

## **КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА БЕЗУДАРНОГО СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОДНОМЕРНЫХ СЛОЁВ ГАЗА В КОНФИГУРАЦИИ Р. МИЗЕСА**

**Н.С. Новаковский**

аспирант, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

**Аннотация.** В статье изложены результаты численного исследования задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса в прямом направлении изменения времени. Приводится комбинированный алгоритм расчёта течения, использующий конечно-разностный метод «Ромб» и особый способ аппроксимации движения правой границы, обеспечивающий более точное описание течения в окрестности слабого разрыва. Приведены численные расчёты сжатия одномерных слоёв с различной симметрией до достаточно больших значений плотности. Полученные результаты расчётов сравниваются в том числе и с известным точным решением.

**Ключевые слова:** сильное сжатие газа, конечно-разностный метод «Ромб», метод отслеживания особенностей.

### **Введение**

Математическое описание процесса безударного сжатия идеального газа до любого наперёд заданного значения плотности, в том числе до бесконечной плотности, представляет интерес в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [1, 2]. Идея безударного сжатия весьма привлекательна для получения сколь угодно больших плотностей при минимальных энергетических затратах благодаря отсутствию в течении ударных волн, т.е. сохранению в процессе сжатия начальной энтропии [3]. О привлекательности этой идеи можно судить по большому числу публикаций на эту тему (подробную библиографию см. в [4]).

В [4, 5] разработана математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. В частности, для случая сжатия цилиндрически  $\nu = 1$  и сферически  $\nu = 2$  симметричных слоёв политропного газа с показателем  $\gamma > 1$  доказано, что непрерывная состыковка двух течений даёт решение задачи о безударном сильном сжатии до любой наперёд заданной плотности ненулевой массы газа.

В работе [6] предложен алгоритм расчёта безударного сильного сжатия в обратном направлении изменения времени одномерных слоёв первоначально

однородного и покоящегося газа с  $\rho_0 = 1$  до любой наперёд заданной конечной постоянной плотности  $\rho_* > 1$  с последующим восстановлением закона движения поршня, сжимающего слой газа. В работе [7] представлены результаты расчётов вышеупомянутым алгоритмом ряда одномерных задач с различной симметрией при сжатии одномерных слоёв снаружи.

В работе [8] предложен алгоритм расчёта безударного сильного сжатия изнутри одномерных слоёв газа при возрастании времени, основанный на конечно-разностном методе «Ромб» [9]. При этом используется закон движения поршня, сжимающего слой газа, восстановленный при решении задачи в обратном направлении изменения времени алгоритмом, предложенным в [6].

Расчёты в прямом направлении изменения времени по схеме «Ромб» выявили области течения, в которых предложенный алгоритм искажает решение в том числе в случае плоской симметрии ( $\nu = 0$ ).

Целью данной работы является представление нового алгоритма, использующего все преимущества конечно-разностного метода «Ромб» и известную информацию о траектории движения слабого разрыва, разделяющего покоящийся и движущийся газ. Такой подход позволил улучшить точность численного решения в окрестности характеристики, разделяющей волну сжатия и фоновое течение.

## 1. Математическая постановка одномерной задачи безударного сильного сжатия газовых слоёв при возрастании времени

В момент времени  $t = t_0$  дан одномерный плоско- ( $\nu = 0$ ), цилиндрически ( $\nu = 1$ ) или сферическисимметричный ( $\nu = 2$ ) слой идеального газа. Ширина слоя —  $d_0$ , масса  $m_0$ , плотность  $\rho_0 = 1$ . Будем считать, что нам известны (рис. 1):  $r_p(t)$ ,  $u_p(t)$  — траектория движения и скорость поршня, сжимающего этот слой газа,  $r_{C_0^+}(t)$  — траектория звуковой характеристики  $C_0^+$ , отделяющей область покоящегося газа, обозначенная на рисунке цифрой 0, от области центрированной волны сжатия, обозначенной 1 (эти параметры течения восстанавливаются алгоритмом из работы [8]).

Необходимо построить решение при возрастании времени в тех частях областей 1 и 2, которые заключены между траекторией поршня (обозначенной на рис. 1 штрихованной линией) и характеристикой  $C_0^+$ . В области 0 решение известно — это покоящийся газ  $\rho = 1$ ,  $u = 0$ .

В предыдущей работе автора [8] для построения решения в прямом направлении изменения времени конечно-разностный метод «Ромб» использовался во всей области от поршня до  $r_*$ . Это приводит к «размазыванию» слабого разрыва, через который стыкуется область однородного покоя и область обобщённой центрированной волны сжатия (см. рис. 2).

