф, построенный на основе ассоциативных правил с одной предпосылкой. В качестве веса рёбер использованы значения достоверности.

Матрица весов построенного графа приведена в Таблице 3. Вес отсутствующих дуг равен нулю.

Применим к данному графу алгоритм поиска сообществ (community) [18]. Для этого необходимо предварительно получить приведённый вид матрицы ве-

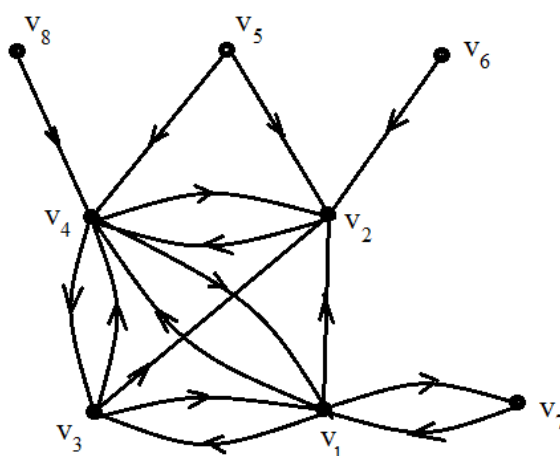


Рис. 1. Граф связи утверждений с ассоциативными правилами

Таблица 3. Матрица весов графа ассоциативных правил

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	80,72	80,72	81,93	0	0	80,72	0
v_2	0	0	0	80,00	0	0	0	0
v_3	82,72	82,72	0	85,19	0	0	0	0
v_4	80,95	80,95	82,14	0	0	0	0	0
v_5	0	83,54	0	82,28	0	0	0	0
v_6	0	88,16	0	0	0	0	0	0
v_7	80,72	0	0	0	0	0	0	0
v_8	0	0	0	90,00	0	0	0	0

сов $e = E/m$, где

$$m = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}.$$

N — количество вершин. В приведённой матрице весов элемент e_{ij} показывает долю веса заданного ребра в общем весе графа. В дальнейшем под матрицей весов будет пониматься именно приведённый вид. Легко увидеть, что

$$\sum_{i,j=1}^N e_{ij} = 1.$$

Для выявления сообществ используется функция модульности (modularity),

показывающая оптимальность разбиения графа на подграфы:

$$Q(e) = \sum_{i=1}^N e_{ii} - \sum_{i=1}^N p_{ii},$$

где p_{ii} — «ожидаемая связность». В канонической модели [18] p_{ii} определяется через исходящую степень вершины a_i , и входящую степень вершины b_i :

$$p_{ii} = a_i b_i.$$

В этом случае модульность записывается в виде:

$$Q(e) = \sum_{i=1}^N e_{ii} - \sum_{i=1}^N a_i b_i,$$

где

$$a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N e_{ij}, \quad b_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N e_{ji}.$$

Для поиска сообществ на графах используется алгоритм образования стяжек. Выделим в графе G подграф G' и заменим все его вершины одной вершиной, при этом вершины подграфа $G \setminus G'$ остаются неизменными. Образованная вершина связана дугами с теми вершинами графа $G \setminus G'$, с которыми были связаны вершины, вошедшие в стяжку. Вес вершины, вошедшей в стяжку, равен сумме весов вершин и дуг, вошедших в стяжку.

Под сообществом будем понимать подграф исходного графа, который при образовании из него стяжки максимизирует функцию модульности графа $Q(e)$. Нашей задачей становится выявление сообществ на графе ассоциативных правил. В силу того что исходный граф имеет малое количество вершин, задача может быть решена полным перебором.

Функция модульности исходного графа равна $Q = -0,1497$. Объединение вершин v_1, v_3, v_4 в одно сообщество приводит к значению функции модульности $Q_{1,3,4} = -0,0361$, то есть такое объединение является выгодным и показывает тесную связь этих вершин. Объединение в сообщество вершин v_1, v_3, v_4 и v_2 приводит к значению модульности $Q_{1,2,3,4} = -0,0233$. Остальные варианты объединения не повышают функцию модульности, то есть не являются выгодными.

Из этого анализа можно сделать вывод о тесной связи таких аспектов деятельности общественных организаций российских немцев: «Более 50 % посетителей центра являются российскими немцами», «Интернет используется в работе центра несколько раз в день», «В организации используются языковые курсы для взрослых», «Знания немецкого языка за последние 10 лет улучшились». Эти четыре направления деятельности наиболее тесно взаимосвязаны между собой, и их надо рассматривать в совокупности.

4. Выводы

Предложенный в данной статье подход, основанный на поиске ассоциативных правил и дальнейшем представлении связей между вопросами анкеты в виде ориентированного графа, позволяет выявить закономерности, проявляющиеся в деятельности общественных организаций. Анализ графа взаимосвязей с помощью поиска сообществ вершин даёт возможность определять наиболее тесно взаимосвязанные аспекты деятельности общественных организаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agrawal R., Imielinski T., Swami A. Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases // In Proc. of the 1993 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. Washington DC, USA. P. 207–216.
2. Shaheen M., Shahbaz M., Guergachi A. Context Based Positive and Negative Spatio Temporal Association Rule Mining // Elsevier Knowledge-Based Systems. 2013. P. 261–273.
3. Белим С.В., Майоров-Зильбернагель А.О. Восстановление изображений со статическими пропусками на основе метода ассоциативных правил // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 12. С. 18–23.
4. Белим С.В., Майоров-Зильбернагель А.О. Алгоритм поиска повреждённых пикселей и удаления импульсного шума на изображениях с использованием метода ассоциативных правил // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 12., URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/744983.html> (дата обращения 20.02.2017).
5. Атепалихин М.С., Кассал Б.Ю., Белим С.В. Использование ассоциативных правил для выявления взаимосвязи мест обитания биологических видов // Вестник Омского университета. 2014. № 2(72). С. 25–29.
6. Lee I., Cai G., Lee K. Mining Points-of-Interest Association Rules from Geo-tagged Photos // 46th Hawaii International Conference on System Sciences. 2013. P. 1580–1588.
7. European Social Survey (2012) Sampling for the European Social Survey Round VI: Principles and Requirements Mannheim, European Social Survey, GESIS.
8. Erlandsson F., Brodka P., Borg A., Johnson H. Finding Influential Users in Social Media Using Association Rule Learning // arXiv:1604.08075v2. 2016.
9. Erlandsson F., Borg A., Johnson H., Brodka P. Predicting User Participation in Social Media // In Advances in Network Science. Springer International Publishing : Cham, Switzerland, 2016. P. 126–135.
10. Nancy P., Geetha Ramani R., Jacob S. Mining of Association Patterns in Social Network Data (Face Book 100 Universities) through Data Mining Techniques and Methods // In Advances in Computing and Information Technology. Springer : Berlin/Heidelberg, Germany, 2013. V. 178. P. 107–117.
11. Bozkir A.S., Mazman S.G., Sezer E.A. Identification of User Patterns in Social Networks by Data Mining Techniques: Facebook Case // IMCW 2010. P. 145–153.
12. Yu X., Liu H., Shi J., Hwang J.N., Wan W., Lu. J. Association Rule Mining of Personal Hobbies in Social Networks // In Proceedings of the 2014 IEEE International Congress on Big Data (BigData Congress), Anchorage, AK, USA, 2014. P. 310–314.

13. Pereira B.L., Brandao W.C. ARCA: Mining crime patterns using association rules // IADIS International Conference Applied Computing 2014 (IADIS AC2014).
14. Gorecki J., Slaninova K. Building synthetic social network using association rules and clustering methods: case study on global terrorism database // Acta academica karviniensia. URL: http://www.slu.cz/opf/cz/informace/acta-academica-karviniensia/casopisy-aak/aak-rocnik-2013/docs-3-2013/Gorecki_Slaninova.pdf (дата обращения 20.02.2017).
15. Zahedi F., Zare-Mirakabad M.R. Employing data mining to explore association rules in drug addicts // Journal of AI and Data Mining. 2014. V. 2, No. 2. P. 135–139.
16. Malerba D., Esposito F., Lisi F.A. Mining Spatial Association Rules in Census Data // Specifying collective outputs from UN/ECE activities on statistical information technology. P. 541–550.
17. Agrawal R., Srikant R. Fast Discovery of Association Rules // In Proc. of the 20th International Conference on VLDB, Santiago, Chile, 1994. P. 487–499.
18. Newman M.E.J. Mixing patterns in networks // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P.026126-1–026126-13.

APPLICATION OF AN ASSOCIATIVE RULES METHOD TO THE ACTIVITIES ANALYSIS OF PUBLIC ORGANIZATIONS

S.V. Belim

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: sbelim@mail.ru

T.B. Smirnova

Dr.Sc. (History), Associate Professor, e-mail: SmirnovaTB@omsu.ru

A.N. Mironenko

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: MironenkoAN@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the activities indicators analysis method of public organizations is developed. The method of the associative rules is used. Transactions are created of polling questionnaires. From coded responses of questionnaires the associative rules are obtained. The rules possessing high support and confidence are selected. On the basis of the associative rules the oriented weighted correlations graph is constructed. On this graph search of communities is executed. The selected community allowed to reveal activities factors of public organizations the most tightly connected with each other.

Keywords: associative rules, public organizations, community, Data Mining.

Дата поступления в редакцию: 22.02.2017

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЦИКЛА В ОДНОЙ МОДЕЛИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РЕПРЕССИЛЯТОРА

В.П. Голубятников

профессор, д.ф.-м.н., г.н.с., e-mail: glbtn@math.nsc.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Аннотация. Рассматривается нелинейная шестимерная динамическая система, моделирующая функционирование простейшего молекулярного репрессилатора. Установлены достаточные условия существования устойчивого цикла в её фазовом портрете.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, модели генных сетей, гиперболические стационарные точки, циклы, теорема Брауэра о неподвижной точке, устойчивость.

1. При моделировании широкого класса генных сетей используются нелинейные динамические системы вида:

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{dt} &= -k_1 m_1 + F_1(\tilde{p}_3); & \frac{d\tilde{p}_1}{dt} &= \mu_1 m_1 - \beta_1 \tilde{p}_1; \\ \frac{dm_2}{dt} &= -k_2 m_2 + F_2(\tilde{p}_1); & \frac{d\tilde{p}_2}{dt} &= \mu_2 m_2 - \beta_2 \tilde{p}_2; \\ \frac{dm_3}{dt} &= -k_3 m_3 + F_3(\tilde{p}_2); & \frac{d\tilde{p}_3}{dt} &= \mu_3 m_3 - \beta_3 \tilde{p}_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь нелинейные слагаемые в уравнениях $F_j(\tilde{p})$ — гладкие положительные монотонно убывающие функции неотрицательного аргумента, описывающие отрицательные обратные связи; k_j, μ_j, β_j — положительные параметры, характеризующие динамику биохимических процессов в моделируемой генной сети. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $j = 1, 2, 3$ и что если $j = 1$, то $j - 1 = 3$.

В наших предыдущих работах [1, 3] эта система изучалась в случае $\mu_j = \beta_j$, для которого были получены условия существования по крайней мере одного цикла в её фазовом портрете.

В так называемом симметричном безразмерном случае, в котором $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, $\mu_j = \beta_j$ и $F_1(p) = F_2(p) = F_3(p) = F(p) \equiv \alpha(1 + p^\gamma)^{-1} + \alpha_0$, система (1) была предложена в [13] для описания динамики синтетической кольцевой генной сети, связывающей три белка с концентрациями $p_1(t)$, $p_2(t)$,

$p_3(t)$, репрессирующими друг друга по циклу, и соответствующие мРНК с концентрациями $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$. Здесь и далее все параметры предполагаются положительными. Такая динамическая система инвариантна относительно циклических замен пар переменных $(m_1, p_1) \Rightarrow (m_2, p_2) \Rightarrow (m_3, p_3) \Rightarrow (m_1, p_1)$. В недавних работах [7, 8, 14] исследования этого симметричного случая были продолжены с целью доказательства существования и устойчивости бегущих волн у таких динамических систем. В работе [9] подобные симметричные системы изучались с целью расчёта кольцевых электрических сетей, состоящих из идентичных одноплавно связанных генераторов.

В несимметричном случае подобные системы изучались и в [16], где в качестве нелинейных слагаемых рассматривались также и монотонно возрастающие функции. Следуя этой работе, совершим линейную замену переменных $\mu_j p_j := \tilde{p}_j$, $f_j(p_{j-1}) := F_j(\tilde{p}_{j-1})$, после чего система (1) принимает более симметричный вид:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -k_1 m_1 + f_1(p_3); & \frac{dp_1}{dt} &= m_1 - \beta_1 p_1; \\ \frac{dm_2}{dt} &= -k_2 m_2 + f_2(p_1); & \frac{dp_2}{dt} &= m_2 - \beta_2 p_2; \\ \frac{dm_3}{dt} &= -k_3 m_3 + f_3(p_2); & \frac{dp_3}{dt} &= m_3 - \beta_3 p_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Основной целью настоящей работы является установление достаточных условий существования по крайней мере одного устойчивого цикла системы (2) в её инвариантной области, которая будет описана ниже.

Пусть $A_j := f_j(0)/k_j$, $B_j := A_j/\beta_j$ и

$$Q := [0, A_1] \times [0, B_1] \times [0, A_2] \times [0, B_2] \times [0, A_3] \times [0, B_3].$$

Также, как и в [4, 16], где изучались фазовые портреты подобных динамических систем, в том числе и других размерностей, можно проверить, что параллелепипед Q , лежащий в положительном октанте $\mathbb{R}_+^6$, является инвариантной областью системы (2); все траектории, начинающиеся в Q при $t = 0$, остаются в нём при всех $t > 0$.

Координаты любой стационарной точки системы (2) удовлетворяют соотношениям $m_j = \beta_j p_j$ и находятся из уравнения

$$k_1 m_1 = f_1 \left(\frac{f_3 \left(\frac{f_2(m_1/\beta_1)}{\beta_2 k_2} \right)}{\beta_3 k_3} \right), \quad (3)$$

в котором правая часть — композиция трёх монотонно убывающих гладких функций — монотонно убывает с ростом m_1 , а левая возрастает. Следовательно, уравнение (3) имеет единственное решение, и потому стационарная точка S_0 системы (2) существует и единственна. Пусть $S_0 = (m_1^0; p_1^0; m_2^0; p_2^0; m_3^0; p_3^0)$ — её координаты; через $(-q_j)$ будем обозначать производную $df_j(p)/dp$, вычисленную при $p = p_{j-1}^0$, здесь $q_j > 0$, так как производная монотонно убывающей функции отрицательна.

Для описания фазового портрета системы (2), следуя [6, 10, 18], где подобные построения проводились для аналогичных динамических систем, разобьём область Q плоскостями, $m_j = m_j^0$, $p_j = p_j^0$, проходящими через точку S_0 . Обозначим полученные параллелепипеды (блоки) разбиения бинарными индексами:

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6\} = \{ \mathbf{X} \in Q \mid m_1 \geq_{\varepsilon_1} m_1^0; p_1 \geq_{\varepsilon_2} p_1^0; m_2 \geq_{\varepsilon_3} m_2^0; p_2 \geq_{\varepsilon_4} p_2^0; m_3 \geq_{\varepsilon_5} m_3^0; p_3 \geq_{\varepsilon_6} p_3^0, \} , \quad (4)$$

где $\mathbf{X} = (m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \in \{0, 1\}$, и отношения порядка задаются следующим образом: символ $\geq_0$ означает $\leq$, а символ $\geq_1$ означает $\geq$.

Так же, как в [3, 6, 18], проверяется, что при такой дискретизации фазового портрета динамической системы (2) для любых двух соседних блоков $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ разбиения (4), имеющих общую пятимерную грань $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, траектории всех точек этой грани переходят только в один из этих двух блоков — либо из $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_2$: $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, либо наоборот: $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$.

Матрица линеаризации системы (2) в точке S_0 имеет вид:

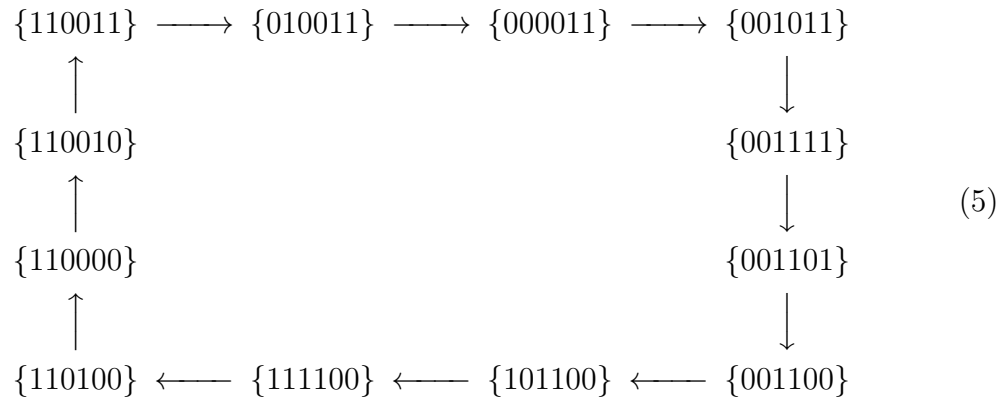
$$M_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ 1 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \end{pmatrix}.$$

В аналитическом выражении определителя этой матрицы всего два ненулевых слагаемых — произведение диагональных элементов и произведение $a^6 := q_1 q_2 q_3$ недиагональных элементов, поэтому характеристический многочлен матрицы M_0 может быть записан в форме

$$P(\lambda) = (k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda)(\beta_1 + \lambda)(\beta_2 + \lambda)(\beta_3 + \lambda) + a^6.$$

Напомним, что стационарная точка динамической системы называется **гиперболической**, если собственные числа соответствующей матрицы линеаризации имеют как положительные, так и отрицательные вещественные части, но не имеют мнимых вещественных частей. Упорядочим пары собственных чисел матрицы M_0 в порядке убывания их вещественных частей: $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > \operatorname{Re} \lambda_{2,3} > \operatorname{Re} \lambda_{5,6}$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такую комбинацию знаков этих вещественных частей, при которой стационарная точка S_0 является гиперболической.

Следующая диаграмма показывает, по каким двенадцати блокам разбиения (4) может проходить цикл динамической системы (2).



Для каждого блока, указанного в диаграмме, траектории системы (2) могут переходить из него в другие блоки разбиения (4) только в направлении, указанном в диаграмме. Обозначим через W объединение всех этих двенадцати блоков.

Пусть $U \approx D^2 \times D^4$ — достаточно малая открытая окрестность стационарной точки S_0 ; здесь двумерный диск D^2 параллелен плоскости и построен по собственным числам λ_1, λ_2 , а четырёхмерный диск D^4 аналогичным образом построен по остальным собственным числам матрицы M_0 , имеющим отрицательные вещественные части.

Следующие два утверждения доказываются дословно так же, как их аналоги, установленные в [3] для системы (1) в случае $\beta_j = \mu_j$.

Лемма. При достаточно больших значениях параметра a характеристический многочлен $P(\lambda)$ имеет в точности два комплексных корня с положительными вещественными частями и четыре комплексных корня с отрицательными вещественными частями.

Теорема 1. Если характеристический многочлен матрицы M_0 имеет два корня с положительными вещественными частями и четыре корня с отрицательными вещественными частями, то динамическая система (2) имеет по крайней мере один цикл C , содержащийся в области $W' = W \setminus (W \cap U)$ и проходящий по ней в соответствии с диаграммой (5).

Следует подчеркнуть, что гиперболичность стационарной точки S_0 используется здесь существенным образом для линеаризации системы (2) в окрестности точки S_0 с целью построения окрестности U . Такая линеаризация существует на основании теоремы Гробмана-Хартмана [12].

Если же у матрицы линеаризации динамической системы имеются и мнимые собственные числа, то для построения такой окрестности U потребуются старшие члены разложения правых частей уравнений системы в окрестности её стационарной точки. В случаях вырожденности этих старших членов описание фазового портрета динамической системы становится необозримо сложным. В ряде ранних публикаций, посвящённых математическому моделированию подобных генных сетей, см., например, [11], это обстоятельство не было учтено.

2. В дальнейших рассуждениях об условиях существования устойчивого цикла системы (2) мы ограничимся описанием «частично симметричного» слу-

чая $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Все остальные положительные параметры β_j , а также монотонно убывающие гладкие функции f_j , как и в [1, 3], будут полагаться произвольными.

Следуя Р. Смитту [17] (см. также [5, 10]), представим систему (2) в бескоординатной форме:

$$\dot{X} = A \cdot X + \Phi(X), \quad (6)$$

где все нелинейные слагаемые правых частей системы (2) (но не только они) содержатся во втором слагаемом $\Phi(X)$, вектор-функция $X(t)$ имеет координаты $(m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3)$, и матрица A имеет постоянные коэффициенты. Именно, пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_1(p_3) + \eta p_3; \\ m_1(1 - \eta) + p_1(k - \beta_1); \\ f_2(p_1) + \eta p_1; \\ m_2(1 - \eta) + p_2(k - \beta_2); \\ f_3(p_2) + \eta p_2; \\ m_3(1 - \eta) + p_3(k - \beta_3); \end{pmatrix},$$

здесь η — некоторый положительный параметр, и пусть $A = -kE + \eta D$, где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\chi(z) := (zE - A)^{-1}$ переходную матрицу для матрицы A , см. [15, 17]; здесь $z \in \mathbb{C}$. Пусть $\theta(x) := \sup \|\chi(i\omega - x)\|$ для $-\infty < \omega < \infty$, $x > 0$, и пусть Φ' — матрица Якоби отображения $\Phi : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$.

В работе [17] было установлено (Теорема 3 и Лемма 6), что:

Если у системы (6) матрица A имеет в точности два собственных числа $\lambda_{1,2}$, у которых вещественные части больше, чем $-\rho$, где $\rho > 0$, и в инвариантной области W' выполняется неравенство

$$\|\Phi'\| < \theta(\rho)^{-1}, \quad (7)$$

то система (5) имеет по крайней мере один устойчивый цикл в области W' .

3. Доказательство существования устойчивого цикла у динамической системы (2) в области W' будет сведено к проверке условия (7). Можно показать, что симметричная матрица $\Phi' \cdot (\Phi')^\perp$, определяющая квадрат нормы матрицы

Φ' , разбивается на три блока:

$$B_1 = \begin{pmatrix} (f'_1 + \eta)^2 & (f'_1 + \eta)(k - \beta_3) \\ (f'_1 + \eta)(k - \beta_3) & (k - \beta_3)^2 + (1 - \eta)^2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} (f'_2 + \eta)^2 & (f'_2 + \eta)(k - \beta_1) \\ (f'_2 + \eta)(k - \beta_1) & (k - \beta_1)^2 + (1 - \eta)^2 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} (f'_3 + \eta)^2 & (f'_3 + \eta)(k - \beta_2) \\ (f'_3 + \eta)(k - \beta_2) & (k - \beta_2)^2 + (1 - \eta)^2 \end{pmatrix},$$

соответствующие парам координатных осей (Om_1, Op_3) , (Om_2, Op_1) и (Om_3, Op_2) .

Итак, мы получаем оценку

$$\|\Phi'\|^2 = \max_j \{\|B_j\|\}.$$

Корни характеристического многочлена $(k + \lambda(A))^6 + \eta^6 = 0$ матрицы A , у которых вещественные части максимальны, имеют вид $\lambda_{1,2} = -k + \eta\sqrt{3}/2 \pm \eta i/2$, у остальных его корней вещественные части меньше или равны $-k$, и поэтому в качестве параметра ρ можно выбрать любое число γk , где $0 < \gamma < 1$.

