Математические структуры и моделирование
2017. № 2(42). С. 68–79

УДК 004.9:631.4 + 519.6

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ С УЧЁТОМ ВЗАИМОСВЯЗИ «РАСТИТЕЛЬНОСТЬ-ПОЧВА»

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье исследуются равновесные состояния Нэша для лесных экосистем с учётом взаимосвязи «растительность-почва» в рамках теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: равновесие Нэша, лесная экосистема, почва, растительность, дифференциальные игры.

Введение

Динамика лесных экосистем описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u_1, ..., u_N), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

с управляющими внешними факторами $u_1, ..., u_N$.

В качестве внешних управляющих факторов рассматриваем такие характеристики лесных фитоценозов, как мозаичность (оконная динамика) m, межвидовая и внутривидовая конкуренция k, антропогенное воздействие a, влажность почвы w и тип почвообразующей породы p.

Поэтому можно воспользоваться теорией дифференциальных игр и находить *равновесия Нэша*. Именно обнаружение таких равновесных состояний и является нашей целью.

Заметим, что, как правило, под равновесным состоянием системы, равновесием, понимается *стационарное состояние*, при котором характеризующие его параметры $z(t)$ не меняются со временем, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Такие равновесия изучаются в рамках теории катастроф. Подробности можно посмотреть в наших работах [1–4].

В теории дифференциальных игр каждый управляющий фактор u_i считается находящимся в распоряжении некоторого игрока, который старается с его помощью воздействовать на систему таким образом, чтобы иметь максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Выигрыш/проигрыш игрока описывается некоторой заранее заданной функцией $J_i(z, u_1, ..., u_N)$. Очевидно, в реальности трудно предполагать, что факторы могут изменяться совершенно независимо друг от друга, и, следовательно, в системе могут устанавливаться в каком-то смысле равновесия.

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (больший проигрыш).

1. Описание взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах

Почва относится к числу основных факторов, определяющих условия произрастания деревьев. Растительность и почва связаны потоками энергии и вещества и совместно с животными и микроорганизмами формируют целостный лесной биогеоценотический покров.

В [1–3] была предложена следующая мозаичная модель четырёхъярусной лесной экосистемы, учитывающая взаимосвязь «растительность-почва», в виде системы дифференциальных уравнений для продукции фитомассы и меры плодородия почвы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial x} V(x, k, m, a, w), \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - w\_)(W - w_+), \end{cases} \tag{1}$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_{\text{гр}})^6 + k(x - x_{\text{гр}})^4 + m(x - x_{\text{гр}})^3 + a(x - x_{\text{гр}})^2 + w(x - x_{\text{гр}}),$$

$$k = -c_k(CI - CI_0), \quad m = c_m\Big(\frac{s^2}{\mu} - 1\Big),$$

$$a = -c_a(\text{УАН} - \text{УАН}_0), \quad w = A_w(W - w_0),$$

где x — продукция фитомассы (т/га за год), y — мера плодородия почвы, CI — индекс конкуренции Вайса [4]; s^2/μ — коэффициент дисперсии, являющийся показателем равномерности распределения деревьев в пространстве; если s^2/μ близко к нулю, то распределение регулярное, к единице – случайное, а чем более единицы, — тем мозаичнее; УАН – уровень антропогенной нагрузки на район [4], p — мера типа почвообразующей породы, W — влажность почвы, W_- – значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ — её избыток, γ, δ – положительные константы, коэффициент $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, где α_j — доля фитомассы j-го яруса в фитомассе всего леса, c_k, c_m, c_a, c_w — постоянные коэффициенты.

Через $x_{\text{гр}}$ обозначена характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы в отсутствии сколь-либо серьёзных изменений внешних факторов. Фактически это «*исходное значение*» продукции фитомассы леса, наблюдаемое на протяжении ряда лет и принимаемое как точка отсчёта при прогнозировании будущих состояний экосистемы.

