*Математические структуры и моделирование*
*2017. № 1(41). С. 12–25*

УДК 510:519.254

# ВРЕМЕННА́Я СТРУКТУРА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ: МЕТОДИЧЕСКИЙ ОБЗОР

**И.А. Еганова**[1]
к.ф.-м.н., с.н.с. ИМ СО РАН, e-mail: eganova@math.nsc.ru
**В. Каллис**[2]
к.ф.-м.н., Dr.rer.nat., гл.н.с. ЛИТ ОИЯИ, e-mail: wkallies@jinr.ru

[1]Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, Россия

[2]Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Россия

**Аннотация.** Структура временного ряда, описывающего динамику ключевой характеристики внутреннего состояния сложной системы, рассматривается как соответствующая этой системе временна́я структура, которая задаёт способ её существования. На основе представления об информации, содержащейся во временной структуре, предлагается её математическое описание с помощью известных средств: среднего значения ключевой характеристики и её мгновенного отклонения от среднего значения. С этих позиций обнаруживается смысл функции, которую использовал Х. Хёрст в своём анализе временных рядов, описывающих динамику природных процессов и явлений, — она задаёт временную структуру, и её размах представляет собой размер временной структуры в охваченном наблюдениями периоде времени. Определяется размер элементов, составляющих структуру, и предлагается интерпретация эмпирического закона Хёрста как соотношения, описывающего количество структурных элементов в охваченном периоде времени. Эта интерпретация позволила предложить принципиально новый подход к объяснению так называемого феномена Хёрста (то, что значения показателя Хёрста больше 1/2), а также его наблюдающиеся свойства на разном фактическом материале. В заключении кратко обсуждается принадлежность сложных, организованных систем к гармоническим системам (Ю.Г. Косарев, 1988 г.).

**Ключевые слова:** временные ряды, временна́я структура, метод $R/S$, нормированный размах Хёрста, показатель Хёрста, статистика $R/S$, статистика Хёрста, феномен Хёрста, эмпирический закон Хёрста.

## 1. Введение

Исторически сложилось так, что основы теоретической физики (теоретической механики) были заложены при работе с таким ключевым объектом как «*массивная точка*», т. е. с телом, не имеющим внутренней структуры и пребывающим в одном и том же внутреннем состоянии. Это было естественным и уместным для того круга первоочередных физических задач, которые рассматривал Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии». Именно такому объекту соответствовала ньютоновская модель физической реальности — трехмерная, сугубо пространственная по своей сути. Временной аспект объективной реальности фактически исчез, он был элиминирован, поскольку время, как это было объявлено, отождествлялось с его чисто математическим по своей сути свойством — *длительностью* (см. [1, с. 30]). Укажем, что история элиминации времени была подробно препарирована в капитальном труде Дж. Уитроу «Естественная философия времени» [2].

Изменить чисто *пространственную* модель физической реальности на *пространственно-временную* заставили результаты экспериментальных и теоретических исследований другого ключевого объекта физики — «*поля*». 21 сентября 1908 года в своём знаменитом докладе «Пространство и время» Г. Минковский провозгласил в качестве математической модели физической реальности четырёхмерный Мир событий (пространство-время). В статье А.К. Гуца [3], которая была посвящена столетию Мира Минковского, достаточно подробно показано, как сложилось использование этой математической модели объективной реальности в физических исследованиях. Объективные и субъективные причины, которые тем не менее воспрепятствовали преодолению игнорирования временного аспекта и развитию экспериментальных исследований его физических свойств, проанализированы в первой главе монографии авторов [4, 5]. Зная их, понимаем, почему, когда в физике назрела актуальность исследования сложных систем и процессов, связанных с ними (таких как эволюция и самоорганизация), не возникло осознания целесообразности разработки математических подходов к описанию существования сложных систем[1] и прежде всего временного аспекта их существования. В теории по-прежнему доминировало чисто пространственное восприятие объективной реальности, поэтому пространственно-временная идеология не была востребована и применена при исследовании сложных систем (см., например, многоплановую монографию Г. Николиса и И. Пригожина [6]).

Соответственно, не было попыток ввести в классическую механику новый, современный ключевой объект (и адекватные ему системы) — многокомпонентные, структурированные системы, обладающие изменяющейся внутренней энергией. Основы такой механики были предложены только в 2014 году в монографии В.М. Сомсикова [7], где фактически заложены основы механики неравновесных систем, которая позволяет описать диссипативные процессы и эволюцию систем в рамках законов Ньютона. В отличие от классической механики механика неравновесных систем необратима.

