

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОБЩЁННОЙ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ

Н.С. Новаковский

аспирант второго года, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения

Аннотация. В статье изложены результаты численного и аналитического моделирования задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа при неубытании радиуса сжимающего поршня. Основным результатом статьи являются выведенные аналитические представления звуковых характеристик обобщённой центрированной волны сжатия. Кроме этого, приводятся результаты сравнения следствий полученных аналитических формул с расчётами методом характеристик в обратном направлении изменения времени. Также полученные представления звуковых характеристик были использованы для расчёта течения в области между крайней звуковой характеристикой и сжимающим поршнем при возрастании времени. Установлена применимость разработанного подхода для решения задачи о сильном сжатии одномерных слоёв газа достаточно больших масс.

Ключевые слова: сильное сжатие газа, метод характеристических рядов, особенность течения.

Введение

В [1–3] предложено многомерное обобщение центрированной волны Римана для решения некоторых задач газовой динамики, в том числе задач о сжатии идеального газа и о разлёте газа в вакуум. Для того чтобы пользоваться этим решением в реальных задачах, необходимо иметь не только аналитическое представление неизвестных функций в виде сходящегося бесконечного ряда, но и уметь восстанавливать звуковые и контактные характеристики этих течений. Количество характеристик системы уравнений газовой динамики с учётом их кратности соответствует количеству уравнений в системе. А именно: в случае трёх пространственных переменных система состоит из 5 уравнений и имеет звуковые C^+ и C^- характеристики кратности один и контактную характеристику C^0 кратности три. При уменьшении размерности кратность контактной характеристики соответственно уменьшается. Если же рассматриваются одномерные изэнтропические течения, то в системе остаётся только два уравнения и контактная поверхность теряет свойство быть характеристикой.

Траектории звуковых характеристик участвуют при расчётах граничных условий [4, 5]. В предыдущих статьях автора [4, 5] использовалась только C_0^+ -характеристика, траектория движения которой не зависит от симметрии задачи и имеет простой вид:

$$r_{C_0^+}(t) = r_0 + t.$$

Здесь и далее предполагается, что в начальный момент времени задано фоновое течение газа $u = 0, \rho = 1$. Целью как предыдущих работ автора, так и настоящей является отыскание такой траектории движения сжимающего поршня, которая гарантированно обеспечивает сжатие заданной массы газа до наперед заданной плотности. В работе [2] получены асимптотические оценки для траектории движения поршня, сжимающего газ до бесконечной плотности. В работах [6, 7] изложен алгоритм решения задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени методом характеристик, который обеспечивает численное построение траектории движения сжимающего поршня в случае уменьшения его радиуса. В работе [4] этот алгоритм применён для решения задачи сжатия одномерных газовых слоёв в конфигурации Р. Мизеса при неубывании радиуса кривизны сжимающего поршня.

1. Получение первых коэффициентов ряда по степеням t для искомых функций

Следуя [2, 3], сформулируем задачу получения в момент времени $t = t_*$ вертикального в точке $r = r_*$ распределения плотности в слое газа. Сначала поменяем ролями искомую функцию $\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ (скорость звука газа) и независимую переменную r для того, чтобы избавиться от особенности в решении в точке $r = r_*$. Система уравнений для вышеупомянутой задачи запишется следующим образом:

$$\begin{cases} r(u - r_t) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(ru_\sigma + \nu ur_\sigma) = 0, \\ r_\sigma u_t + (u - r_t)u_\sigma + \frac{2}{(\gamma - 1)}\sigma = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь значения $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Для системы (1) формулируются начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} r(t, \sigma)|_{\sigma=1} &= r_0 + t, \\ u(t, \sigma)|_{\sigma=1} &= 0, \\ r(t, \sigma)|_{t=t_*} &= r_*, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_* = r_0 + t_*$. В рассматриваемой задаче $\sigma \geq 1$.