Величины $CI_0, \text{УАН}_0, W_0$ — это критические значения факторов, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза [4].

Первое уравнение системы (1) описывает четырёхъярусный лес. Добавление второго уравнения таким способом, как это мы предлагаем, сохраняет все результаты, полученные нами для теоретико-катастрофического описания четырёхъярусного леса и подробно изложенные в [4].

Второе уравнение системы (1) — это уравнение, реализующее упрощённое представление о плодородии почвы и учитывающее только два фактора: тип почвообразующей породы и влажность почвы. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения катастрофу типа «сборка». В точке (p_0, W_-) происходит катастрофа падения плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке (p_0, W_+) — катастрофа падения плодородия при избытке влаги [1].

2. Динамика системы «растительность-почва» как дифференциальная игра

Имеем двух игроков. Игрок 1 — это растительность, и ей соответствует внешний фактор $u = (\alpha, k, m) \in \mathbb{R}^3$, а игрок 2 — это почва вместе с антропогенными воздействиями на лес, и им отвечает внешний фактор $v = (p, w, a) \in \mathbb{R}^3$.

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - w - xa, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p - \delta \cdot (w + (w_0 - w_{\_}))(w + (w_0 - w_+)), \end{cases} \tag{2}$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$
$$t \in [0, T].$$

Начальное состояние игры — это фиксируемые в момент времени $t = 0$ значения продукции леса x_0 и плодородия почвы y_0:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Цель каждого игрока состоит в том, чтобы максимизировать/минимизировать свой выигрыш/проигрыш, рассчитываемый по формуле:

$$J_i(u, v) = \psi_i(x(T), y(T)) - \int_0^T L_i(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) dt. \tag{3}$$

Нахождение равновесия Нэша для системы (2) — крайне сложная задача из-за квадратичного вхождения w во второе уравнение системы.

3. Динамика системы «растительность-почва» для незасушливых регионов

Однако можно искать равновесия, предполагая, что недостаток влаги (засуха) в наших краях — явление крайне редкое, и поэтому можно считать, что w находится в окрестности параметра w_+. Иначе говоря, вместо системы (2) будем изучать систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p - \delta \cdot (w + (w_0 - w_{\_})), \end{cases} \tag{4}$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$t \in [0, T].$$

Сделаем замену во втором уравнении $y = \bar{y} + c$, $c = const$ и подберём c так, чтобы слагаемое в правой части, в которое не входят факторы p, w при $\bar{y} = 0$ обращалось в нуль.

Легко найти, что $c = -(\delta(w_0 - w_-)/\gamma)^{1/3}$. В результате такой замены мы вместо системы (4) можем изучать, не ограничивая общности, систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \dfrac{dy}{dt} = [-\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_{\_})] + \gamma(y + c)p - \delta w. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^{5} g_j(z) u_j, \tag{6}$$

где

$$f(z) = \begin{pmatrix} -\alpha x^5 \\ -\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_{\_}) \end{pmatrix},$$

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(z) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3(z) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad g_5(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(y+c) \end{pmatrix},$$

$$u_1 = k, \ u_2 = m, \ u_3 = a, \ u_4 = w, \ u_5 = p.$$

Теперь

$$f(0) = 0.$$

Будем считать, что у нас 5 игроков. Игрок 1 — это фактор $u_1 = k$ – конкуренция деревьев, игрок 2 — это оконная динамика $u_2 = m$, определяющая мозаичность фитоценоза, игрок 3 — антропогенное вмешательство $u_3 = a$ в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т. д.), и, наконец, игрок 4 — влажность почвы $u_4 = w$, игрок 5 — мера типа почвообразующей породы $u_5 = p$.

Выигрышные функции возьмём в виде:

$$J_i(z, u_1, ..., u_5) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^{5} R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, ..., 5) \tag{7}$$

и числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geqslant 0.$$

Рассматриваем игру с ненулевой суммой.

4. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматривать игру с ненулевой суммой вполне разумно, поскольку «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей уже от позиции $\{t, x\}$, и для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [5]. Часто пишут просто $u(x)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N-игроков

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^{N} g_j(z) u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(z, u_1, ..., u_N) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^{N} R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

где числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geqslant 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leqslant J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, ..., u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, ..., N \tag{8}$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения $V_i(z)$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$(\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^{N} g_j(z)(R_{jj})^{-1}(g_j(z))^T(\nabla V_j) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(\nabla V_j)^T g_j(z) R_{ij}[(R_{jj})^{-1}]^2 (g_j(z))^T(\nabla V_j) = 0, \tag{9}$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [6, Theorem 10.4-2, утверждение b.]:

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2}R_{ii}^{-1}(g_i(z))^T(\nabla V_i), \quad i = 1, ..., N. \tag{10}$$

5. Нэшевское равновесие лесной экосистемы (6)-(7)

В нашем случае $N = 5$, и рассматриваем $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 1$, $R_{ij} = 0$ $(i \neq j)$.

Тогда уравнения Гамильтона-Якоби (9) имеют вид

$$Q_i + (\nabla V_i)^T f(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T F(x) + \frac{1}{4}(\nabla V_i)^T g_i(z)(g_i(z))^T(\nabla V_i) = 0 \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^{5} g_j(z)(g_j(z))^T(\nabla V_j).$$

Полагая, что

$$V_1(z) = V_2(z) = V_3(z) = V_4(z) = V_5(z) = \frac{1}{2}x^2 > 0,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^8 + x^6 + x^4 + x^2\right),\\
Q_2 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2}\left(x^8 + \frac{1}{2}x^6 + x^4 + x^2\right),\\
Q_3 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2}\left(x^8 + x^6 + \frac{1}{2}x^4 + x^2\right),\\
Q_4 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2}\left(x^8 + x^6 + x^4 + \frac{1}{2}x^2\right),\\
Q_5 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2}\left(x^8 + x^6 + x^4 + x^2\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Следовательно, если Q_i выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона-Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [6] имеем равновесие Нэша

$$
k^* = \frac{1}{2}x^4, \quad m^* = \frac{1}{2}x^3, \quad a^* = \frac{1}{2}x^2, \quad w^* = \frac{1}{2}x, \quad p^* = 0, \tag{13}
$$

найденное по формулам (10).

Выигрышные/проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$
\begin{aligned}
J_1(x,k,m,a,w,p) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_1(x) + k^2]dt,\\
J_2(x,k,m,a,w,p) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_2(x) + m^2]dt\\
J_3(x,k,m,a,w,p) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_3(x) + a^2]dt,\\
J_4(x,k,m,a,w,p) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_4(x) + w^2]dt,\\
J_5(x,k,m,a,w,p) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_5(x) + p^2]dt.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Продуктивность x и мера плодородия почвы y в случае равновесия Нэша (13) находятся посредством подстановки (13) в уравнения (5) и их интегрированием.

Иначе говоря, требуется решать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}x[x^6 + (1+2\alpha)x^4 + x^2 + 1],\\
\dfrac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma c y^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w\_)] - \delta x/2.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Для $\gamma = w_0 - w_{\_} = \delta = 1$, $c = -1$ система (15) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}x[x^6 + (1+2\alpha)x^4 + x^2 + 1], \\ \dfrac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - \dfrac{1}{2}x. \end{cases} \tag{16}$$

Интегрирование этой системы с $\alpha = 0,0007$ даёт, например, решения, представленные на рис. 1, 2, 3.

Решения отдельно для первого уравнения системы (15) для $\alpha = 0,0007$ с разными начальными данными, представлены также на рис. 4.

