*Математические структуры и моделирование*
*2016. № 4(40). С. 59–64*

УДК 517.977

# МЕТОД ВОЗВРАТА И РЕАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Б.К. Нартов**
с.н.с., к.ф.-м.н., e-mail: nartov@ofim.oscsbras.ru

Омский филиал Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева, г. Омск

**Аннотация.** Рассмотрена задача оптимального управления с неполной реализацией динамических ограничений. Представленный в работе метод направленной оптимизации начальных условий в задачах управления динамическими системами — метод возврата — предназначался первоначально для оптимизации вектора начальных координат в частной модели конфликта подвижных объектов, характеристики которых ухудшались в результате взаимодействия с объектами противника и старения. Модель связывала характеристики (вектор состояния) и координаты (вектор управления) объектов дифференциальными уравнениями типа уравнений Ланчестера. Далее становилась и решалась конкретная задача оптимального управления движениями группы объектов, противодействующих другой группе объектов с заданными на интервале управления траекториями (по критерию минимизации некоторой функции конечных состояний объектов). Существенно сложнее опорной оказалась задача построения приемлемого по времени счёта и точности алгоритма оптимизации начального вектора управления, то есть начального размещения группы управляемых объектов. Найденный подход оказался весьма общим и позволяет направленно оптимизировать начальный вектор управления по меньшей мере в классе управляемых гладких систем с непрерывно дифференцируемым функционалом качества. В самом общем виде идея метода состоит в том, что для оптимизации, в смысле избранного функционала качества, начальных условий исходной задачи оптимального управления записывается вспомогательная двойственная задача и реализуется итеративный процесс, в шагах которого чередуются исходная и двойственная задачи, а в качестве части начальных условий очередного шага итерации используется часть конечных значений предыдущего шага.

**Ключевые слова:** динамические системы, оптимизация начальных условий, обратная задача, динамические ограничения.

## 1. Вводные замечания

Данная работа дополняет нашу работу [2] полным доказательством сходимости предложенного в [1] и исследовавшегося в [2–4] процесса к локальному или глобальному оптимуму. Кроме того, приведён пример решения задачи оптимального управления гладкой динамической системой с частичной реализацией динамических ограничений на интервале управления.

## 2. Метод возврата

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{P}_i(t) = f_i(\bar{p}(t),\, \bar{a}(t),\, \bar{u}_i(t)),\, i = 1, ..., N, \tag{1}$$

где $f_i$ — функция, непрерывно дифференцируемая на заданном интервале управления $(0,\, t_f)$;

$$\bar{p}(t) = (p_1(t),\, \dots,\, p_N(t));$$

$\bar{a}(t)$ — заданные на $(0,\, t_f)$ временные процессы;
$\bar{u}_i(t) = (u_{i1}(t),\, \dots,\, u_i(t))$ — $i$-е управление, координата в $R^M$ .

Не оговаривая ограничений на управления, запишем для заданных начальных условий задачу оптимального управления

$$J(\bar{p}(t_f)) \to \inf, \tag{2}$$

где $J$ непрерывно дифференцируема по $p_1(t),\, \dots,\, p_N(t)$.

Определив далее:

$$\tilde{f}_i = -f_i,$$

$$\tilde{\bar{a}}(t) = \bar{a}(t_f - t),$$

рассмотрим динамическую систему

$$\dot{\tilde{P}}_i(t) = \tilde{f}_i(\tilde{\bar{p}}(t),\, \tilde{\bar{a}}(t),\, \tilde{\bar{u}}(t)),\ i = 1, ..., N \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\tilde{\bar{p}}(0) = \bar{p}(t_f),$$

$$\tilde{\bar{u}}_i(0) = \bar{u}_i(t_f),\, i = 1, ..., N$$

и запишем для (3) задачу оптимального управления, двойственную задаче (2):

$$J(\tilde{\bar{p}}(t_f)) \to \sup\,. \tag{4}$$

Задав теперь ограничения на управления:

$$|\dot{u}_{ij}| < c_{ij},\ |\dot{\tilde{u}}| < c_{ij},\ i = 1, ..., N,\ j = 1, ...M$$

и рассмотрев последовательность решений задачи (2) — первый шаг — и (4) — второй шаг, — можно заметить, что

$$J(\tilde{\bar{p}}(t_f) \geqslant J(\bar{p}(0)). \tag{5}$$

Очевидно, что на втором шаге достигается по меньшей мере равенство функционалов, для чего достаточно обратить оптимальные управления, найденные на первом шаге:

$$\tilde{\bar{u}}_i(t) = \bar{u}_i^*(t_f - t),\ i = 1, ..., N.$$

Далее нас интересует реализация строгого неравенства

$$J(\tilde{\bar{p}}(t_f)) > J(\bar{p}(0)). \tag{6}$$

Примечательно, что (6) выполняется при весьма общих предположениях.

