Математические структуры и моделирование
2017. № 1(41). С. 5–11

УДК 519.214

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия для сходимости распределений симметрических функций от случайных величин к нормальному закону. Эти условия включают в себя и так называемые минимальные условия слабой зависимости.

Ключевые слова: Симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема, минимальные условия слабой зависимости..

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность. Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta,\ \xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [1, с. 393].

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_n,\ \mathbf{E}\xi_n^2 < \infty,\ n = 1, 2, ...,\ \sigma_n^2 = \mathbf{D}S_n \to \infty,$ а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$\sigma_n^{-1}\left(S_n - \mathbf{E}S_n\right) \stackrel{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то говорят, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]},\ x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ - целая часть x. Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k,\ k = 1, 2, ..., n.$

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию (R), если при любом действительном t и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$

$$\mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_n\} \cdot \mathbf{E}\exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_m\} \to 0, \qquad \text{(R)}$$

$n \to \infty$ (для краткости будем говорить, что соотношение (R) выполняется при $n + m \to \infty$). В соответствии с определением слабой эквивалентности условие

(R) можно записать так:

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\hat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\hat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n+m \to \infty.$$

В работе [3] получен следующий результат

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ *— стационарная последовательность и пусть* $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty,$ $\mathbf{E}\xi_n = 0,$ $n = 1, 2, ...$ *Для того чтобы к последовательности* $\{\xi_n\}$ *была применима центральная предельная теорема и* σ_n *являлась правильно меняющейся функцией порядка 1/2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (R)*, и последовательность* $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ *была равномерно интегрируема.*

Замечание 1. Теорема 1 интерпретировалась так: условие (R) является минимальным условием слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема с правильно меняющейся порядка 1 дисперсией.

В настоящей работе доказан аналогичный результат для центральной предельной теоремы, в которой вместо сумм S_n участвуют симметрические функции $f\left(\xi_1, ..., \xi_n\right).$

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Пусть $X_n = f\left(\xi_1, ..., \xi_n\right),$ $\mathbf{E}X_n^2 < \infty,$ $a_n = \mathbf{E}X_n,$ $n = 1, 2, ...,$ $b_n^2 = \mathbf{D}X_n \to \infty.$ Если

$$b_n^{-1}\left(X_n - a_n\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Скажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_n\} \cdot \mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_m\} \to 0, \qquad (\mathrm{R_f})$$

$n + m \to \infty$. Ясно, что условие $(\mathrm{R_f})$ можно записать так:

$$\frac{X_{n+m}}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\hat{X}_n}{b_{n+m}} + \frac{\hat{X}_m}{b_{n+m}}, \quad n+m \to \infty. \qquad (1)$$

Если b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 и $\gamma_n = b_{n+m}^{-1}(a_n + a_m - a_{n+m}) \to 0,$ $n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ *— стационарная последовательность и пусть* $\mathbf{E}X_n^2 < \infty$*. Для того чтобы к последовательности* $\{X_n\}$ *была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки* (N)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $(\mathrm{R_f})$ *и последовательность* $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ *была равномерно интегрируема.*

Доказательство теоремы приводятся ниже.

Замечание 2. Несмотря на почти абсолютную схожесть теорем 1 и 2, между ними имеется существенное отличие. Оно заключается в том, что условие $(\mathrm{R_f})$ является не только условием слабой зависимости, но и накладывает значительные ограничения на вид функции f, заключающиеся по сути в том, что распределения функций $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ слабо эквивалентны распределениям сумм некоторых независимых случайных величин. Однако центральная предельная теорема с условиями нормировки (N) может иметь место только при этих ограничениях.

Пример 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин и $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_i^2 < \infty$.

$$X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n) = \max_{1 \leqslant i_1 < ... < i_{n-k} \leqslant n} \left(\xi_{i_1} + ... + \xi_{i_{n-k}}\right) =$$

$$= S_n - \min_{1 \leqslant j_1 < ... < j_k \leqslant n} \left(\xi_{j_1} + ... + \xi_{j_k}\right).$$

Если $Y_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i^2$, то

$$\mathbf{E}Y_n = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{Y_n \geqslant x\}\, dx \leqslant \sqrt{n} + n \int\limits_{\sqrt{n}}^\infty \mathbf{P}\{\xi_1^2 \geqslant x\}\, dx = o(n),$$

так что если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то

$$\mathbf{E}\left(\min_{1 \leqslant j_1 < ... < j_k \leqslant n} \left(\xi_{j_1} + ... + \xi_{j_k}\right)\right)^2 \leqslant k^2 \mathbf{E}Y_n = o(n\sigma^2) = o\left(\mathbf{E}S_n^2\right),$$

поэтому $X_n \overset{d}{\sim} S_n$, $n \to \infty$, условие $(\mathrm{R_f})$ (совпадающее с условием (R)) и центральная предельная теорема выполняются.