В предлагаемой статье мы рассматриваем временну́ю структуру сложных систем и углубляемся в её представления и математические закономерности. Обсуждается информация, которая должна содержаться во временной структуре

[1] Т. е. систем, обладающих внутренней структурой и пребывающих в различных внутренних состояниях.

сложной системы. На этой основе предлагается описание временной структуры сложной системы с помощью известных математических средств, приводятся примеры использования её представлений, в том числе, даётся математическая интерпретация известного (см., например, [8]) эмпирического закона Хёрста. В результате делается вывод, что природные сложные системы относятся к классу гармонических систем, рассмотренных Ю.Г. Косаревым [9, 10].

## 2. Математическое описание временной структуры

Рассмотрим сложное тело, представляющее собой некоторую систему составляющих его элементов. Например, минерал или минеральный агрегат. Составляющие его композиции атомов и молекул находятся в определённых взаимосвязях, участвуют в непрерывном движении, так ли иначе могут реагировать на изменения во внешней среде, так что внутренняя энергия сложной системы может меняться.

Вещественная структура сложного тела описывается соответствующим ему геометрическим образом, точкам или областям которого сопоставляется информация об их вещественном составе и его физических характеристиках. Этот геометрический образ, наполненный физической информацией, представляет собой «*пространственную* структуру» тела, поскольку содержащаяся в нём определённая информация соотнесена с пространственным аспектом объективной реальности и «подчиняется» ему. Наиболее ярко изучение пространственных структур демонстрируют обширные исследования на основе теории фракталов (фрактальной геометрии).

Способ существования сложной системы задаётся другой структурой — «*временно́й*» по сути. Она является дополнительной по отношению к пространственной структуре: в ней содержится информация, относящаяся к временному аспекту объективной реальности. Это информация, характеризующая существование данной системы, информация о законах и закономерностях, присущих ему. И поскольку последние определяют поведение ключевых, интегральных характеристик рассматриваемого объекта, эти характеристики могут служить «строительным материалом» для математического описания временной структуры. Обычно речь не идёт о «структуре» как таковой — поведение состояния системы во времени просто представляют временным рядом, и он изучается (см. гл. 8 в монографии [8]). Обратим внимание: такой подход фактически игнорирует современную четырёхмерную математическую модель физической реальности (Мир событий, пространство-время). Он не наводит на мысль о том, что *временной ряд ключевой характеристики состояния сложной системы содержит информацию о математических свойствах временного аспекта физической реальности*, которые проявляются в устанавливаемых законах и закономерностях (например, в таком как упомянутый выше эмпирический закон Хёрста). Здесь имеются в виду законы и закономерности, которые отражают объективные свойства существования и эволюции сложных природных систем.

Ниже обсуждается подход к описанию временной структуры сложной системы с помощью известных математических средств. Мы будем исходить из информации, содержащейся во временном ряде её ключевой характеристики $A$:

$$A(t_0), A(t_1), A(t_2), ..., A(t_n), \qquad (1)$$

где $A(t_i)$ — значение характеристики $A$ в момент $t_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, $t_n = T$. Подчеркнём, что ряд (1) должен охватывать достаточно долгий промежуток времени $T$, в течение которого временная структура могла бы достаточно проявиться. В качестве минимального временного интервала обычно фигурирует минимальный интервал между проводимыми наблюдениями или измерениями. Пусть в наблюдениях характеристики $A$ минимальный временной интервал выбран равным $\tau$ и $t_i = i\tau$, где $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Итак, если характеристика $A$ является интегральной, ключевой характеристикой внутреннего состояния изучаемой сложной системы, мы будем называть структуру временного ряда (1) временной структурой данной системы. Как известно, она может быть описана с помощью следующих математических характеристик: среднего значения

$$\overline{A} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} A(i\tau) \qquad (2)$$

и мгновенного отклонения $a(i\tau)$ от среднего значения

$$a(i\tau) = A(i\tau) - \overline{A}. \qquad (3)$$

В качестве одной из характеристик временной структуры $A$ рассматривают её размах

$$R_A \equiv R_A(n\tau) = \max\{A(t),\, t = 0, \tau, ..., n\tau\} - \min\{A(t),\, t = 0, \tau, ..., n\tau\}. \qquad (4)$$

Мы будем выявлять особенности временной структуры на временных интервалах разного масштаба, $\tau$ и $m\tau$, здесь целое число $m = n/k$, где $k$ — целое. Поэтому будем иметь дело со средними значениями размахов величины $A$ на временном интервале $\tau$ —

$$\overline{R_A(1;\tau)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |A((i-1)\tau - A(i\tau)|$$