Матрица D в ортогональном базисе

$$e_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1),$$

$$e_3 = (2, \sqrt{3}, -1, 0, -1, -\sqrt{3}), \quad e_4 = (0, -1, \sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, -1),$$

$$e_5 = (2, -\sqrt{3}, -1, 0, -1, \sqrt{3}), \quad e_6 = (0, -1, -\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, -1)$$

распадается на три двумерных блока:

$$De_1 = e_2, \quad De_2 = -e_1; \quad 2De_3 = \sqrt{3}e_3 - e_4, \quad 2De_4 = e_3 + \sqrt{3}e_4;$$

$$2De_5 = -\sqrt{3}e_5 - e_6, \quad 2De_6 = e_5 - \sqrt{3}e_6.$$

Следовательно, переходная матрица $(i\omega - \rho)E - A = (i\omega + k - \rho)E - \eta D$ распадается на блоки:

$$H_{1,2} = \begin{pmatrix} i\omega + k - \rho & \eta \\ -\eta & i\omega + k - \rho \end{pmatrix},$$

$$H_{3,4} = \begin{pmatrix} i\omega + k - \rho - \eta\sqrt{3}/2 & \eta/2 \\ -\eta/2 & i\omega + k - \rho - \eta\sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

$$H_{5,6} = \begin{pmatrix} i\omega + k - \rho + \eta\sqrt{3}/2 & \eta/2 \\ -\eta/2 & i\omega + k - \rho + \eta\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти $\theta(\rho)^{-1}$, надо вычислить $\inf_{\omega}$ минимального квадрата нормы каждого из этих трёх блоков и выбрать из них наименьший. Несложные вычисления показывают, что

$$\|H_{1,2}\|^2 = (k - \rho)^2 + \max(\omega \pm \eta)^2,$$

$$\|H_{3,4}\|^2 = [(k - \rho) - \eta\sqrt{3}/2]^2 + \max(\omega \pm \eta/2)^2,$$

$$||H_{5,6}||^2 = [(k - \rho) + \eta\sqrt{3}/2]^2 + \max(\omega \pm \eta/2)^2.$$

Таким образом, нами установлен основной результат настоящей работы.

Теорема 2. Если $k_1 = k_2 = k_3$ и в области W' при некотором $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\min_j ||H_{2j-1,2j}||^2 > \max_s ||B_s||, \quad j, s = 1, 2, 3, \quad (8)$$

то система (2) имеет по крайней мере один устойчивый цикл в области W' .

Отметим, что, как было сказано в [17], оценка (7) не является точной, и, следовательно, неравенство (8) является лишь достаточным условием существования устойчивого цикла у системы (2).

В случае $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$, для которого аналог теоремы 1 был установлен в [1, 3], матрица $(i\omega - \rho)E - A$ на двумерные блоки не распадается, и тогда проверка условия (7) становится громоздкой.

Вопросы единственности циклов шестимерных динамических систем (1) и (2) остаются открытыми. У аналогичных динамических систем бóльших размерностей количество циклов может оказаться довольно большим, см. [2].

Результаты некоторых вычислительных экспериментов с траекториями динамических систем вида (1), (2) приведены в [19–21].

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Н.Б. Аюповой за полезные обсуждения, а также А.А. Акиньшину и М.В. Казанцеву за проведение численных экспериментов. Работа поддержана РФФИ, грант 15-01-00745.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акиньшин А.А., Аюпова Н.Б., Голубятников В.П., Казанцев М.В. Геометрия фазового портрета одной генной сети // Труды 12-й Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». Новосибирск, ИВМ и МГ СО РАН, 12 – 16 декабря 2016, С. 18–24.
2. Акиньшин А.А., Голубятников В.П. Циклы в симметричных динамических системах // Вестник НГУ. 2012. Т. 12, № 2, С. 3–12.
3. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П., Казанцев М.В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессилатора // Сибирский журнал вычислительной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 121–130.
4. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. О единственности цикла в трёхмерной модели молекулярного репрессилатора // Сибирский журнал промышленной математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–7.
5. Гайдов Ю.А. Об устойчивости периодических траекторий в некоторых моделях генных сетей // Сибирский журнал промышленной математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 57–62.

6. Glass L., Pasternack J.S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // *Journal of Mathematical Biology*. 1978. V. 6. P. 207–223.
7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в кольцевых генных сетях // *Теоретическая и математическая физика*. 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579.
8. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Существование и устойчивость релаксационного цикла в математической модели репрессилатора // *Математические заметки*. 2017. Т. 101, № 1. С. 58–67.
9. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов // *Известия РАН, серия математическая*. 2014. Т. 78, № 4. С. 73–108.
10. Голубятников В.П., Голубятников И.В., Лихошвай В.А. О существовании и устойчивости циклов в пятимерных моделях генных сетей // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2010. Т. 13, № 4. С. 403–411.
11. Golubyatnikov V., Likhoshvai V., Ratushnyi A. Existence of closed trajectories in 3D gene networks // *The Journal of Three-Dimensional Images*. 2004. V. 18, No. 4. P. 96–101.
12. Гробман Д.М. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // *ДАН СССР*. 1959. Т. 128, № 5. С. 880–881.
13. Elowitz M.B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // *Nature*. 2000. V. 403. P. 335–338.
14. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях // *Известия РАН, серия математическая*. 2016. Т. 80, № 3. С. 67–94.
15. Леонов Г.А. Об устойчивости фазовых систем // *Сибирский математический журнал*. 1974. Т. 15, № 1. С. 49–60.
16. El Samad H., Del Vecchio D., Khammash M. Repressilators and Promotilators: Loop dynamics in gene regulatory networks // *Proc. American Control Conference*, 2005. P. 4405–410.
17. Smith R.A. Orbital stability for ordinary differential equations // *Journal of differential equations*. 1987. V. 69. P. 265–287.
18. Hastings S., Tyson J.J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedbacks cellular control systems // *Journ. Diff. Equations*. 1977. V. 25. P. 39–64.
19. Elowitz-Leibler model [Электронный ресурс]. URL: <https://maxim-kazantsev.shinyapps.io/ElowitzLeibler/> (дата обращения: 09.03.2017).
20. AndreyAkinshin/model.R [Электронный ресурс] // GitHub. URL: <https://gist.github.com/AndreyAkinshin/9cdc1c2dbe71d154ab5748e8c57e6425> (дата обращения: 09.03.2017).
21. AndreyAkinshin/Elowitz.R // GitHub. URL: <https://gist.github.com/AndreyAkinshin/37f3e68a1576f9eale5c01f2fd64fe5e> (дата обращения: 09.03.2017).

THE EXISTENCE OF A STABLE CYCLE IN A MODEL OF A MOLECULAR REPRESSOR

V.P. Golubyatnikov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher, e-mail: glbtn@math.nsc.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
Novosibirsk State University

Abstract. We consider nonlinear 6-dimensional dynamical system which describes a model of functioning of one simple molecular repressilator. We find sufficient conditions of existence of a stable cycle in the phase portrait of this system.

Keywords: nonlinear dynamical system, gene network models, hyperbolic stationary points, cycles, Brouwer's fixed-point theorem, stability..

Дата поступления в редакцию: 09.03.2017

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ С УЧЁТОМ ВЗАИМОСВЯЗИ «РАСТИТЕЛЬНОСТЬ-ПОЧВА»

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье исследуются равновесные состояния Нэша для лесных экосистем с учётом взаимосвязи «растительность-почва» в рамках теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: равновесие Нэша, лесная экосистема, почва, растительность, дифференциальные игры.

Введение

Динамика лесных экосистем описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u_1, \dots, u_N), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

с управляющими внешними факторами $u_1, \dots, u_N$.

В качестве внешних управляющих факторов рассматриваем такие характеристики лесных фитоценозов, как мозаичность (оконная динамика) m , межвидовая и внутривидовая конкуренция k , антропогенное воздействие a , влажность почвы w и тип почвообразующей породы p .

Поэтому можно воспользоваться теорией дифференциальных игр и находить *равновесия Нэша*. Именно обнаружение таких равновесных состояний и является нашей целью.

Заметим, что, как правило, под равновесным состоянием системы, равновесием, понимается *стационарное состояние*, при котором характеризующие его параметры $z(t)$ не меняются со временем, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Такие равновесия изучаются в рамках теории катастроф. Подробности можно посмотреть в наших работах [1–4].

В теории дифференциальных игр каждый управляющий фактор u_i считается находящимся в распоряжении некоторого игрока, который старается с

его помощью воздействовать на систему таким образом, чтобы иметь максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Выигрыш/проигрыш игрока описывается некоторой заранее заданной функцией $J_i(z, u_1, \dots, u_N)$. Очевидно, в реальности трудно предполагать, что факторы могут изменяться совершенно независимо друг от друга, и, следовательно, в системе могут устанавливаться в каком-то смысле равновесия.

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (большой проигрыш).

1. Описание взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах

Почва относится к числу основных факторов, определяющих условия произрастания деревьев. Растительность и почва связаны потоками энергии и вещества и совместно с животными и микроорганизмами формируют целостный лесной биогеоценотический покров.

В [1–3] была предложена следующая мозаичная модель четырёхъярусной лесной экосистемы, учитывающая взаимосвязь «растительность-почва», в виде системы дифференциальных уравнений для продукции фитомассы и меры плодородия почвы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, k, m, a, w), \\ \frac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - w_-)(W - w_+), \end{cases} \quad (1)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_{\text{гр}})^6 + k(x - x_{\text{гр}})^4 + m(x - x_{\text{гр}})^3 + a(x - x_{\text{гр}})^2 + w(x - x_{\text{гр}}),$$

$$k = -c_k(CI - CI_0), \quad m = c_m\left(\frac{s^2}{\mu} - 1\right),$$

$$a = -c_a(\text{УАН} - \text{УАН}_0), \quad w = A_w(W - w_0),$$

где x — продукция фитомассы (т/га за год), y — мера плодородия почвы, CI — индекс конкуренции Вайса [4]; s^2/μ — коэффициент дисперсии, являющийся показателем равномерности распределения деревьев в пространстве; если s^2/μ близко к нулю, то распределение регулярное, к единице — случайное, а чем более единицы, — тем мозаичнее; УАН — уровень антропогенной нагрузки на район [4], p — мера типа почвообразующей породы, W — влажность почвы, W_- — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ — её избыток, γ, δ — положительные константы, коэффициент $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, где α_j — доля фитомассы j -го яруса в фитомассе всего леса, c_k, c_m, c_a, c_w — постоянные коэффициенты.

Через $x_{гр}$ обозначена характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы в отсутствии сколь-либо серьёзных изменений внешних факторов. Фактически это «исходное значение» продукции фитомассы леса, наблюдаемое на протяжении ряда лет и принимаемое как точка отсчёта при прогнозировании будущих состояний экосистемы.

Величины $CI_0, УАН_0, W_0$ — это критические значения факторов, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза [4].

Первое уравнение системы (1) описывает четырёхъярусный лес. Добавление второго уравнения таким способом, как это мы предлагаем, сохраняет все результаты, полученные нами для теоретико-катастрофического описания четырёхъярусного леса и подробно изложенные в [4].

Второе уравнение системы (1) — это уравнение, реализующее упрощённое представление о плодородии почвы и учитывающее только два фактора: тип почвообразующей породы и влажность почвы. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения катастрофу типа «сборка». В точке (p_0, W_-) происходит катастрофа падения плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке (p_0, W_+) — катастрофа падения плодородия при избытке влаги [1].

2. Динамика системы «растительность-почва» как дифференциальная игра

Имеем двух игроков. Игрок 1 — это растительность, и ей соответствует внешний фактор $u = (\alpha, k, m) \in \mathbb{R}^3$, а игрок 2 — это почва вместе с антропогенными воздействиями на лес, и им отвечает внешний фактор $v = (p, w, a) \in \mathbb{R}^3$.

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - w - xa, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma yp - \delta \cdot (w + (w_0 - w_-))(w + (w_0 - w_+)), \end{cases} \quad (2)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$t \in [0, T].$$

Начальное состояние игры — это фиксируемые в момент времени $t = 0$ значения продукции леса x_0 и плодородия почвы y_0 :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Цель каждого игрока состоит в том, чтобы максимизировать/минимизировать свой выигрыш/проигрыш, рассчитываемый по формуле:

$$J_i(u, v) = \psi_i(x(T), y(T)) - \int_0^T L_i(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) dt. \quad (3)$$

Нахождение равновесия Нэша для системы (2) — крайне сложная задача из-за квадратичного вхождения w во второе уравнение системы.

3. Динамика системы «растительность-почва» для незасушливых регионов

Однако можно искать равновесия, предполагая, что недостаток влаги (засуха) в наших краях — явление крайне редкое, и поэтому можно считать, что w находится в окрестности параметра w_+ . Иначе говоря, вместо системы (2) будем изучать систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma yp - \delta \cdot (w + (w_0 - w_-)), \end{cases} \quad (4)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$t \in [0, T].$$

Сделаем замену во втором уравнении $y = \bar{y} + c$, $c = \text{const}$ и подберём c так, чтобы слагаемое в правой части, в которое не входят факторы p, w при $\bar{y} = 0$ обращалось в нуль.

Легко найти, что $c = -(\delta(w_0 - w_-)/\gamma)^{1/3}$. В результате такой замены мы вместо системы (4) можем изучать, не ограничивая общности, систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \frac{dy}{dt} = [-\gamma y^3 - 3\gamma cy^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_-)] + \gamma(y + c)p - \delta w. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^5 g_j(z)u_j, \quad (6)$$

где

$$f(z) = \begin{pmatrix} -\alpha x^5 \\ -\gamma y^3 - 3\gamma cy^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_-) \end{pmatrix},$$

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(z) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3(z) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad g_5(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(y+c) \end{pmatrix},$$

$$u_1 = k, \quad u_2 = m, \quad u_3 = a, \quad u_4 = w, \quad u_5 = p.$$

Теперь

$$f(0) = 0.$$

Будем считать, что у нас 5 игроков. Игрок 1 — это фактор $u_1 = k$ — конкуренция деревьев, игрок 2 — это оконная динамика $u_2 = m$, определяющая мозаичность фитоценоза, игрок 3 — антропогенное вмешательство $u_3 = a$ в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т. д.), и, наконец, игрок 4 — влажность почвы $u_4 = w$, игрок 5 — мера типа почвообразующей породы $u_5 = p$.

Выигрышные функции возьмём в виде:

$$J_i(z, u_1, \dots, u_5) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^5 R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (7)$$

и числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0.$$

Рассматриваем игру с ненулевой суммой.

4. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматривать игру с ненулевой суммой вполне разумно, поскольку «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей уже от позиции $\{t, x\}$, и для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [5]. Часто пишут просто $u(x)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N -игроков

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^N g_j(z) u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(z, u_1, \dots, u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^N R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, N),$$

где числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения $V_i(z)$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} (\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2} (\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^N g_j(z) (R_{jj})^{-1} (g_j(z))^T (\nabla V_j) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (\nabla V_j)^T g_j(z) R_{ij} [(R_{jj})^{-1}]^2 (g_j(z))^T (\nabla V_j) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [6, Theorem 10.4-2, утверждение b.]:

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2} R_{ii}^{-1} (g_i(z))^T (\nabla V_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

5. Нэшевское равновесие лесной экосистемы (6)-(7)

В нашем случае $N = 5$, и рассматриваем $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 1$, $R_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Тогда уравнения Гамильтона-Якоби (9) имеют вид

$$Q_i + (\nabla V_i)^T f(z) - \frac{1}{2} (\nabla V_i)^T F(x) + \frac{1}{4} (\nabla V_i)^T g_i(z) (g_i(z))^T (\nabla V_i) = 0 \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^5 g_j(z) (g_j(z))^T (\nabla V_j).$$

Полагая, что

$$V_1(z) = V_2(z) = V_3(z) = V_4(z) = V_5(z) = \frac{1}{2} x^2 > 0,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^8 + x^6 + x^4 + x^2 \right), \\ Q_2 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left(x^8 + \frac{1}{2} x^6 + x^4 + x^2 \right), \\ Q_3 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left(x^8 + x^6 + \frac{1}{2} x^4 + x^2 \right), \\ Q_4 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left(x^8 + x^6 + x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right), \\ Q_5 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} (x^8 + x^6 + x^4 + x^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, если Q_i выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона-Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [6] имеем равновесие Нэша

$$k^* = \frac{1}{2}x^4, \quad m^* = \frac{1}{2}x^3, \quad a^* = \frac{1}{2}x^2, \quad w^* = \frac{1}{2}x, \quad p^* = 0, \quad (13)$$

найденное по формулам (10).

Выигрышные/проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_1(x) + k^2] dt, \\ J_2(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_2(x) + m^2] dt, \\ J_3(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_3(x) + a^2] dt, \\ J_4(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_4(x) + w^2] dt, \\ J_5(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_5(x) + p^2] dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Продуктивность x и мера плодородия почвы y в случае равновесия Нэша (13) находятся посредством подстановки (13) в уравнения (5) и их интегрированием.

Иначе говоря, требуется решать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x[x^6 + (1 + 2\alpha)x^4 + x^2 + 1], \\ \frac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma c y^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w_-)] - \delta x/2. \end{cases} \quad (15)$$

Для $\gamma = w_0 - w_- = \delta = 1$, $c = -1$ система (15) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x[x^6 + (1 + 2\alpha)x^4 + x^2 + 1], \\ \frac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - \frac{1}{2}x. \end{cases} \quad (16)$$

Интегрирование этой системы с $\alpha = 0,0007$ даёт, например, решения, представленные на рис. 1, 2, 3.

Решения отдельно для первого уравнения системы (15) для $\alpha = 0,0007$ с разными начальными данными, представлены также на рис. 4.

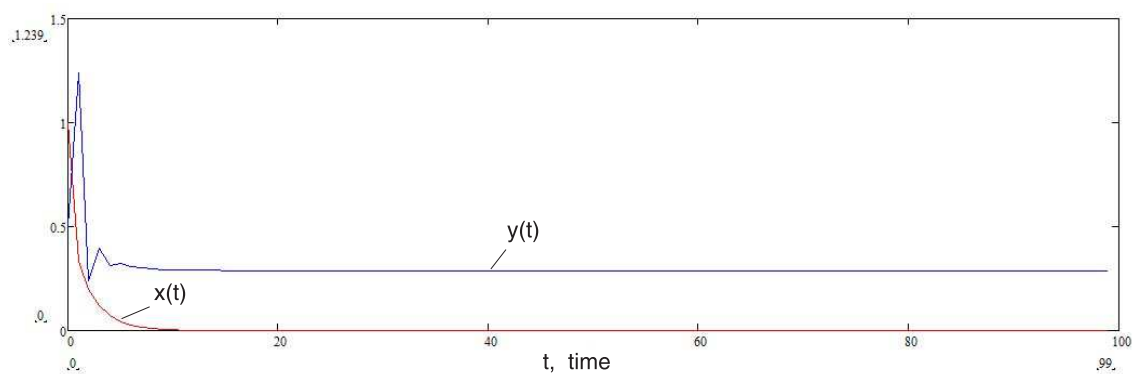


Рис. 1. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(0) = 1$ и $y(0) = 0,5$ при $t \in [0, 100]$

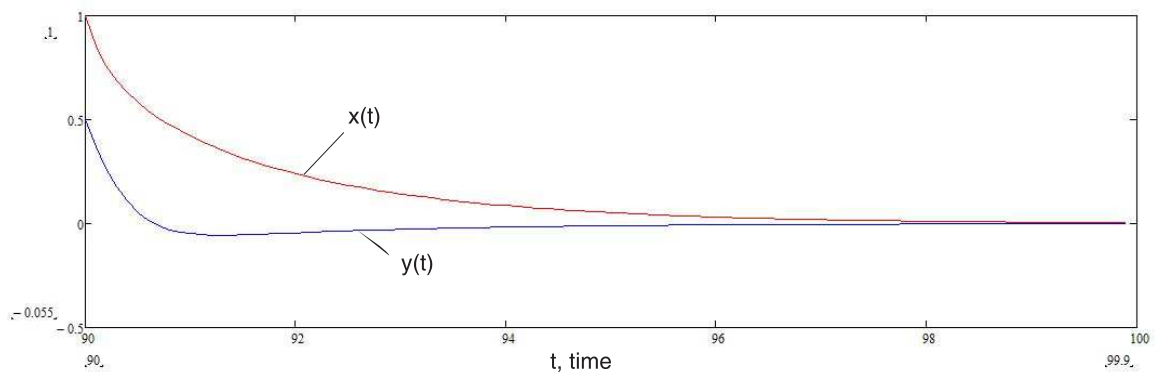


Рис. 2. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(90) = 1$ и $y(90) = 0,5$ при $t \in [90, 100]$

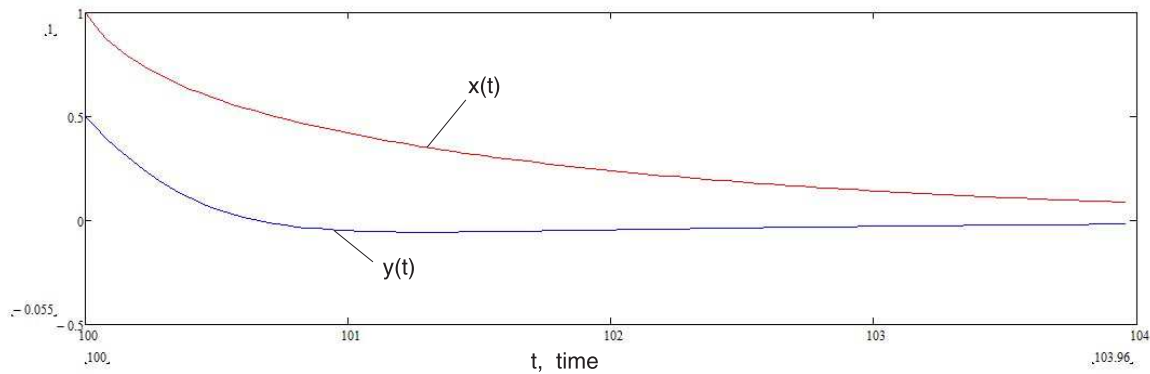


Рис. 3. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(100) = 1$ и $y(100) = 0,5$ при $t \in [100, 104]$

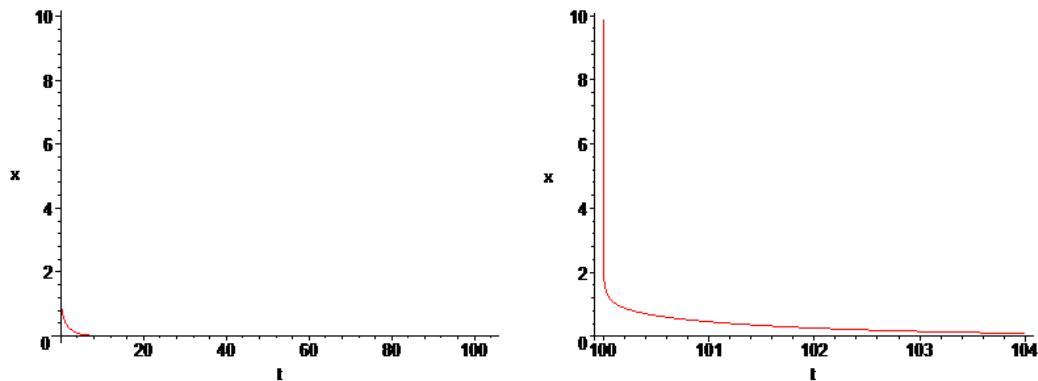


Рис. 4. Продуктивность леса в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным данным $x(0) = 10$ при $t \in [0, 100]$. Справа с начальным данным $x(100) = 10$ при $t \in [100, 104]$

На всех графиках мы видим, что с течением времени продуктивность фитоценоза постепенно асимптотически падает до нуля. Однако если учесть, что система (15) получена, в частности, упрощением исходной системы (1) посредством замены $x - x_{\text{гр}} \rightarrow x$, то следует говорить об асимптотическом падении продукции фитоценоза постепенно до величины $x_{\text{гр}} > 0$.

