Математические структуры и моделирование
2016. № 4(40). С. 24–38

УДК 530.12+524.8

АНАЛИЗ В КОСМИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЯХ НА ОСНОВЕ ГРУППЫ U(1,1): ОСНОВНЫЕ ТАБЛИЦЫ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО SU(2,2)-ДЕЙСТВИЯ

А.В. Левичев[1]
профессор, д.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: alevichev@gmail.com
А.Ю. Пальянов[2,3]
к.ф.-м.н., с.н.с. , e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева
[2]Институт систем информатики СО РАН им. А.П. Ершова
[3]Новосибирский государственный университет

Аннотация. Хронометрическая теория Сигала исходит из пространства-времени $\mathbf{D}$, которое может быть представлено как группа Ли с причинной структурой, задаваемой инвариантной лоренцевой формой на алгебре Ли $u(2)$. Аналогично пространство-время $\mathbf{F}$ представлено группой Ли с причинной структурой, задаваемой инвариантной лоренцевой формой на алгебре Ли $u(1,1)$. Группы Ли G, G_F вводятся как представления $SU(2,2)$, связанные сопряжением конкретной матрицей W из $Gl(4)$. Дробно-линейное действие G на $\mathbf{D}$ глобально и конформно; оно играет важную роль в анализе пространственно-временных расслоений, основанном на параллелизующей группе $U(2)$: этот анализ проведён Панейтцем и Сигалом в 1980-х гг. Дробно-линейное действие G_F на $\mathbf{F}$ (введённое в 2000-х гг. первым автором) тоже конформно. В статье показано, что (несмотря на имеющиеся сингулярности этого действия) группа $U(1,1)$ может быть выбрана в качестве параллелизующей. Приводятся методы, применением которых нами получены таблицы (аналогичные «таблицам Панейтца-Сигала»), необходимые для (предстоящего) анализа пространственно-временных расслоений на основе параллелизующей группы $U(1,1)$.

Ключевые слова: параллелизации расслоений над пространством-временем, космос Сигала, действия конформной группы $SU(2,2)$ на $U(2)$ и на $U(1,1)$, DLF-теория.

1. Введение, мотивация и основные обозначения

Группы Ли $U(2)$ и $U(1,1)$ являются одними из основных объектов, рассматриваемых в работе.

В статье установлено, что $U(1,1)$ может быть выбрана в качестве параллелизующей группы. Ниже (в Секциях 2, 3) приводятся методы, применением которых нами получены таблицы (аналогичные «таблицам Панейтца-Сигала»), необходимые для (предстоящего) анализа пространственно-временных расслоений на основе параллелизующей группы $U(1,1)$. Одним из результатов такого анализа должна стать классификация частиц, «живущих» в пространстве-времени $\mathbf{F}$.

Под $U(2)$ понимается совокупность всех два на два матриц Z (с комплексными, вообще говоря, элементами), удовлетворяющих соотношению

$$ZZ^* = \mathbf{1}.$$

Здесь и далее $\mathbf{1}$ — единичная матрица, а * означает комплексное сопряжение и транспонирование. Напомним, что группа $U(2)$ не является прямым произведением своей центральной подгруппы с подгруппой $SU(2)$. Двукратное накрытие $\mathbf{D}^{(2)}$ для $U(2)$, состоящее из всех пар вида $(p, \mathbf{u})$, является прямым произведением (групп) S^1 и S^3 (здесь S^3 представлена группой $SU(2)$, т.е. $\mathbf{u}$ — это соответствующая матрица, а модуль комплексого числа p равен 1). Накрывающее отображение переводит $(p, \mathbf{u})$ в матрицу $p\mathbf{u}$ из $U(2)$. Подразумевается, что на $\mathbf{D}^{(2)}$ введена лоренцева метрика

$$(dt)^2 - (du)^2. \tag{1.1}$$

Здесь t — параметр на S^1, а $(du)^2$ — стандартная риманова метрика на S^3.

Аналогично, под $U(1,1)$ понимается совокупность всех два на два матриц U, удовлетворяющих соотношению

$$UsU^* = s.$$

Здесь s — диагональная матрица с элементами $1, -1$ по главной диагонали.

Двукратное накрытие $\mathbf{F}^{(2)}$ для $U(1,1)$, состоящее из всех пар вида (q, V), является прямым произведением (групп) S^1 и $SU(1,1)$; т.е. V — это матрица из $SU(1,1)$, а модуль комплексого числа q равен 1. Накрывающее отображение переводит (q, V) в матрицу qV из $U(1,1)$. Дальнейшие детали о группах $\mathbf{D}^{(2)}, U(2), \mathbf{F}^{(2)}, U(1,1)$ и метриках на них приведены в Приложении A.

Нередко две из этих групп (в частности, когда они снабжены двустороннеинвариантными метриками лоренцевой сигнатуры — см. [6]) обозначаются $\mathbf{D} = U(2)$ и $\mathbf{F} = U(1,1)$.

Отметим, что хронометрическая теория Сигала (см. [9]) основана на пространстве-времени $\mathbf{D}$. Так как DLF–теория исходит сразу из трёх миров ($\mathbf{D}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{F}$), то её можно считать обобщением теории Сигала (DLF–теория представлена в [6], в то время как некоторые её исходные положения были намечены уже в [2] (сс. 1302-1303).