и на интервале $m\tau$ —

$$\overline{R_A(m;\tau)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R_{A,i}(m;\tau),$$

$$\text{где } R_{A,i}(m;\tau) = \max\{A(t), (i-1)m\tau \leqslant t \leqslant im\tau\} -$$
$$- \min\{A(t), (i-1)m\tau \leqslant t \leqslant im\tau\}.$$

Обратим внимание на тот факт, что эмпирический закон Хёрста был обнаружен при исследовании временных рядов, описывающих природные процессы, благодаря использованию функции

$$X_A(t) = \Sigma_{u=0}^{t}\left[A(u) - \overline{A}\right] \tag{5}$$

и её нормированного размаха $R_{X_A}/S_A$, где $R_{X_A}$ — размах (4) функции (5), а $S_A$— стандартное отклонение величины $A$:

$$S_A \equiv S_A(n\tau) = \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n\tau}[A(t) - \overline{A}]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

С позиций представлений о временной структуре можно сразу понять причину плодотворности использования функции $X_A$ (далее мы будем называть её функцией Хёрста). Дело в том, что она, согласно определению (5), фиксируя от одной временной точки к следующей отклонение текущего значения $A$ от среднего $\overline{A}$, фактически описывает временную структуру в терминах (2) и (3). Размах соседних значений функции Хёрста, $i$-го и $(i-1)$-го,

$$R_{X_A,i}(\tau) = |X_A((i-1)\tau) - X_A(i\tau)| = |a(i\tau)|,$$

$$i = 1, 2, ..., n,$$

где $|a(i\tau)|$ — $i$-е абсолютное отклонение величины $A$. Поэтому при весьма больших $n$, что, как правило, имеет место при исследовании временных структур, можно считать, что средний размах

$$\overline{R_{X_A}(\tau)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{X_A,i}(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a(i\tau)| \cong \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} |a(i\tau)| = \overline{|a|},$$

или, по крайней мере, является величиной того же порядка.

Оценим соотношение $\overline{R_{X_A}(\tau)}/S_A$. Согласно (6) и (3), $S_A^2 = \overline{|a|^2} = \mathbf{D}|a| + \overline{|a|}^2$, где $\mathbf{D}|a|$ — дисперсия величины $|a|$. Поэтому отношение

$$\frac{\overline{|a|}}{\sqrt{\mathbf{D}|a| + \overline{|a|}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} < 1, \quad K = \frac{\sqrt{\mathbf{D}|a|}}{\overline{|a|}},$$

где $K$ — коэффициент вариации абсолютного отклонения $|a|$. Так что

$$\overline{R_{X_A}(\tau)}/S_A \cong \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} < 1.$$

Теперь если мы представим $R_{X_A}/S_A$ как произведение двух факторов, т. е.

$$\frac{R_{X_A}}{S_A} = \frac{R_{X_A}}{\overline{R_{X_A}(\tau)}} \cdot \frac{\overline{R_{X_A}(\tau)}}{S_A},$$

получим следующее выражение для нормированного размаха Хёрста на интервале $n\tau$:
$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{S_A(n\tau)} = \frac{R_{X_A}(n\tau)}{\overline{R_{X_A}(\tau)}} \cdot F, \quad F \cong \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}, \tag{7}$$

где фактор $F$ представляет собой весьма ограниченную величину. Следовательно, известное наблюдающееся степенное поведение нормированного размаха Хёрста для характеристик природных явлений и процессов (эмпирический закон Хёрста)

$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{S_A(n\tau)} \sim n^H, \text{ где } H \text{ – показатель Херста,} \tag{8}$$

может обеспечивать только первый сомножитель в (7), который представляет собой отношение размахов функции Хёрста на временных интервалах $T = n\tau$ и $\tau$, т. е. когда
$$\frac{R_{X_A}(n\tau)}{\overline{R_{X_A}(\tau)}} \sim n^H. \tag{9}$$

Так как в (8) слева фигурирует безразмерная величина, а справа в $n$ неявно присутствует размерность времени: $n$ — это число лет, охваченных наблюдениями (т. е. $\tau = 1$ году), чтобы выяснить физический смысл показателя Хёрста, запишем (8) следующим образом:

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} \sim \left(\frac{T}{\tau}\right)^H. \tag{10}$$