Если же, скажем, $k = n - 1$, $X_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i$, то ни при каком выборе нормирующих постоянных a_n и b_n предельное распределение $b_n^{-1}(X_n - a_n)$ не может быть нормальным (то есть, не может выполняться центральная предельная теорема и, следовательно, условие $(\mathrm{R_f})$). Это следует из известных результатов Б.В. Гнеденко о предельных распределениях максимумов независимых случайных величин (см., например [4]).

Следующая лемма доказана в [3].

Лемма 1. *b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 (а b_n^2 — правильно меняющейся последовательностью порядка 1) тогда и только тогда, когда*

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, \quad n + m \to \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\exp\{itb_n^{-1}(X_n - a_n)\} \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \to \infty \tag{3}$$

и выполнены условия нормировки (N). Так как

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad b_n^{-2}\mathbf{E}(X_n - a_n)^2 = 1 = \mathbf{E}\mathcal{N}^2(0,1), \quad b_n^{-2}(X_n - a_n)^2 \geqslant 0,$$

то равномерная интегрируемость последовательности $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ следует, например, из теоремы 5.4 в [5].

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = |\mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_{n+m}\} - \mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_n\}\mathbf{E}\exp\{itb_{n+m}^{-1}X_m\}| =$$

$$= \left|\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n+m} - a_{n+m}}{b_{n+m}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_n - a_n}{b_{n+m}}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_m - a_m}{b_{n+m}}\right\}\exp\{it\gamma_n\}\right|.$$

Поскольку b_n^2 — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$b_{n+m}^2 \sim b_n^2 + b_m^2, \ n \to \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leqslant c \leqslant 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$b_{n_2+m_2}^{-2}b_{n_2}^2 \to c, \quad b_{n_2+m_2}^{-2}b_{m_2}^2 \to 1 - c, \quad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(X_{n_2} - a_{n_2}) \to 0 \quad (b_{n_2+m_2}^{-1}(X_{m_2} - a_{m_2}) \to 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \to 0, \ n \to \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (5)

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2+m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} \sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \sim$$

$$\sim \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{n_2} - a_{n_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\} \cdot \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{X_{m_2} - a_{m_2}}{b_{n_2+m_2}}\right\}\exp\{it\gamma_{n_2}\}, \quad n \to \infty,$$

то есть снова $\Delta(n_2) \to 0, \quad n \to \infty$.

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \to 0, \ n \to \infty$, то есть выполнено условие (R).

Достаточность. Пусть выполнено условие ($\mathrm{R_f}$) и последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема. В силу известной теоремы Прохорова (см., например, [5]) последовательность $\{b_n^{-1}(X_n - a_n)\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\},\ n_1 = n_1(n)$ такую, что при $n \to \infty$

$$b_{n_1}^{-1}(X_{n_1} - a_{n_1}) \xrightarrow{d} \xi, \ \ b_{m_1}^{-1}(X_{m_1} - a_{m_1}) \xrightarrow{d} \eta, \ \ b_{n_1+m_1}^{-1}(X_{n_1+m_1} - a_{n_1+m_1}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad (4)$$

где $m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и ζ – случайные величины. При этом, поскольку последовательность $\{b_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E}\xi^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}b_{n_1}^{-1}(X_{n_1} - a_{n_1})^2 = 1,\ \mathbf{E}\eta^2 = \mathbf{E}\zeta^2 = 1,\ \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\zeta = 0. \quad (5)$$

Из ограниченных последовательностей

$$\alpha_{n_1} = \frac{b_{n_1}}{\sqrt{b_{n_1}^2 + b_{m_1}^2}}, \quad \beta_{n_1} = \frac{b_{m_1}}{\sqrt{b_{n_1}^2 + b_{m_1}^2}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_2} \to \alpha, \quad \beta_{n_2} \to \beta, \quad n \to \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2} - a_{m_2}}{\sqrt{b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2}} = \alpha_{n_2} b_{n_2}^{-1}(\widehat{X}_{n_2} - a_{n_2}) + \beta_{n_2} b_{m_2}^{-1}(\widehat{X}_{m_2} - a_{m_2}) \xrightarrow{d} \alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}. \quad (7)$$