Исходя из вышесказанного, будем строить решение методом «Ромб» только в области между поршнем и характеристикой  $C_0^+$ .

Для построения искомого течения используется система уравнений газовой



$$\begin{aligned}
u|_{r=r_l}(t) &= u_p(t), \\
u|_{r=r_{rg}}(t) &= 0, \\
u(x, 0) &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $r_l, r_{rg}$  — левая (left) и правая (right) границы отрезка, на котором решается система (1). В начальный момент времени  $t = 0$  правая и левая границы совпадают, т.к. поршень, стартуя, порождает возмущение в покоящейся газе, распространяющееся со скоростью звука  $r_l = r_p(0) = r_{rg} = r_{C_0^+}(0)$ . В каждый последующий момент времени  $t = t^n$ :  $r_l = r_p(t^n) < r_{rg} = r_{C_0^+}(t^n)$ .

Применив для (1) неявную аппроксимацию и введя шаг по времени  $\tau$ , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} &= \left( \frac{\partial u}{\partial m} \right)^{n+1}, \\
\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= - \left( \frac{\partial p}{\partial m} \right)^{n+1}, \\
\frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + v^{n+1} \left( \frac{\partial(pu)}{\partial r} \right)^{n+1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Систему (3) будем решать, разбивая исходный отрезок  $[r_l, r_{rg}]$  на  $N$  ячеек (пронумеруем узлы полученной сетки  $r_0 = r_l, r_1, r_2, \dots, r_N = r_{rg}$ ). Граничные условия на левой и правой границах запишем так:

$$\begin{aligned}
u_0^n &= u_p(t^n), \\
u_N^n &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для решения системы (3) используем алгоритм метода «Ромб» [9]. В настоящей работе будет использована модификация метода в части интегрирования уравнения для координат и уравнения энергии. Для повышения точности при интегрировании по времени будем вместо узловых значений давления и скорости с итерации  $\mu + 1$  использовать полусуммы:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \cdot (U^{\mu+1} + U^n), \quad \tilde{P} = \frac{1}{2} \cdot (P^{\mu+1} + P^n),$$

где  $\mu$  — номер итерации по нелинейности давления.

Ещё раз подчеркнём, что при комбинированном методе решения задачи сильного сжатия одномерного слоя газа будем использовать известную траекторию звуковой характеристики  $C^+$ , а методом «Ромб» решение на каждом временном слое строится только в области  $[r_p(t^n), r_{C_0^+}(t^n)]$ .

## 2. Описание алгоритма комбинированного метода решения задачи сильного сжатия

Далее будет описан шаг комбинированного алгоритма. Пусть расчёт доведён до момента времени  $t^n$ . Расчёт на  $n$ -м временном шаге методом «Ромб» вёлся в

первых  $N$  интервалах расчётной сетки. Далее:

1) выбирается шаг по времени  $\tau^{n+1}$ , исходя из общих соображений точности расчёта;

2) используя дискретный набор значений  $u_p(t)$ , полученный при решении задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени [6, 8], с помощью линейной интерполяции вычисляется  $u_p(t^n + \tau^{n+1})$ . В соответствии с известной траекторией  $r_{C^+}(t)$  получаем  $r_{C^+}(t^n + \tau^{n+1})$ ;

3) добавляется к расчётной области  $(N + 1)$ -й интервал, так что  $r_{N+1} = r_{C^+}(t^n + \tau^{n+1})$ , значения газодинамических параметров на  $n$ -м слое в добавленном интервале соответствуют фоновому течению;

4) делаются вычисления согласно формулам метода «Ромб». Таким образом строим решение на новом временном слое.

Метод «Ромб» является неявным и обладает безусловной устойчивостью. Следовательно, можно выбирать временной шаг достаточно произвольно. Тем не менее из условия точности расчёта временные шаги, начиная со второго, выбираются в соответствии с критерием Куранта  $\frac{C\tau}{h} \leq 1$ . Для старта алгоритма, т.е. для обеспечения достаточного количества узлов расчётной сетки внутри рассчитываемой методом «Ромб» области, первый шаг  $\tau_1$  делается большим. Если при этом для сходимости метода требуется более 10 итераций, счёт прерывается и начинается заново с более мелким шагом.