Следуя [2, 3], будем искать решение системы в виде сходящегося степенного ряда по степеням $(t - t_*)$:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\sigma) \frac{(t - t_*)^k}{k!}, \\ r &= \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\sigma) \frac{(t - t_*)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание краевое условие (2), сразу получим, что

$$r_0(\sigma) = r(t_*, \sigma) = r_*, \quad r_\sigma|_{t=t_*} \equiv 0.$$

Учитывая вид рядов (3) и условия (2) при подстановке $t = t_*$, получим:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_*} &= u_0(\sigma), & r_t|_{t=t_*} &= r_1(\sigma), \\ u_t|_{t=t_*} &= u_1(\sigma), & r_{tt}|_{t=t_*} &= r_2(\sigma), \\ u_\sigma|_{t=t_*} &= u'_0(\sigma), & u_{\sigma t}|_{t=t_*} &= u'_1(\sigma), \\ r_{\sigma t}|_{t=t_*} &= r'_1(\sigma). \end{aligned}$$

Для получения нескольких первых коэффициентов рядов будем использовать методику, подробно изложенную в [2, 3], а именно: для получения u_0, r_1 подставим в (1) $t = t_*$ и решим получившуюся систему ОДУ:

$$\begin{cases} r_*(u_0 - r_1) + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma r_* u'_0 = 0, \\ (u_0 - r_1) u'_0 + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) выразим:

$$(u_0 - r_1) = -\frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0}$$

и, подставив в первое уравнение, получим:

$$-r_* \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0} + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma r_* u'_0 = 0.$$

После ряда преобразований получим:

$$u'_0 = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)}.$$

Отсюда

$$u_0(\sigma) = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma + \text{const.}$$

Исходя из условий (2), получим окончательный вид:

$$u_0(\sigma) = \pm \frac{2}{(\gamma - 1)} (\sigma - 1). \quad (5)$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), получим явное выражение для r_1

$$r_1(\sigma) = u_0 + \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)u'_0} = \pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \sigma \mp \frac{2}{(\gamma - 1)}. \quad (6)$$

Для получения следующих коэффициентов рядов продифференцируем систему (1) по t :

$$\begin{cases} r_t(u - r_t) + r(u_t - r_{tt}) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(r_t u_\sigma + r u_{\sigma t} + \nu u r_{\sigma t}) = 0, \\ r_{\sigma t} u_t + r_\sigma u_{tt} + (u_t - r_{tt})u_\sigma + (u - r_t)u_{\sigma t} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая вид рядов (3), подставив в (7) $t = t_*$, получим:

$$\begin{cases} r_1(u_0 - r_1) + r_*(u_1 - r_2) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(r_1 u'_0 + r_* u'_1 + \nu u_0 r'_1) = 0, \\ r'_1 u_1 + (u_1 - r_2)u'_0 + (u_0 - r_1)u'_1 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Подставим полученные функции в (8):

$$\begin{cases} -\frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)}\sigma^2 + \frac{2}{(\gamma - 1)}\sigma + r_*(u_1 - r_2) + \\ + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[\frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}\sigma - \frac{2^2}{(\gamma - 1)^2} + r_* u'_1 + \nu \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}(\sigma - 1) \right] = 0, \\ \pm \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)}u_1 \pm (u_1 - r_2)\frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и разделив первое уравнение на $r_* \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} r_2 = u_1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[u'_1 + \frac{\nu}{r_*} \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \frac{2}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1) \right], \\ \pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}u_1 \pm (u_1 - r_2)\frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Подставим выражение $u_1 - r_2$ из первого уравнения во второе:

$$\pm \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}u_1 \mp \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left[u'_1 + \frac{\nu}{r_*} \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \frac{2}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1) \right] \frac{2}{(\gamma - 1)} \mp \sigma u'_1 = 0.$$

Раскроем скобки, введём обозначение $\alpha = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}$ и получим ОДУ относительно u_1 :

$$\pm \sigma u'_1 \mp \alpha u_1 = -\frac{\nu}{r_*} \alpha \frac{2\sigma}{(\gamma - 1)}(\sigma - 1).$$

Это неоднородное линейное уравнение первого порядка. В зависимости от значения параметра α , решение следующее:

$$u_1(\sigma) = \begin{cases} u_{10}\sigma \pm \frac{\nu}{r_*}\sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*}\sigma^2, & \alpha = 1, \text{ т.е. } \gamma = 3, \\ u_{10}\sigma^2 \mp \frac{6\nu}{r_*}\sigma - \frac{6\nu}{r_*}\sigma^2 \ln \sigma, & \alpha = 2, \text{ т.е. } \gamma = \frac{5}{3}, \\ u_{10}\sigma^\alpha - \frac{2\nu\alpha}{(\gamma - 1)r_*} \left[\frac{\sigma}{(\alpha - 1)} - \frac{\sigma^2}{(\alpha - 2)} \right], & \alpha \neq 1, 2, \text{ т.е. } \gamma \neq 3, \frac{5}{3}. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив полученные формулы в (9), выразим $r_2(\sigma)$:

$$r_2 = \begin{cases} \sigma \left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2, & \gamma = 3, \\ -\frac{12\nu}{r_*} \sigma + \left(\frac{5u_{10}}{3} + \frac{2\nu}{r_*} \right) \sigma^2 - \frac{10\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma, & \gamma = \frac{5}{3}, \\ \sigma^\alpha \frac{u_{10}(\gamma + 5)}{4} + \frac{2\nu\alpha(2 + A)}{r_*B} \sigma^2 - \frac{8\nu\alpha}{r_*A} \sigma, & \gamma \neq 3, \frac{5}{3}, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$A = 3 - \gamma, B = 5 - 3\gamma.$$

Коэффициенты A, B , находящиеся в знаменателе, обращаются в нуль при $\gamma = 3$ и $\gamma = 5/3$. Эти случаи рассматриваются отдельно.

Таким образом, получены два первых члена в ряду по степеням $\tau = (t - t_*)$ для функции $u(\sigma)$ и три первых члена для функции $r(\sigma)$:

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= u_0(\sigma) + u_1(\sigma)\tau + \mathcal{O}(\tau^2), \\ r(\sigma) &= r_0(\sigma) + r_1(\sigma)\tau + r_2(\sigma)\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3), \end{aligned} \quad (12)$$

а функции u_0, u_1, r_1, r_2 вычисляются по формулам (5), (10), (6), (11) соответственно.

Заметим, что при $\nu = 0$, то есть в случае плоской симметрии, построенное решение описывает простую центрированную волну Римана, которая задаётся формулой [8]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1}, \\ \frac{r - r_*}{\tau} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Заметим, что вне зависимости от γ , при $\nu = 0$, построенное решение будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1} + u_{10} \sigma^\alpha \tau + \mathcal{O}(\tau^2), \\ \frac{r - r_*}{\tau} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma + 5}{4} u_{10} \sigma^\alpha \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned}$$

Естественно потребовать, чтобы полученные нами формулы совпадали с классическим решением. Откуда с необходимостью следует:

$$u_{10} \equiv 0. \quad (13)$$

2. Вывод уравнений для характеристик

Пусть в начальный момент времени во всей рассматриваемой области $\{t \geq 0, r \geq r_0\}$ задано фоновое течение $u = 0, \rho = 1$, тогда запишем задачу Коши для закона движения звуковой C^+ -характеристики в пространстве независимых переменных (t, σ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} = u + \sigma, \\ \sigma|_{\tau=0} = \sigma_*. \end{cases} \quad (14)$$

Преобразуем ОДУ (14), с учётом представления функций u, r (12):

$$r_1 + r_2\tau + \mathcal{O}(\tau^2) + [r'_1\tau + r'_2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3)] \frac{d\sigma}{dt} = u_0 + u_1\tau + \mathcal{O}(\tau^2) + \sigma.$$

Будем последовательно рассматривать особые случаи. Сначала $\gamma = 3$:

$$\begin{aligned} & 2\sigma - 1 + \left[\sigma \left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \right] \tau + \\ & + \left\{ 2\tau + \left[\left(2u_{10} - \frac{\nu}{r_*} \right) + \frac{2\nu}{r_*} \ln \sigma + \frac{2\nu}{r_*} - 2\frac{\nu}{r_*} \sigma \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = \sigma - 1 + \left(u_{10}\sigma + \frac{\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \right) \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Приведём подобные, сократим на τ , учтём (13):

$$\left[2 + \left(\frac{2\nu}{r_*} \ln \sigma + \frac{\nu}{r_*} - 2\frac{\nu}{r_*} \sigma \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{r_*} \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma. \quad (15)$$

Далее рассмотрим случай $\gamma = 5/3$:

$$\begin{aligned} & 4\sigma - 3 + \left[\left(\frac{5u_{10}}{3} + \frac{2\nu}{r_*} \right) \sigma^2 - \frac{12\nu}{r_*} \sigma - \frac{10\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma \right] \tau + \\ & + \left\{ 4\tau + \left[\left(\frac{10u_{10}}{3} + \frac{4\nu}{r_*} \right) \sigma - \frac{12\nu}{r_*} - \frac{20\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma - \frac{10\nu}{r_*} \sigma \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = 3\sigma - 3 + \left(u_{10}\sigma^2 - \frac{6\nu}{r_*} \sigma - \frac{6\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma \right) \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение аналогично первому случаю:

$$\left[4 + \left(\frac{12\nu}{r_*} \sigma + \frac{6\nu}{r_*} \sigma^2 + \frac{20\nu}{r_*} \sigma \ln \sigma \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\nu}{r_*} \sigma^2 - \frac{6\nu}{r_*} \sigma - \frac{4\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma. \quad (16)$$

Решение этого уравнения, так же как и решение уравнения (15) в квадратурах не выписываются [9, 10] и эти решения можно найти только численно.