Можно сказать, что лес выходит на финальную стадию. Фактически найденное равновесие Нэша похоже на то, что в лесоведении называется климаксом леса.

Напомним, что *климакс леса* (от греч. *klíмах* — лестница) — это сравнительно зрелая, устойчивая (находящаяся в состоянии динамического равновесия с окружающей средой), «заключительная» стадия формирования фитоценоза, формирования лесной экосистемы.

Однако для позиционного управления (13) мы не можем утверждать, что система (5) является асимптотически устойчивой (теорема 10.4-2, утверждение (а) из [6]). Иначе говоря, возмущения начальных условий могут резко изменить намеченную траекторию развития системы «растительность-почва», и

это плохо соответствует понятию климаксного леса.

Скорее всего, следует говорить о *медленно деградирующем лесе*, поскольку для управления (13) все $u_i^* > 0$ для $x > 0$. Действительно, это означает, что внешние управляющие факторы k, a, W превысили значения $CI_0, УАН_0, W_0$, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза. Фактически это означает повышенную антропогенную нагрузку на лес и повышенную влажность почвы.

В какой мере второе уравнение может повлиять на первое? Иначе говоря, как ведут себя продуктивность $x(t)$ и мера плодородия $y(t)$ в условиях равновесия Нэша (13)?

Как видим, продукция x по-прежнему монотонно падает, а плодородие почвы со временем сохраняется на определённом уровне.

Фактически нахождение решения для меры плодородия y требует решения первого уравнения системы (16) относительно x и подстановки x во второе уравнение системы (16) с последующим интегрированием. Сделать это не столь просто. Однако из рис. 1 видно, что можно приближённо представить, что

$$t = 1/x + 100 \quad \text{или} \quad x = 1/(t - 100).$$

В таком случае уравнение для меры плодородия имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma c y^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w_-)] - \delta/2(t - 100).$$

Для $\gamma = w_0 - w_- = \delta = 1, c = -1$ оно принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - 1/2(t - 100).$$

Два возможных результата интегрирования даны на рис. 5.

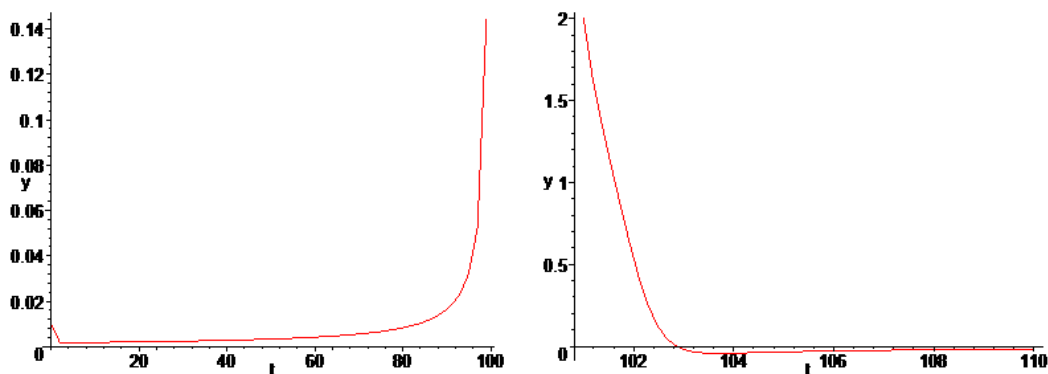


Рис. 5. Динамика меры плодородия в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным условием $y(0) = 0,01$ при $t \in [0, 100]$. Справа с начальным условием $y(101) = 2$ при $t \in [101, 110]$

Мы видим, что вначале плодородие нарастает, а затем после 100 лет – падает. В принципе, это более или менее согласуется с тем, что со временем продуктивность фитоценоза монотонно уменьшается.

6. Заключение

В работе [7], где проводилась игра только для одного уравнения продуктивности, нам удалось найти равновесие Нэша, для которого дифференциальное уравнение оказалось асимптотически устойчивым, и в силу этого мы заявили о том, что нашли управление, ведущее к климаксу леса. Для системы «растительность-почва» установить подобное, как сказано выше, нам не удалось. Скорее всего, это временная ситуация, которая разрешится тем, что в будущем будет найдено оптимальное управление, дающее и нэшевское равновесие, и асимптотическую устойчивость системе «растительность-почва». Надежда опирается на то, что в лесоведении существует понятия климаксного леса, основанное на знаниях о реальных лесных экосистемах, находящихся в реальных условиях окружающей среды, в которых растения помещены в почву, а не оторваны от неё.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Математическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 56–60.
2. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Теоретико-катастрофическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 23–24.
4. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Изд-во КАН, 2012. 220 с.
5. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.
6. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
7. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Климаксный лес как нэшевское равновесное состояние лесных экосистем // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 38–44.

**EQUILIBRIUM DYNAMICS OF FOREST ECOSYSTEMS BASED
ON THE RELATIONSHIP "VEGETATION-SOIL"**

L.A. Volodchenkova

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the Nash equilibrium state for the forest ecosystems based on the relationship "vegetation-soil" and the theory of differential games are investigated.

Keywords: The Nash equilibrium, forest ecosystem, soil, vegetation, differential games.

Дата поступления в редакцию: 07.03.2017

ЛАТЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ БИНАРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В.А. Шовин

научный сотрудник, e-mail: v.shovin@mail.ru

В.В. Гольяпин

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: golyapin@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

Аннотация. Проведено сравнение алгоритмов классификации с обучением ФОРДИАСИМПТ, латентный анализ на базе метода штрафных функций, КОРА, наивный байесовский классификатор, метод k ближайших соседей, дерево решений на базе прироста информации и снижения средней энтропии на примере многомерных бинарных показателей.

Ключевые слова: классификация с обучением, ФОРДИАСИМПТ, латентный анализ, метод штрафных функций, КОРА, наивный байесовский классификатор, метод k ближайших соседей, дерево решений.

Введение

Деревья решений являются альтернативным методом классификации с обучением. Деревья решений позволяют вскрывать структуру обучающего множества по определённому критерию прироста информации. Использование данного критерия в узле дерева делит исходное множество на два подмножества. В качестве такого критерия может выступать снижение средней энтропии разделённого множества. Деление множеств осуществляется рекурсивно до тех пор, пока в потомке не окажутся объекты одного класса. Использование данного принципа позволяет осуществлять классификацию для объектов различной природы, в том числе, когда показатели объектов имеют бинарный вид [1]. В данном случае в качестве предиката, разделяющего множество на подмножества, используется сравнение бинарного показателя по значению.

Наивный байесовский классификатор использует предположение о независимости показателей. В качестве решающего правила для классификации используется формула Байеса.

Метод k ближайших соседей использует в качестве решающего правила для классификации наиболее распространённый класс среди соседей данного элемента.

Алгоритм КОРА (комбинаторного распознавания) — алгоритм классификации (взвешенного голосования правил), предложенный М. Вайнцвайгом и

М. Бонгардом в 1973 г. [2, 3], который применяется как метод распознавания двух образов в пространстве двоичных признаков путём построения и анализа набора конъюнктивных закономерностей.

Алгоритм латентного анализа позволяет для группы показателей найти вероятности принадлежности объектов к различным классам на базе латентной модели связи условных вероятностей наличия показателей при принадлежности к классу и вероятностей распределения объектов по классам. Вычислить латентные вероятности модели возможно на базе метода штрафных функций.

Алгоритм ФОРДИАСИМПТ является методом латентного анализа, когда известны независимые тройки показателей. Найти латентные вероятности для троек параметров оказывается возможным однозначно на базе аналитического расчёта.

1. Дерево решений

Алгоритм построения дерева решений можно описать следующим образом:

1. $s_0 :=$ вычисляем энтропию исходного множества.
2. Если $s_0 = 0$, значит:
 - все объекты исходного набора, принадлежат к одному классу;
 - сохраняем этот класс в качестве листа дерева.
3. Если $s_0 < > 0$ значит:
 - перебираем все элементы исходного множества;
 - для каждого элемента перебираем все его показатели;
 - на основе каждого показателя генерируем предикат, который разбивает исходное множество на два подмножества;
 - рассчитываем среднее значение энтропии;
 - вычисляем ΔS ;
 - нас интересует предикат, с наибольшим значением ΔS ;
 - найденный предикат является частью дерева принятия решений, сохраняем его.
4. Разбиваем исходное множество на подмножества, согласно предикату.

Повторяем данную процедуру рекурсивно для каждого подмножества.

Для бинарных показателей в качестве предиката используется сравнение показателя по значению.

Энтропия системы S высчитывается в виде энтропии Шеннона:

$$S = - \sum_i p_i \cdot \ln p_i = - \sum_i \left(\frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N} \right), \text{ где}$$

N — общее количество объектов, N_i — количество объектов i -го класса,

$p_i = \frac{N_i}{N}$ — вероятность, что случайно выбранный объект будет i -го класса.

2. Наивный байесовский классификатор

Из формулы Байеса для n показателей вероятность $p(A_i | x_1, x_2, \dots, x_n)$ того, что объект при данном векторе показателей $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет класс A_i :

$$p(A_i | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p(A_i) p(x_1, x_2, \dots, x_n | A_i)}{\sum_{i=1}^m p(A_i) p(x_1, x_2, \dots, x_n | A_i)},$$

где $p(A_i)$ — вероятность появления объекта класса A_i , $p(x_1, x_2, \dots, x_n | A_i)$ — вероятность появления объекта класса A_i с вектором показателей $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из предположения о независимости показателей следует, что вероятность

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n | A_i) = \prod_{j=1}^n p(x_j | A_i).$$

Используется частотное представление вероятностей:

$$p(A_i) = \frac{N(A_i)}{N}, \text{ где}$$

N — число объектов обучающей выборки,

$N(A_i)$ — число объектов класса A_i обучающей выборки,

$$p(x_j | A_i) = \frac{N(x_j; A_i)}{N}, \text{ где}$$

$N(x_j; A_i)$ — число объектов класса A_i обучающей выборки с j -ым показателем равным x_j .

3. Метод k ближайших соседей

Задаётся число k ближайших соседей по метрике d евклидова пространства

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Среди k ближайших соседей выбирается самый многочисленный класс, который присваивается классифицируемому объекту.

4. Латентный анализ

В модели латентного анализа определены следующие величины:

y_{ij} — значение i -го показателя у j -го объекта;

m — количество показателей объектов;

n — количество объектов;

p_i — отношение количества объектов к n , у которых i -ый показатель равен 1;

$\phi(x_l)$ — частота, соответствующая относительному объёму l -го класса;

$f_i(x_l)$ — вероятность значения 1 по i -му показателю у объекта, находящегося в l -ом классе.

Величина $\phi(x_l)$ фактически является вероятностью, что объект принадлежит l -му классу.

Тогда, чтобы найти вероятность одновременных событий, что объект принадлежит l -му классу и имеет значения 1 по i -му показателю, необходимо перемножить вероятности этих двух («И») событий.

Пусть k — количество различных классов.

Тогда, чтобы найти вероятность, что объект имеет i -ый показатель, равный 1, необходимо сложить вероятности альтернативных («ИЛИ») событий, что i -ый показатель равен 1 в конкретном классе:

$$p_i = \sum_{l=1}^k f_i(x_l) \phi(x_l).$$

Аналогично с величинами:

p_{ij} — отношение количества объектов к n , у которых i -ый и j -ый показатель равен 1;

$f_{ij}(x_l)$ — вероятность значения 1 по i -му и j -му показателю у объекта, находящегося в l -ом классе.

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^k f_{ij}(x_l) \phi(x_l),$$

и с любым другим произвольным маргиналом z показателей:

$$p_{z_1 z_2 \dots z_s} = \sum_{l=1}^k f_{z_1 z_2 \dots z_s}(x_l) \phi(x_l),$$

где z_i — соответствует значению определённого показателя равному 1 или 0. При этом выполняются следующие равенства:

$$f_{z_1 z_2 \dots z_s}(x_l) = \prod_{i=1}^s f_{z_i}(x_l),$$

т. е. вероятность одновременных («И») событий, что объект имеет набор показателей $z_1, z_2, \dots, z_s$ и принадлежит классу l , равна произведению вероятностей, что объект имеет показатель z_i и принадлежит классу l .

$$f_{z_i}(x_l) + f_{\bar{z}_i}(x_l) = 1,$$

т. е. сумма вероятностей событий («ИЛИ»), что объект имеет одно из двух бинарных значений (0 или 1) по показателю z_i , равна вероятности достоверного события.

Пусть

$$\gamma_{z_i} = \begin{cases} f_{z_i}(x_l), & z_i = 1 \\ 1 - f_{z_i}(x_l), & z_i = 0 \end{cases},$$

тогда вероятность принадлежности объекта с набором показателей $z_1 z_2 \dots z_m$ к i -му классу:

$$P(i | z_1 z_2 \dots z_m) = \gamma_{z_1} \gamma_{z_2} \cdot \dots \cdot \gamma_{z_m} \phi(x_i).$$

5. Метод штрафных функций

Численный метод расчёта модели латентного анализа на базе метода штрафных функций.

Необходимо минимизировать сумму квадратов невязок отдельных уравнений модели латентного анализа:

$$1 - \sum_{l=1}^k \phi(x_l) = \varepsilon$$

$$p_i - \sum_{l=1}^k f_i(x_l) \phi(x_l) = \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$p_{ij} - \sum_{l=1}^k f_i(x_l) f_j(x_l) \phi(x_l) = \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m$$

...

$$p_{12\dots m} - \sum_{l=1}^k f_1(x_l) f_2(x_l) \cdot \dots \cdot f_m(x_l) \phi(x_l) = \varepsilon_{12\dots m}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

В данном методе оптимизируемыми являются параметры $\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_k)$ и $f_i(x_l)$, $i=1, \dots, m$; $l=1, \dots, k$. Известными являются параметры $p_i, p_{ij}, \dots, p_{12\dots m}$.

6. ФОРДИАСИМПТ

Алгоритм ФОРДИАСИМПТ является частным видом латентного анализа, когда имеется два набора из трёх показателей и два класса [3].

Тогда вероятность принадлежности объекта с набором показателей $z_1^j z_2^j z_3^j$ к i -му классу на основе j -го набора показателей рассчитывается по формуле Байеса:

$$P(i | z_1^j z_2^j z_3^j) = \frac{\gamma_{z_1^j}^1 \gamma_{z_2^j}^1 \gamma_{z_3^j}^1 \phi(x_1)}{\gamma_{z_1^j}^1 \gamma_{z_2^j}^1 \gamma_{z_3^j}^1 \phi(x_1) + \gamma_{z_1^j}^2 \gamma_{z_2^j}^2 \gamma_{z_3^j}^2 \phi(x_2)},$$

где величины $\gamma_{z_i^j}^1$ и $\gamma_{z_i^j}^2$ вычислены для каждого класса.

$$P(i | z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_1^2 z_2^2 z_3^2) = P(i | z_1^1 z_2^1 z_3^1) \cdot P(i | z_1^2 z_2^2 z_3^2).$$

Теоретический расчёт для вычисления значений $\gamma_{z_i^j}^s$ и $\phi(x_s)$ приведён в работе [3].

7. Корректный ФОРДИАСИМПТ

Корректное значение вероятности принадлежности к i -му классу следует вычислять по формуле:

$$P(i | z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_1^2 z_2^2 z_3^2) = \frac{P(i | z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_1^2 z_2^2 z_3^2)}{P(1 | z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_1^2 z_2^2 z_3^2) + P(2 | z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_1^2 z_2^2 z_3^2)}.$$

8. Численный эксперимент

В качестве исходных данных для вычислительного эксперимента были взяты бинарные показатели с объёмом выборки 150 [3].

Вид дерева решений для объектов независимого контроля представлен на рис. 1.

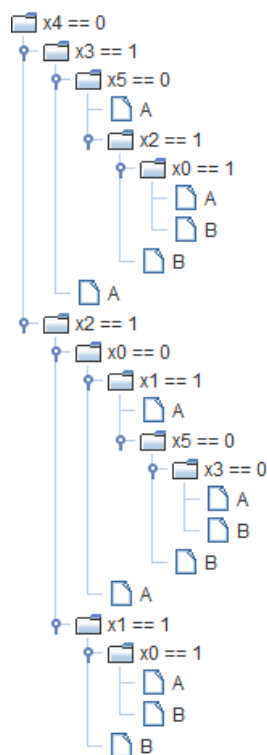


Рис. 1. Дерево решений объектов обучающей выборки

Сравнение классификаций объектов независимого контроля алгоритмов ФОРДИАСИМПТ, КОРА, метод k ближайших соседей (k-NN) и дерево решений представлено в таблице 1.

Из таблицы сравнения видно, что отличия распознавания объектов алгоритмами ФОРДИАСИМПТ и дерево решений составили 1 объект, при этом неправильно распознан был 1 объект алгоритмом ФОРДИАСИМПТ и 0 объектов алгоритмом дерева решений. Аналогично наивный байесовский классификатор и метод k ближайших соседей имели одно отличие в распознавании, в котором они имели правильный ответ. Алгоритм ФОРДИАСИМПТ, как и наивный байесовский классификатор, имеет преимущество перед алгоритмом дерево решений, поскольку принадлежность к тому или иному классу имеет

Таблица 1. Таблица объектов независимого контроля с результатом распознавания алгоритмами ФОРДИАСИМПТ, КОРА и дерево решений

Класс	В	ФОРДИАСИМПТ	ФОРДИАСИМПТ Корректн.	КОРА	Дерево решений	Байес	k-NN	LAS	LAS(K)	LA
1	1	0	0	0	0	А	А	А	А	А
0	0	1	0	1	1	В	В	А	В	В
0	0	1	0	0	1	А	А	А	В	А
1	1	1	0	1	1	А	А	А	В	В
0	0	0	1	1	1	В	В	В	В	В
0	0	0	0	1	1	В	В	В	В	В
0	0	0	0	0	0	А	А	А	В	А
1	0	0	1	1	0	В	В	В	В	В
0	0	0	0	1	0	В	В	В	В	А
1	1	1	1	1	1	А	А	А	В	В
1	0	1	1	1	0	А	А	В	В	В
1	0	0	0	1	0	В	В	В	В	А
0	1	1	1	0	0	А	А	А	А	А
0	0	1	1	0	0	А	А	А	А	А
0	1	0	1	1	1	В	В	В	В	В
0	1	1	1	0	1	А	В	А	А	В
1	0	1	0	0	0	А	А	А	А	А
1	0	0	0	0	0	А	А	А	В	А
0	0	1	1	1	1	В	В	А	В	В

нечёткое выражение. Однако использование ансамбля деревьев может нивелировать этот недостаток, когда пограничные объекты различных классов имеют нечёткое отношение к различным классам. В тоже время по результатам независимого контроля алгоритм ФОРДИАСИМПТ показал худший результат.

Латентный анализ на базе метода штрафных функций дал на 2 правильный распознавания больше чем алгоритм ФОРДИАСИМПТ, и на 1 ответ больше, чем алгоритмы «дерево решений» и «наивный байесовский классификатор». Преимуществом латентного анализа на базе метода штрафных функций является отсутствие необходимости разбивать параметры на независимые группы.

Программная реализация

В качестве библиотеки классификации по методу построения дерева решений была использована общедоступная библиотека с исходным кодом на языке Java: <https://github.com/lagodiuk/decision-tree>.

Наивный байесовский классификатор и метод k ближайших соседей были реализованы как web-приложение, доступное по адресу: <http://svlaboratory.org/application/bayes> после регистрации пользователя.

Латентный анализ на базе метода штрафных функций был реализован в качестве отдельной Java-программы.

9. Заключение

Приведено сравнение алгоритмов классификации с обучением: ФОРДИАСИМПТ, КОРА, метод k ближайших соседей, дерево решений, наивный байесовский классификатор и латентный анализ на базе метода штрафных функций

для многомерных бинарных показателей. Показано отсутствие преимущества алгоритма ФОРДИАСИМПТ. На тестовом множестве метод ФОРДИАСИМПТ дал на одно неверное распознавание объектов больше. Лучший результат показал алгоритм латентного анализа на базе метода штрафных функций. Преимуществом латентного анализа на базе метода штрафных функций перед алгоритмом ФОРДИАСИМПТ является отсутствие необходимости разбивать параметры на независимые группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segaran T. Programming Collective Intelligence. Building Smart Web 2.0 Applications. O'Reilly Media, 2007.
2. Вапник В.Н. Алгоритмы обучения распознаванию образов. М. : Советское радио, 1973.
3. Гольцяпин В.В., Шовин В.А. Алгоритмы КОРА и ФОРДИАСИМПТ как методы распознавания двух образов в пространстве двоичных признаков // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 74–92.

LATENCY ANALYSIS BASED ON PENALTY METHOD FOR MULTIDIMENSIONAL BINARY INDICATORS

V.A. Shovin

Scientist Researcher, e-mail: v.shovin@mail.ru

V.V. Golyapin

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: golyapin@mail.ru

Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of the Russian Academy Sciences

Abstract. A comparison of following classification algorithms with learning is carried out: FORDIASIMPT, latency analysis based on penalty method, KORA, naive Bayes classifier, k-nearest neighbors algorithm, decision tree based on information growth and reduction of the average entropy in an example of multidimensional binary indicators.

Keywords: classification with learning, FORDIASIMPT, latency analysis, penalty method, KORA, naive Bayes classifier, k-nearest neighbors algorithm, decision tree.

Дата поступления в редакцию: 31.01.17

FRIS-КОМПАКТНОСТЬ ГРУПП ПАЦИЕНТОВ С АРТЕРИАЛЬНОЙ ГИПЕРТЕНЗИЕЙ

В.А. Шовин

научный сотрудник, e-mail: v.shovin@mail.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

Аннотация. С помощью функции FRiS вычисляется компактность групп пациентов с артериальной гипертензией до и после физиотерапии. С помощью альтернативного (функции FRiS) подсчёта количества ближайших соседей объектов каждой группы определяется «обороноспособность» групп пациентов. В статье предложена специальная функция FRiS, повышающая статистическую достоверность оценок компактности классов. В результате вычислений оказалось, что часть пациентов из группы «после» физиотерапии выделилась в компактную группу, в то время как объекты третьей, оставшейся, части оказались не защищены объектами своей группы. С медицинской точки зрения это, видимо, можно интерпретировать как положительный эффект от лечения для части пациентов.

Ключевые слова: функция FRiS-компактности, артериальная гипертензия.