Прежде чем приступить к формулировке результатов статьи, напомним, что параллелизация (расслоений над пространством-временем — см. определения и теоремы существования в [9], Секция IV) является важным математическим методом современной теоретической физики. Именно каждому «объекту» сопоставляется его состояние (часто называемое волновой функцией, но этот последний термин целесообразнее употреблять в более специализированной ситуации, а именно — ПОСЛЕ параллелизации). Если в качестве объекта рассматривается элементарная частица («живущая» в некотором мире событий $\mathbf{W}$), то совокупность её возможных состояний является вполне определённым подпространством множества сечений (бесконечно дифференцируемых, суммируемых с квадратом и т.д. — в данном случае нет необходимости уточнять эти детали) некоторого векторного расслоения с базой $\mathbf{W}$. На этой стадии состояния ещё не принимают числовых (для скалярной частицы) или C^k-значений ($k > 1$, для частиц ненулевого спина). Необходим переход от (абстрактных) сечений к параллелизованным сечениям (т.е. к волновым функциям). Затем вводится структура гильбертова пространства и т.д. (нет необходимости детализировать эти этапы в данной статье). Процедура параллелизации определяется выбором параллелизующей (четырехмерной) подгруппы N в группе G, где G — это группа симметрий мира $\mathbf{W}$ (в контексте данной статьи G — это (конформная) группа $SU(2,2)$, см. ниже). Начиная с такого этапа, N как бы заменяет исходный мир событий $\mathbf{W}$ (типичная ситуация состоит в том, что группа N является конечно-листным накрытием мира $\mathbf{W}$).

Элементарные частицы и их взаимодействия моделируются в терминах индуцированных представлений группы G. В рамках стандартной теоретической физики G — это десятимерная группа Пуанкаре, а в качестве параллелизующей подгруппы практически всегда (зачастую — «по умолчанию») выбиралась векторная группа мира Минковского M. Проводилось индуцирование по подгруппе Лоренца (такой подход был заявлен знаменитой статьёй Вигнера [15]). Проблемы выбора параллелизации не возникало ещё и потому, что, фактически, рассмотрение начиналось с параллелизованных сечений (т.е. с волновых функций).

В работах школы Сигала (см. [13]) чаще всего использовались параллелизации, основанные на группе $U(2)$. Иногда они сравнивались с плоской параллелизацией (определяемой векторной группой мира M). На с. 170 известной монографии [1] роль выбора параллелизации обсуждается с точки зрения вопросов, возникающих в квантовой теории поля.

В [6] было предложено рассмотреть другие (кроме $\mathbf{D}$ и M) параллелизующие группы. В связи с этим важен результат статьи [3] (см. Теорему 1, ниже), сформулированный в терминах коммутативной $\mathbf{D} - \mathbf{F}$ диаграммы. На его основе делается вывод, что (несмотря на наличие сингулярностей) осуществима как сама $\mathbf{F}$-параллелизация, так и её (каноническое) сравнение с $\mathbf{D}$-параллелизацией. Термин 'сравнение параллелизаций' был введён в [9], там же были рассмотрены и некоторые примеры. Дело в том, что действие (той или иной) подгруппы группы G может быть реализовано сложно или просто — в зависимости от выбора параллелизации. Одним из основных следствий применения $\mathbf{D}$-параллелизации явилась классификация хронометрических частиц спина 1/2. Таковых оказалось четыре: протон, электрон и два вида нейтрино (см. [12] и [5]). Поэтому вопрос отыскания соответствующей классификации на основе $\mathbf{F}$-параллелизации представляется весьма интересным. Так как пространства-времена $\mathbf{F}$ и $\mathbf{D}$ связаны конформным (не сводящимся к изометрии) преобразованием, то заранее неизвестно набор каких именно частиц будет получен при использовании $\mathbf{F}$–параллелизации. Необходимость рассмотрения $\mathbf{F}$-параллелизации обеспечена ещё и тем фактом, что среди всех вещественных 4-мерных алгебр Ли лишь $u(2)$ и $u(1,1)$ являются редуктивными.

Каждая из групп Ли G, G_F, изоморфна $SU(2,2)$. Именно G состоит из всех

4 на 4 матриц g (с определителем 1), для которых выполняется

$$g^*Sg = S. \tag{1.2}$$

Здесь $S = diag\{1, 1, -1, -1\}$ диагональная матрица.

Через W обозначается 4 на 4 матрица

$$W = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

образованная 2 на 2 блоками

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Ясно, что

$$detW = -1, W^2 = \mathbf{1}, P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0. \tag{1.5}$$

Сопрягая матрицу S матрицей W, получаем

$$\tilde{S} = diag\{1, -1, -1, 1\},$$

которая задаёт другую ‘копию’ (обозначаем её G_F) группы $SU(2,2)$. Именно G_F состоит из всех 4 на 4 матриц $\tilde{g}$ (с определителем 1), для которых выполняется

$$\tilde{g}^*\tilde{S}\tilde{g} = \tilde{S}. \tag{1.6}$$

Соответствие

$$\tilde{g} = WgW \tag{1.7}$$

является изоморфизмом групп Ли G, G_F.