Тогда можно видеть, что справа в законе (8) фигурирует отношение временных размеров $T$ и $\tau$: первый представляет собой интервал времени, охваченный наблюдениями величины $A$, второй — минимальный временной масштаб, используемый в этих наблюдениях, ему должен соответствовать определённый размер элемента временной структуры $A$. Определим его. Для этого рассмотрим средний квадрат отклонения текущего значения $A$ от некоторого значения $A'$ из области значений $A$:

$$\overline{(A - A')^2} = \overline{A^2} - 2\overline{A}A' + A'^2 = S_A^2 + (A' - \overline{A})^2.$$

Видим, что когда $A' = \overline{A}$, отклонение $\sqrt{\overline{(A - A')^2}}$ будет минимальным и равным $S_A$. Следовательно, $S_A$ выступает в роли минимального масштаба структуры $A$, другими словами, $S_A$ — *размер элемента* этой структуры. Теперь выясним смысл отношения характеристик временной структуры $A$, стоящего в левой части (8). Так как максимум функции Хёрста представляет собой максимальное *суммарное* отклонение $A$ от $\overline{A}$, а минимум — минимальное, их разность, т. е. размах $R_{X_A}$, представляет собой *суммарный размер элементов* временной структуры $A$, которую охватывают $n$ измерений в течение периода $T$. Поэтому отношение $R_{X_A}/S_A$ представляет собой *число элементов* размера $S_A$ в этой структуре.

Таким образом, эмпирическое соотношение (8), т. е. (10) (и соответственно, (9)), свидетельствует, что количество элементов временной структуры природных процессов в охваченном периоде времени $T = n\tau$ определяется некоторым степенным соотношением. Как видим, оно может рассматриваться как аналог известного в теории фракталов соотношения

$$m = \left(\frac{L}{l}\right)^D \tag{11}$$

для пространственной структуры размера (длиной) $L$ с элементами размера $l$, где $m$ — число элементов, а показатель $D$ — фрактальная размерность этой пространственной структуры. Примером такой структуры является известная триадная кривая “Кох” [8] ($D = \log 4/\log 3$). Также как величина $D$ является определённой характеристикой пространственной структуры, показатель Хёрста $H$, аналогичный фрактальной размерности $D$ линейной пространственной структуры, может интерпретироваться как математическая характеристика временной структуры, которую описывает функция Хёрста. Так что наблюдаемые значения показателя Хёрста для временных структур природных процессов (при должном выборе $\tau$ и $T$) могут дать информацию о структуре временного аспекта объективной реальности.

Располагая формулой (7), можно сделать следующие выводы. Закон (8) может иметь место, когда $K^2 \ll 1$, т. е. при весьма малых вариациях абсолютного отклонения $|a|$, или при постоянном коэффициенте вариации $K$. Заметим, что поскольку значение коэффициента вариации абсолютного отклонения наблюдающейся физической характеристики $A$ сложной системы от её среднего значения определяется соответствующими физическими условиями, постоянство $K$, фиксирующее (при логарифмическом масштабе на координатных осях $R_{X_A}/S_A$ и $n$) прямую, может свидетельствовать об определённом постоянстве этих условий.

Подведём итог обсуждению нормированного размаха Хёрста с позиций наличия определённой временной структуры: использование представления о временной структуре дало возможность предложить принципиально новый подход к интерпретации эмпирического закона Хёрста и диапазона наблюдаемых значений показателя Хёрста $H$ (*Hurst phenomenon*), что будет обсуждаться в следующем разделе.

## 3. Примеры использования представления о временной структуре

Прежде всего обратимся к интерпретации результатов, полученных в исследованиях Х. Хёрста. Применение им функции $X_A$ не только в задаче нахождения оптимального объёма водохранилища, где она появилась и имела конкретный физический смысл, но и при исследовании временных рядов, описывающих весьма различные природные процессы (такие, например, как сток рек, отложение ила или рост колец деревьев), где она такого смысла не имела, обнаружило, что размах $R_{X_A}/S_A$ очень хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R_{X_A}/S_A = (n/2)^K, \tag{12}$$