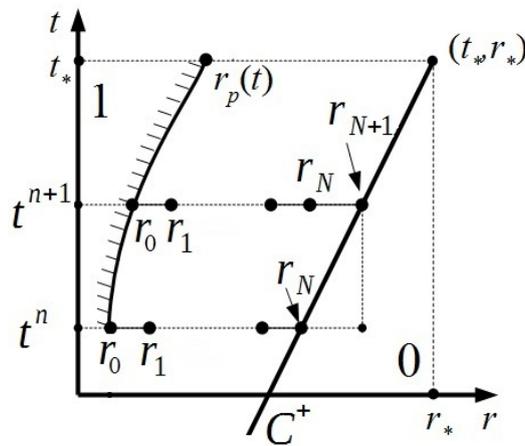


Рис. 3. Добавление расчётного интервала на правой границе

Опишем более подробно пункт 3 предложенного алгоритма (см. рис. 3). На текущем шаге во всей области  $r_N < r < r_*$  газодинамические параметры соответствуют фоновому течению. При переходе на следующий временной слой правая граница смещается в соответствии с траекторией  $C_0^+$ -характеристики. Величины с  $n$ -го слоя во всех интервалах кроме  $(N + 1)$ -го берутся равными расчётным значениям, полученным методом «Ромб». Массовая координата  $(N + 1)$ -го интервала вычисляется по фоновой плотности в зависимости от симметрии задачи  $m_{N+1} = \rho_0 \cdot (r_{N+1}^{\nu+1} - r_N^{\nu+1})$ , где  $\nu = 0, 1, 2$  для плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Таким образом, правая граница передвигается по покоящемуся газу. Такой метод избавляет от погрешностей, которые могли бы возникнуть при более общем подходе расчёта правой границы.

### 3. Результаты расчётов

Для проверки работоспособности алгоритма сначала был проведён расчёт плоскосимметричной задачи. Были взяты следующие параметры газа:  $\gamma = 1.4$ ,  $m^* = 10$ . Точное решение в области между сжимающим поршнем и характеристикой  $C^+$  имеет вид центрированной волны сжатия. На рисунке 4 приведены профили скорости и скорости звука для тестовой задачи. Чёрной сплошной линией здесь обозначено точное решение, синей пунктирной — численное. Можно утверждать, что модифицированный метод хорошо описывает область центрированной волны и область слабого разрыва вплоть до момента времени  $t = 0.998t^*$ .

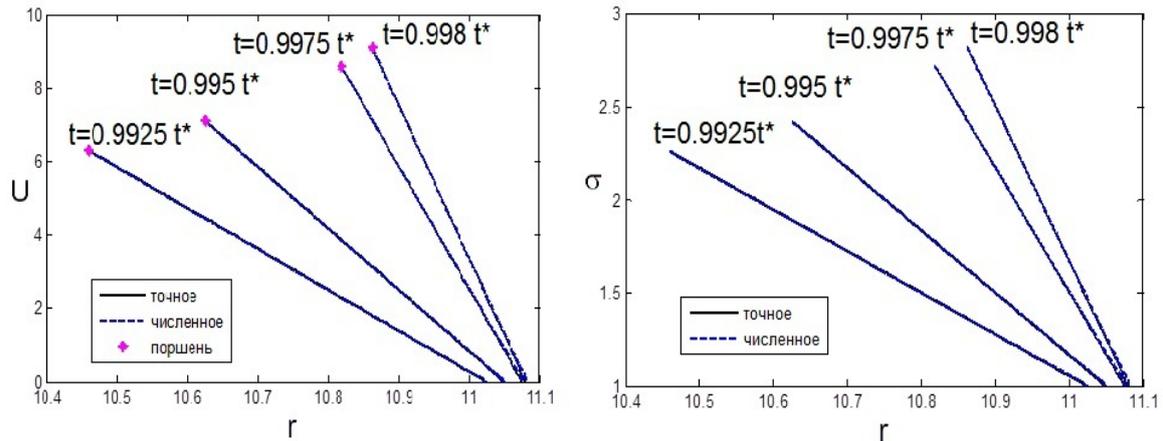


Рис. 4. Результаты расчёта тестовой задачи на различные моменты времени

Далее было проведено сравнение на тестовой задаче расчётных значений, полученных методом «Ромб», без выделения особенностей, и комбинированным методом. Из рисунка 5 можно сделать следующий вывод: представляемый метод описывает решение в области волны сжатия и в области слабого разрыва принципиально точнее исходного метода «Ромб».