Каждая g из G является 4 на 4 матрицей, задаваемой 2 на 2 блоками A, B, C, D:

$$g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{1.8a}$$

Аналогично каждая

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}. \tag{1.8b}$$

Известно, что дробно-линейное действие

$$g(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{1.9}$$

группы G (см. [10], с.35) определено на всей $\mathbf{D} = U(2)$. Дробно-линейное (определённое лишь локально) действие

$$\tilde{g}(U) = (\tilde{A}U + \tilde{B})(\tilde{C}U + \tilde{D})^{-1} \tag{1.10}$$

группы G_F на $\mathbf{F} = U(1,1)$ было введено в [6].

Замечание 1. Так как в Секции 3 мы рассматриваем лишь действие (1.10), то (для упрощения обозначений) знак тильды там будет опущен. Тем самым общий элемент группы G_F будет обозначаться через g (с блоками A, B, C, D).

2. Коммутативная *D–F* диаграмма и смежная проблематика

Пусть дана 2 на 2 матрица Y. Через $W(Y)$ обозначаем матрицу $(PY+Q)(QY+P)^{-1}$, если она определена. Задаём вложение (многообразия) $\mathbf{F}$ в $\mathbf{D}$ формулой

$$Z = W(U) = (PU+Q)(QU+P)^{-1}. \tag{2.1}$$

Нетрудно проверить, что (2.1) определено для любой U из $\mathbf{F}$. Отображение W конформно, но в данной статье это свойство не используется.

Формула (2.1) — это частный случай (см. [8], с. 32) *формулы Свидерского*. Легко проверяется, что обратное отображение

$$U = W(Z) = (PZ+Q)(QZ+P)^{-1} \tag{2.2}$$

определено для тех (и только тех) Z, которые не принадлежат тору $\mathbf{T}$, состоящему из всех матриц K в $\mathbf{D}$ вида

$$K = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь p, q могут быть произвольными комплексными числами с модулем 1.

Следующее важное утверждение (в нём используются обозначения (1.9), (1.10)) доказано в [3]:

Теорема 1 (**D** – **F** диаграмма). Если $\tilde{g}(U)$ определено, то

$$g(W(U)) = W(\tilde{g}(U)). \tag{2.4}$$

Замечание 2. В [3] не было исследовано, когда (т.е. при каких U из $\mathbf{F}$) правая часть (2.4) определена. Конечно же (см. нашу формулу 1.10), она определена тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\tilde{C}U + \tilde{D}$ не равен нулю. Однако это условие оказывается менее удобным для применения, нежели приводимое ниже (в Теореме 2).

В [7] доказано следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть $\tilde{g}$ принадлежит G_F, а U — матрица в $\mathbf{F}$. Матрица $\tilde{g}(U)$ определена тогда и только тогда, когда $g(W(U))$ не принадлежит тору $\mathbf{T}$.

Замечание 3. На основании Теоремы 2 можно сказать, что сингулярности $SU(2,2)$-действия в $\mathbf{F}$ являются *ручными*.

Теоремы 1, 2, с учётом полученных ранее результатов (см. [9], [6], [8]), дают основание утверждать, что анализ пространственно-временных расслоений на основе параллелизующей группы $U(1,1)$ математически возможен. Его осуществление (и сравнение с результатами, основанными на параллелизующей группе $U(2)$) представляет несомненный интерес. По аналогии с [9], Глава V, этот (новый) анализ следует начать с рассмотрения скалярных расслоений. Вместо группы изометрий $\mathbf{K}$ (с алгеброй Ли $R \oplus su(2) \oplus su(2)$) пространства-времени $\mathbf{D}$ нужно будет взять группу изометрий $\mathbf{K}_F$ (с алгеброй Ли $R \oplus su(1,1) \oplus su(1,1)$) мира $\mathbf{F}$. При построении базиса скалярных представлений вместо 'левой' и 'правой' алгебр Ли $su(2)$ (см. [9], Секция 5.4) будут выбраны 'левая' и 'правая' алгебры Ли $su(1.1)$. Так как речь идёт о представлениях над полем комплексных чисел, то сравнение двух 'картин' ('компактной' — на основе $U(2)$, и 'некомпактной' — на основе $U(1,1)$) будет вполне осуществимо. Здесь имеется в виду хорошо известный 'унитарный трюк'. В целом, упомянутые вопросы интересны как математически (ковариантность волновых операторов, инвариантные формы в пространствах индуцированных представлений, классы специальных функций и др.), так и с точки зрения приложений в физике: см., например, [5, сс. 88-89], где предлагается отождествить инвариантное подпространство т.н. *спэннорного* [12] представления с совокупностью состояний протона (что объяснило бы стабильность протона).