Потребуем хотя бы для одного $\tilde{u}_{ij}(0)$ двойственной обратной задачи (4) существования в $R^{\mathrm{M}}$ отрезка $(\tilde{u}_{ij}(0),\ \tilde{u}_{ij}(0) + \Delta u_{ij})$, смещение по которому $ij$-го начального управления монотонно улучшает функционал качества — при сохранении начального вектора состояния (для рассматриваемого класса $f$ и $J$ это попросту означает, что полученное на первом шаге — задача (2) — $\tilde{\bar{u}}(0) = (\tilde{\bar{u}}_1(0), \dots, \tilde{\bar{u}}_N(0)) = (\bar{u}_1(t_f), \dots, \bar{u}_N(t_f))$ не совпадает с локальным или глобальным оптимумом при данном начальном векторе состояния $\tilde{\bar{p}}(0) = \bar{p}(t_f)$). Теперь, обозначив приращение функционала через $\Delta J$ и назначив, без ограничения общности, достаточно малое $\Delta u_{ij} > 0$, можно записать:

$$\Delta J(\Delta u_{ij}) \sim \Delta u_{ij}. \tag{7}$$

Отметим, что здесь и далее существенно используются непрерывная дифференцируемость $f$ и $J$ и конечность интервала управления $(0,\ t_f)$.

Предположим теперь, что для любого начального управления из $(\tilde{u}_{ij}(0),\ \tilde{u}_{ij}(0) + \Delta u)$ найдётся положительное $\varepsilon < c_{ij}$ и интервал управления $(0,\ \Delta t)$, в котором решение $\tilde{u}_{ij}^*(t)$ задачи (4) удовлетворяет неравенству

$$|\dot{\tilde{u}}_{ij}^*(t)| \leqslant c_{ij} - \varepsilon. \tag{8}$$

На плоскости $t \times \tilde{u}_{ij}(t)$ неравенство (8) констатирует, что при неоптимальном начальном векторе управления оптимальная траектория задачи (4) на $(0,\ \Delta t)$ содержится в меньшем секторе, симметрично вложенном в сектор кинематического ограничения $|\dot{\tilde{u}}_{ij}| < c_{ij}$.

Предположение (8) и исходное кинематическое ограничение позволяют, назначив на некотором интервале управления $(0,\ \tau)$ для начального условия $\tilde{u}_{ij}(0)$ значение $|\dot{\tilde{u}}_{ij}(t)| = c_{ij}$, реализовать слияние траектории из худшего начального условия с оптимальной траекторией лучшего начального условия. При этом $\tau \sim Du$.

Выписав далее необходимые вариации $J$, легко показать, что

$$\Delta J(\Delta u_{ij}) \sim (\Delta u_{ij})^2. \tag{9}$$

Поскольку $\Delta J$ отсчитывается от лучшего значения, сравнение (7) и (9) доказывает, что предположение (8) неверно, — тем самым для решений задачи (4) при $\tilde{u}_{ij}(0)$, не совпадающем с локальным или глобальным оптимумом при данном $\tilde{\tilde{p}}(0)$, доказано следующее: для любого положительного $\varepsilon < c_{ij}$ найдётся интервал $(0, \Delta t)$, в котором

$$|\dot{\tilde{u}}^*_{ij}(t)| > c_{ij} - \varepsilon. \qquad (10)$$

Используя (10) и потребовав дополнительно только единственности управления, оптимального для данных начальных условий, мы доказываем (6) для всех управлений исходной задачи (2), принадлежащих произвольному сектору, строго содержащемуся в секторе исходных кинематических ограничений на управление.

Повторяя теперь приведённые рассуждения и условия реализации (6) для исходной задачи (2), мы получаем итеративный процесс (2), (4), (2), (4), $\ldots$ с монотонным возрастанием $J(0) - J(t_f)$ исходной задачи. Отметим, что ограничение вторых производных $|\ddot{u}_{ij}|$ управлений исходной задачи (2) требует несимметричной модификации ограничений на управления в двойственной задаче (4). Доказательство монотонной сходимости процесса оптимизации в этом случае сложнее, но в целом проводится по приведённой схеме (существование предела $J(0) - J(t_f)$ и алгоритмы, сохраняющие или параллельно оптимизирующие начальный вектор состояния исходной задачи, требуют отдельного обсуждения.)

Отметим, что полученный результат позволяет строить простые геометрические примеры трёх типов решений исходной задачи оптимального управления:

– кинематические (в общем случае — динамические) ограничения реализуются на всём интервале управления;

– ограничения реализуются на правильном подмножестве интервала;

– ограничения не реализуются ни в одной точке интервала.

Приведём пример решения второго типа.