Выпишем теперь общий случай $\gamma \neq 5/3, \gamma \neq 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma - \frac{2}{\gamma-1} + \left(\sigma^\alpha \frac{u_{10}(\gamma+5)}{4} + \frac{2\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma^2 - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \sigma \right) \tau + \\ & + \left\{ 2\alpha\tau + \left[\alpha\sigma^{\alpha-1} \frac{u_{10}(\gamma+5)}{4} + \frac{4\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \right] \tau^2 \right\} \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = \frac{2}{\gamma-1} \sigma - \frac{2}{\gamma-1} + \left\{ u_{10}\sigma^\alpha - \frac{2\nu\alpha}{(\gamma-1)r_*} \left[\frac{\sigma}{(\alpha-1)} - \frac{\sigma^2}{(\alpha-2)} \right] \right\} \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Выполнив преобразования, аналогичные особым случаям, получим:

$$\left[2\alpha + \left(\frac{4\nu\alpha(2+A)}{Br_*} \sigma - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*} \right) \tau \right] \frac{d\sigma}{dt} = \left[\frac{2\nu\alpha}{r_*} \left(\frac{2\sigma}{A} - \frac{A\sigma^2}{B} \right) \right]. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) также не выписывается в квадратурах [9, 10]. Строить решение можно только численно.

Заметим также, что для случая плоской симметрии вне зависимости от показателя адиабаты γ уравнения (15)–(17) переходят в простое уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

решением которого является постоянная функция

$$\sigma(\tau) = \text{const},$$

а конкретное значение константы определяется из начальных условий задачи Коши (14).

В работе [2] получены асимптотические оценки поведения решения ОДУ для контактной характеристики при $\tau \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty$.

В предыдущих работах автора [4,5] решалась задача о сильном сжатии газа до конечной плотности. Здесь мы так же ограничимся случаем $\sigma \leq 100$, что соответствует значению $\rho \leq 10^6$ при $\gamma = 5/3$. При этом трудности в расчётах в вышеупомянутых работах наблюдаются при $\tau < 0.001$.

Проанализируем решение уравнений (15)–(17) при $\tau \rightarrow 0$. В этом случае (15)–(17) перейдут, соответственно, в следующие уравнения:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{2r_*} \sigma - \frac{3\nu}{2r_*} \sigma \ln \sigma, \quad (18)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{2r_*} \sigma^2 - \frac{3\nu}{2r_*} \sigma - \frac{\nu}{r_*} \sigma^2 \ln \sigma, \quad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\nu}{r_*} \left(\frac{2\sigma}{A} - \frac{A\sigma^2}{B} \right). \quad (20)$$

Выпишем решение уравнений (18), (20) с учётом начального условия (14):

$$\sigma(\tau) = \exp \left[\left(\ln \sigma_* - \frac{1}{3} \right) \exp \left(-\frac{3\nu}{2r_*} \tau \right) + \frac{1}{3} \right], \quad (21)$$

$$\sigma(\tau) = \frac{2B}{A^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2B}{A^2 \sigma_*} \right) e^{-\frac{2\nu}{Ar_*} \tau} \right]}. \quad (22)$$

Уравнение (19), которое соответствует случаю $\gamma = 5/3$, т. е. случаю одноатомного газа, также не решается в квадратурах [9, 10].

3. Численное восстановление уравнений для характеристик

В работах [6,7] был разработан и реализован метод решения системы уравнений газовой динамики в обратном направлении изменения времени, основанный на методе характеристик с пересчётом в случае уменьшения радиуса сжимающего поршня. В работе [4] представлены результаты расчётов задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа при неубывании радиуса кривизны

сжимающего поршня вышеупомянутым методом. При решении восстанавливаются газодинамические параметры течения, а также его характеристики. Данные на характеристиках использовались [5] для построения алгоритма решения задачи сильного сжатия при возрастании времени. Далее приводится сравнение траекторий некоторых характеристик для конкретных задач, полученное как аналитически, так и численно.