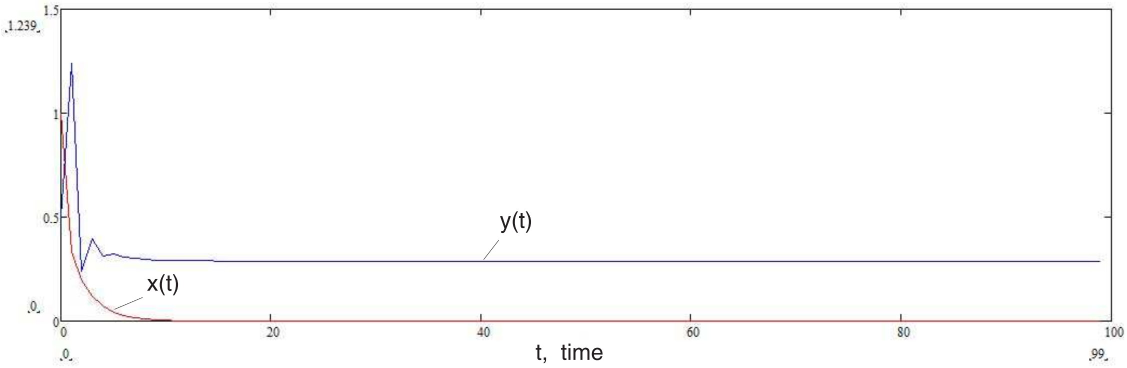

Рис. 1. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(0) = 1$ и $y(0) = 0,5$ при $t \in [0, 100]$

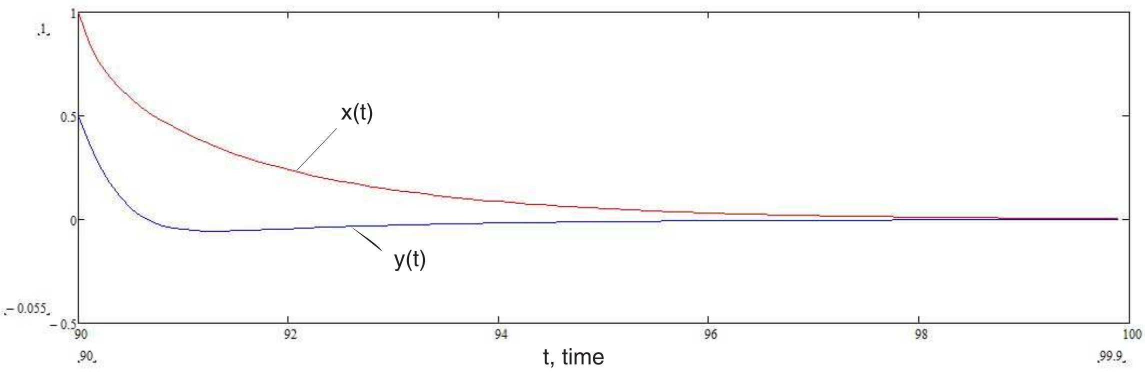

Рис. 2. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(90) = 1$ и $y(90) = 0,5$ при $t \in [90, 100]$