Введение

Одной из мер оценки сходства между объектами является функция конкурентного сходства или FRiS-функция [1, 2]. Эта функция позволяет оценить, какой из двух объектов ближе к данному объекту. Сумма значений таких функций позволяет оценить компактность всей группы объектов данного класса. Другим способом оценки компактности и «обороноспособности объектов» группы является вычисление количества ближайших объектов разных классов для объектов данного класса.

В данной работе изучается эффективность физиотерапии для лечения артериальной гипертензии начальной стадии на основе значений различных показателей пациентов групп «до» и «после» проведенного лечения.

Вычисление FRiS-компактности групп пациентов до и после лечения, а также оценка «обороноспособности» групп позволяет оценить эффективность физиотерапии с точки зрения гипотезы обособления или изоляции (гипотеза компактности) пациентов группы «после лечения» в многомерном пространстве показателей. С точки зрения гипотезы компактности объекты одного класса образуют в признаковом пространстве обособленный сгусток [3].

1. Функция конкурентного сходства

Пусть задано евклидово расстояние между точками x, y в многомерном вещественном пространстве: $r(x, y)$. Тогда функция FRiS определяется по формуле:

$$F(z, a|b) = \frac{r(z, b) - r(z, a)}{r(z, b) + r(z, a)}.$$

Основные свойства функции FRiS:

если $r(z, b) = 0$, то $F(z, a|b) = -1$;

$r(z, a) = 0$, то $F(z, a|b) = 1$;

$r(z, b) = r(z, a)$, то $F(z, a|b) = 0$.

2. FRiS-компактность

Пусть даны два класса объектов $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$. $S_A(x)$ — ближайший к x объект класса A , $S_B(x)$ — ближайший к x объект класса B . Тогда компактность класса A , определяется по формуле:

$$C_{A|B} = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} F(a_i, S_A(a_i)|S_B(a_i)),$$

N_A — число объектов класса A .

Альтернативной оценкой компактности класса является подсчёт ближайших соседей различных классов. Так, для каждого объекта класса определяется ближайший объект, ведётся подсчёт таких ближайших объектов класса A и класса B .

3. Обобщённая FRiS-компактность

Чтобы повысить статистическую достоверность оценки компактности класса, можно ввести специальную функцию конкурентного сходства.

Специальная функция FRiS определяется по формуле:

$$F(z, (a_1, a_2, \dots, a_k)|(b_1, b_2, \dots, b_k)) = \frac{\sum_{i=1}^k r(z, b_i) - \sum_{i=1}^k r(z, a_i)}{\sum_{i=1}^k r(z, b_i) + \sum_{i=1}^k r(z, a_i)}.$$

Следует заметить, что специальная функция FRiS не выражается через сумму простых функций FRiS. Так, для подсчёта компактности $C_{A|B}$ в аргументы специальной функции FRiS нужно подставить k ближайших объектов каждого класса. Соответственно, обобщённой альтернативной оценкой компактности класса является подсчёт k ближайших соседей различных классов. Так, для каждого объекта класса определяется k ближайших объектов, ведётся подсчёт таких ближайших объектов класса A и класса B .

При подсчёте функции FRiS возможно использовать вместо евклидова расстояния $r(x, y)$ расстояние λ гипотезы λ -компактности [3].

4. λ -расстояние

Однородность расстояний между соседними точками в различных классах служит основанием гипотезы λ -компактности. Соответствующее λ -расстояние учитывает нормированное расстояние d между элементами множества и характеристику τ локальной плотности множества в окрестностях этих элементов.

Пусть D — самое большое расстояние между всеми парами точек множества. Тогда $d = \frac{r(x,y)}{D}$.

Пусть $\beta_{\min}$ — наименьшее из расстояний от точек x и y до ближайших точек кроме них самих. Пусть $\tau^* = \frac{r(x,y)}{\beta_{\min}}$. Пусть $\tau_{\max}$ — наибольшее τ^* между всеми парами точек множества. Тогда локальная неоднородность плотности множества в окрестностях точек x, y равна $\tau = \frac{\tau^*}{\tau_{\max}}$.

Величина $\lambda = f(\tau, d)$ называется λ -расстоянием между точками x, y . Наилучшее совпадение экспертных суждений с формальными получается в том случае, если в качестве меры расстояния используется $\lambda = d \cdot \tau^2$.

На точках множества в λ -метрике возможно построить *кратчайший незамкнутый путь* (λ -КНП), например, по алгоритму Прима [4, 5]. λ -КНП-расстоянием между двумя любыми точками будем считать сумму λ -расстояний между парами точек, по которым проходит путь между ними по λ -КНП.

5. Численный эксперимент

В качестве исходных параметров были взяты 38 биофизических показателей для 131 лица с артериальной гипертензией начальной стадии до (А) и после (В) физиотерапии. Некоторые из них:

- 1) *вес*,
- 2) *индекс массы тела (ИМТ)*,
- 3) *частота дыхания (ЧД)*,
- 4) *сегментоядерные нейтрофилы (С)*,
- 5) *лимфоциты (Л)*,
- 6) *конечно-систолический размер левого желудочка (КСР)*,
- 7) *конечно-систолический объём левого желудочка (КСО)*,
- 8) *конечно-диастолический размер левого желудочка (КДР)*,
- 9) *конечно-диастолический объём левого желудочка (КДО)*,
- 10) *ударный объём (УО)*,
- 11) *минутный объём сердца (МОС)*,
- 12) *общее периферическое сосудистое сопротивление (ОПСС)*,
- 13) *индекс Хильдебрандта (ИХ)*,
- 14) *фракция выброса левого желудочка (ФВ)*,
- 15) *фракция укорочения левого желудочка (ФУ)*.

Результаты вычислений FRiS-компактности классов по евклидову расстоянию:

компактность класса A : 0.0202,
компактность класса B : 0.0484,
количество ближайших соседей класса A для класса A : 78,
количество ближайших соседей класса B для класса A : 53,
количество ближайших соседей класса B для класса B : 84,
количество ближайших соседей класса A для класса B : 47.

Результаты вычислений FRiS-компактности классов по λ -расстоянию:

компактность класса A : 0.0196,
компактность класса B : 0.0444,
количество ближайших соседей класса A для класса A : 77,
количество ближайших соседей класса B для класса A : 54,
количество ближайших соседей класса B для класса B : 81,
количество ближайших соседей класса A для класса B : 50.

Результаты вычислений FRiS-компактности классов по λ -КНП-расстоянию:

компактность класса A : 0.0199,
компактность класса B : 0.0562,
количество ближайших соседей класса A для класса A : 69,
количество ближайших соседей класса B для класса A : 62,
количество ближайших соседей класса B для класса B : 92,
количество ближайших соседей класса A для класса B : 39.

Обобщённые оценки компактности классов при подсчёте $k=5$ ближайших объектов по евклидову расстоянию:

компактность класса A : 0.0173,
компактность класса B : 0.0373,
количество ближайших соседей класса A для класса A : 75,
количество ближайших соседей класса B для класса A : 56,
количество ближайших соседей класса B для класса B : 88,
количество ближайших соседей класса A для класса B : 43.

Обобщённые оценки компактности классов при подсчёте $k=5$ ближайших объектов по λ -расстоянию:

компактность класса A : 0.0189,
компактность класса B : 0.0358,
количество ближайших соседей класса A для класса A : 75,
количество ближайших соседей класса B для класса A : 56,
количество ближайших соседей класса B для класса B : 83,
количество ближайших соседей класса A для класса B : 48.

Обобщённые оценки компактности классов при подсчёте $k=5$ ближайших объектов по λ -КНП-расстоянию:

компактность класса A : 0.0022,

компактность класса B : 0.0227,

количество ближайших соседей класса A для класса A : 61,

количество ближайших соседей класса B для класса A : 70,

количество ближайших соседей класса B для класса B : 91,

количество ближайших соседей класса A для класса B : 40.

На базе обобщённых оценок компактности классов по евклидову расстоянию можно сделать следующие выводы. Количество объектов $(56 - 43) = 13$ характеризует различную плотность классов A и B при *проникновении* объектов различных классов друг в друга. Класс B проявляет большую *внешнюю* плотность, так как захватил на 13 объектов больше. 43 объекта класса B (условно здоровые) захвачены объектами класса A , и 56 объектов класса A (пациенты с АГ) захвачены объектами класса B . 75 объектов класса A находятся внутри класса A , и 88 объектов класса B находятся среди класса B . Количество объектов $(88 - 75) = 13$ характеризует большую *внутреннюю* плотность класса B , чем класса A . Объекты класса B захватили больше как своих, так и чужих объектов. В целом класс B имеет большее значение критерия альтернативной компактности. Значение данного критерия для класса B можно определить равным $(88 + 56) = 144$, и для класса A равным $(75 + 43) = 118$. Альтернативная компактность класса B больше класса A на $(144 - 118) = 26$. Аналогичные отношения характеристик наблюдаются при их вычислении по λ -расстоянию и λ -КНП-расстоянию.

Различная компактность классов может быть следствием различной плотности классов. Объекты класса B имеют меньшую дисперсию показателей [6].

Интерпретируя эти результаты вычислений, можно сделать следующий вывод.

Скорее всего, есть подгруппа в группе «после лечения», которая оказалась компактной и защищённой объектами своего класса, в то время как примерно третья часть объектов группы «после лечения» оказалась разбросанной среди объектов до лечения.

С медицинской точки зрения, скорее всего, есть подгруппа «вылечившихся», т. е. медицинский эффект от лечения которых привёл их к выделению из группы пациентов, в то время как некоторые пациенты показывают *отсутствие эффекта от лечения* [6].

Заключение

Предложена специальная функция FRiS, повышающая статистическую достоверность оценок компактности классов. Вычисление FRiS-компактности групп пациентов до и после физиотерапии, а также подсчёт ближайших соседей

этих классов показали отсутствие эффекта от лечения для третьей части пациентов с артериальной гипертензией начальной стадии. В то время как оставшаяся половина пациентов показала компактность и изолированность, что можно интерпретировать как положительный эффект от лечения для части пациентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аркадьев А.Г. Браверман Э.М. Обучение машины распознаванию образов. М. : Наука, 1964.
2. Воронин Ю.А. Введение мер сходства и связи для решения геолого-географических задач // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 5. С. 1011–1015.
3. Загоруйко Н.Г. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сб. 1961. № 2. С. 95–107.
4. Прим З.Л. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. 270 с.
5. Шовин В.А. Конфирматорная факторная модель артериальной гипертензии // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, № 4. С. 885–894.
6. Шовин В.А. Структурное, энтропийное моделирование и корреляционный анализ артериальной гипертензии // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4(40). С. 81–89.

FRIS COMPACTNESS OF GROUPS OF PATIENTS WITH HYPERTENSION

V.A. Shovin

Scientist Researcher, e-mail: v.shovin@mail.ru

Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of the Russian Academy Sciences

Abstract. The compactness of groups of patients with hypertension before and after physiotherapy calculates by FRiS function. The "defenses" of groups of patients is determined by counting the number of nearest neighbors of each group of objects that alternate FRiS function. The article offers a special FRiS function that improves the accuracy of statistical estimates of the compactness of classes. As the result of the calculations, it turned out that from the group of the patients "after physical therapy" a compact group is allocated, while the objects of the third part were not protected by objects of the own group. From a medical point of view, it seems to be interpreted as a positive effect of treatment for some patients.

Keywords: FRiS compact function, hypertension.

Дата поступления в редакцию: 06.02.2017

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОБЩЁННОЙ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ

Н.С. Новаковский

аспирант второго года, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения

Аннотация. В статье изложены результаты численного и аналитического моделирования задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа при неубытывании радиуса сжимающего поршня. Основным результатом статьи являются выведенные аналитические представления звуковых характеристик обобщённой центрированной волны сжатия. Кроме этого, приводятся результаты сравнения следствий полученных аналитических формул с расчётами методом характеристик в обратном направлении изменения времени. Также полученные представления звуковых характеристик были использованы для расчёта течения в области между крайней звуковой характеристикой и сжимающим поршнем при возрастании времени. Установлена применимость разработанного подхода для решения задачи о сильном сжатии одномерных слоёв газа достаточно больших масс.

Ключевые слова: сильное сжатие газа, метод характеристических рядов, особенность течения.

Введение

В [1–3] предложено многомерное обобщение центрированной волны Римана для решения некоторых задач газовой динамики, в том числе задач о сжатии идеального газа и о разлёте газа в вакуум. Для того чтобы пользоваться этим решением в реальных задачах, необходимо иметь не только аналитическое представление неизвестных функций в виде сходящегося бесконечного ряда, но и уметь восстанавливать звуковые и контактные характеристики этих течений. Количество характеристик системы уравнений газовой динамики с учётом их кратности соответствует количеству уравнений в системе. А именно: в случае трёх пространственных переменных система состоит из 5 уравнений и имеет звуковые C^+ и C^- характеристики кратности один и контактную характеристику C^0 кратности три. При уменьшении размерности кратность контактной характеристики соответственно уменьшается. Если же рассматриваются одномерные изэнтропические течения, то в системе остаётся только два уравнения и контактная поверхность теряет свойство быть характеристикой.

Траектории звуковых характеристик участвуют при расчётах граничных условий [4, 5]. В предыдущих статьях автора [4, 5] использовалась только C_0^+ -характеристика, траектория движения которой не зависит от симметрии задачи и имеет простой вид:

$$r_{C_0^+}(t) = r_0 + t.$$

Здесь и далее предполагается, что в начальный момент времени задано фоновое течение газа $u = 0, \rho = 1$. Целью как предыдущих работ автора, так и настоящей является отыскание такой траектории движения сжимающего поршня, которая гарантированно обеспечивает сжатие заданной массы газа до наперед заданной плотности. В работе [2] получены асимптотические оценки для траектории движения поршня, сжимающего газ до бесконечной плотности. В работах [6, 7] изложен алгоритм решения задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени методом характеристик, который обеспечивает численное построение траектории движения сжимающего поршня в случае уменьшения его радиуса. В работе [4] этот алгоритм применён для решения задачи сжатия одномерных газовых слоёв в конфигурации Р. Мизеса при неубывании радиуса кривизны сжимающего поршня.

1. Получение первых коэффициентов ряда по степеням t для искомых функций

Следуя [2, 3], сформулируем задачу получения в момент времени $t = t_*$ вертикального в точке $r = r_*$ распределения плотности в слое газа. Сначала поменяем ролями искомую функцию $\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ (скорость звука газа) и независимую переменную r для того, чтобы избавиться от особенности в решении в точке $r = r_*$. Система уравнений для вышеупомянутой задачи запишется следующим образом:

$$\begin{cases} r(u - r_t) + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma(ru_\sigma + \nu ur_\sigma) = 0, \\ r_\sigma u_t + (u - r_t)u_\sigma + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь значения $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Для системы (1) формулируются начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} r(t, \sigma)|_{\sigma=1} &= r_0 + t, \\ u(t, \sigma)|_{\sigma=1} &= 0, \\ r(t, \sigma)|_{t=t_*} &= r_*, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_* = r_0 + t_*$. В рассматриваемой задаче $\sigma \geq 1$.

Следуя [2, 3], будем искать решение системы в виде сходящегося степенного ряда по степеням $(t - t_*)$:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\sigma) \frac{(t - t_*)^k}{k!}, \\ r &= \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\sigma) \frac{(t - t_*)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание краевое условие (2), сразу получим, что

$$r_0(\sigma) = r(t_*, \sigma) = r_*, \quad r_\sigma|_{t=t_*} \equiv 0.$$

Учитывая вид рядов (3) и условия (2) при подстановке $t = t_*$, получим:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_*} &= u_0(\sigma), & r_t|_{t=t_*} &= r_1(\sigma), \\ u_t|_{t=t_*} &= u_1(\sigma), & r_{tt}|_{t=t_*} &= r_2(\sigma), \\ u_\sigma|_{t=t_*} &= u'_0(\sigma), & u_{\sigma t}|_{t=t_*} &= u'_1(\sigma), \\ r_{\sigma t}|_{t=t_*} &= r'_1(\sigma). \end{aligned}$$

Для получения нескольких первых коэффициентов рядов будем использовать методику, подробно изложенную в [2, 3], а именно: для получения u_0, r_1 подставим в (1) $t = t_*$ и решим получившуюся систему ОДУ:

$$\begin{cases} r_*(u_0 - r_1) + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma r_* u'_0 = 0, \\ (u_0 - r_1) u'_0 + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) выразим:

$$(u_0 - r_1) = -\frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0}$$

и, подставив в первое уравнение, получим:

$$-r_* \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0} + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma r_* u'_0 = 0.$$

После ряда преобразований получим:

$$u'_0 = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)}.$$

Отсюда

$$u_0(\sigma) = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma + \text{const.}$$

Исходя из условий (2), получим окончательный вид:

$$u_0(\sigma) = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)} (\sigma - 1). \quad (5)$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), получим явное выражение для r_1

$$r_1(\sigma) = u_0 + \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0} = \pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \sigma \mp \frac{2}{(\gamma - 1)}. \quad (6)$$

Для получения следующих коэффициентов рядов продифференцируем систему (1) по t :

$$\begin{cases} r_t(u - r_t) + r(u_t - r_{tt}) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(r_t u_\sigma + r u_{\sigma t} + \nu u r_{\sigma t}) = 0, \\ r_{\sigma t} u_t + r_\sigma u_{tt} + (u_t - r_{tt})u_\sigma + (u - r_t)u_{\sigma t} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая вид рядов (3), подставив в (7) $t = t_*$, получим:

$$\begin{cases} r_1(u_0 - r_1) + r_*(u_1 - r_2) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(r_1 u'_0 + r_* u'_1 + \nu u_0 r'_1) = 0, \\ r'_1 u_1 + (u_1 - r_2)u'_0 + (u_0 - r_1)u'_1 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Подставим полученные функции в (8):

$$\begin{cases} -\frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)}\sigma^2 + \frac{2}{(\gamma - 1)}\sigma + r_*(u_1 - r_2) + \\ + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[\frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}\sigma - \frac{2^2}{(\gamma - 1)^2} + r_* u'_1 + \nu \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}(\sigma - 1) \right] = 0, \\ \pm \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)}u_1 \pm (u_1 - r_2)\frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и разделив первое уравнение на $r_* \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} r_2 = u_1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[u'_1 + \frac{\nu}{r_*} \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \frac{2}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1) \right], \\ \pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}u_1 \pm (u_1 - r_2)\frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Подставим выражение $u_1 - r_2$ из первого уравнения во второе:

$$\pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}u_1 \mp \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[u'_1 + \frac{\nu}{r_*} \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \frac{2}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1) \right] \frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0.$$

Раскроем скобки, введём обозначение $\alpha = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}$ и получим ОДУ относительно u_1 :

$$\pm \sigma u'_1 \mp \alpha u_1 = -\frac{\nu}{r_*} \alpha \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1).$$

Это неоднородное линейное уравнение первого порядка. В зависимости от значения параметра α , решение следующее:

$$u_1(\sigma) = \begin{cases} u_{10}\sigma \pm \frac{\nu}{r_*}\sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*}\sigma^2, & \alpha = 1, \text{ т.е. } \gamma = 3, \\ u_{10}\sigma^2 \mp \frac{6\nu}{r_*}\sigma - \frac{6\nu}{r_*}\sigma^2 \ln \sigma, & \alpha = 2, \text{ т.е. } \gamma = \frac{5}{3}, \\ u_{10}\sigma^\alpha - \frac{2\nu\alpha}{(\gamma - 1)r_*} \left[\frac{\sigma}{(\alpha - 1)} - \frac{\sigma^2}{(\alpha - 2)} \right], & \alpha \neq 1, 2, \text{ т.е. } \gamma \neq 3, \frac{5}{3}. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив полученные формулы в (9), выразим $r_2(\sigma)$:

$$r_2 = \begin{cases} \sigma \left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2, & \gamma = 3, \\ -\frac{12\nu}{r_*} \sigma + \left(\frac{5u_{10}}{3} + \frac{2\nu}{r_*} \right) \sigma^2 - \frac{10\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma, & \gamma = \frac{5}{3}, \\ \sigma^\alpha \frac{u_{10}(\gamma + 5)}{4} + \frac{2\nu\alpha(2 + A)}{r_* B} \sigma^2 - \frac{8\nu\alpha}{r_* A} \sigma, & \gamma \neq 3, \frac{5}{3}, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$A = 3 - \gamma, B = 5 - 3\gamma.$$

Коэффициенты A, B , находящиеся в знаменателе, обращаются в нуль при $\gamma = 3$ и $\gamma = 5/3$. Эти случаи рассматриваются отдельно.

Таким образом, получены два первых члена в ряду по степеням $\tau = (t - t_*)$ для функции $u(\sigma)$ и три первых члена для функции $r(\sigma)$:

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= u_0(\sigma) + u_1(\sigma)\tau + \mathcal{O}(\tau^2), \\ r(\sigma) &= r_0(\sigma) + r_1(\sigma)\tau + r_2(\sigma)\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3), \end{aligned} \quad (12)$$

а функции u_0, u_1, r_1, r_2 вычисляются по формулам (5), (10), (6), (11) соответственно.

Заметим, что при $\nu = 0$, то есть в случае плоской симметрии, построенное решение описывает простую центрированную волну Римана, которая задаётся формулой [8]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1}, \\ \frac{r - r_*}{\tau} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Заметим, что вне зависимости от γ , при $\nu = 0$, построенное решение будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1} + u_{10} \sigma^\alpha \tau + \mathcal{O}(\tau^2), \\ \frac{r - r_*}{\tau} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma + 5}{4} u_{10} \sigma^\alpha \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned}$$

Естественно потребовать, чтобы полученные нами формулы совпадали с классическим решением. Откуда с необходимостью следует:

$$u_{10} \equiv 0. \quad (13)$$

2. Вывод уравнений для характеристик

Пусть в начальный момент времени во всей рассматриваемой области $\{t \geq 0, r \geq r_0\}$ задано фоновое течение $u = 0, \rho = 1$, тогда запишем задачу Коши для закона движения звуковой C^+ -характеристики в пространстве независимых переменных (t, σ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} = u + \sigma, \\ \sigma|_{\tau=0} = \sigma_*. \end{cases} \quad (14)$$

Преобразуем ОДУ (14), с учётом представления функций u, r (12):

$$r_1 + r_2\tau + \mathcal{O}(\tau^2) + [r'_1\tau + r'_2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3)] \frac{d\sigma}{dt} = u_0 + u_1\tau + \mathcal{O}(\tau^2) + \sigma.$$

Будем последовательно рассматривать особые случаи. Сначала $\gamma = 3$:

$$\begin{aligned} & 2\sigma - 1 + \left[\sigma \left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \right] \tau + \\ & + \left\{ 2\tau + \left[\left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \ln \sigma + \frac{2\nu}{r_*} - 2\frac{\nu}{r_*} \sigma \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = \sigma - 1 + \left(u_{10}\sigma + \frac{\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \right) \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Приведём подобные, сократим на τ , учтём (13):

$$\left[2 + \left(\frac{2\nu}{r_*} \ln \sigma + \frac{\nu}{r_*} - 2\frac{\nu}{r_*} \sigma \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{r_*} \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma. \quad (15)$$

Далее рассмотрим случай $\gamma = 5/3$:

$$\begin{aligned} & 4\sigma - 3 + \left[\left(\frac{5u_{10}}{3} + \frac{2\nu}{r_*} \right) \sigma^2 - \frac{12\nu}{r_*} \sigma - \frac{10\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma \right] \tau + \\ & + \left\{ 4\tau + \left[\left(\frac{10u_{10}}{3} + \frac{4\nu}{r_*} \right) \sigma - \frac{12\nu}{r_*} - \frac{20\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{10\nu}{r_*} \sigma \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = 3\sigma - 3 + \left(u_{10}\sigma^2 - \frac{6\nu}{r_*} \sigma - \frac{6\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma \right) \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение аналогично первому случаю:

$$\left[4 + \left(\frac{12\nu}{r_*} \sigma + \frac{6\nu}{r_*} \sigma^2 + \frac{20\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\nu}{r_*} \sigma^2 - \frac{6\nu}{r_*} \sigma - \frac{4\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma. \quad (16)$$

Решение этого уравнения, так же как и решение уравнения (15) в квадратурах не выписываются [9, 10] и эти решения можно найти только численно.