здесь $n$ — количество лет, охваченных наблюдениями; показатель $K$[2] более или менее симметрично распределён вокруг среднего значения $0,73$ со стандартным отклонением, равным примерно $0,09$ (см. п. 8.1 в [8]). Т. е. собранные Хёрстом статистические данные свидетельствовали, что для многих природных процессов $H > 1/2$. Этот результат пытались получить теоретически, исходя из имевшихся в то время представлений о характере случайности природных процессов, т. е. из определённых статистических моделей. Однако, как указывает Е. Федер (см. п. 8.1 в [8]), Хёрстом и Феллером было показано (в 1951 г.), что для случайного процесса с независимыми значениями и конечной дисперсией нормированный размах $R_{X_A}/S_A = (\pi n/2)^{1/2}$. Поскольку при отсутствии долговременной статистической зависимости нормированный размах должен был быть асимптотически пропорционален $n^{1/2}$, ситуацию с $H > 1/2$, обнаруженную Хёрстом, стали называть явлением Хёрста (*Hurst phenomenon*). Попытки объяснить явление Хёрста с помощью статистических моделей и идей рассмотрены в монографиях Р.Л. Браса и И. Родригеса-Итурбе [11] и Е. Федера [8].

В последние десятилетия вопрос, сформулированный Федером в [8] ещё в 1988 году: «Почему же природные процессы подчиняются статистике Херста?» — стал рассматриваться с помощью привлечения физических, причинно-следственных связей, см., например, [12]. Такой подход, который фокусируется на физических взаимосвязях природных явлений, особенно важен в развитии корректных прогнозов, связанных с динамикой состояния окружающей среды, и которые не возможны без понимания природы (физической сути) явления Хёрста. Соответственно, ведутся исследования свойств показателя Хёрста, см., например, [13], где на основе численного исследования определённого фактического материала сделаны выводы, которые выглядят совершенно естественными с позиций представлений о временной структуре. Так, утверждается, что, во-первых, показатель Хёрста имеет сложную немонотонную зависимость от длины временного ряда (1), т. е. от величины $T$, и, во-вторых, его значение зависит от выбранного временного масштаба $\tau$. Понятно, что количество элементов временной структуры в охваченном периоде времени $T$ (т. е. нормированный размах Хёрста $R_{X_A}/S_A$) должно зависеть от величины $T$ (что определяется свойствами самого временного пространства). Что касается выбора величины $\tau$, то он должен соответствовать естественному, природному масштабу, характерному для рассматриваемого процесса или явления, а не ориентироваться на шкалу, используемую в измерительных приборах. Другими словами, величина $\tau$ должна соответствовать процессам, вызывающим изменение внутреннего состояния рассматриваемой системы, учитывать их естественную периодичность.

Вернёмся к точному равенству Хёрста (12) и перепишем его в используемых

[2]Этот показатель в дальнейшем стали именовать показателем Хёрста и обозначать буквой $H$, а само соотношение (12) называть эмпирическим законом Хёрста.

нами обозначениях:

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} = \left(\frac{T}{2\tau}\right)^H, \quad \text{где по-прежнему } \tau = 1\,\text{г.} \tag{13}$$

Фигурирующий в (13) временной интервал $2\tau$ заставляет нас вспомнить подход Г.Я. Васильевой к исследованию временных рядов в гелиофизике (см., например, [14], а также [15]). Исследуя взаимосвязь «Солнце–планеты», она предложила новый подход в математической обработке временных рядов суточных значений суммарной площади солнечных пятен на видимом диске Солнца, где в качестве минимального временного масштаба фигурирует период в два года. Дело в том, что речь шла об исследовании пространственно-временной структуры, отражающей динамику межпланетной среды внутри орбиты Марса. Так что, учитывая сидерические периоды обращения планет земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс), имело смысл выбрать двухлетний интервал наблюдений, поскольку сидерический период обращения Марса составляет один год и 321,7 суток.

Работы Васильевой с соавторами (см. [15] и цитирующиеся там работы) показывают, что при исследовании временной структуры климатических, геологических или биологических процессов следует учитывать, что эволюция состояния среды внутри орбиты Марса определяется его периодом обращения вокруг Солнца. Поэтому (13) можно рассматривать как

$$\frac{R_{X_A}(T)}{S_A(T)} = \left(\frac{T}{\tau}\right)^H, \quad \text{где теперь } \tau = 2\,\text{г.} \tag{14}$$

С позиций представлений временной структуры нормированный размах Хёрста $R_{X_A}(T)/S_A(T)$ представляет собой число элементов рассматриваемой временной структуры в охваченном наблюдениями периоде времени $T$. Как известно, число элементов структуры определяется размерностью пространства, в котором реализуется структура. Сопоставляя (14) и (11), а значит, $H$ и $D$, и учитывая, что $1 < D \leqslant 2$ (когда эта пространственная структура располагается в двумерном пространстве), можно предположить, что $H \leqslant 1$ (временная структура «располагается» в одномерном временном пространстве). Поэтому результат Хёрста ($H > 1/2$) с этих позиций не удивляет, более того, можно ожидать значения $H$ близкие к единице при достаточно больших $n$. Действительно, например, как показал анализ одной из самых длинных выборок методом нормированного размаха, который был проведён Мандельбротом и Уоллисом [16] при исследовании древних климатических изменений по толщине слоев в слоистых илистых отложениях оз. Тимискаминг в Канаде (данные охватывают период в 1909 лет), значение показателя Хёрста может быть очень велико: было получено $H = 0,96$. И, как отметили авторы этого исследования, не заметно никаких признаков отклонений от этой зависимости.