## 3. Пример неполной реализации динамических ограничений в задачах оптимального управления

Рассмотрим два взаимодействующих в $R^3$ подвижных объекта, неотрицательные характеристики которых, $p$ и $q$, изменяются во времени в результате взаимодействия. Если взаимодействие объектов удовлетворяет принципу суперпозиции, то [1] можно разделить переменные — характеристики и координаты объектов — и записать:

$$\begin{cases} \dot{p} = pq\varphi_1(\bar{x}_1(t),\ \bar{x}_2(t)), \\ \dot{q} = pq\varphi_2(\bar{x}_1(t),\ \bar{x}_2(t)), \end{cases} \qquad (11)$$

где не оговорён знак $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

Естественно полагать функцию $\varphi_v,\ v = 1,2$ симметричной, зависящей только от расстояния между подвижными объектами, т.е. $\varphi_v(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = \varphi_v(\bar{x}_2,\ \bar{x}_1) = \varphi_v(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|)$.

В простейшем случае положительные функции $\varphi_v,\ v = 1,2$ совпадают и монотонно убывают по $\rho = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$. Приняв дополнительно $\dot{p} < 0,\ \dot{q} < 0$, приводим (11) к системе

$$
\begin{cases} \dot{p} = -pq\varphi(\bar{x}(t),\ \bar{a}(t)), \\ \dot{q} = -pq\varphi(\bar{a}(t),\ \bar{x}(t)), \end{cases} \tag{12}
$$

описывающей взаимодействие двух конкурирующих подвижных объектов, где $\overline{x}(t)$ – управляемая траектория объекта $p$, $\overline{a}(t)$ — заданная на интервале управления траектория объекта $q$.

Поставим задачу оптимального управления движением объекта $p$:

$$
J(x^*) = \sup_{x \in X} J(x), \tag{13}
$$

где

$$
J(x) = q(0) - q(t_f) \tag{14}
$$

для множества управлений

$$
X = \{\bar{x}(t) | |\dot{\bar{x}}(t)| \leqslant V,\ |\ddot{\bar{x}}(t)| \leqslant 2C;\ 0 \leqslant t \leqslant t_f\}.
$$

В [3, 4] показано, что задача (12) – (14) эквивалентна задаче

$$
\int\limits_0^{t_f} \varphi(\bar{x}(t),\ \bar{a}(t))dt \underset{x \in X}{\to} \sup. \tag{15}
$$

Зададим теперь произвольные начальные характеристики и несовпадающие начальные координаты объектов и удаляющееся движение объекта $q$ по соединяющей объекты прямой со скоростью меньшей $V$. Используя (15), легко показать, что для данных условий найдётся бесконечное множество $t_f$, для которых максимизирующее (14) прямолинейное движение объекта $p$ будет состоять из двух отрезков:

1) преследование объекта $q$ до слияния с ним — с реализацией динамических ограничений;

2) сопровождение объекта $q$ до момента $t_f$ — с его скоростью меньшей $V$.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 14-08-01132 и № 14-07-00272.

## Литература

1. Nartov B.K. Conflict of Moving Systems. France : AMSE Press, 1994. 87 p.
2. Нартов Б.К. Об одном методе оптимизации начальных условий в управлении динамическими системами // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып. 9. С. 1–3.
3. Нартов Б.К. Методы траекторного управления. Новосибирск : Наука, 2003. 104 с.
4. Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А., Нартов Б.К., Чуканов С.Н. Управление подвижными объектами. Оперативное планирование. М. : Научтехлитиздат, 2008. 136 с.

# METHOD OF RETURN AND IMPLEMENTATION OF DYNAMIC LIMITS IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

**B.K. Nartov**

Ph.D.(Phys.-Math.), Senior Scientist Researcher, e-mail: nartov@ofim.oscsbras.ru

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Omsk

**Abstract.** Presented in the paper method, designed to directionally optimize the initial conditions in problems of dynamic systems management, — a method of return — was originally designed to optimize the vector of initial coordinates in a particular model of moving objects conflict whose characteristics deteriorated as a result of interaction with the objects of the opponent and aging. The model was binding characteristics (state vector) and coordinates (control vector) of objects by Lanchester-type differential equations. Then the specific problems of optimal control of the movements of a group of objects, opposing another group of objects with the specified paths in the control interval (by the criterion of minimizing a function of the final states of objects), were set and solved. The problem of the construction of an acceptable on time and accuracy algorithm to optimize the initial control vector, i.e. the initial placement of the group of managed objects, was much more complicated. The found approach has been very general and allows us to directionally optimize the initial control vector, at least in the class of managed smooth systems with continuously differentiable quality functional. In the most general form the idea of the method is that for optimization, in terms of selected quality functional, of the initial conditions of the original optimal control problem the supporting dual problem is written and the iterative process is implemented, which steps alternate original and dual problems, and as part of the initial conditions of the next iteration the part of the final values of the previous iteration is using.

**Keywords:** dynamic systems, optimization of the initial conditions, the inverse problem, the dynamic limits.

*Дата поступления в редакцию: 15.11.2015*