Понятно, что $\alpha\widehat{\xi} + \beta\widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (1), (6) и (7)

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2+m_2}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty, \quad (8)$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [1, с. 216] из (9) и (10) вытекает

$$b_{n_2+m_2}^{-1}\sqrt{b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2} \to C, \quad 0 < C < \infty.$$

Отсюда с помощью (9) выводим, что вместе с последовательностями $\{b_{n_2}^{-2}(X_{n_2} - a_{n_2})^2\}$ и $\{b_{m_2}^{-2}(X_{m_2} - a_{m_2})^2\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{b_{n_2+m_2}^{-2}(\widehat{X}_{n_2} + \widehat{X}_{m_2} - a_{n_2} - a_{m_2})^2\}$ и из (10) получаем теперь

$$\gamma_{n_2} = b_{n_2+m_2}^{-1}(a_{n_2+m_2} - a_{n_2} - a_{m_2}) \to \mathbf{E}\zeta = 0,$$

$$\delta_{n_2} = b_{n_2+m_2}^{-2}(b_{n_2}^2 + b_{m_2}^2) \to \mathbf{E}\zeta^2 = 1, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдётся подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\gamma_{n_2} \to 0,\ \delta_{n_2} \to 1,\ n \to \infty$. Это означает, что $\gamma_n \to 0,\ \delta_n \to 1,\ n \to \infty$, и в силу леммы 1 выполнены условия нормировки (N).

Пусть теперь выполнены условия (N) и ($\mathrm{R_f}$). Представим произвольное натуральное n в виде $n = km + r,\ m < n,\ 0 \leqslant r < m,\ k = [n/m]$. Тогда если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то в силу (1)

$$X_n \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} Y_j + Z_n,$$

где $Y_1, ..., Y_k, Z_n$ – независимые случайные величины, $Y_j \overset{d}{=} f(\xi_{(j-1)m+1}, ..., \xi_{jm}) \overset{d}{=} X_m,\ j = 1, ..., k,\ Z_n \overset{d}{=} f(\xi_{km+1}, ..., \xi_{km+r}) \overset{d}{=} X_r$, откуда с помощью условия (N) получаем

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} b_n^{-1}(Y_j - a_m) + b_n^{-1}(Z_n - a_r). \tag{9}$$

Правильно меняющаяся функция положительного порядка эквивалентна неубывающей функции [2, с.26], так что

$$\sup_{m \geqslant 1} \max_{1 \leqslant r \leqslant m} b_r^2 b_m^{-2} < \infty,$$

поэтому $(\sqrt{k} b_m)^{-1}(Z_n - a_r) \to 0$, по вероятности, а если $k = k(n) \to \infty$ растёт достаточно медленно, то что $\sigma_n^2 \sim k\sigma_m^2$. Из (9) следует теперь

$$b_n^{-1}(X_n - a_n) \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} \frac{Y_j - a_m}{\sqrt{k} b_m},\ n \to \infty. \tag{10}$$

Для того чтобы к последовательности серий $\left\{ \dfrac{Y_k - a_m}{\sqrt{k} b_m}, j = 1, ..., k,\ n = 1, 2, ... \right\}$ независимых случайных величин была применима центральная предельная теорема, достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{k b_m^2} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\{(Y_j - a_m)^2, |Y_j - a_m| > \varepsilon \sqrt{k} b_m\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Используя определение величин Y_j и равномерную интегрируемость последовательности $\{b_m^{-2}(X_m - a_m)^2\}$, получаем

$$L_n(\varepsilon) = \mathbf{E}\left\{ \frac{(X_m - a_m)^2}{b_m^2}, \frac{|X_m - a_m|}{b_m} > \varepsilon \sqrt{k} \right\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

что вместе с (11) даёт $b_n^{-1}(X_n - a_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty$.

Теорема доказана. ■

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
3. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и её примен. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
4. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М. : Наука, 1984.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SYMMETRIC FUNCTIONS OF THE DEPENDENT VARIABLES

A.G. Grin
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The necessary and sufficient conditions for convergence of distributions of symmetric functions of random variables to the normal law are obtained in this article. These conditions include the so-called minimal conditions of the weak dependence.

Keywords: Symmetric functions of random variables, central limit theorem, minimal conditions of the weak dependence.

Дата поступления в редакцию: 02.02.2017