На рисунках (1), (2) представлены результаты сравнения расчётов по аналитическим формулам и расчётных значений, полученных при решении задачи методом характеристик в обратном направлении изменения времени [4, 6].

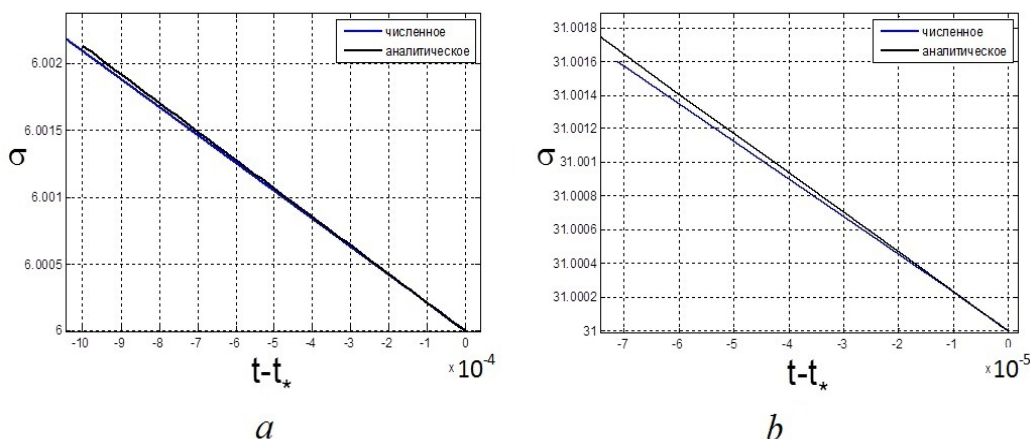


Рис. 1. Закон изменения $\sigma(\tau)$ в случае $\gamma = 3, \nu = 1$ для $\sigma_* = 6$ (a) и $\sigma_* = 31$ (b)

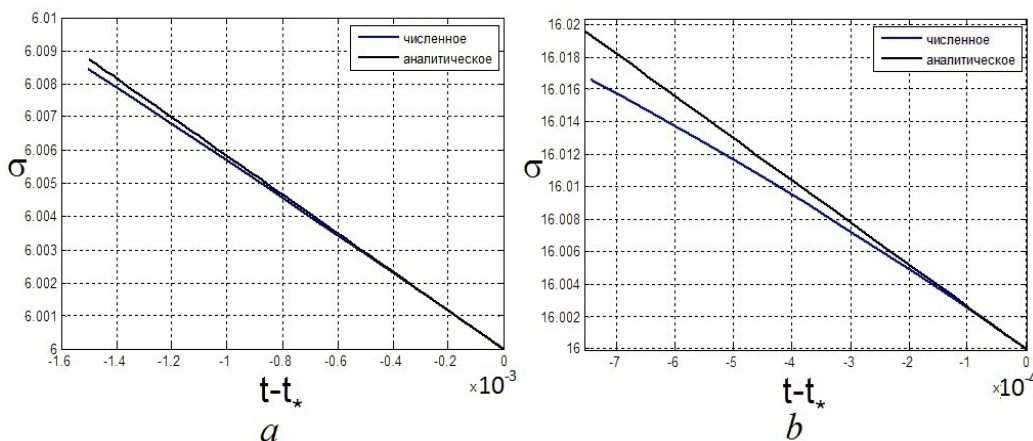


Рис. 2. Закон изменения $\sigma(\tau)$ в случае $\gamma = 3, \nu = 2$ для $\sigma_* = 6$ (a) и $\sigma_* = 16$ (b)

Из приведённых графиков видно удовлетворительное согласие аналитических формул и расчётных значений в окрестности интересующей нас точки $t = t_*$. Для сферической симметрии аналогичные графики так же отражают этот факт. Стоит отметить, что отличие нарастает при удалении от точки $t = t_*$, поскольку ряды (3) сходятся в окрестности точки (r_*, t_*) [2, 3]. Как и стоило

ожидать, результаты, полученные по аналитическим формулам, хорошо согласуются с расчётными значениями в окрестности этой точки.

Получен закон изменения скорости звука на произвольной характеристике обобщённой центрированной волны сжатия. По полученным формулам восстанавливается и траектория каждой из характеристик в этом течении.

4. Результаты расчётов сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании времени до момента сильного сжатия включительно

Формулы (21), (22) дали возможность более простого описания граничного условия для метода, изложенного в [5] при $t \rightarrow t_* - 0$.