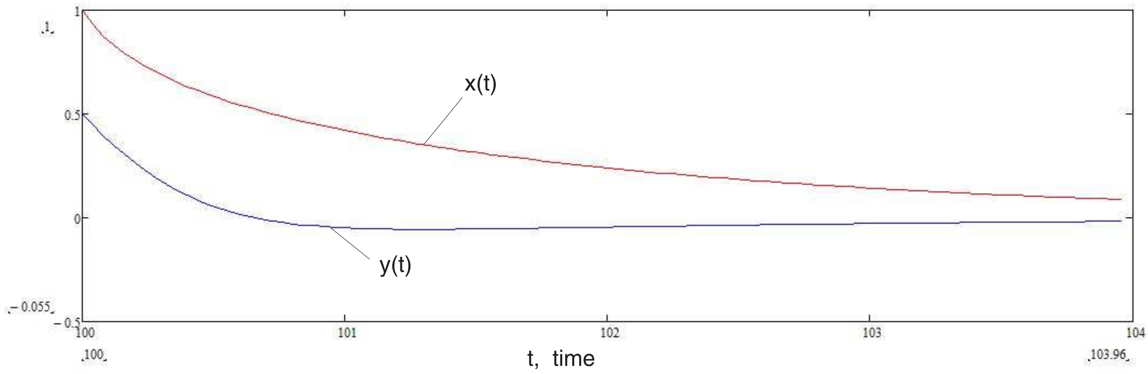

Рис. 3. Динамика продуктивности $x(t)$ (красный цвет) и меры плодородия $y(t)$ (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием $x(100) = 1$ и $y(100) = 0,5$ при $t \in [100, 104]$

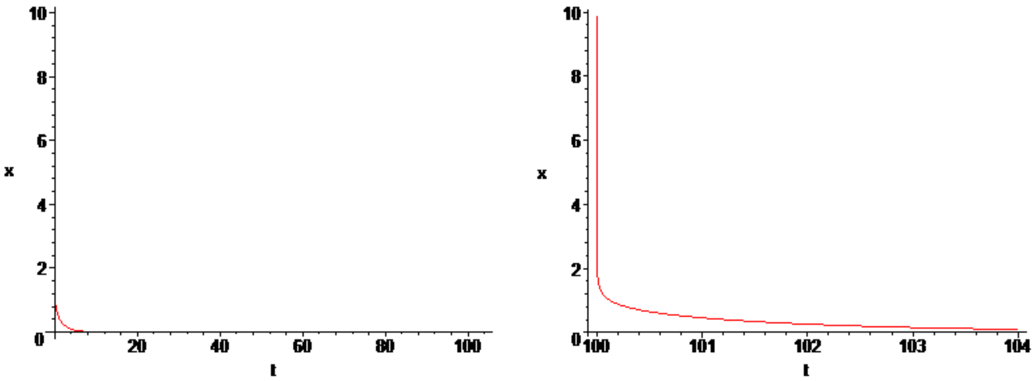

Рис. 4. Продуктивность леса в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным данным $x(0) = 10$ при $t \in [0, 100]$. Справа с начальным данным $x(100) = 10$ при $t \in [100, 104]$

На всех графиках мы видим, что с течением времени продуктивность фитоценоза постепенно асимптотически падает до нуля. Однако если учесть, что система (15) получена, в частности, упрощением исходной системы (1) посредством замены $x - x_{\text{гр}} \to x$, то следует говорить об асимптотическом падении продукции фитоценоза постепенно до величины $x_{\text{гр}} > 0$.

Можно сказать, что лес выходит на финальную стадию. Фактически найденное равновесие Нэша похоже на то, что в лесоведении называется климаксом леса.

Напомним, что *климакс леса* (от греч. klimax — лестница) — это сравнительно зрелая, устойчивая (находящаяся в состоянии динамического равновесия с окружающей средой), «заключительная» стадия формирования фитоценоза, формирования лесной экосистемы.

Однако для позиционного управления (13) мы не можем утверждать, что система (5) является асимптотически устойчивой (теорема 10.4-2, утверждение (a) из [6]). Иначе говоря, возмущения начальных условий могут резко изменить намеченную траекторию развития системы «растительность-почва», и это плохо соответствует понятию климаксного леса.

Скорее всего, следует говорить о *медленно деградирующем лесе*, поскольку для управления (13) все $u_i^* > 0$ для $x > 0$. Действительно, это означает, что внешние управляющие факторы k, a, W превысили значения CI_0, УАН$_0$, W_0, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза. Фактически это означает повышенную антропогенную нагрузку на лес и повышенную влажность почвы.

В какой мере второе уравнение может повлиять на первое? Иначе говоря, как ведут себя продуктивность $x(t)$ и мера плодородия $y(t)$ в условиях равновесия Нэша (13)?

Как видим, продукция x по-прежнему монотонно падает, а плодородие почвы со временем сохраняется на определённом уровне.