3. Основные результаты: отыскание Таблиц I, III и IV

Последовательность, в которой мы излагаем необходимые сведения/результаты (для предстоящего использования $\mathbf{F} = U(1,1)$ в качестве параллелизующей группы), аналогична той, которая имеется в работах [11] и [9] для случая $\mathbf{D} = U(2)$. В частности, сохраняется нумерация таблиц (в упомянутых двух статьях приведено десять таблиц): каждой $\mathbf{D}$-таблице соответствует её $\mathbf{F}$-аналог. Важно иметь в виду, что все как чисто математические результаты школы Сигала, так и их многочисленные приложения в теоретической физике были получены на основе применения информации, приведённой в этих $\mathbf{D}$-таблицах. Поэтому получение $\mathbf{F}$-аналогов этих таблиц представляется важным (и совершенно необходимым для реализации нашей программы, изложенной в конце предыдущей секции). На данном этапе нами получены Таблицы I, III и IV (см. Приложение Б). Отметим, что Таблицу II (мы её не приводим) легко составить на основе Таблицы I (см. её второй столбец) и Таблицы III. Мы не приводим $\mathbf{D}$-таблицы, так как они доступны в сети [11], [9]. Кроме того, они имеются в [4]. Матрицы $\mathbf{L_{ij}}$ (в их блочной форме) приведены в третьем столбце нашей Таблицы I, они являются базисными элементами алгебры Ли $su(2,2)$. В приведённых там блоках через s, b_0, b_1, b_2, b_3 обозначены следующие 2 на 2 матрицы:

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Отметим, что каждая $\mathbf{L_{ij}}$ получена сопряжением (с помощью матрицы W — см. наше (1.2) выше) из соответствующего элемента $\mathbf{D}$-таблицы I. Их коммутационные соотношения (для любого из случаев $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$) таковы:

$$[\mathbf{L_{im}}, \mathbf{L_{mk}}] = -e_m \mathbf{L_{ik}},$$

где под $(e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ понимается набор $(1, 1, -1, -1, -1, -1)$. Индексы i, j принимают значения $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ с $i < j$. Через L_{ij} будут обозначаться соответствующие векторные поля на $U(1,1)$. Они задаются действием (1.10). Считаем, что всегда $\mathbf{L_{ij}} = -\mathbf{L_{ji}}$, откуда следуют соотношения $L_{ij} = -L_{ji}$.

Лоренцева метрика на $\mathbf{D} = U(2)$ задаётся следующим условием: левоинвариантные векторные поля

$$X_0 = L_{-10}, X_1 = L_{14} - L_{23}, X_2 = L_{24} - L_{31}, X_3 = L_{34} - L_{12} \tag{3.1}$$

образуют ортонормированный репер. Именно скалярный квадрат вектора X_0 равен 1, а каждого из оставшихся трёх векторов — минус единице. Известно, что это условие согласовано с выбором (1.1) метрики на $\mathbf{D}^{(2)}$, т.е. накрывающее отображение является изометрией. Векторные поля (3.1) использованы в качестве базисных во втором столбце $\mathbf{D}$-таблицы I. Их аналогом для случая $\mathbf{F}$ являются поля

$$H_0 = L_{10} - L_{12}, H_1 = L_{-11} - L_{02}, H_2 = L_{-12} + L_{01}, H_3 = L_{34}, \tag{3.2}$$

фигурирующие во втором столбце нашей Таблицы I.

Лоренцева метрика (как на $\mathbf{F}^{(2)}$, так и на $\mathbf{F}$) задаётся условием ортонормированности полей (3.2). Именно скалярный квадрат вектора H_0 равен 1, а каждого из оставшихся трёх векторов — минус единице. Как известно, левоинвариантные векторные поля генерируют правые сдвиги. Именно полям (3.2) отвечают сдвиги на

$$\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & iS \\ -iS & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & S \\ S & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

соответственно. В (3.3) под C, S понимаются гиперболические косинус и синус вещественного аргумента t.

Базис право-инвариантных векторных полей на $\mathbf{F}$ вводится так:

$$J_0 = L_{-10} + L_{12}, J_1 = L_{-11} + L_{02}, J_2 = L_{-12} - L_{01}, J_3 = L_{34}. \tag{3.4}$$

Он фигурирует в нашей Таблице IV, в которой приведены действия рассматриваемых векторных полей на (введённые в Приложении A) переменные $v_{-1}, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$.

Вообще, Таблицу IV (с учётом данных столбца 3 Таблицы I) можно считать исходной (для дальнейшего нахождения инфинитезимального действия группы G_F). В оставшейся части данной секции мы приводим соответствующие сведения и аргументацию (см. Теоремы 3 и 4, Леммы 1– 5 и сопутствующие им обозначения). Эта аргументация основана на дробно-линейном действии, поэтому она применима как в $\mathbf{D}$-, так и в $\mathbf{F}$-случае. Отметим, что ни в [11], ни в [9] подобной аргументации не было приведено.

Теорема 3. Векторные поля L_{ij}, H_m, J_k задаются Таблицей IV.

Справедливость этой теоремы будет установлена на основе нескольких вспомогательных утверждений.

В дальнейшем, если m – зависящая от параметра t величина на $\mathbf{F}^{(2)}$ (или на $\mathbf{F}$), то под $\dot{m}$ понимается её производная по t, вычисленная при t=0. Если дифференцируется выражение, заключённое в скобки, то результат записывается в виде: $(...)\dot{}$. Под L (см. нашу Таблицу IV) понимается векторное поле (т.е. линейный дифференциальный оператор первого порядка), соответствующее матрице $\mathbf{L}$ (как правило, $\mathbf{L}$ — это одна из матриц, приведённых в последнем столбце Таблицы I).