Выпишем теперь общий случай $\gamma \neq 5/3, \gamma \neq 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma - \frac{2}{\gamma-1} + \left(\sigma^\alpha \frac{u_{10}(\gamma+5)}{4} + \frac{2\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma^2 - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \sigma \right) \tau + \\ & + \left\{ 2\alpha\tau + \left[\alpha\sigma^{\alpha-1} \frac{u_{10}(\gamma+5)}{4} + \frac{4\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = \frac{2}{\gamma-1} \sigma - \frac{2}{\gamma-1} + \left\{ u_{10}\sigma^\alpha - \frac{2\nu\alpha}{(\gamma-1)r_*} \left[\frac{\sigma}{(\alpha-1)} - \frac{\sigma^2}{(\alpha-2)} \right] \right\} \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Выполнив преобразования, аналогичные особым случаям, получим:

$$\left[2\alpha + \left(\frac{4\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \left[\frac{2\nu\alpha}{r_*} \left(\frac{2\sigma}{A} - \frac{A\sigma^2}{B} \right) \right]. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) также не выписывается в квадратурах [9, 10]. Строить решение можно только численно.

Заметим также, что для случая плоской симметрии вне зависимости от показателя адиабаты γ уравнения (15)–(17) переходят в простое уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

решением которого является постоянная функция

$$\sigma(\tau) = \text{const},$$

а конкретное значение константы определяется из начальных условий задачи Коши (14).

В работе [2] получены асимптотические оценки поведения решения ОДУ для контактной характеристики при $\tau \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty$.

В предыдущих работах автора [4,5] решалась задача о сильном сжатии газа до конечной плотности. Здесь мы так же ограничимся случаем $\sigma \leq 100$, что соответствует значению $\rho \leq 10^6$ при $\gamma = 5/3$. При этом трудности в расчётах в вышеупомянутых работах наблюдаются при $\tau < 0.001$.

Проанализируем решение уравнений (15)–(17) при $\tau \rightarrow 0$. В этом случае (15)–(17) перейдут, соответственно, в следующие уравнения:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{2r_*} \sigma - \frac{3\nu}{2r_*} \sigma \ln \sigma, \quad (18)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{2r_*} \sigma^2 - \frac{3\nu}{2r_*} \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma, \quad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{r_*} \left(\frac{2\sigma}{A} - \frac{A\sigma^2}{B} \right). \quad (20)$$

Выпишем решение уравнений (18), (20) с учётом начального условия (14):

$$\sigma(\tau) = \exp \left[\left(\ln \sigma_* - \frac{1}{3} \right) \exp \left(-\frac{3\nu}{2r_*} \tau \right) + \frac{1}{3} \right], \quad (21)$$

$$\sigma(\tau) = \frac{2B}{A^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2B}{A^2 \sigma_*} \right) e^{-\frac{2\nu}{Ar_*} \tau} \right]}. \quad (22)$$

Уравнение (19), которое соответствует случаю $\gamma = 5/3$, т. е. случаю одноатомного газа, также не решается в квадратурах [9, 10].

3. Численное восстановление уравнений для характеристик

В работах [6,7] был разработан и реализован метод решения системы уравнений газовой динамики в обратном направлении изменения времени, основанный на методе характеристик с пересчётом в случае уменьшения радиуса сжимающего поршня. В работе [4] представлены результаты расчётов задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа при неубывании радиуса кривизны

сжимающего поршня вышеупомянутым методом. При решении восстанавливаются газодинамические параметры течения, а также его характеристики. Данные на характеристиках использовались [5] для построения алгоритма решения задачи сильного сжатия при возрастании времени. Далее приводится сравнение траекторий некоторых характеристик для конкретных задач, полученное как аналитически, так и численно.

На рисунках (1), (2) представлены результаты сравнения расчётов по аналитическим формулам и расчётных значений, полученных при решении задачи методом характеристик в обратном направлении изменения времени [4, 6].

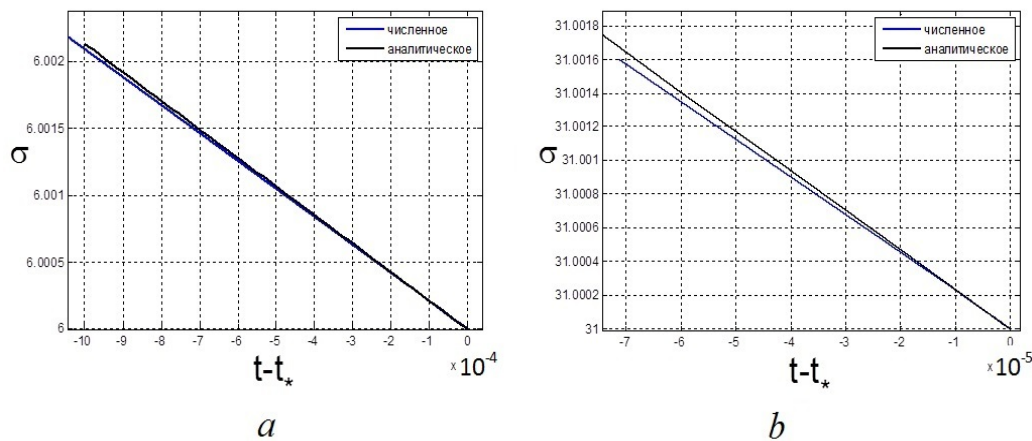


Рис. 1. Закон изменения $\sigma(\tau)$ в случае $\gamma = 3, \nu = 1$ для $\sigma_* = 6$ (a) и $\sigma_* = 31$ (b)

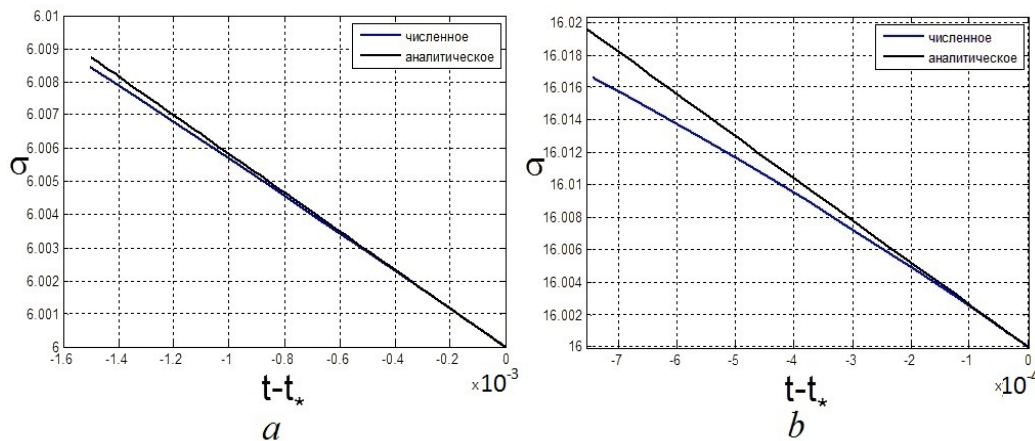


Рис. 2. Закон изменения $\sigma(\tau)$ в случае $\gamma = 3, \nu = 2$ для $\sigma_* = 6$ (a) и $\sigma_* = 16$ (b)

Из приведённых графиков видно удовлетворительное согласие аналитических формул и расчётных значений в окрестности интересующей нас точки $t = t_*$. Для сферической симметрии аналогичные графики так же отражают этот факт. Стоит отметить, что отличие нарастает при удалении от точки $t = t_*$, поскольку ряды (3) сходятся в окрестности точки (r_*, t_*) [2, 3]. Как и стоило

ожидать, результаты, полученные по аналитическим формулам, хорошо согласуются с расчётными значениями в окрестности этой точки.

Получен закон изменения скорости звука на произвольной характеристике обобщённой центрированной волны сжатия. По полученным формулам восстанавливается и траектория каждой из характеристик в этом течении.

4. Результаты расчётов сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании времени до момента сильного сжатия включительно

Формулы (21), (22) дали возможность более простого описания граничного условия для метода, изложенного в [5] при $t \rightarrow t_* - 0$.

Применяя эти соотношения, удалось получить газодинамические параметры газового слоя до момента времени $t = t_*$ включительно в расчётах при возрастании времени комбинированным методом в области между сжимающим поршнем $r_l = r_p(t)$ и крайней характеристикой обобщённой центрированной волны $r_{C_N^+}(t)$, где правая граница области рассчитывалась, исходя из полученных выше формул. Здесь приводятся графики газодинамических параметров на конечный момент времени $t = t_*$ в случае $\gamma = 1.4, \nu = 2, \rho_* = 10^5, m_* = 10$.

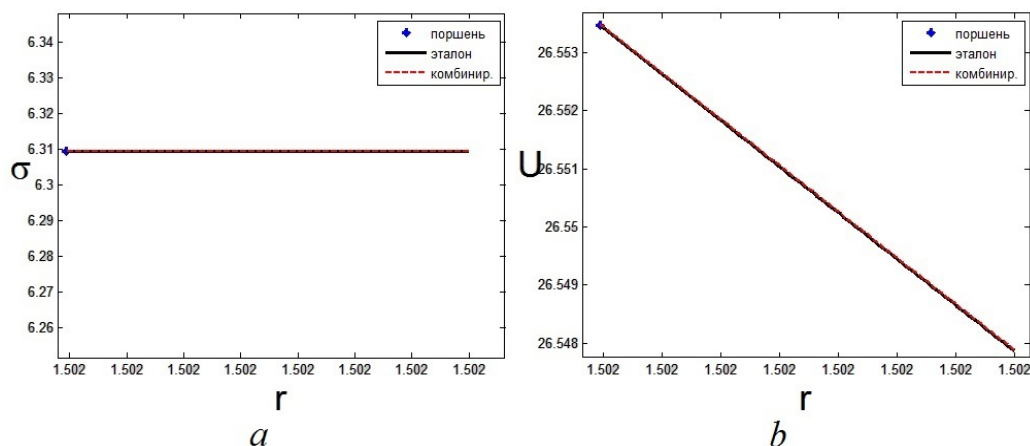


Рис. 3. Распределение скорости звука (a) и скорости газа (b) на момент $t = t_*$

Видно, что решение в момент времени $t = t_*$ хорошо согласуется с эталонным, полученным автором при решении задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени.

Заключение

По результатам данного исследования делаются следующие выводы:

1. Полученные аналитически формулы адекватно описывают параметры газа на характеристиках обобщённой центрированной волны сжатия и их траектории.

2. Применение полученных формул вкуче с результатами расчётов в обратном направлении изменения времени методом характеристик [4] позволяет проводить расчёты при возрастании времени с хорошей точностью вплоть до момента времени $t = t_*$.
3. Автором предложен подход, который обеспечивает не только построение закона движения сжимающего поршня для произвольного одномерного слоя газа, но и численно подтверждает тот факт, что этот поршень действительно сжимает требуемую массу газа до необходимой плотности.

Следовательно, даны конкретные рекомендации по проведению физического эксперимента.

Автор выражает своему научному руководителю профессору С.П. Баутину признательность за внимание, помощь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск : Наука, 1997. 160 с.
2. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск : Наука, 2007. 308 с.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
4. Новаковский Н.С. Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 93–109.
5. Новаковский Н.С. Комбинированный метод расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 93–101.
6. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Об одном методе расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
7. Николаев Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–108.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М. : Наука, 1981. 368 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971. 576 с.

ANALYTICAL AND NUMERICAL RECONSTRUCTION OF GENERALIZED CENTRAL COMPRESSION WAVE'S SOUND CHARACTERISTICS

N.S. Novakovskiy

Second Year Graduate Student, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The results of analytical and numerical simulations of one-dimensional ideal gas shockfree strong compression problem while compression piston's radius is not decrease are presented. The analytic formula for generalized compression Riemann wave's sound characteristics is the main result. Comparison of the formula with calculation of the problem by characteristic method in time decreasing case is also presented. Obtained formulas for sound characteristics was used to calculate gasdynamic characteristic (velocity, density, etc.) of ideal gas layer while time increase. The computational domain is the area between compression piston and the last sound characteristic of generalized Riemann wave. The main results of numerical simulations are shown in graphs and tables.

Keywords: gas strong compression, the characteristic series method, solution feature.

Дата поступления в редакцию: 10.05.2017

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ЗАЧИСЛЕННЫХ АБИТУРИЕНТОВ ПО МАЛОЙ ВЫБОРКЕ

Д.Н. Лавров

к.т.н., доцент, e-mail: lavrov@omsu.ru

А.А. Лаптев

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: aalaptev@mail.ru

М.А. Мамонтова

к.и.н., доцент, e-mail: omichka@inbox.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Построена параметрическая модель изменения численности абитуриентов университета по малой выборке. В качестве входного параметра взято количество выпускников школ региона. С помощью информационных критериев выбран порядок авторегрессии-скользящего среднего. Применяя функцию по идентификации систем пакета Scilab, получили прогноз по количеству абитуриентов для приёмной кампании 2017 года. Идентичный результат получен через идентификацию модели в виде передаточной функции.

Ключевые слова: идентификация параметрической модели, модель авторегрессии-скользящего среднего, прогноз количества абитуриентов вуза, информационный критерий Акайке.

Введение

Социальные и демографические процессы, развивающиеся в российском обществе, болезненно сказываются на развитии системы образования. На фоне затяжной демографической ямы происходит значительное сокращение количества выпускников. При общем росте численности населения за 2009–2016 гг. (с 142,7 млн. человек в 2009 г. до 146,5 млн. человек в 2016 г., 146,8 млн. на 20.03.2017 г.)¹ происходит сокращение количества выпускников средних общеобразовательных учреждений (с 898,9 тыс. выпускников в 2009 г. до 716,9 тыс. выпускников в 2017 г.). В 2017 г. система высшего профессионального образования получит наименьшее количество выпускников школ по сравнению с предшествующим периодом (2009–2016 гг.) и прогнозируемым количеством выпускников последующих годов (в 2018–2025 гг. прогнозируется рост с 729,1 тыс. человек в 2018 г. до 915 тыс. в 2025 г.).

¹По данным Федеральной службы государственной статистики URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/resources/33a9d8004a4bb6b681e3c9a8ffbe44e3/table.jpg (дата обращения 01.05.2017 г.)

Сегмент абитуриентов вуза, поступающих на программы бакалавриата и специалитета, складывается из выпускников школ РФ (как записавшихся на ЕГЭ, так и имеющих особые права и сдающих вступительные испытания вуза), выпускников средних (начальных) профессиональных учреждений РФ, иностранных граждан, поступающих в высшие учебные заведения РФ, а также из уже окончивших высшие учебные заведения и получающих второе высшее образование. Последняя категория, как правило, выбирает заочную форму обучения и не имеет права на получение образования за счёт бюджетных средств (п. 3. статьи 5 Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ). Выпускники средних профессиональных учреждений тоже большей частью ориентированы на заочную форму обучения, на которую выделяется значительно меньшее количество бюджетных мест. Возможно, при таком выборе сказывается их вовлечённость в выбранную профессиональную сферу и раннее трудоустройство, неуверенность в своих способностях в сравнении с выпускниками-школьниками. Таким образом, основную массу абитуриентов на очную форму обучения, в том числе на бюджетные места, составляют бывшие одиннадцатиклассники, а также выпускники прошлых лет, чьи результаты ЕГЭ действительны на момент поступления. Однако при рассмотрении этой категории необходимо учитывать, что в большинстве своём на перепоступление решаются студенты первого курса и в основном девушки.

За период с 2011 г. по 2016 г. наблюдается значительное сокращение количества выпускников (с 11368 выпускников в 2011 г. до 8972 выпускника в 2016 г.), а соответственно, и количества абитуриентов, зачисленных в ОмГУ им. Ф.М. Достоевского. Например, наибольшее количество зачисленных абитуриентов выпадает на 2012 г. — 2568 человек, когда в Омской области было наибольшее количество выпускников за обозначенный период — 11916 человек. Доля выпускников школ из общего количества поступивших в 2012 г. тоже была высока — 1167 человек по сравнению с предыдущим 2011 г. (1522 человека) и последующим — 2013 г. (1583 человека). С 2013 г. наблюдается значительный спад как количества выпускников, так и количества поступивших на основе среднего общего образования. Прогнозируя дальнейшее сокращение выпускников по Омской области в 2017 г., авторы предприняли попытку просчитать количество выпускников средних образовательных учреждений, которые будут зачислены в ОмГУ им. Ф.М. Достоевского с 1 сентября 2017 г.

Количество выпускников в этот период уменьшится ещё примерно на 40 тысяч и составит по прогнозам около 710 тысяч. Этот уровень будет самым низким не только за последние годы, но и в будущем такого малого числа выпускников не ожидается. Начиная с 2018 года начнётся увеличение количества 11-классников. Вот прогноз на 2025 год — 915 тысяч, то есть ожидается увеличение более чем на 200 тысяч выпускников.

1. Исходные данные для идентификации

В качестве количественной оценки выберем число поступивших на программы бакалавриата и специалитета. В качестве параметра (входной сигнал)

возьмём количество выпускников школ Омской области или города Омска.

Часть абитуриентов поступает на программы бакалавриата или специалитета не сразу после получения среднего образования, а после обучения на программах среднего или высшего профессионального образования. Поэтому их исключим из рассмотрения. На основе отчётов приёмной комиссии ОмГУ им. Ф.М. Достоевского за 2011–2016 годы получили следующие данные по зачисленным абитуриентам, поступившим на базе среднего образования.

Таблица 1. Число абитуриентов, поступивших в ОмГУ

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Количество	1522	1667	1583	987	1019	947

В модели пренебрегаем абитуриентами из других регионов России и из Казахстана, предполагая схожесть демографической картины в этих регионах и учитывая, что основная часть абитуриентов, как правило, обучается в Омской области (в среднем 79,7% за 2014-2016 гг.).

Количество выпускников школ Омской области и города Омска по данным, ежегодно озвучиваемым в прессе перед приёмной кампанией:

Таблица 2. Общее число выпускников школ

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Омская область	11368	11916	11410	10502	9357	8972	8872
г. Омск	5712	6260	6090	5755	5372	4887	4833

2. Выбор порядка модели

Для выбора порядка модели $ARMA(p, q)$ (авторегрессии-скользящего среднего) наиболее популярен информационный критерий Акайке (AIC) [1, р. 141]. Для модели линейной регрессии он записывается как

$$AIC = 2K + N[\ln(\hat{\sigma}^2)]$$

$$SSE = \|f(x_i) - y_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - f(\theta, x_i))^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{N - 2},$$

где $K = p + q$ — порядок модели, p — порядок регрессионной части, q — порядок скользящего среднего, n — размер выборки, SSE — квадрат среднеквадратической ошибки предсказания, $\hat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии предсказания, $f(x_i)$ — значение выходного сигнала модели на отсчёте x_i ; y_i — наблюдаемое значение выходного сигнала, θ — вектор параметров модели.

Для коротких выборок добавляют штраф за количество параметров модели

$$AIC_c = AIC + \frac{2K \cdot (K + 1)}{N - K - 1}.$$

Ещё одним критерием является критерий «финальной ошибки предсказания» (Final Prediction Error) [1, р. 141]

$$FPE = \frac{N + K + 1}{N - K - 1} \hat{\sigma}^2.$$

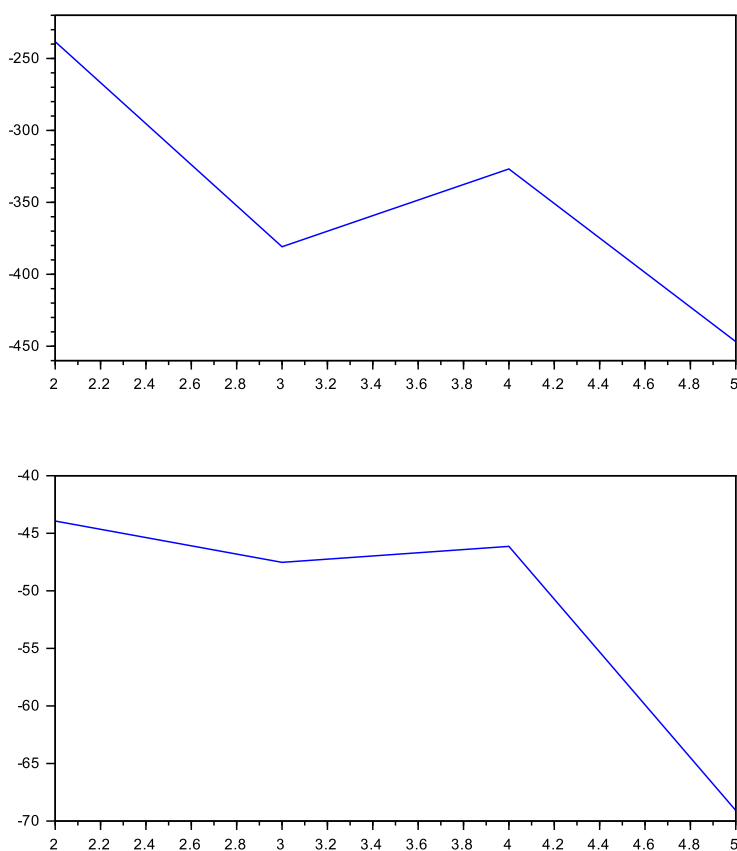


Рис. 1. Порядок модели p по оси абсцисс. Сверху: AIC — по оси ординат, снизу: $\ln FPE$ — по оси ординат

Минимум каждого критерия и даёт нам подходящий порядок модели.

В результате проведения компьютерного моделирования было установлено, что наиболее адекватные (при моделировании согласующиеся с наблюдаемыми данными) параметрические модели $ARMA(p, q)$ получаются при $p = q$ и $p, q > 2$.

С другой стороны выборка крайне мала ($n = 6$), поэтому выбор модели может быть осуществлён в коротком интервале от $p = 2$ до 5. Значение $p = 2$

взято для контроля. Значение $p = 5$ будет давать максимальное соответствие (минимальную ошибку предсказания), но в критерии Акайке сумма квадратов ошибки предсказания при этом будет заведомо очень близка к нулю. Параметры модели при $(p = q = 5)$ вычисляются по наименьшему числу уравнений, а значит, оценка более чувствительна к точности данных. В этом случае более предпочтительной моделью будет модель меньшей размерности. Однако расчёты были произведены и для случая $p = q = 5$. На рисунке 1 показаны результаты расчёта AIC и FPE.