Фактически нахождение решения для меры плодородия y требует решения первого уравнения системы (16) относительно x и подстановки x во второе уравнение системы (16) с последующим интегрированием. Сделать это не столь просто. Однако из рис. 1 видно, что можно приближённо представить, что

$$t = 1/x + 100 \quad \text{или} \quad x = 1/(t-100).$$

В таком случае уравнение для меры плодородия имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma c y^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w_\_)] - \delta/2(t-100).$$

Для $\gamma = w_0 - w_\_ = \delta = 1$, $c = -1$ оно принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - 1/2(t-100).$$

Два возможных результата интегрирования даны на рис. 5.

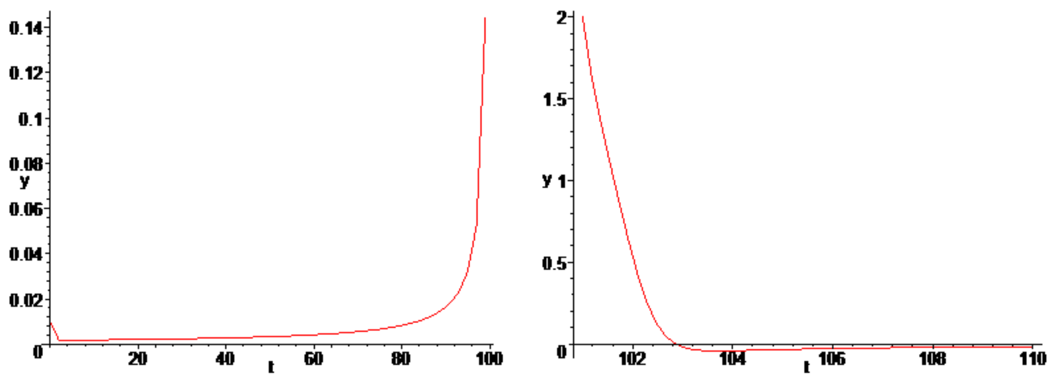

Рис. 5. Динамика меры плодородия в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным условием $y(0) = 0,01$ при $t \in [0, 100]$. Справа с начальным условием $y(101) = 2$ при $t \in [101, 110]$

Мы видим, что вначале плодородие нарастает, а затем после 100 лет – падает. В принципе, это более или менее согласуется с тем, что со временем продуктивность фитоценоза монотонно уменьшается.

6. Заключение

В работе [7], где проводилась игра только для одного уравнения продуктивности, нам удалось найти равновесие Нэша, для которого дифференциальное уравнение оказалось асимптотически устойчивым, и в силу этого мы заявили о том, что нашли управление, ведущее к климаксу леса. Для системы «растительность-почва» установить подобное, как сказано выше, нам не удалось. Скорее всего, это временная ситуация, которая разрешится тем, что в будущем будет найдено оптимальное управление, дающее и нэшевское равновесие, и асимптотическую устойчивость системе «растительность-почва». Надежда опирается на то, что в лесоведение существует понятия климаксного леса, основанное на знаниях о реальных лесных экосистемах, находящихся в реальных условиях окружающей среды, в которых растения помещены в почву, а не оторваны от неё.

Литература

1. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Математическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 56–60.
2. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Теоретико-катастрофическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 23–24.
4. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Изд-во КАН, 2012. 220 с.
5. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3–112.
6. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
7. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Климаксный лес как нэшевское равновесное состояние лесных экосистем // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 38–44.

EQUILIBRIUM DYNAMICS OF FOREST ECOSYSTEMS BASED ON THE RELATIONSHIP "VEGETATION-SOIL"

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the Nash equilibrium state for the forest ecosystems based on the relationship "vegetation-soil" and the theory of differential games are investigated.

Keywords: The Nash equilibrium, forest ecosystem, soil, vegetation, differential games.

Дата поступления в редакцию: 07.03.2017