Замечание 4. Через A, B, C, D обозначаются блоки матрицы $g = exp(t\mathbf{L})$. Тем самым мы упрощаем обозначения Секции 1 (см. Замечание 1 в её конце): в формуле (1.10) опускаем тильду. Такое упрощение уместно, так как действие на $\mathbf{D}$ в данной секции не рассматривается.

Лемма 1. Действие оператора L на переменные v_{-1}, v_0 может быть найдено из уравнения

$$2(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)(v_{-1} + iv_0) + (v_{-1} + iv_0)^2(det(CU + D))\dot{} = (det(AU + B))\dot{}. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Если $\hat{U} = g(U)$ в (1.10) определено, то это соотношение эквивалентно

$$\hat{U}(CU + D) = AU + B. \qquad (3.6)$$

Из (3.6) следует

$$det(\hat{U})det(CU + D) = det(AU + B). \qquad (3.7)$$

Напомним (см. Приложение А), что $det(\hat{U}) = (\hat{v}_{-1} + i\hat{v}_0)^2$ и $detU = (v_{-1} + iv_0)^2$. Для того чтобы найти действие оператора L на переменные v_{-1}, v_0, достаточно продифференцировать обе части соотношения (3.7) по t и положить $t = 0$. Получаем искомое (3.5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Действие оператора L на переменные v_1, v_2, v_3, v_4 может быть найдено из уравнения

$$(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)V + (v_{-1} + iv_0)\dot{V} + U(CU + D)\dot{} = (AU + B)\dot{}. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Напомним (см. Приложение А), что через V обозначена матрица из $SU(1,1)$ в разложении $U = (v_{-1} + iv_0)V$. Аналогично, $\hat{U} = (\hat{v}_{-1} + i\hat{v}_0)\hat{V}$. Чтобы получить соотношение (3.8), достаточно продифференцировать (3.6) по t и положить $t = 0$. Не забываем, что при $t = 0$ выполнены соотношения $A = D = \mathbf{1}, B = C = \mathbf{0}$. Согласно (3.5) множитель $(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)$ в (3.8) уже подсчитан. Лемма 2 доказана.

Обозначим через a, b, c, d производные от матриц A, B, C, D по t, вычисленные при $t = 0$. Матрицы a, b, c, d приведены в третьем столбце Таблицы I для каждой $\mathbf{L} = \mathbf{L_{ij}}$. Через trM обозначается след матрицы M, а элементы 2 на 2 матрицы M нумеруются так:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}.$$

Лемма 3. Выполняются (3.9) и (3.10):

$$(det(CU + D))\dot{} = trd + tr(cU), \tag{3.9}$$

$$(det(AU + B))\dot{} = (tra)detU + tr(b\tilde{U}), \tag{3.10}$$

где через $\tilde{U}$ обозначена матрица

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_4 & -U_3 \\ -U_2 & U_1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство: непосредственный подсчёт.

Так как в столбце 3 таблицы I два блока всегда равны нулю, то при составлении таблицы IV уместно использовать следующие два утверждения (Леммы 4 и 5).

Лемма 4. Если $a = d = 0$, то (3.5) упрощается до

$$2(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0) + (v_{-1} + iv_0)^2 tr(cV) = tr(b\tilde{V}). \tag{3.11}$$

Если же $b = c = 0$, то (3.5) эквивалентно

$$2(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)(v_{-1} - iv_0) + trd = tra. \tag{3.12}$$

Доказательство: применение формул (3.9), (3.10) в (3.5).

Лемма 5. Если $a = d = 0$, то (3.8) упрощается до

$$(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)(v_{-1} - iv_0)V + \dot{V} + (v_{-1} + iv_0)VcV = (v_{-1} - iv_0)b. \tag{3.13}$$

Если же $b = c = 0$, то (3.8) эквивалентно

$$(\dot{v}_{-1} + i\dot{v}_0)(v_{-1} - iv_0)V + \dot{V} + Vd = aV. \tag{3.14}$$

Доказательство: применение формул (3.9), (3.10) в (3.8).

Замечание 5. Применение формул (3.11)–(3.14) завершает доказательство Теоремы 3.

Теорема 4. Разложения векторных полей L_{ij} по базисным полям H_m задаются (вторым) столбцом Таблицы I.

Доказательство: проверка правильности этих разложений легко осуществима на основе Таблицы IV.

Оставшаяся часть основного текста статьи посвящена получению Таблицы III. В ней используются координаты p, q, r, t: они введены соотношениями (A8) Приложения A.

Ограничимся доказательством справедливости разложения $J_0 = \partial_r + \partial_q$, остальные разложения отыскиваются аналогично.

Так как $J_0 = L_{-10} + L_{12}$, то (см. нашу Таблицу IV и Приложение A) значение векторного поля J_0 в точке (q, V) многообразия $\mathbf{F}^{(2)}$ можно отождествить с элементом $(0, M)$ линейного пространства $E^2 \oplus E^4$. Здесь

$$M = \begin{bmatrix} -v_3 + iv_4 & -v_2 + iv_1 \\ -v_2 - iv_4 & -v_3 - iv_4 \end{bmatrix}.$$

Применяя соотношения (A8) Приложения A, получаем разложение $J_0 = \partial_r + \partial_q$.