Из графиков видно, что при $p = 3$ достигается локальный минимум, а случай $p = 5$ хоть и даёт лучший результат по сравнению с $p = 3$, но, как упомянуто выше, является предельным результатом, а потому его следует избегать для построения прогноза.

Так как отношение поступивших по области к поступившим по городу из года в год примерно одинаковое, то косвенным критерием качества модели будет минимальное расхождение предсказания по области и по городу. Этот критерий был использован для первоначального отсева моделей ($p \neq q$) и будет использован далее для сравнения с основным предсказанием.

На рисунке 2 представлен код на языке Scilab [2], использующий стандартную функцию агтах для идентификации систем ARMA и моделирования поведения временных рядов.

На рисунке 3 представлены результаты моделирования.

3. Идентификация и прогнозирование

Будем использовать параметрический метод идентификации модели ARMA(3,3) исследуемой системы, который производится на основе априорной информации. Построим модель в форме передаточной функции. Эта модель определяется коэффициентами числителя и знаменателя.

Будем предполагать, что структура модели соответствует передаточной функции линейной дискретной системы в виде:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}.$$

Или в операторной форме:

$$A(z)Y(z) = B(z)U(z);$$

$$[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}]Y(z) = [b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}]U(z),$$

где $Y(z)$ и $U(z)$ — z -преобразования выходного и входного сигнала соответственно. Рассматривая z^{-1} как оператор запаздывания, получим разностное уравнение:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + b_3 u_{t-3}.$$

Тогда на выходе получим:

$$y_t = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + b_3 u_{t-3} - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - a_3 y_{t-3}.$$

```

// поступившие
y = [1522 1667 1583 987 1019 947]
// абитуриентов по области
u = [11368 11916 11410 10502 9357 8972]
uu = [u 8872] // абитуриентов по области с данными по 2017.
n=length(u); nn=length(u); m=length(y);
t = 2011:2018;
label=["black -- ^", "black -- +", "black -- *", "black -- o"]
T=7; eps=1e-30
SSE=[]; AIC=[]; FPE=[]; pr=[]
scf(0)
subplot(211)
r=[2011, 800, 2017.5, 2000]
plot2d(t(1:length(y)), y, rect=r)
subplot(212)
plot2d(t(1:length(y)), y, rect=r)
subplot(211)
inter=2:5
for p=inter
    q=p
    ArmaEst=armaх(p, q, y, u); // идентифицируем модель
    yy=arsimul(ArmaEst, uu((q+1):nn), uu(q:-1:1), y(p:-1:1), []);
    yy=[y(1:p) yy]
    plot(t(1:T), yy(1:T), label(p-inter(1)+1))
    sse=sum((y-yy(1:6)).^2)
    SSE=[SSE sse]
    K=p+q
    AIC=[AIC 2*K+n*log((sse+eps)/(n-2))+2*(K+1)*(K)/(n-K-1)]
    FPE=[FPE log((n+K+1)/(n-K-1)*sse)]
    up=u(n:-1:n-q+1)
    yp=y(m:-1:m-p+1)
    yy = arsimul(ArmaEst, [8872], up, yp, []);
    pr=[pr yy] // Предсказание на 2017 год.
end

```

Рис. 2. Листинг кода моделирования идентифицированной системы

Идентификация модели сводится к поиску коэффициентов $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$, дающих результат с минимальной ошибкой предсказания.

Ошибка предсказания (рассогласование выходного сигнала модели $\hat{y}_t$ и системы y_t): $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$. Предполагается, что имеется последовательность дискретных отсчётов входного (u_t) и выходного (y_t) сигналов системы.

Для каждого момента времени составим уравнение:

$$y_t - [b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + b_3 u_{t-3} - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - a_3 y_{t-3}] = 0.$$

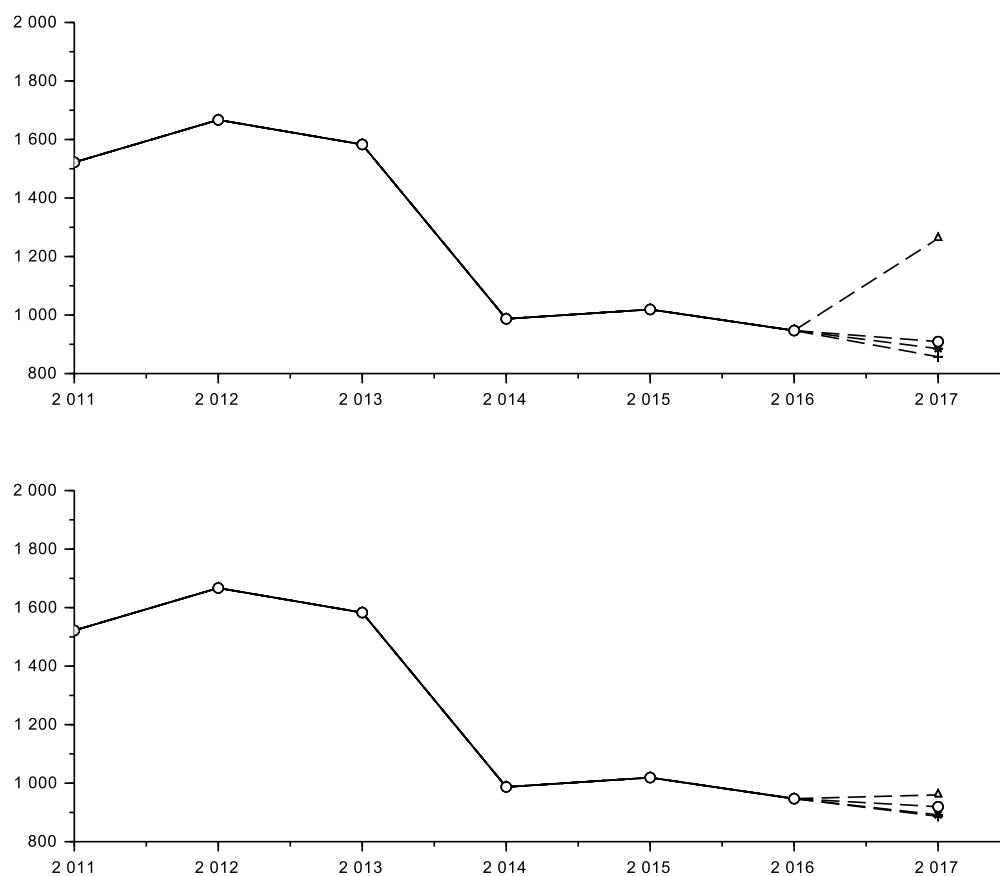


Рис. 3. Моделирование временного ряда абитуриентов по годам. Сверху моделирование ряда и предсказание по количеству абитуриентов в области, снизу — по количеству абитуриентов в городе. Метки моделируемых рядов: Δ – ARMA(2,2), $+$ – ARMA(3,3), $*$ – ARMA(4,4), $\circ$ – ARMA(5,5)

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} y_t &= b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + b_3 u_{t-3} - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - a_3 y_{t-3}, \\ y_{t-1} &= b_0 u_{t-1} + b_1 u_{t-2} + b_2 u_{t-3} + b_3 u_{t-4} - a_1 y_{t-2} - a_2 y_{t-3} - a_3 y_{t-4}, \\ y_{t-2} &= b_0 u_{t-2} + b_1 u_{t-3} + b_2 u_{t-4} + b_3 u_{t-5} - a_1 y_{t-3} - a_2 y_{t-4} - a_3 y_{t-5}. \end{aligned}$$

В матричном виде система:

$$y = \Phi \theta, \quad (1)$$

здесь $\theta = (b_0, b_1, b_2, b_3, -a_1, -a_2, -a_3)'$ — вектор параметров, Φ — матрица, составленная из отчётов входов и выходов системы, $y = (y_t, y_{t-1}, y_{t-2})'$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} u_t & u_{t-1} & u_{t-2} & u_{t-3} & y_{t-1} & y_{t-2} & y_{t-3} \\ u_{t-1} & u_{t-2} & u_{t-3} & u_{t-4} & y_{t-2} & y_{t-3} & y_{t-4} \\ u_{t-2} & u_{t-3} & u_{t-4} & u_{t-5} & y_{t-3} & y_{t-4} & y_{t-5} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1) невозможно найти в общем виде в силу переопределённости и возможной несовместности системы. Будем искать псевдорешение. Псевдорешением системы называется такой вектор, который при подстановке в (1) даёт вектор невязки, минимальный по евклидовой норме (метод наименьших квадратов).

Решение этой задачи хорошо известно и даётся выражением:

$$\hat{\theta} = \Phi^{\#} y,$$

где $\Phi^{\#} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi'$ — псевдообратная матрица.

Одношаговый прогноз вычисляется по формуле:

$$y_{t+1} = b_0 u_{t+1} + b_1 u_t + b_2 u_{t-1} + b_3 u_{t-2} - a_1 y_t - a_2 y_{t-1} - a_3 y_{t-2}.$$

Ниже приведён код, реализующий данный подход.

```
// Идентифицируем систему
Phi=[8972  9357 10502 11410    1019   987 1583;
      9357 10502 11410 11916    987 1583 1667;
      10502 11410 11916 11368    1583 1667 1522]
y=[947; 1019; 987]
theta = pinv(Phi)*y
disp(theta')
// Строим прогноз
uy=[8872 8972 9357 10502    947 1019 987]
y_2017=sum(theta.*uy)
disp(y_2017)
```

Результаты расчётов, проведённых по указанным формулам, дают точно такие же результаты, что и встроенная в Scilab функция `agta`, что подтверждает правильность проведённых вычислений и исключает ошибки программиста.

4. Результаты прогнозирования

Все результаты предсказания для различных моделей собраны в таблице 3. Полужирным шрифтом выделено наше предпочтение, на выбор которого указывает информационный критерий Акайке.

Таблица 3. Результаты одношагового предсказания

Модель	2017 (область)	2017 (город)
ARMA(2,2)	1261,8129	960,01816
ARMA(3,3)	857,2997	886.58083
ARMA(4,4)	885,03696	891,59887
ARMA(5,5)	909.10012	919,41979

Итак, итоговый прогноз мы должны выбрать по модели ARMA(3,3) и это — 857 абитуриентов. Это минимальное из всех значений предсказания.

Заключение

С точки зрения управленческих решений наилучший прогноз приёма — лучший. Он стимулирует принятие решений по преодолению влияния демографического кризиса на приёмную кампанию.

Представленная модель далека от идеала, её реальная полезность будет ясна после проведения приёмной кампании 2017 года. По результатам кампании будет принято решение о доработке и уточнении модели.

Таким образом, используемый параметрический метод идентификации модели исследуемой системы, производимый на основе априорной информации, позволил построить модель в форме передаточной функции. Привлечённые количественные данные выпускников школ города Омска и Омской области, абитуриентов Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского за 2011–2016 годы, позволили смоделировать ситуацию приёмной кампании 2017 г. Построенная модель дала возможность вывести количество абитуриентов предстоящей приёмной кампании 2017 года — 857 человек. При устойчивой тенденции снижения количества выпускников и, соответственно, абитуриентов, учитывая сползание в «демографическую яму» в последние несколько лет, авторы сумели просчитать общее количество абитуриентов, что поможет оценить риски приёмной кампании на программы бакалавриата и специалитета в 2017 г.

Благодарности

Благодарим сотрудников Регионального информационно-аналитического центра системы образования Омской области Надежду Изаровну Жолобову и Анастасию Викторовну Коротченко за помощь в сборе статистики выпускников по Омской области и г. Омску.

ЛИТЕРАТУРА

1. Topics in Applied Physics. Nonlinear Methods of Spectral Analysis. Haykin, S. (Ed.). V. 34. Springer-Verlag, 1979.
2. Scilab. Open source software for numerical computation. [Заголовок с экрана]. URL: <http://www.scilab.org/>.

**IDENTIFICATION OF A PARAMETRIC MODEL OF CHANGES
IN THE NUMBER OF STUDENTS ENROLLED ON A SMALL SAMPLE**

D.N. Lavrov

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: lavrov@omsu.ru

A.A. Laptev

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: aalaptev@mail.ru

M.A. Mamontova

Ph.D. (History), Associate Professor, e-mail: omichka@inbox.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. A parametric model of changes in the number of students of the University with a small sample is built. The number of high school graduates in the region is taken as an input parameter. With the help of information criteria the order of autoregressive moving-average is selected. Applying the identification system feature of Scilab, the forecast of the number of applicants for admission campaign in 2017 was made. A similar result was obtained through the identification of the model in the form of the transfer function.

Keywords: parametric identification, autoregressive-moving-average model, forecast of the number of high school students, Akaike information criterion.

Дата поступления в редакцию: 10.05.2017

WHAT IS THE BEST WAY TO ADD LARGE NUMBER OF INTEGERS: NUMBER-BY-NUMBER AS COMPUTERS DO OR LOWEST-DIGITS-THAN-NEXT-DIGITS-ETC AS WE HUMANS DO?

Olga Kosheleva¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich²

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

¹Department of Teacher Education, University of Texas at El Paso, 500 W. University, El Paso, TX 79968, USA

²Department of Computer Science, University of Texas at El Paso, 500 W. University El Paso, TX 79968, USA

Abstract. When we need to add several integers, computers add them one by one, while we usually add them digit by digit: first, we add all the lowest digits, then we add all next lowest digits, etc. Which way is faster? Should we learn from computers or should we teach computers to add several integers our way?

In this paper, we show that the computer way is faster. This adds one more example to the list of cases when computer-based arithmetic algorithms are much more efficient than the algorithms that we humans normally use.

Keywords: digits, adding, calculating.

1. Formulation of the Problem

When we humans need to add several integers:

- we usually first add their lowest digits,
- then we add their next lowest digits,
- etc.

On the other hand, when computers are given a task of adding several integers, they add these integers number-by-number:

- first, they add the first two numbers,
- then they add the third number to the resulting intermediate sum,
- etc.

Which way is better?

- Should we program computers to add several numbers our way?
- Or should we learn from the computers and add numbers their way?

This is the question that we answer in this paper.

2. Analysis of the Problem

Notations.

- Let us denote by n the number of integers that we need to add, and
- let us denote by d the number of digits in each of these numbers.

How many extra digits do we need to represent the sum? When we add n d -digit integers, the sum is n times larger than each of the original d -digit integers. So, to represent this sum, we need to use additional digits. How many additional digits do we need?

Every time we add one more digit, the size of the numbers that can be represented increases by a factor of B , where B is the base of the corresponding numerical system:

- $B = 2$ for most computers, and
- $B = 10$ for human computations.

Adding two digits increases the largest number by a factor of B^2 . In general, adding k digits increases the largest number by a factor of B^k .

To be able to increase the size by a factor of n , we therefore need to use k additional digits, where $B^k \approx n$. Thus, we need $k = \log_B(n)$ additional digits.

What if we add numbers one by one? When we add two d -digit numbers, we need d digit operations; see, e.g., [1]. When we add numbers one by one, eventually, we will get to numbers with $d + \log_B(n)$ digits, so we will need $d + \log_B(n)$ digits operations for each addition.

Overall, to find the sum of n numbers, we need to perform $n - 1 \approx n$ additions. So, we need

$$n \cdot (d + \log_B(n)) = n \cdot d + n \cdot \log_B(n) \quad (1)$$

digit operations.

What if we first add all lower digits, then all next digits, etc.? When we add all lower digits, we get the value $n \cdot B$. To represent this value, we need $\log_B(n \cdot B) = 1 + \log_B(n)$ digits. So, to perform the addition of the lowest digits of all n numbers, we need $n \cdot (1 + \log_B(n))$ digit operations.

Overall, we need to perform similar summation for all d original digits. Thus, in this case, we need overall

$$d \cdot n \cdot (1 + \log_B(n)) = n \cdot d + n \cdot d \cdot \log_B(n) \quad (2)$$

digit operations.

Conclusion: computer way is much faster. By comparing the formulas (1) and (2), we see that number-by-number addition is faster: for the digits-by-digits addition, the term added to $d \cdot n$ is d times larger than for the number-by-number addition.

Discussion. This conclusion is in line with the general trend, that the arithmetic algorithms used by humans are far from being optimal [1]. For example:

- while we have two different algorithms for addition and subtraction, computers use 2's complement implementation of negative numbers that allows both operations to be performed the same way [1];
- our digit-by-digit multiplication requires $O(d^2)$ digit operations, while there exist faster algorithms based on Fast Fourier Transform that require $O(n \cdot \ln(n)) \ll O(n^2)$ digit operations [1];
- our “long division” algorithm is also not the best: the usual computer way of first computing $1/b$ and then computing $a \cdot (1/b)$ is faster [1].

Another known case when computer-based algorithms are faster is sorting: computer-based mergesort algorithm is much faster than the insertion sort algorithm that we normally use when we need to sort a group of items [1].

In this sense, our paper has added one more example where a usual human algorithm can be improved.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Th. H. Cormen, Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2009.

**КАКОВ НАИЛУЧШИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА
ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ: ЧИСЛО ЗА ЧИСЛОМ, КАК КОМПЬЮТЕРЫ, ИЛИ САМЫЕ
МЛАДШИЕ ЦИФРЫ, ЗАТЕМ СЛЕДУЮЩИЕ ЦИФРЫ И ТАК ДАЛЕЕ,
КАК ДЕЛАЕМ МЫ, ЛЮДИ?**

О. Кошелева¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович²

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

¹Департамент образования, Техасский университет в Эль Пасо, США

²Департамент компьютерных наук, Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Когда нам нужно сложить несколько целых чисел, компьютеры складывают их по одному, а мы обычно складываем их по цифрам: сначала мы складываем все младшие цифры, затем складываем все следующие младшие разряды и т.д. Какой способ быстрее? Должны ли мы учиться у компьютеров, или нам следует научить компьютеры складывать несколько целых чисел нашим способом? В этой статье мы показываем, что компьютерный путь быстрее. Это добавляет ещё один пример в список случаев, когда компьютерные арифметические алгоритмы намного эффективнее, чем алгоритмы, обычно используемые человеком.

Ключевые слова: цифры, сложение, вычисления.

Дата поступления в редакцию: 02.03.17

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ РЕСУРСОВ И АУДИТОРНОГО ФОНДА ВУЗА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА УЧЕБНЫХ ПЛАНОВ

А.А. Сеньковская¹

аспирант, e-mail: capelli.rossi.nana@gmail.com

И.И. Фураева²

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: furir@mail.ru

¹Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва

Аннотация. Представлены основные причины необходимости проведения предварительного анализа исходной информации в виде рабочих учебных планов для расчёта педагогической нагрузки. Подтверждено наличие факторов, влияющих на оптимальное распределение, таких как аудиторный фонд университета, поточность групп и другие. Исследование базируется на проведении анализа и последующей оптимизации учебных планов вуза. В качестве исходных данных использовались учебные планы на текущий учебный год Казахского университета экономики, финансов и международной торговли (Астана, Казахстан), а также академические календари и правила организации учебного процесса по кредитной технологии в Республике Казахстан.

Ключевые слова: оптимизация, моделирование, учебный план, педагогическая нагрузка, аудиторный фонд.

Введение

При составлении учебной нагрузки кафедры и вуза необходимо обработать более 200 рабочих учебных планов (РУП) на текущий учебный год, каждый из которых содержит 1-2 рабочих листа. При этом дисциплины в некоторых рабочих планах могут совпадать. Оптимизация учебной нагрузки достигается объединением занятий по всем видам аудиторной нагрузки.

Для достижения поставленных целей была разработана автоматизированная система анализа и оптимизации учебных планов для расчёта педагогической нагрузки вуза с использованием возможностей среды программирования Microsoft Visual Studio VB.Net. Рассматриваемый комплекс позволяет проводить предварительный анализ учебных планов и может быть использован в высших учебных заведениях. Кроме того, в системе моделируются преобразования учебных планов, при которых возможно оптимизировать процесс распределения учебной нагрузки между семестрами учебного года. Основной блок

данных, необходимых для анализа учебных планов, формируется в разделах программной формы, представленной на рисунке 1.

Для определения дисциплин, по которым выполняется это объединение, можно просмотреть нагрузку каждой кафедры отдельно, при этом можно произвести объединение потоков. Более эффективным решением является общий анализ РУП, выполняемый автоматизированной системой. Результаты анализа представляются в виде таблицы, содержащей дисциплины, которые читаются не менее чем на 2 потоках в каждом семестре, причём отдельно для русского и казахского отделения [1].

Пока мы не рассматриваем вопрос о переносе дисциплин на другой семестр, для этого необходимо применять математическую модель линейного программирования с достаточно большим количеством ограничений, каждое из которых следует отдельно исследовать.

В данной статье остановимся на более простом способе анализа базы данных аудиторной нагрузки вуза с учётом двухсменных занятий. Сменность занятий на осенний и весенний семестры различна, и данные об этом хранятся в базе данных. По каждой дисциплине известно не только количество кредитов, семестр, но и распределение часов по видам аудиторной нагрузки.

Описание алгоритма анализа рабочих учебных планов

Предварительный расчёт педагогической нагрузки проводится в конце учебного года с учётом ожидаемого контингента в будущем учебном году. В данном случае производится расчёт либо без учёта 1 курса, либо с ожидаемым контингентом первокурсников. При этом расчёт нагрузки первого курса основан на модульных образовательных программах, старших курсов – на рабочих учебных планах.

При проведении предварительного расчёта педагогической нагрузки необходимо решить следующие задачи [2]:

- провести анализ модульных образовательных программ и рабочих учебных планов на наличие ошибок;
- выявить ошибки заполнения и исправить их;
- проверить соответствие кредитов–часов в соответствии с правилами вуза;
- выполнить анализ на дублирование дисциплин (например, для специальности «Информационные системы» были выявлены различные написания дисциплины СУБД, Системы БД, что по сути одно и то же);
- провести анализ на возможность объединения потоков;
- проверить на наличие МОП/РУП для всех потоков вуза;
- определить нагрузку по каждой кафедре;
- выполнить объединение потоков для оптимизации нагрузки [1].

В 2015–2016 учебном году из 750 дисциплин, указанных в РУП на текущий учебный год, 289 проводились более чем на 2 потоках. Из них 112 дисциплин имели различное количество кредитов в РУП или различное количество часов по видам аудиторной нагрузки.

В вузе существует определённый шаблон для заполнения модульных образовательных программ (МОП) и РУП. Однако предположение, что каждый документ строго ему соответствует, оказалось неверным, что потребовало ввести проверку его заполнения. На представленной форме проводится анализ только заголовка документов, и как оказалось, там проверять надо абсолютно всё [3].

На рисунке 1 представлена форма предварительного анализа МОП. Для РУП форма аналогична, но добавляется проверка на соответствие кредитов аудиторным часам (проводится для всех дисциплин РУП).