По завершении тестирования методики были проведены численные эксперименты с цилиндрической и сферической симметрией. Кроме этого, также варьировались: показатель адиабаты  $\gamma$  и начальная масса газа. Консервативность схемы «Ромб» позволяет обеспечить выполнение закона сохранения массы в конце расчёта на уровне близком к машинному нулю. Для проверки закона сохранения энергии на каждом шаге по времени  $t^n$  производится подсчёт дис-

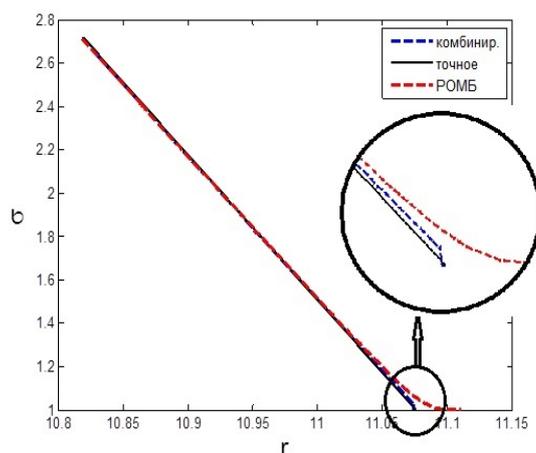


Рис. 5. Сравнение расчётов двумя методами

баланса по следующей формуле:

$$\Delta E^n = \frac{\sum_{k=1,N} m_k \cdot (E_k^n - E_k^0) + W}{\sum_{k=1,N} m_k \cdot E_k^n}, \tag{5}$$

где  $m, E_k^n, E_k^0$  — масса, удельная полная энергия интервала на текущий и на начальный момент времени,  $W$  — работа сжимающего поршня, вычисляемая по формуле:

$$W = \sum_{l=2,n} \frac{1}{2} (P^{l-1} + P^l) (V^l - V^{l-1}) \approx \int_{t^0}^{t^n} P dV,$$

где  $P^l, V^l$  — давление на левой границе и объём системы на  $l$ -м временном шаге, полученные по вычисленным ранее значениям скорости звука на поршне и координаты поршня соответственно.

Дисбаланс энергии на различные моменты времени для одного из расчётов приведён в таблице 1.

Таблица 1. Дисбаланс энергии на различные моменты времени

$0.95t^*$	$0.975t^*$	$0.99t^*$	$0.995t^*$	$0.998t^*$
$-5.0861 \cdot 10^{-5}$	$-8.7531 \cdot 10^{-5}$	$-2.9584 \cdot 10^{-4}$	$-3.3866 \cdot 10^{-4}$	$-4.6709 \cdot 10^{-4}$

Дисбаланс связан с неточностью определения скорости поршня на текущем шаге по времени с помощью линейной интерполяции. Из таблицы 1 видно, что он практически не меняется с начала расчёта и его величина незначительна.

Ниже приводятся рисунки, демонстрирующие хорошую точность модифицированного метода, в том числе, и в области стыковки волны сжатия с покоящимся газом при расчётах задач с различной симметрией.

В качестве эталонного используется решение соответствующих задач в обратном направлении изменения времени методом характеристик с пересчётом.

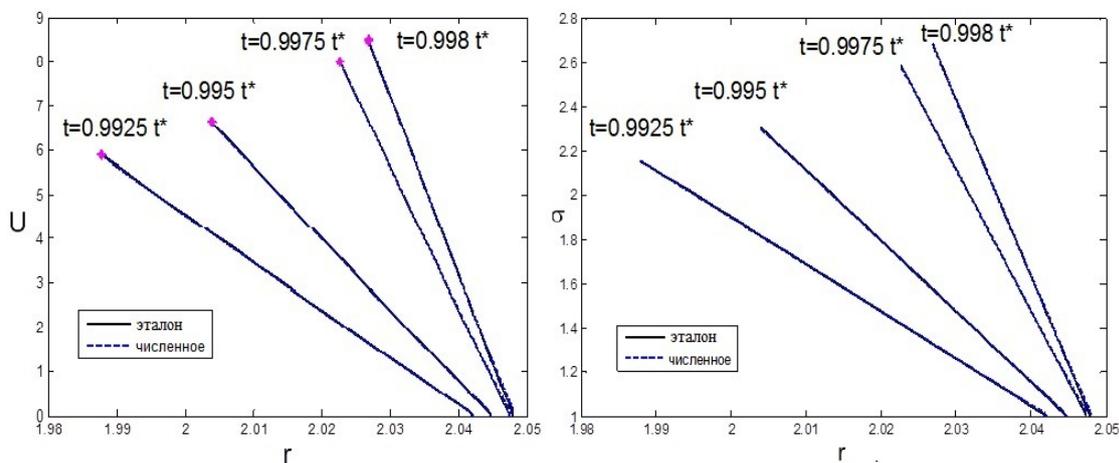


Рис. 6. Результаты расчёта на различные моменты времени  $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$

Стоит отметить, что область стыковки волны сжатия и покоящегося газа описывается достаточно точно. Для примера приведены два решения различных задач. На рисунке 6 приведены профили искомых величин на различные моменты времени для цилиндрическисимметричной задачи  $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$ , а на рисунке 7 — для сферическисимметричной задачи  $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$ .