4. Приложение А: Соглашения о группах U(2), U(1,1) и их 2-накрытиях

Помимо введённого в Секции 1 2-накрытия $\mathbf{F}^{(2)}$ группы $U(1,1)$ определим соответствующее разложение $U = qV$ для матрицы U из $\mathbf{F}$. Рассмотрим прямую сумму $E^6 = E^2 \oplus E^4$ двух евклидовых пространств: E^2 с прямоугольными координатами v_{-1}, v_0; E^4 с прямоугольными координатами v_1, v_2, v_3, v_4. Каждая точка в $\mathbf{F}^{(2)}$ — это такой набор $(v_{-1}, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$, что выполнены условия A1, A2:

$$ {v_{-1}}^2 + {v_0}^2 = 1, \tag{A1} $$

$$ {v_3}^2 + {v_4}^2 - {v_1}^2 - {v_2}^2 = 1. \tag{A2} $$

Ясно, что $\mathbf{F}^{(2)}$ есть прямое произведение окружности S^1 с элементами $q = v_{-1} + iv_0$ и подгруппы $SU(1,1)$. Известно, что $SU(1,1)$ имеет топологию прямого произведения S^1 и R^2.

Матрица V из $SU(1,1)$ задаётся так:

$$ V = \begin{bmatrix} v_4 + iv_3 & v_1 + iv_2 \\ v_1 - iv_2 & v_4 - iv_3 \end{bmatrix}. \tag{A3} $$

Накрывающее отображение из $\mathbf{F}^{(2)}$ в $U(1,1)$ переводит пару $(v_{-1} + iv_0, V)$ в матрицу $(v_{-1} + iv_0)V$, элемент группы $U(1,1)$:

$$ U = (v_{-1} + iv_0)V. \tag{A4} $$

Если дана матрица U в $U(1,1)$, то сомножители $(v_{-1}+iv_0)$ и V определяются с точностью до знака, так как каждому U соответствуют два накрывающих элемента в $\mathbf{F}^{(2)}$: $(v_{-1} + iv_0, V)$ и $(-v_{-1} - iv_0, -V)$. В этом смысле координаты $v_{-1}, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ можно использовать для параметризации как точек в $\mathbf{F}^{(2)}$, так и в $U(1,1)$.

В [14] была доказана единственность $SU(2,2)$-действия в $\mathbf{D}^{(2)}$, накрывающего дробно-линейное $SU(2,2)$-действие (1.9) в $\mathbf{D}$. $SU(2,2)$-действие в $\mathbf{F}^{(2)}$, накрывающее дробно-линейное $SU(2,2)$-действие (1.10) в $\mathbf{F}$, введём следующим образом. Сначала построим аналог $W^{(2)}$ отображения (2.1). Каждой паре (q, V) из $\mathbf{F}^{(2)}$ сопоставляем такую пару $(p, \mathbf{u})$ из $\mathbf{D}^{(2)}$, что $p = (v_4 + iv_3)/({v_3}^2 + {v_4}^2)^{1/2}$. Отметим, что положительность квадратного корня в знаменателе обеспечена принадлежностью матрицы V группе $SU(1,1)$. Требуем коммутативности диаграммы

$$ \begin{tikzcd} (p, \mathbf{u}) \arrow[r] & p\mathbf{u} \arrow[d] \\ (q, V) \arrow[u] \arrow[r] & qV = W(p\mathbf{u}) \end{tikzcd} \tag{A5} $$

Тем самым, матрица $\mathbf{u}$ из $SU(2)$ определяется однозначно. Напомним, что вторая вертикальная стрелка в (A5) — это биекция (2.2) между (частью) $\mathbf{D}$ и (всем) $\mathbf{F}$.

Теперь задаём $SU(2,2)$-действие в $\mathbf{F}^{(2)}$ требованием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}^{(2)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{F}^{(2)} \arrow[d] \\ \mathbf{D}^{(2)} \arrow[r] & \mathbf{D}^{(2)} \end{tikzcd} \tag{A6}$$

В (A6) нижний уровень — это действие в $\mathbf{D}^{(2)}$, а каждая из вертикальных стрелок — это только что введённое отображение $W^{(2)}$.

Нетрудно проверить, что для таким образом введённого $SU(2,2)$-действия в $\mathbf{F}^{(2)}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}^{(2)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{F}^{(2)} \arrow[d] \\ \mathbf{F} \arrow[r] & \mathbf{F} \end{tikzcd} \tag{A7}$$

Другими словами, $SU(2,2)$-действие в $\mathbf{F}^{(2)}$ накрывает таковое в $\mathbf{F}$. Отметим, что действие в $\mathbf{F}^{(2)}$ не является глобально определённым (так как действие в $\mathbf{F}$ не является таковым).

$\mathbf{F}$-аналогом полярных $\mathbf{D}$-координат (фигурирующих в $\mathbf{D}$-таблицах II, III) являются t, p, q, r:

$v_{-1} = \cos t, v_0 = \sin t, v_1 = C_q \sinh p,$

$v_2 = S_q \sinh p, v_3 = S_r \cosh p, v_4 = C_r \cosh p.$ (A8)

Под C_q, S_q, S_r, C_r в (A8) понимаются косинус и синус соответствующего аргумента. Обозначения $\partial_t, \partial_p, \partial_q, \partial_r$ соответствующих векторных полей на $\mathbf{F}$ используются в Таблице III.