Нагрузка предварительная на основании МОП

Список МОП:

- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\МПЗ\Вытх и прогр обесп. очка 1к4г 11-12 г.xls
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\МПЗ\ИС очка 1к4г 11-12 г.xls
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\Менеджмент все\ММУ очка 1к4г 11-12 г.xls
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\Менеджмент все\Менеджмент очка 1к4г 11-12 г.xls
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\МП ВСЕ\Маркетинг очка 1к4г 11-12 г.xls
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\10 год\РУП очка 1к4 г 11-12 г\МП ВСЕ\Таможенное дело очка 1к4г 11-12 г.xls

Всего: 188
Учебный год: 2013-2014

Анализ МОП

Результаты:

РУП с не определенными параметрами:

№ строк	кол стр.	не учтен
66	184 - 2	66
67	185 - 2	67
67	186 - 2	72
72	187 - 2	
	188 - 3	

Анализ МОП:

Дублирование МОП/РУП

- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\13 год\очное 3 года\Прав МОП_ИС_3 г 2013 г.xls - 175
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\13 год\очное 3 года\Прав МОП_ИС_3 г 2013 г. - повтор.xls - 174
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\13 год\очное 3 года\Прав МОП_ИС_3 г 2013 г. - повтор.xls - 175
- D:\Для переноса\НАГРУЗКА МОП\Нагрузка из МОП\МОП\13 год\очное 3 года\Прав МОП_ИС_3 г 2013 г. - повтор.xls - 174

Не установленные специальности и траектории

№ п/п	Шифр спец	Специальность	Траектория	№ зап
1	6M051200	Статистика	Общая статистика	66
2	6M050800	Учет и аудит	Бухгалтерский учет, анализ и аудит реального сектора экономики в соответствии с МСФО	67
3	6M050800	Учет и аудит	Бухгалтерский учет, анализ и аудит государственного сектора в соответствии с МСФО	67
4	6M051200	Статистика	Общая статистика	72

Сводные данные о потоках и траекториях из МОП и БД

№ п/п	Форма обуч	Срок обуч	Шифр спец	Специальность	Траектория	Курс	Потоков	С др траект	№ зап
308	о/о	4	5B050800	Учет и аудит	Учет и аудит в общественном секторе экономики	1	0	0	185
309	о/о	4	5B050800	Учет и аудит	Учет и аудит в реальном секторе экономики	1	2	0	185
310	о/о	4	5B050900	Финансы	Налоги и налогообложение	1	0	0	186
311	о/о	4	5B050900	Финансы	Финансовый менеджмент	1	2	0	186
312	о/о	4	5B070400	Вычислительная техника и программное	Вычислительная техника в экономике	1	2	0	187
313	о/о	4	5B070400	Вычислительная техника и программное	Программное обеспечение вычислительной техники	1	0	0	187
314	о/о	4	5B070300	Информационные системы	Информационные системы в экономике	1	0	0	188

Параметры печати:

- ☐ Не учтенные МОП или страницы
- ☒ Сводные данные
- ☐ МОП с кол-вом листов
- ☐ МОП с не опред параметрами
- ☐ Дублирование МОП
- ☐ Не установл специальн и траект
- ☐ Потоки без МОП/РУП

Потоки без МОП/РУП:

- Эк (ЭкПред) - 1к - 4г. о. - (о/о)
- Эк (ЭкПред) - 1к - 3г. о. - (о/о)
- Эк (ЭкПред) - 1к - 3г. о. - (о/о)
- Эк (ЭкПред) - 1р - 4г. о. - (о/о)
- Эк (ЭкПред) - 1р - 3г. о. - (о/о)
- Мн (УпрИн) - 1к - 4г. о. - (о/о)
- Мн (УпрИн) - 1р - 4г. о. - (о/о)

Рис. 1. Диалоговое окно анализа МОП/РУП

В верхней части программного окна (рис. 1) приводится список МОП/РУП, которые анализируются. Опыт показал, что анализ удобнее проводить по частям. Часто эти части связаны с готовностью документов; как видно из рисунка, анализируется только 190 документов Excel, каждый из которых может содержать от 1 до 3 листов. Документы могут быть подготовлены как в Excel 2003 с расширением .xls, так и более поздних версий, с расширением .xlsx, что учтено в алгоритме. В рамке «Список МОП» кроме собственно списка указано количество элементов в списке, а также порядковый номер в списке выбранного элемента при его выделении. Там же указан учебный год, для которого анализируются МОП/РУП, т. к. он может не совпадать с текущим учебным годом.

Полученные результаты представляются в виде таблицы, содержащей следующие столбцы: дисциплина, количество кредитов, количество лекций, семинарских и лабораторных занятий, осенний и весенний семестры с разделением на смены отдельно для русского и казахского отделения. В указанных столбцах записываются потоки студентов, на которых читается дисциплина. Пример полученной таблицы при использовании автоматизированной системы приведён на рисунке 2.

Сводные данные о дисциплинах нагрузки											
Форма обучения очная											
№	Дисциплина	Кредиты	Часы	1 семестр				2 семестр			
				Русское отделение		Казахское отделение		Русское отделение		Казахское отделение	
				1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1-С Бухгалтерия	2	15/0/15	УА (УАРС) - 3 г.о. - 3курс		УА (УАРС) - 3 г.о. - 3курс					
2	1-С Бухгалтерия	2	15/15/0	УА (УАРС) - 4 г.о. - 4курс		УА (УАРС) - 4 г.о. - 4курс					
3	1-С Бухгалтерия	3	15/15/15					УА (УАРС) - 3 г.о. - 2курс		УА (УАРС) - 3 г.о. - 2курс	
4	International Trade and World Goods Markets(in English)	2	15/15/0	МЭ (ВЭД) - 4 г.о. - 4курс							
5	International Trade and World Goods Markets(in English)	3	30/15/0	МЭ (ВЭД) - 3 г.о. - 3курс							
414	Этика социального работника	2	15/15/0					СР (СоцЗН) - 3 г.о. - 2курс		СР (СоцЗН) - 4 г.о. - 2курс	СР (СоцЗН) - 4 г.о. - 2курс

Рис. 2. Сводные данные о дисциплинах кафедры для предварительного расчёта нагрузки

Если из таблицы удалить все строки, в которых дисциплина встречается только один раз, т. е. в различных учебных планах для одной и той же дисциплины указаны одинаковые кредиты и часы, то для анализа останется 230 строк.

При анализе таблицы можно обнаружить, что РУП возможно редактировать таким образом, чтобы оптимизировать нагрузку кафедры и вуза.

Если дисциплина ведётся на каком-нибудь отделении не менее чем на 2 потоках, то она печатается в таблицу, при этом для каждого количества кредитов и распределения по видам аудиторной нагрузки печатается отдельная строка.

Во-первых, было обнаружено 10 дисциплин, которые при одинаковых кредитах имели различное распределение часов по видам аудиторной нагрузки. Часть из них приведена на рисунке 3. Если изменить для одного из потоков распределение часов и сделать их одинаковыми, то это даст возможность объединить потоки при проведении занятий.

Внесение изменений в распределение по видам аудиторных часов позволило оптимизировать нагрузку кафедр путём объединения всех видов аудиторных занятий. Очевидно, что подобный анализ возможен только с использованием автоматизированных систем. Полученный результат анализа представляется руководству вуза, которое принимает решение о целесообразности внесения

№ п/п	Наименование дисциплины	Кол-во кредитов	Распределение часов	Группа
1	1-С Бухгалтерия	2	15/0/15	УА (УАРС) - 3 г.о. - 3курс
2	1-С Бухгалтерия	2	15/15/0	УА (УАРС) - 4 г.о. - 4курс
3	Иностранный язык 2	3	0/45/0	ТД (ТДФЭС) - 4 г.о. - 1курс
4	Иностранный язык 2	3	30/15/0	Эк (ЭкСС) - 4 г.о. - 1курс
5	Казахский (Русский) язык	3	0/45/0	10 групп
6	Казахский (Русский) язык	3	30/15/0	Эк (ЭкСС) - 4 г.о. - 1курс
7	Компьютерная реализация численных методов	3	15/15/15	ВТ (ВТЭ) - 4 г.о. - 2курс
8	Компьютерная реализация численных методов	3	30/15/0	ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 2курс
9	Микроэкономика	2	0/30/0	УА (УАРС) - 3 г.о. - 1курс
10	Микроэкономика	2	15/15/0	7 групп
11	Практический иностранный язык 1	3	0/45/0	МЭ (ВЭД) - 4 г.о. - 2курс
12	Практический иностранный язык 1	3	15/30/0	СКС (ДА) - 4 г.о. - 2курс
13	Теория вероятностей и математическая статистика	3	15/15/15	ВТ (ВТЭ) - 4 г.о. - 2курс
14	Теория вероятностей и математическая статистика	3	30/15/0	ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 2курс
15	Физика	2	15/0/15	ИС (ИСБ) - 3 г.о. - 1курс
16	Физика	2	15/15/0	ВТ (СПО) - 3 г.о. - 1курс

Рис. 3. Перечень дисциплин с неэффективным распределением часов по видам работы

изменений в модульные образовательные программы и рабочие планы. Анализ выполняется в конце учебного года при предварительном расчёте педагогической нагрузки на будущий учебный год с учётом ожидаемого контингента, особенно первого курса [4].

Обучение по программе бакалавриата очной формы обучения в Республике Казахстан осуществляется по двум направлениям:

- полная форма обучения для студентов, поступивших после окончания школы (срок обучения – 4 года);
- сокращённая форма обучения для студентов на базе технического и профессионального образования (срок обучения – 3 года).

Такая организация обучения приводит к необходимости создания для них модульных образовательных программ, в которых дисциплины могут отличаться количеством кредитов (что, прежде всего, связано с тем, что после окончания студенты более подготовлены к обучению по профильным дисциплинам). Предварительный анализ рабочих учебных планов на наличие одинаковых дисциплин с неидентичным распределением часов представлен на рисунке 4.

Приведённая выборка дисциплин показывает, что в целях оптимизации общего расчёта педагогической нагрузки по некоторым дисциплинам существует возможность проводить объединённые лекционные занятия, не изменяя при этом рабочие программы, по другим дисциплинам целесообразно произвести изменение распределения часов по видам работ [2].

№ п/п	Наименование дисциплины	Кол-во кредитов	Распределение часов	Группа
1	Web технологии	2	15/0/15	ВТ (ВТЭБ) - 4 г.о. - 4курс, ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 4курс
2	Web технологии	3	15/15/15	ВТ (ВТЭ) - 3 г.о. - 3курс
3	Алгебра и геометрия	2	15/15/0	ВТ (СПО) - 3 г.о. - 1курс, ИС (ИСБ) - 3 г.о. - 1курс
4	Алгебра и геометрия	3	30/15/0	ВТ (СПО) - 4 г.о. - 1курс, ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 1курс
5	Бухгалтерский учет	2	15/15/0	3 группы
6	Бухгалтерский учет	3	30/15/0	6 групп
7	ВЭД в РК	2	15/15/0	1 группа
8	ВЭД РК	2	15/15/0	2 группы, 2 смена
9	ВЭД в РК	3	30/15/0	1 группа
10	Гражданское право РК	2	15/15/0	1 группа
11	Гражданское право РК	3	30/15/0	1 группа
12	Курортология и оздоровительный туризм	2	15/15/0	Тур (ПлОТБ) - 4 г.о. - 3курс
13	Курортология и оздоровительный туризм	3	30/15/0	Тур (ПлОТБ) - 3 г.о. - 2курс
14	Микроэкономика	2	0/30/0	1 группа
15	Микроэкономика	2	15/15/0	6 групп
16	Микроэкономика	3	30/15/0	1 группа
17	Микроэкономическая статистика	2	15/15/0	1 группа
18	Микроэкономическая статистика	3	30/15/0	1 группа
19	Мировая экономика	2	15/15/0	1 группа

Рис. 4. Анализ РУП на наличие одинаковых дисциплин

Следующим важным фактором оптимизации нагрузки является выявление дисциплин, занятия по которым проводятся в разные смены. На рисунке 5 приведены некоторые такие дисциплины [5,6].

Кроме того, полученная таблица показывает дисциплины, которые ведутся в разных семестрах (как видно на рисунке 2), но для оптимизации нагрузки в этом случае потребуются анализ многих РУП и перенос части дисциплин в другой семестр с необходимостью сохранения суммарного количества кредитов в каждом семестре. Для решения поставленной задачи требуется использование сложной модели целочисленного линейного программирования, но и в описываемом простом анализе такие дисциплины также выявлены и при необходимости можно произвести некоторые изменения в РУП [7].

Выводы

Следует остановиться на вопросе объединения занятий по всем видам аудиторной нагрузки. Поточные лекции не вызывают никаких вопросов и давно

Наименование дисциплины	Кол-во кредитов	Распределение часов	1 смена	2 смена
Алгебра и геометрия	2	15/15/0		ВТ (СПО) - 3 г.о. - 1курс, ИС (ИСБ) - 3 г.о. - 1курс
Алгебра и геометрия	3	30/15/0	ВТ (СПО) - 4 г.о. - 1курс, ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 1курс	
Организация производства	2	15/15/0		Эк (ЭкПрд) - 4 г.о. - 3курс
Организация производства	3	30/15/0	Эк (ЭкПрд) - 4 г.о. - 4курс	Эк (ЭкПр) - 3 г.о. - 2курс
Рыночная инфраструктура	2	15/15/0	Эк (ЭкПрд) - 4 г.о. - 4курс	
Рыночная инфраструктура	3	30/15/0		СКС (ГосСер) - 4 г.о. - 3курс
Программное обеспечение в финансах	2	15/0/15	ИС (ИСБ) - 3 г.о. - 2курс	ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 2курс
Программное обеспечение в финансах	3	15/15/15	ИС (ИСБ) - 4 г.о. - 3курс	

Рис. 5. Анализ РУП на наличие одинаковых дисциплин в разных сменах

применяются в практике высшей школы. Объединение же семинарских и лабораторных занятий стало актуальным с появлением малокомплектных групп. Поэтому в статье внимание обращается не только на одинаковое количество часов, отводимых на лекционные занятия, но и на другие виды.

Как видно из рисунка 4, есть дисциплины, занятия по которым можно объединить, но они проводятся на потоках, занимающихся в разные смены. Решение этого вопроса возможно при проведении занятий на стыке смен. Для того чтобы учебная часть, составляющая расписание, выполнила объединение потоков, не достаточно в нагрузке кафедры отобразить это объединение. Может оказаться, что расписание занятий для разных смен составляют разные сотрудники, и это объединение не будет осуществлено, что приведёт к двум равноценно неэффективным альтернативам [8]:

- либо к перевыполнению нагрузки ППС, что недопустимо,
- либо к тому, что студентам второй смены будет предложено на эти занятия ходить по расписанию первой смены, что приведёт к окнам в расписании занятий, и это тоже не желательно.

Определение дисциплин для объединения занятий на стыке смен в обобщённом виде для всего вуза позволяет получить эту информацию до составления расписания, выделить её и обратить особое внимание при составлении расписания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фураева И.И., Сеньковская А.А. Формирование учебной нагрузки для профессорско-преподавательского состава кафедры в условиях кредитной технологии обучения // Интеллектуальные информационные и коммуникационные технологии – средство осуществления третьей индустриальной революции в свете стратегии «Казахстан – 2050»: сборник трудов I международ. науч.-практич. кон-

- ференции 7–8 июня 2013 г. / Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва. Астана, 2013. С. 237–240.
2. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы: Пер. с польск. И.Д. Рудинского. М. : Горячая линия – Телеком, 2006.
 3. Калянов Г.Н. Моделирование, анализ, реорганизация и автоматизация бизнес-процессов. М. : Финансы и статистика, 2007.
 4. Каталевский Д.Ю. Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении. Учебное пособие. М. : Дело, 2015.
 5. Кобелев Н.Б. Имитационное моделирование объектов с хаотическими факторами. Учебное пособие. М. : КУРС, НИЦ ИНФРА–М, 2016.
 6. Вайсфельд М. Объектно-ориентированное мышление. СПб. : Питер, 2014.
 7. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. Учебное пособие. М. : ИНФРА–М, 2010.
 8. Фураева И.И., Сеньковская А.А. Управление процессом создания модульной образовательной программы для формирования равномерной нагрузки преподавателей // Интеллектуальные информационные и коммуникационные технологии – средство осуществления третьей индустриальной революции в свете стратегии «Казахстан – 2050»: сборник трудов I международ. науч.-практич. конференции 7–8 июня 2013 г. / Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилёва. Астана, 2013. С. 233–236.

MODELLING AND OPTIMIZATION OF ALLOCATION OF HUMAN RESOURCES AND CLASSROOM UNIVERSITY FUND ON THE BASIS OF THE CURRICULUM ANALYSIS

A.A. Senkovskaya¹

Postgraduate Student, e-mail: capelli.rossi.nana@gmail.com

I.I. Furayeva²

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: furir@mail.ru

¹Dostoevsky Omsk State University

²Eurasian National University n.a. L.N. Gumilyov

Abstract. The main reasons for the need for a preliminary analysis of the initial data for the calculation of teaching loads are presented. We confirmed the presence of factors that affect the optimal distribution of the teaching load, such as a classroom university fund, threading of groups and other. The study is based on the analysis and subsequent optimization of the university curriculum. The curricula for the current academic year of Kazakh University of Economy, Finance and International Trade (Astana, Kazakhstan) were used as the initial data, as well as academic calendars and rules for the organization of educational process on credit technology in the Republic of Kazakhstan.

Keywords: optimization, modelling, curriculum, teaching load, classroom fund.

Дата поступления в редакцию: 10.03.2017

HOW TO MAKE MACHINE LEARNING ROBUST AGAINST ADVERSARIAL INPUTS

Gerardo Muela¹

Student, e-mail: gdmuela@miners.utep.edu

Christian Servin²

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: cservin@gmail.com

Vladik Kreinovich¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

¹University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

²El Paso Community College, El Paso, Texas 79915, USA

Abstract. It has been recently shown that it is possible to “cheat” many machine learning algorithms — i.e., to perform minor modifications of the inputs that would lead to a wrong classification. This feature can be used by adversaries to avoid spam detection, to create a wrong identification allowing access to classified information, etc. In this paper, we propose a solution to this problem: namely, instead of applying the original machine learning algorithm to the original inputs, we should first perform a random modification of these inputs. Since machine learning algorithms perform well on random data, such a random modification ensures us that the algorithm will, with a high probability, work correctly on the modified inputs. An additional advantage of this idea is that it also provides an additional privacy protection.

Keywords: machine learning, adversarial inputs, robust learning.

1. Adversarial Inputs to Machine Learning Algorithms: Formulation of the Problem

Machine learning algorithms have been very successful. Machine learning algorithms allow us, based on the known examples of different phenomena, to develop a general algorithm for detecting this phenomenon; see, e.g., [1]. For example, when presented with data from different patients with different diagnoses, machine learning can help diagnose new patients. When presented with examples of spam and non-spam emails, machine learning algorithms can then determine, with high reliability, whether a new email is a spam or not.

In many practical applications, machine learning algorithms have been very successful: after the training stage, in the vast majority of case, they correctly classify the inputs.

Possibility of adversarial inputs. On random inputs, the machine learning algorithms work really well. They are not perfect: there is usually a small percentage of cases when these algorithms err, but in most cases, they classify the inputs correctly.

The problem is that in some practical situations, the inputs are not random: e.g., the spammers can use the machine learning algorithm's imperfection and, on purpose, modify the inputs so that the algorithm will erroneously classify them as non-spams. It has been shown that there is indeed a possibility of such adversarial small modifications of the original input; see, e.g., [3] and references therein.

This possibility seems to defeat the purpose of the machine learning algorithm: e.g., in the spam example, we wanted to separate spam from non-spam, and with a clever adversary, we are unable to do it.

How do we deal with such adversarial inputs? What can we do? In the ideal world, we should come up with better machine learning algorithms, algorithms which are not so easy to cheat. However, this is not easy: adversarial inputs use the fact that the machine learning algorithms are not 100% perfect, and the progress of machine learning, while showing a steady decrease in errors, seems to indicate that it is impossible to completely get rid of such errors.

So what can we do?

2. How to Defeat Adversarial Inputs: An Idea

Main idea. For the exact adversarial input, the machine learning algorithm provides a wrong result.

However, as we have mentioned, for random inputs, the machine learning algorithm usually works well. Thus, if we add a random modification to the adversarial input, with high probability, the machine learning algorithm will provide a correct classification of this input — and we can further decrease the probability of error if we apply several different random modifications and apply the machine learning algorithm to all these modifications. This leads us to the following solution to the above problem.

Resulting solution to the above problem. Instead of applying the machine learning algorithm to the original inputs, we should:

- first, apply a random modification to the input (e.g., add random values), and then
- apply the original machine learning algorithm to the modified input.

Main pros and cons of this solution. The main disadvantage of the proposed solution is that since we are adding noise to the original input, we thus slightly decrease the efficiency of the machine learning algorithm.

The main advantage is that the adversaries can no longer disrupt the algorithm. From the viewpoint of such problems as detecting spam or checking whether a

person is authorized to access a certain data, this advantage clearly outdoes the above minor disadvantage.

An additional advantage of the proposed solution. Adding random modifications to the inputs is one of the known ways of preserving data privacy; see, e.g., [2,4]. Thus, the proposed solution has an additional advantage — it enhances the privacy protection.

Acknowledgments

This work was supported by the National Science Foundation grants HRD-0734825 and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence) and DUE-0926721, and by an award “UTEP and Prudential Actuarial Science Academy and Pipeline Initiative” from Prudential Foundation.

REFERENCES

1. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, New York, 2006.
2. Kargupta H., Datta S., Wang Q., Sivakumar K. On the privacy preserving properties of random data perturbation techniques // Proceedings of the Third IEEE International Conference on Data Mining ICDM'03. Melbourne, Florida, USA, November 19–22, 2003. P. 99–106.
3. Klarreich E. Learning securely: because it is easy to fool, machine learning can be taught not to handle adversarial inputs // Communications of the ACM. 2016. Vol. 59, No. 11. P. 12–14.
4. Nguyen H.T., Kreinovich V., Wu B., Xiang G. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

КАК СДЕЛАТЬ МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ К ВРАЖДЕБНЫМ ВХОДНЫМ ДАННЫМ

Херардо Муэла¹

студент, e-mail: gdmuela@miners.utep.edu

Кристиан Сервин²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: cservin@gmail.com

В. Крейнович¹

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

¹Техасский университет в Эль Пасо, США

²Эль Пасо Колледж, США

Аннотация. Недавно было показано, что можно «обмануть» многие алгоритмы машинного обучения, т.е. выполнить небольшие модификации входов, которые приведут к неправильной классификации. Эта особенность может использоваться злоумышленниками, чтобы избежать обнаружения спама, создать неправильную

идентификацию, разрешающую доступ к секретной информации и т.д. В этой статье мы предлагаем решение этой проблемы: вместо применения исходного алгоритма машинного обучения к исходным входам, мы должны сначала выполнить произвольную модификацию этих входов. Так как алгоритмы машинного обучения хорошо работают со случайными данными, такая случайная модификация гарантирует нам, что алгоритм с высокой вероятностью будет корректно работать с модифицированными входами. Дополнительным преимуществом этой идеи является то, что она также обеспечивает дополнительную защиту конфиденциальности.

Ключевые слова: машинное обучение, враждебные входные данные, надёжное обучение.

Дата поступления в редакцию: 02.03.17

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ МАНДАТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДОСТУПОМ ДЛЯ ОПЕРАЦИОННЫХ СИСТЕМ СЕМЕЙСТВА WINDOWS

Д.М. Бречка

к.т.н., доцент кафедры компьютерных технологий и сетей,
e-mail: dbrechkawork@yandex.ru

А.А. Литвиненко

студент, e-mail: a.litvinenko@outlook.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье описывается разработка системы мандатного управления доступом для операционных систем семейства Windows. Предлагается подход, основанный на разработке собственного драйвера мини-фильтра файловой системы, для перехвата обращений пользователей к программам. Описывается интерфейс полученной системы, приводятся результаты тестирования.