Исследование диапазона $H$ одновременно для временных структур ряда различных природных процессов представляет интерес в деле изучения математических закономерностей временного аспекта физической реальности. То, что средние значения показателя $H$ ($K$), полученные Хёрстом с соавторами для весьма различных естественных процессов, оказались более или менее симметрично распределены вокруг среднего значения $0,73$ со стандартным отклонением, равным примерно $0,09$, свидетельствует, видимо, не столько о свойствах отдельных временных структур, сколько о математических закономерностях самого временного аспекта физической реальности. Поэтому степенное соотношение (14) (где минимальный временной интервал $\tau$ выбран адекватно рассматриваемому природному процессу или явлению), описывающее, как изменяется число составляющих временную структуру элементов с ростом периода её наблюдения, дало возможность предложить рассматривать $R_{X_A}(n\tau)/S_A(n\tau)$ как функцию $n$ в качестве некоторого математического портрета временной структуры (см. п. 4.1.6 в монографии [17]).

Для примера на рис. 1 приведены такие портреты временных структур, описывающих минутную ($\tau = 1$ мин, $n = 1, 2, \ldots, 1440$) динамику ряда физических характеристик, контролируемых в специальном геофизическом мониторинге [17], в течение суток. Как видим, эти компактные, информационно насыщенные портреты позволяют фиксировать, во-первых, наличие изменяющихся внешних факторов, а во-вторых, взаимосвязь (или отсутствие таковой) отдельных физических характеристик. В данном примере имеется доминирующий внешний фактор — Солнце, его влияние продемонстрировано на рис. 2 двумя портретами временной структуры — дневным и ночным, отражающими динамику $M$ в течение рассматриваемых суток.

## 4. Заключение

Подведём итоги. Представление о временной структуре позволило:

1. Раскрыть смысл эмпирического закона Хёрста как формулы, выражающей связь количества элементов временной структуры с «наполнением» временного пространства (времени) и его размерностью. Тем самым фактически предложен новый подход к интерпретации так называемого феномена Хёрста;

2. Предложить объяснение близости значений показателя Хёрста для временных рядов, описывающих динамику весьма различных природных процессов и явлений при периоде наблюдения одного порядка, как свойства, присущего самому временному пространству, т. е. как общую характеристику процесса формирования временной структуры независимо от составляющих её элементов;

3. Объяснить считающиеся аномальными значения показателя Хёрста близкие к единице, что наблюдается для достаточно длинных временных рядов, его близостью в этих случаях достаточно полной реализации временной структуры к размерности временного пространства;

4. Объяснить свойства показателя Хёрста, установленные в работе [13] по данным конкретных наблюдений: (1) сложную немонотонную зависимость от величины периода наблюдений $T$ — способом «наполнения» временной структуры и (2) зависимость от выбранного минимального масштаба $\tau$ —изменением элемента временной структуры;