5. Приложение Б: Таблицы I, III и IV

Таблица I

Символ генератора	Векторное поле на F как линейная комбинация H_j	Матрица генератора
L_{-10}	$(v_3{}^2+v_4{}^2)H_0+(v_1v_4+v_2v_3)H_1+(v_1v_3-v_2v_4)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & -b_3 \end{pmatrix}$
L_{-11}	$(v_1v_4-v_2v_3)H_0+(v_4{}^2-v_2{}^2)H_1+(v_3v_4-v_1v_2)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} sb_1 & 0 \\ 0 & -sb_1 \end{pmatrix}$
L_{-12}	$-(v_1v_3+v_2v_4)H_0-(v_1v_2+v_3v_4)H_1+(v_4{}^2-v_1{}^2)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} sb_2 & 0 \\ 0 & -sb_2 \end{pmatrix}$
L_{-13}	$-v_0v_3H_0-v_0v_2H_1-v_0v_1H_2+v_{-1}v_4H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
L_{-14}	$-v_{-1}v_3H_0-v_{-1}v_2H_1-v_{-1}v_1H_2-v_0v_4H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
L_{01}	$(v_1v_3+v_2v_4)H_0+(v_1v_2+v_3v_4)H_1+(v_3{}^2-v_2{}^2)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} -sb_2 & 0 \\ 0 & -sb_2 \end{pmatrix}$
L_{02}	$(v_1v_4H_0+(v_1{}^2-v_3{}^2)H_1)+(v_3v_4-v_1v_2)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} sb_1 & 0 \\ 0 & sb_1 \end{pmatrix}$
L_{03}	$v_0v_4H_0+v_0v_1H_1-v_0v_2H_2+v_{-1}v_3H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & -s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$
L_{12}	$(v_1{}^2+v_2{}^2)H_0+(v_1v_4+v_2v_3)H_1+(v_1v_3-v_2v_4)H_2$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$
L_{23}	$-v_0v_2H_0-v_0v_3H_1+v_0v_4H_2-v_{-1}v_1H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$
L_{31}	$-v_0v_1H_0-v_0v_4H_1-v_0v_3H_2+v_{-1}v_2H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$
L_{04}	$v_{-1}v_4H_0+v_{-1}v_1H_1-v_{-1}v_2H_2-v_0v_3H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & b_3 \\ -b_3 & 0 \end{pmatrix}$
L_{14}	$v_{-1}v_1H_0+v_{-1}v_4H_1+v_{-1}v_3H_2+v_0v_2H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & sb_1 \\ -sb_1 & 0 \end{pmatrix}$
L_{24}	$v_{-1}v_2H_0-v_{-1}v_3H_1+v_{-1}v_4H_2+v_0v_1H_3$	$0.5\cdot\begin{pmatrix} 0 & sb_2 \\ -sb_2 & 0 \end{pmatrix}$
L_{34}	H_3	$0.5\cdot\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Таблица III: коэффициенты разложений по $\partial_t, \partial_p, \partial_q, \partial_r$				
Векторное поле	∂_t	∂_p	∂_q	∂_r
$H_0 = L_{-10} - L_{12}$	0	0	-1	1
$H_1 = L_{-11} - L_{02}$	0	sin(q-r)	(coth p)cos(q-r)	-(tanh p)cos(q-r)
$H_2 = L_{-12} + L_{01}$	0	cos(q-r)	(coth p)sin(r-q)	(tanh p)sin(q-r)
$J_0 = L_{-10} + L_{12}$	0	0	1	1
$J_1 = L_{-11} + L_{02}$	0	sin(q+r)	(coth p)cos(q+r)	(tanh p)cos(q+r)
$J_2 = L_{-12} - L_{01}$	0	cos(q+r)	-(coth p)sin(q+r)	-(tanh p)sin(q+r)
$H_3 = J_3 = L_{34}$	1	0	0	0