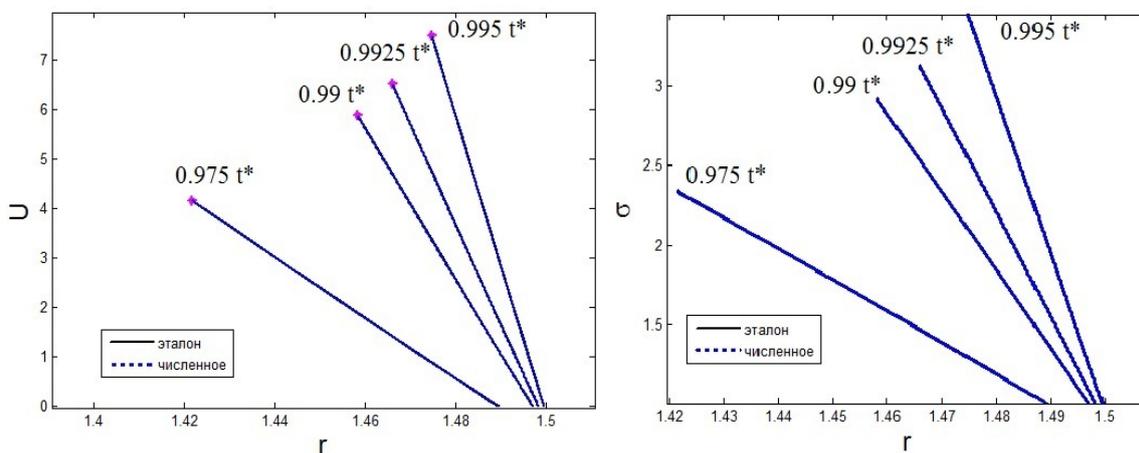


Рис. 7. Результаты расчёта на различные моменты времени  $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$

#### 4. Выводы

Представленные результаты позволяют сделать некоторые выводы.

1. Расчёты при возрастании времени неявным конечно-разностным методом «Ромб» демонстрируют работоспособность предлагаемой методики. При этом область волны сжатия адекватно описывается при приближении к моменту времени  $t_*$ . Точность расчётов не зависит от симметрии задачи. Основная погрешность расчёта локализована в достаточно узкой области вокруг слабого разрыва, отделяющего волну сжатия от покоящегося газа.
2. Реализованная модификация метода «Ромб» обеспечивает отслеживание слабого разрыва. Точность расчёта становится принципиально лучше.
3. При приближении к моменту времени  $t_*$  в области слабого разрыва наблюдается опережение нижним краем фронта волны сжатия звуковой  $C^+$ -характеристики, что не позволяет проводить расчёт далее. При этом градиент искомых функций достигает значения 45.
4. Для получения в расчётах при возрастании времени значительных масс сжатого газа требуется привлечение дополнительных аналитических методов.

Автор выражает своему научному руководителю профессору С.П. Баутину признательность за внимание, помощь и поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М. : Наука, 1988. 173 с.
2. Накколс Дж.Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143, № 3. С. 467–482.
3. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 71 с.
4. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск : Наука, 2007. 308 с.
5. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск : Наука, 1997. 160 с.
6. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Об одном методе расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
7. Николаев Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–108.
8. Новаковский Н.С. Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3(39). С. 93–109.
9. Гаджиев А.Д., Писарев В.Н. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. // Ж. выч. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288–1303.

**THE COMBINED NUMERICAL METHOD FOR SOLVING  
THE ONE-DIMENSIONAL IDEAL GAS SHOCK-FREE STRONG COMPRESSION  
PROBLEM IN R. MISES CONFIGURATION**

**N.S. Novakovskiy**

Graduate Student, e-mail: n.s.novakovskiy@yandex.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

**Abstract.** A method for solving the one-dimensional ideal gas shock-free strong compression problem in R. Mises configuration is proposed. The method combines finite-difference method "ROMB" and tracking feature method. The method allows to calculate gas-dynamic characteristic (velocity, density, etc.) of ideal gas layer while time increases and provides better accuracy in comparison with other finite-difference methods. The accuracy of the proposed method was demonstrated in calculations of test plane-symmetry problem. Exact solution and numerical one agree quite well. Numerical results of solving one-dimensional problems with different symmetry and gas characteristic are also shown. The main results of numerical simulations are shown in graphs and tables.

**Keywords:** gas strong compression, finite difference method "Romb", discontinuity tracking method.

*Дата поступления в редакцию: 27.12.2016*