Применяя эти соотношения, удалось получить газодинамические параметры газового слоя до момента времени $t = t_*$ включительно в расчётах при возрастании времени комбинированным методом в области между сжимающим поршнем $r_l = r_p(t)$ и крайней характеристикой обобщённой центрированной волны $r_{C_N^+}(t)$, где правая граница области рассчитывалась, исходя из полученных выше формул. Здесь приводятся графики газодинамических параметров на конечный момент времени $t = t_*$ в случае $\gamma = 1.4, \nu = 2, \rho_* = 10^5, m_* = 10$.

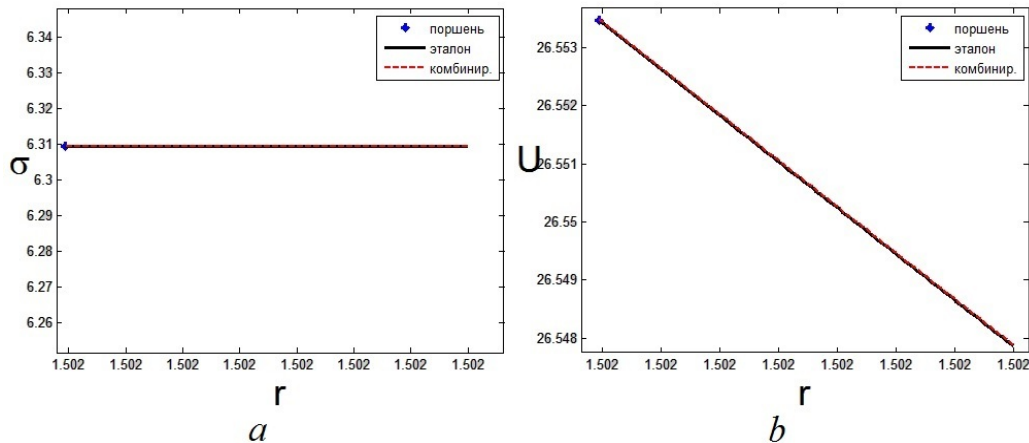


Рис. 3. Распределение скорости звука (а) и скорости газа (b) на момент $t = t_*$

Видно, что решение в момент времени $t = t_*$ хорошо согласуется с эталонным, полученным автором при решении задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени.

Заключение

По результатам данного исследования делаются следующие выводы:

1. Полученные аналитически формулы адекватно описывают параметры газа на характеристиках обобщённой центрированной волны сжатия и их траектории.

2. Применение полученных формул вкуче с результатами расчётов в обратном направлении изменения времени методом характеристик [4] позволяет проводить расчёты при возрастании времени с хорошей точностью вплоть до момента времени $t = t_*$.
3. Автором предложен подход, который обеспечивает не только построение закона движения сжимающего поршня для произвольного одномерного слоя газа, но и численно подтверждает тот факт, что этот поршень действительно сжимает требуемую массу газа до необходимой плотности.

Следовательно, даны конкретные рекомендации по проведению физического эксперимента.

Автор выражает своему научному руководителю профессору С.П. Баутину признательность за внимание, помощь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск : Наука, 1997. 160 с.
2. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск : Наука, 2007. 308 с.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
4. Новаковский Н.С. Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 93–109.
5. Новаковский Н.С. Комбинированный метод расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 93–101.
6. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Об одном методе расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
7. Николаев Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–108.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М. : Наука, 1981. 368 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971. 576 с.

ANALYTICAL AND NUMERICAL RECONSTRUCTION OF GENERALIZED CENTRAL COMPRESSION WAVE'S SOUND CHARACTERISTICS

N.S. Novakovskiy

Second Year Graduate Student, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The results of analytical and numerical simulations of one-dimensional ideal gas shockfree strong compression problem while compression piston's radius is not decrease are presented. The analytic formula for generalized compression Riemann wave's sound characteristics is the main result. Comparison of the formula with calculation of the problem by characteristic method in time decreasing case is also presented. Obtained formulas for sound characteristics was used to calculate gasdynamic characteristic (velocity, density, etc.) of ideal gas layer while time increase. The computational domain is the area between compression piston and the last sound characteristic of generalized Riemann wave. The main results of numerical simulations are shown in graphs and tables.

Keywords: gas strong compression, the characteristic series method, solution feature.

Дата поступления в редакцию: 10.05.2017