Ключевые слова: мандатное управление доступом, операционная система, Windows, драйвер, управление доступом, субъекты, объекты.

Введение

Операционные системы (ОС) семейства Windows NT используют дискреционные политики для управления доступом к файлам, но при этом не предоставляют возможности управления доступом на основе мандатов [1–3]. В то же время мандатное управление доступом (помимо прочего) необходимо для соответствия 4 классу защищённости согласно руководящему документу ФСТЭК «Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Показатели защищённости от несанкционированного доступа к информации» [4].

Для соответствия этому требованию ОС должна содержать следующие компоненты:

1. Диспетчер доступа — средство, перехватывающее все обращения субъектов (пользователей) к объектам (файлам) и принимающее решение о разрешении (или запрете) доступа, исходя из заданных мандатных правил разграничения доступа (ПРД). При этом пользователь должен иметь право читать только те файлы, уровень безопасности которых не превышает его собственный уровень безопасности (это обеспечивает защиту информации более высокоуровневых пользователей от доступа со стороны низкоуровневых пользователей), и записывать информацию только в те документы, уровень безопасности которых не ниже его собственного уровня

безопасности (это правило предотвращает нарушение режима доступа со стороны высокоуровневых участников процесса обработки информации к низкоуровневым пользователям).

2. Средство администрирования мандатных ПРД — пользовательский интерфейс, обеспечивающий сопровождение средства защиты, а именно, предоставляющий возможность изменения классификационных уровней субъектов и объектов специально выделенными субъектами.

Целью данной работы является разработка и реализация системы мандатного управления доступом в операционных системах семейства Windows NT.

Разработка и тестирование системы проводились в виртуальной машине с установленной ОС Windows 10 Professional (версия 1511, сборка 10586). В качестве ПО для виртуализации был выбран Oracle VM VirtualBox (версия 5.1.6). В установленной ОС не производилось никаких дополнительных модификаций, помимо описанных в работе.

1. Формат и способ обмена данными

В первую очередь, опишем формат и способ хранения и передачи конфигурационных данных об уровнях доступа объектов и субъектов между средством администрирования и диспетчером доступа. Для простоты реализации было принято решение хранить эти данные в отдельных файлах в папке Windows текущей ОС. Список необходимых конфигурационных файлов приведён в таблице 1. Формат конфигурационных файлов приведён в таблице 2.

Таблица 1. Список конфигурационных файлов и их назначение

Расположение	Имя файла	Назначение
%WINDIR%	macLevels.dat	Содержит существующие в системе уровни доступа
%WINDIR%	macObjects.dat	Содержит сопоставление уровней доступа объектам
%WINDIR%	macSubjects.dat	Содержит сопоставление уровней доступа субъектам

2. Безопасность настроек системы защиты

Хранение конфигурации в файлах на жёстком диске влечёт соответствующие проблемы, связанные с безопасностью. Необходимо обеспечить защиту файлов конфигурации от изменения (и удаления) неавторизованными пользователями, эти возможности должны быть предоставлены только специально

Таблица 2. Формат конфигурационных файлов

Имя файла	Формат
macLevels.dat	Название уровня:{GUID-уровня}
macObjects.dat	Полный путь к файлу:{GUID-назначенного-ему-уровня}
macSubjects.dat	SID-пользователя:{GUID-назначенного-ему-уровня}

выделенным субъектам, которые отвечают за администрирование системы защиты (СЗ). В данном случае полагаем, что все администраторы СЗ состоят в локальной группе администраторов, а всем прочим пользователям такой доступ не предоставлен. Тогда необходимо реализовать выполнение двух требований.

1. Запуск интерфейса администрирования должен выполняться только от имени пользователя с правами администратора.
2. Доступ к файлам конфигурации должен контролироваться мандатными или дискреционными политиками, разрешающими их модификацию только пользователям, состоящим в группе локальных администраторов.

Первое требование легко выполняется созданием манифеста для приложения, в котором прописан необходимый уровень запуска [5]:

```
<requestedExecutionLevel level="requireAdministrator"uiAccess="{false}"/>
```

Второе требование выполнимо путём изменения списков контроля доступа в конфигурационных файлах соответствующим образом. Стандартная библиотека .NET Framework предоставляет такую возможность. Управление ACL осуществляется путём последовательного вызова следующих методов:

1. *FileSecurity File.GetAccessControl(String filePath)*
Получает список контроля доступа для файла, путь к которому передан в качестве аргумента *filePath* в экземпляре класса *FileSecurity*.
2. *FileSystemAccessRule(IdentityReference identity, FileSystemRights fileSystemRights, AccessControlType type)*
Конструктор, формирующий экземпляр класса *FileSystemAccessRule* и принимающий в качестве своих аргументов идентификатор безопасности (*identity*) пользователя или группы, к которым применяется правило, тип операции, к которой применяется правило (*fileSystemRights*), и тип этого правила — разрешение или запрет (*type*).
3. *FileSecurity.AddAccessRule(FileSystemAccessRule rule)*
Добавляет к экземпляру *FileSecurity* новое правило доступа, переданное в качестве аргумента *rule*.
4. *File.SetAccessControl(String filePath, FileSecurity fileSecurity)*
Применяет список контроля доступа из экземпляра *FileSecurity*, переданного в качестве аргумента *fileSecurity*, к файлу, путь к которому передан в качестве аргумента *filePath*.

Чтобы избежать проблем с открытием или записью конфигурационных файлов в ситуациях, когда доступ к этим файлам, по тем или иным причинам, оказался закрыт даже для группы локальных администраторов, процес-

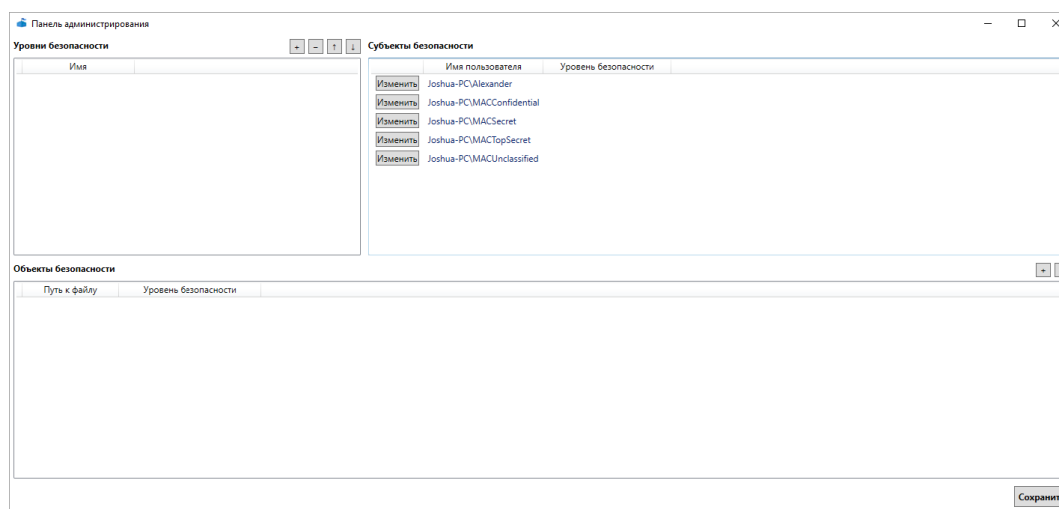


Рис. 1. Главное окно панели администрирования

су панели администрирования необходимо получить от системы привилегию на доступ на запись во все файлы вне зависимости от установленных для них ACL («SeRestorePrivilege»). Для реализации этого необходимо вызывать ряд методов WinAPI, в частности, метод *AdjustTokenPrivileges* из библиотеки ADVAPI32.DLL, которые необходимо импортировать в программу на C#, подключив пространство имён *System.Runtime.InteropServices*, например, так:

```
[DllImport(ADVAPI32, CharSet = CharSet.Unicode, SetLastError = true)]
internal static extern bool AdjustTokenPrivileges([In] IntPtr TokenHandle,
[In] bool DisableAllPrivileges, [In] ref TOKEN_PRIVILEGE NewState,
[In] uint BufferLength, [In, Out] ref TOKEN_PRIVILEGE PreviousState,
[In, Out] ref uint ReturnLength).
```

3. Интерфейс пользователя

Роль панели администрирования выполняет Win32-приложение, написанное на языке C#. Графический интерфейс был реализован на Windows Presentation Foundation с использованием паттерна MVVM. Главное окно панели администрирования (рис. 1) позволяет быстро увидеть все созданные в системе уровни безопасности и их приоритет, список всех пользователей в системе и назначенные им уровни безопасности, а также список всех файлов, которым назначены метки доступа.

Создание новых и редактирование уже существующих уровней и объектов безопасности, а также назначение уровней безопасности субъектам, выполняется с помощью диалоговых окон, вызываемых кнопками «изменить» и «+». Сохранение параметров (т. е. запись конфигурационных файлов на жёсткий диск) происходит при нажатии на кнопку «Сохранить».

4. Диспетчера доступа

Диспетчер доступа должен гарантированно перехватывать все запросы к файлам от всех пользователей и принимать решение об их разрешении или запрете. Реализация подобной функциональности неизбежно влечёт за собой необходимость перехвата системных вызовов. Существует несколько коммерческих продуктов, позволяющих перехватывать системные вызовы, одни из них позволяют перехватывать только доступ к объектам файловой системы, другие предоставляют более широкий спектр возможностей. В то же время эти продукты различаются по уровню реализации — одни представляют собой SDK, которые можно использовать при разработке своего продукта, другие же работают на более высоком уровне и скорее являются конечными продуктами. Список официальных инструментов и SDK от Microsoft, позволяющих добиться необходимой функциональности, если отсортировать их по сложности разработки от более сложных к более простым, сводится к [5–7]:

- разработке собственного драйвера файловой системы;
- разработке собственного драйвера фильтра файловой системы;
- разработке собственного драйвера мини-фильтра файловой системы.

Последний подход представляет собой самый простой способ перехвата обращений к файловой системе, особенно по сравнению с первыми двумя вариантами. Microsoft также предоставляет набор примеров мини-фильтров, исходный код которых открыт и выложен в свободный доступ в репозитории на Github [8].

Драйвера мини-фильтров ФС позволяют перехватывать обращение к объектам файловой системы как непосредственно перед самим вызовом, так и после его завершения. Очевидно, что в данном случае необходим перехват обращения до его совершения.

Любой из этих трёх подходов требует Windows Driver Kit, установленного на машине разработчика. Последняя версия WDK, 10.0, позволяет разрабатывать драйвера мини-фильтров файловых систем для всех операционных систем, начиная с Windows 7, а при выборе Windows 10 в качестве целевой платформы ещё и позволяет разрабатывать мини-фильтры одновременно для трёх архитектур процессоров (x86, x64, ARM) и двух платформ (Desktop и Mobile). Но для большей совместимости с выпущенными ранее ОС в качестве целевой ОС была выбрана Windows 7 (что, впрочем, означает, что мини-фильтр должен успешно функционировать и в Windows 8.x и в десктопной Windows 10, при условии соответствия архитектур процессора).

Для успешного построения проекта, первым делом, для всех конфигураций и платформ в решении необходимо в свойствах проекта драйвера мини-фильтра на странице «Driver Signing»→«General» создать новый тестовый сертификат. Также в параметрах проекта необходимо указать целевую ОС и платформу для сборки драйвера.

Пустой проект мини-фильтра уже содержит один файл с расширением «.c» для написания программного кода (этот файл содержит ряд пустых методов-заглушек) и один файл с расширением «.inf», содержащий всю нужную инфор-

мацию о драйвере и необходимый как для сборки проекта, так и для последующей установки драйвера в систему [9]. Для реализации монитора безопасности в файл исходного кода необходимо внести следующие изменения:

1. Раскомментировать содержимое массива *Callbacks*, тем самым включив перехват всех событий. Каждый элемент массива представляет собой структуру *FLT_OPERATION_REGISTRATION* с 4 полями — номер перехватываемой функции, дополнительные флаги, метод пре-обработчик, метод пост-обработчик.
2. Изменить логику работы метода пре-обработчика.
3. Реализовать чтение конфигурационных файлов.

Чтение конфигурации

Для представления конфигурации были реализованы классы *MACLevel*, *MACObject* и *MACSubject* для уровней, объектов и субъектов безопасности соответственно.

Для чтения конфигурационных файлов были реализованы функции:

- *vector<MACLevel> ReadLevelsFromFile(const char* macLevelPath);*
- *vector<MACObject> ReadObjectsFromFile(const char* macObjectPath);*
- *vector<MACSubject> ReadSubjectsFromFile(const char* macSubjectPath).*

Обработка событий доступа

Для получения идентификатора безопасности текущего пользователя была реализована функция *bool GetAccountSid (PSID* psid)*. Для преобразования файловых путей реализована функция *bool GetWin32FileName (const char* nativeFileName, char* *win32FileName)*.

Для определения того, какая операция над файлом в данный момент перехвачена, выполняется проверка значений *Data→Iopb→IrpFlags* и *Data→Iopb→Parameters.Create.SecurityContext→DesiredAccess*. Если *IrpFlags* содержит флаг *IRP_READ_OPERATION*, то выполняется операция чтения, если же *IrpFlags* содержит флаг *IRP_WRITE_OPERATION* и *DesiredAccess* содержит флаг *FILE_APPEND_DATA*, то выполняется операция записи в конец файла.

Принятие решений

Для определения, доступен ли файл для чтения/записи для текущего пользователя, реализованы функции:

- *bool CanUserReadFile(PSID userSid, char* filePath);*
- *bool CanUserAppendFile(PSID userSid, char* filePath).*

В случае, если результатом вызова функции является значение *FALSE*, то:

- в поле *Data→IoStatus.Status* устанавливается значение *STATUS_ACCESS_DENIED*;
- в поле *Data→Iopb→TargetFileObject* устанавливается значение *NULL*;
- пре-обработчик возвращает значение *FLT_PREOP_COMPLETE*.

5. Использование системы

Для демонстрации работы системы выполним вход под учётной записью с правами администратора и создадим 4 файла, к которым в дальнейшем будут

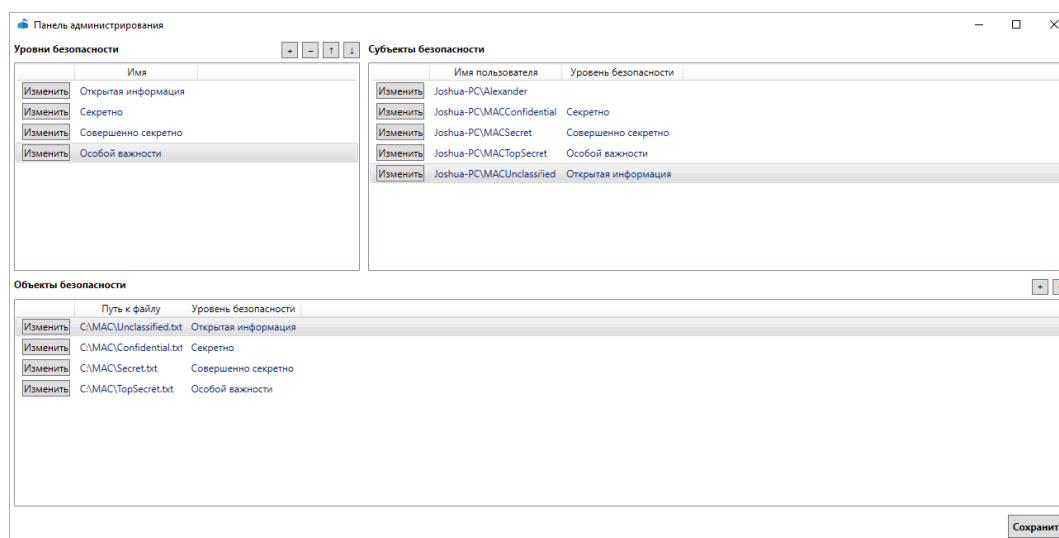


Рис. 2. Панель администрирования с настроенными политиками

применены мандатные политики контроля доступа. Затем запустим панель администрирования и в ней создадим 4 уровня безопасности («Открытая информация», «Секретно», «Совершенно секретно» и «Особой важности»), сопоставим эти уровни соответствующим пользователям и файлам (рис. 2) и сохраним конфигурацию нажатием кнопки «Сохранить».

Получившиеся после выполнения указанных настроек файлы конфигурации будут иметь следующее содержание:

C:\Windows>type macLevels.dat

Открытая информация: beeebadf-0793-488d-8c7b-3148b30e6ed4

Секретно: 48e05eaf-d146-41e1-8765-291be39996a7

Совершенно секретно: 99ee53b8-f4e2-4556-8a49-74a7474c207b

Особой важности: 52f8963c-lal9-409f-9ba0-a5el614bcde0

C:\Windows>type macSubjects.dat

S-1-5-21-3757206296-3124401388-62139004-1002:{48e05eaf-d146-41e1-S765-291be39996a7}

S-1-5-21-3757206296-3124401388-62139004-1003:{99ee53b8-f4e2-4556-8a49-74a7474c207b}

S-1-5-21-3757206296-3124401388-62139004-1004:{52f8963c-lal9-409f-9ba0-a5el614bcde0}

S-1-5-21-3757206296-3124401388-62139004-1001:{beeebadf-0793-488d-8c7b-3148b30e6ed4}

C:\Windows>type macObjects.dat

C:\MAC\Unclassified.txt:{beeebadf-0793-488d-8c7b-3148b30e6ed4}

C:\MAC\Confidential.txt:{48e05eaf-d146-41e1-8765-291be39996a7}

C:\MAC\Secret.txt:{99ee53b8-f4e2-4556-8a49-74a7474c207b}

C:\MAC\TopSecret.txt:{52f8963c-lal9-409f-9baQ-a5el614bcdeQ}

Таблица 3. Матрица доступов

Объект Субъект	Unclassified.txt	Confidential.txt	Secret.txt	TopSecret.txt
MACUnclassified	rw	w	w	w
MACConfidential	r	rw	w	w
MACSecret	r	r	rw	w
MACTopSecret	r	r	r	rw

Для проверки корректности работы фильтра теперь достаточно для каждого из четырёх пользователей проверить доступ на чтение и на запись к каждому из четырёх файлов. Исходя из использованной модели безопасности, диаграмма доступа должна выглядеть, как показано в таблице 3.

Для сокращения объёма излагаемого материала приведём результаты проверки работы только для пользователя MACUnclassified. Проверка возможности записи в файл проводится с помощью перенаправления вывода:

[вывод другой команды] >> [имя файла].

Проверка возможности чтения производится с помощью команды *type*:
type [имя файла].

Результаты тестирования:

```
C : \MAC > whoami
joshua – pc \macunclassified
C:\MAC > type Unclassified.txt
Открытая информация
C : \MAC > whoami >> Unclassified.txt
C : \MAC type Confidential.txt Access denied
C : \MAC > whoami >> Confidential.txt
C : \MAC type Secret.txt
Access denied
C : \MAC > whoami >> Secret.txt
C : \MAC type TopSecret.txt
Access denied
C : \MAC > whoami >> TopSecret.txt
```

Следует заметить, что в результате успешной записи никакая информация на экран не выводится. В этом случае очевидно, что результаты тестирования соответствуют первой строке матрицы доступов (табл. 2).

Тестирование прочих пользователей также показало соответствие ожидаемым результатам. Таким образом, можно сделать вывод о корректности работы системы контроля доступа.

Заключение

В результате выполнения работы был реализован драйвер мини-филтра файловой системы, выполняющий роль диспетчера доступа, и панель администрирования, обеспечивающая сопровождение СЗ. Это позволило реализовать мандатное управление доступом в ОС Windows 10 (а также в ОС Windows 7 и более новых версиях ОС). Тестирование СЗ полностью совпадает с ожидаемым результатом, что позволяет сделать вывод о корректности реализации монитора безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белим С.В., Бречка Д.М. Исследование безопасности дискреционного разделения доступа в ОС Windows // Математические структуры и моделирование. 2011. Вып. 22. С. 121–130.
2. Бречка Д.М. Разработка программного продукта для анализа безопасности доступа к файлам в операционных системах Windows 7 // Математические структуры и моделирование. 2013. Т. 28, № 2. С. 88–102.
3. Бречка Д.М., Сыргий Е.В. Система составления матрицы доступов запущенных процессов в операционной системе Windows // Вопросы защиты информации. 2014. Вып. 3(106). С. 17–24.
4. Гостехкомиссия России. Руководящий документ «Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Показатели защищённости от несанкционированного доступа к информации». М., 1992.
5. Installable file systems driver design guide. URL: <https://msdn.microsoft.com/windows/hardware/drivers/ifs/index> (дата обращения: 27.09.2016).
6. File System Filter Drivers. URL: <https://msdn.microsoft.com/windows/hardware/drivers/ifs/file-system-filter-drivers> (дата обращения: 11.03.2017).
7. Filter Manager Concepts. URL: <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/windows/hardware/drivers/ifs/filter-manager-concepts> (дата обращения: 11.03.2017).
8. Driver samples for Windows 10. URL: <https://github.com/Microsoft/Windows-driver-samples> (дата обращения: 11.03.2017).
9. File System Filter Driver Tutorial. URL: <http://www.codeproject.com/Articles/43586/File-System-Filter-Driver-Tutorial> (дата обращения: 11.03.2017).

CREATING THE MANDATORY ACCESS CONTROL SYSTEM FOR WINDOWS

D.M. Brechka

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: dbrechkawork@yandex.ru

A.A. Litvinenko

Student, e-mail: a.litvinenko@outlook.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The article describes a development of Mandatory Access Control System for Windows operating system. It is proposed the approach of creating the minifilter driver for the file system to intercept application calls. The interface of the Mandatory Access Control system, and the results of testing are described.

Keywords: mandatory access control, operating system, Windows, driver, access control, subjects, objects..

Дата поступления в редакцию: 10.04.2017

Колоколов Александр Александрович



01.09.1946–03.03.2017

После тяжёлой болезни 3 марта 2017 года скончался заведующий кафедрой прикладной и вычислительной математики, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Омской области Колоколов Александр Александрович.

Александр Александрович Колоколов, наш коллега, большую часть своей жизни преподавал в Омском государственном университете. С 1979 г. как молодой учёный, кандидат физико-математических наук он был приглашён в Омский Комплексный отдел ВЦ СО РАН. За время работы в Омске стал доктором наук, профессором, создал известную в стране и за рубежом школу дискретной оптимизации. Руководил кафедрой, читал курсы, под его руководством были защищены ряд кандидатских и несколько докторских диссертаций. Много сил и времени он отдавал работе с молодёжью. Благодаря ему сформировался профессиональный путь многих его учеников.

Мыпомним Александра Александровича всегда улыбающимся, остроумным и в тоже время принципиальным, отстаивающим свои взгляды и жизненные принципы.

Выражаем глубокое соболезнование родным и близким, всем кто работал вместе с Александром Александровичем.

*Редколлегия журнала
«Математические структуры
и моделирование»,
коллеги и ученики*

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета $\text{\LaTeX}$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор $\text{\LaTeX}$, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры и моделирование

№2(42)

Главный редактор

А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор

Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:

Е.А. Илюшечкин

А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск, пр. Мира, 55А

Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsu.ru>



Подписано в печать 01.06.2017. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 16,85. Тираж 100 экз. Заказ № 84.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, г. Омск, пр. Мира, 55А

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



17042 >