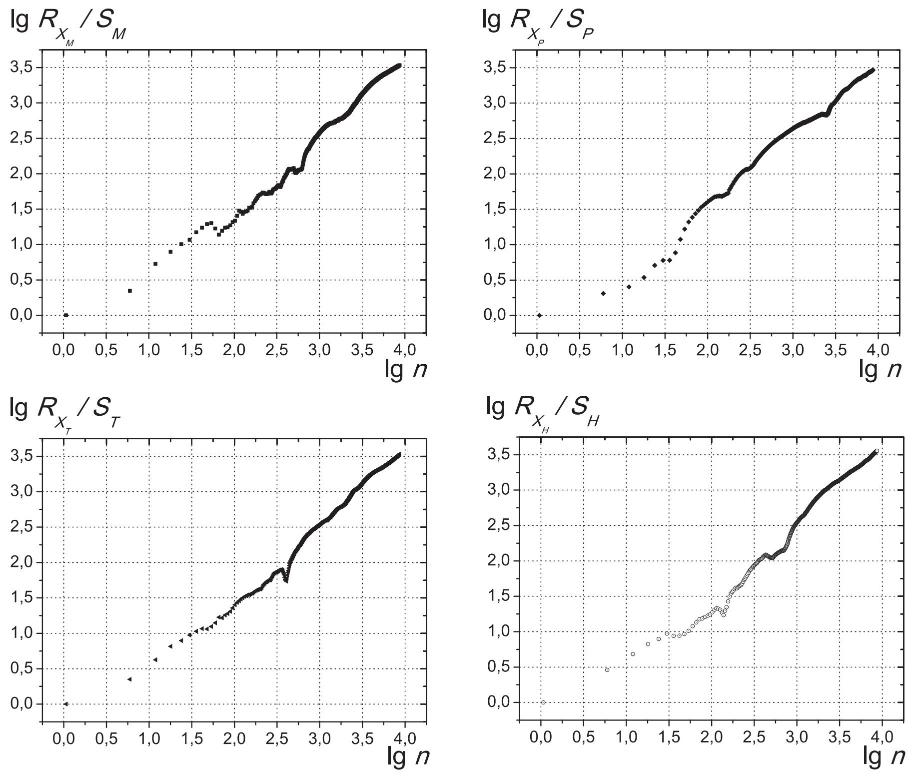


Рис. 1. Портреты суточных временных структур массы $M$ контролируемой геологической системы, атмосферного давления $P$, температуры $T$ и относительной влажности $H$ в помещении, где расположена информационно-измерительная система мониторинга

5. Предложить исследование процесса формирования временной структуры с помощью её математического портрета: рассматривать $R_{X_A}(n\tau)/S_A(n\tau)$ как функцию числа наблюдений $n$ (разумеется, при должном адекватном выборе $\tau$).

В заключении мы хотели бы обратить внимание на обнаруженное в наблюдениях свойство временного аспекта физической реальности: количество элементов временной структуры с увеличением периода наблюдений увеличивается по степенному закону. Для временных структур также, как это обнаружили широкомасштабные исследования с помощью теории фракталов для пространственных структур, характерны степенные соотношения. В монографии [17] (см. п. 2.3.3) представлены результаты анализа ежедневного ($\tau = 1$ сут) контроля интегральной, ключевой характеристики состояния ряда образцов представительной геологической коллекции (минералы и минеральные агрегаты) — их массы $M$. Оказалось, что средние размахи, $\overline{R_M(m;\tau)}$ и $\overline{R_M(1;\tau)}$, величины $M$ на временных интервалах разного масштаба, $m\tau$ и $\tau$, удовлетворяют степенному соотношению

$$\frac{\overline{R_M(m;\tau)}}{\overline{R_M(1;\tau)}} = m^{2-D_M},$$

где величина $D_M$ может рассматриваться как характеристика временной структуры, поскольку она зависит от вещественного состава рассматриваемой слож-

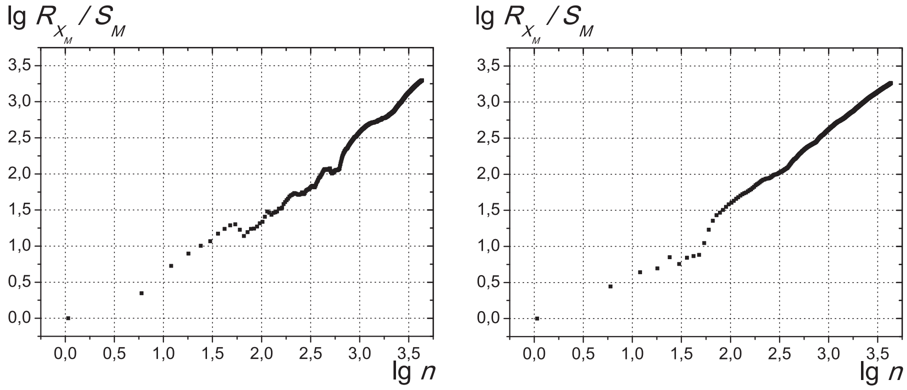


Рис. 2. Портреты двух временных структур $M$: слева — дневной портрет ($T = 12$ ч, от 0 до 12 ч UT), справа — ночной ($T = 12$ ч, от 12 до 24 ч UT); местное время превышает мировое UT на 6 ч; $n = 1, 2, \dots, 720$

ной системы и не зависит от типа динамики массы.

Выделенность степенных соотношений заставляет нас вспомнить о том, что именно степенные соотношения характерны для структуры так называемых *гармонических* систем, которые были введены Ю.Г. Косаревым (см. [9, 10, 18]) и успешно использовались при построении математической модели кибернетических систем с неограниченной возможностью развития. Так что и искусственные системы, создаваемые с определённой целью, оказываются наиболее эффективными именно в случае наличия степенных соотношений их характеристик.

## Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М., Л. : Изд-во АН СССР, 1936. С. 1–309.
2. Уитроу Дж.Дж. Естественная философия времени. М. : Прогресс, 1964. 432 с.
3. Гуц А.К. Сто лет абсолютного Мира событий Минковского // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев, В.Н. Самойлов. Новосибирск : Академическое изд-во «Гео», 2010. С. 13–52.
4. Eganowa I., Kallies W. Das Sonnenexperiment von Lawrentjew als Raum-Zeit-Erscheinung. Saarbrücken : Akademikerverlag, 2013. 131 s.
5. Еганова И., Каллис В. Солнечный эксперимент М.М. Лаврентьева. Явления пространства-времени. Saarbrücken : LAMBERT Academic Publishing, 2013. 123 с.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. М. : Мир, 1990. 344 с.
7. Сомсиков В.М. От механики Ньютона к физике эволюции. Алматы, 2014. 269 с.
8. Федер Е. Фракталы. М. : Мир, 1991. 260 с.
9. Косарев Ю.Г. О математической модели гармонических систем. I // Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983. С. 3–28.

10. Косарев Ю.Г. О математической модели гармонических систем. II // Анализ разнотипных данных (Вычислительные системы, вып. 99). Новосибирск, 1983. С. 15–38.
11. Bras R.L., Rodriguez-Iturbe I. Random Functions and Hydrology. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1985. 559 p.
12. Eltahir E.A.B. El Niño and the natural variability in the flow of the Nile River // Water Resour. Res. 1996. V. 32. P. 131–137.
13. Калуш Ю.А., Логинов В.М. Показатель Хёрста и его скрытые свойства // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 4(12). С. 29–37.
14. Васильева Г.Я., Фёдоров П.М. Эволюция структуры межпланетной среды в пределах орбиты Марса // Известия АН СССР, сер. физическая. 1981. Т. 45, № 7. С. 1335–1345.
15. Еганова И.А. О проявлении динамики структуры мира событий в гелиофизике // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев. Новосибирск, 2004. С. 90–100.
16. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resour. Res. 1969. Vol. 5, N. 2. P. 321–340.
17. Еганова И.А., Каллис В., Самойлов В.Н., Струминский В.И. Геофизический мониторинг «Дубна–Научный–Новосибирск»: Фазовые траектории массы / Ред. Ю.Г. Косарев. Новосибирск : Академическое издательство «Гео», 2012. 187 с.
18. Нагаев С.В. Об одном характеристическом свойстве степенной функции // Анализ разнотипных данных (Вычислительные системы, вып. 99). Новосибирск, 1983. С. 39–43.

## TIME STRUCTURE OF THE COMPLEX SYSTEMS: METHODICAL REVIEW

**I.A. Eganova**[1]
Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Scientist Researcher, e-mail: eganova@math.nsc.ru
**W. Kallies**[2]
Ph.D. (Phys.-Math.), Dr.rer.nat., Head Scientist Researcher, e-mail: wkallies@jinr.ru

[1]Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
[2]Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

**Abstract.** The structure of time series that describes the dynamics of the key characteristic of the complex system internal state is discussed as time structure corresponding to that system and assigning the mode of its existence. Based on the notion about the information included in the time structure, its mathematical description is proposed using the well-known means: the mean value of the key characteristic and its instantaneous deviation from the mean value. From this point of view, we discovered the meaning of the function used by H. Hurst in his analysis of time series that describe the dynamics of natural processes and phenomena: it assigns time structure, and its range is the size of the time structure in the period of time covered by observation. The authors define the size of the elements that compose the structure and propose an interpretation of the Hurst empirical law as a ratio that describes the quantity of structural elements in the given period of time. This interpretation allowed to propose an essentially new approach to the explanation of the so-called Hurst phenomenon (the values of the Hurst exponent are bigger than 1/2), as well as its properties observed in various factual evidence. In conclusion, the accessory of complex organized systems to harmonic systems (Yu.G. Kosarev, 1988) is discussed in brief.

**Keywords:** time series, time structure, $R/S$ analysis, Hurst rescaled range, Hurst exponent, $R/S$ statistics, Hurst statistics, Hurst phenomenon, Hurst empirical law.

*Дата поступления в редакцию: 19.11.2016*