Таблица IV						
L	Lv_{-1}	Lv_0	Lv_1	Lv_2	Lv_3	Lv_4
L_{-10}	0	0	0	0	v_4	$-v_3$
L_{-11}	0	0	0	v_4	0	v_2
L_{-12}	0	0	v_4	0	0	v_1
L_{-13}	$v_{-1}v_0v_4$	${v_{-1}}^2v_4$	$-v_0v_1v_4$	$-v_0v_2v_4$	$-v_0v_3v_4$	$v_0(1-{v_4}^2)$
L_{-14}	${v_0}^2v_4$	$-v_{-1}v_0v_4$	$-v_{-1}v_1v_4$	$-v_{-1}v_2v_4$	$-v_{-1}v_3v_4$	$v_{-1}(1-{v_4}^2)$
L_{01}	0	0	0	v_3	v_2	0
L_{02}	0	0	v_3	0	v_1	0
L_{03}	$-v_{-1}v_0v_3$	${v_{-1}}^2v_3$	$-v_0v_1v_3$	$-v_0v_2v_3$	$v_0(1-{v_3}^2)$	$-v_0v_3v_4$
L_{04}	$v_3{v_0}^2$	$-v_{-1}v_0v_3$	$-v_{-1}v_1v_3$	$-v_{-1}v_2v_3$	$v_{-1}(1-{v_3}^2)$	$-v_{-1}v_3v_4$
L_{12}	0	0	$-v_2$	v_1	0	0
L_{23}	$v_{-1}v_0v_1$	$-{v_{-1}}^2v_1$	$v_0(1+{v_1}^2)$	$v_0v_1v_2$	$v_0v_1v_3$	$v_0v_1v_4$
L_{31}	$-v_{-1}v_0v_2$	${v_{-1}}^2v_2$	$-v_0v_1v_2$	$-v_0(1+{v_2}^2)$	$-v_0v_2v_3$	$-v_0v_2v_4$
L_{14}	$-v_2{v_0}^2$	$v_{-1}v_0v_2$	$v_{-1}v_1v_2$	$v_{-1}(1+{v_2}^2)$	$v_{-1}v_2v_3$	$v_{-1}v_2v_4$
L_{24}	$-v_1{v_0}^2$	$v_{-1}v_0v_1$	$v_{-1}(1+{v_1}^2)$	$v_{-1}v_1v_2$	$v_{-1}v_1v_3$	$v_{-1}v_1v_4$
L_{34}	$-v_0$	v_{-1}	0	0	0	0
H_0	0	0	v_2	$-v_1$	v_4	$-v_3$
H_1	0	0	$-v_3$	v_4	$-v_1$	v_2
H_2	0	0	v_4	v_3	v_2	v_1
$H_3 = J_3$	$-v_0$	v_{-1}	0	0	0	0
J_0	0	0	$-v_2$	v_1	v_4	$-v_3$
J_1	0	0	v_3	v_4	v_1	v_2
J_2	0	0	v_4	$-v_3$	$-v_2$	v_1

Литература

1. Baez J.C., Segal I.E., Zhou Z. Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory. Princeton University Press, Princeton, 1992.
2. Гуц А.К., Левичев А.В. К основам теории относительности. Доклады Академии Наук СССР. 1984. № 277. С. 1299–1303.
3. Kon M., Levichev A. Towards Analysis in Space-Time Bundles Based on Pseudo-Hermitian Realization of the Minkowski Space // Journal of Functional Analysis. 2016. (submitted).
4. Левичев А.В., Левичева В.Ю. Анализ в космических расслоениях. Выпуск 1: Основы хронометрии и скалярное расслоение. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 1993.
5. Levichev A.V. Segal's chronometry: emergence of the theory and its application to physics of particles and interactions // The Search for Mathematical Laws of the Universe: Physical Ideas, Approaches and Concepts, eds. MM Lavrentiev and VN Samoilov (Novosibirsk: Academic Publishing House). 2010. C. 69–99.
6. Levichev A.V. Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory // Physica Scripta. 2010. T. 83, N. 1. C. 015101.
7. Levichev A. A Contribution to the DLF-theory: on singularities of the SU(2,2)-action in U(1,1) // Journal of Modern Physics. 2016. (accepted for publication).
8. Levichev A.V., Feng J. More on the Mathematics of the DLF Theory: Embedding of the Oscillator World L into Segal's Compact Cosmos D // AJUR. 2013. V. 11(3–4). P. 29–33.
9. Paneitz S.M., Segal I.E. Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle // Journal of Functional Analysis. 1982. V. 47. P. 78–142.
10. Segal I.E. Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy. New York: Academic Press, 1976.
11. Segal I.E., Jakobsen H.P., Ørsted B., Paneitz S.M., Speh B. Covariant chronogeometry and extreme distances: Elementary particles // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1981. T. 78, N. 9. C. 5261–5265.
12. Segal I.E. Is the Cygnet the quintessential baryon? // Proc. Natl. Acad. Sci. 1991. V. 88. P. 994–998.
13. Segal Archive, MIT, `http://math.mit.edu/segal-archive/publications_03_09_08.pdf`
14. Werth J.-E. Conformal group actions and Segal's cosmology // Rep. Mathematical Phys. 1986. V. 23(2). P. 257–268.
15. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Annals of Mathematics. 1939. V. 40 (1). P. 149-204.

U(1,1)-BASED ANALYSIS IN SPACE-TIME BUNDLES: THE TABLES OF THE INFINITESIMAL SU(2,2)-ACTION

A.V. Levichev[1]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Senior Researcher, e-mail: alevichev@gmail.com
A.Yu. Palyanov[2,3]
Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Researcher, e-mail: palyanov@iis.nsk.su

[1]Sobolev Institute of Mathematics
[2]A.P. Ershov Institute of Informatics Systems
[3]Novosibirsk State University

Abstract. Segal's Chronometric Theory is based on the space-time **D** which can be represented by a Lie group with a causal structure determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(2)$. Similarly, the space-time **F** is represented by a Lie group with a causal structure determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(1,1)$. The Lie groups G, G_F are introduced as two representations of $SU(2,2)$ which are conjugate via particular matrix W from $Gl(4)$. Linear-fractional G-action on **D** is global and conformal; it is instrumental in the analysis of space-time bundles which is based on the parallelizing group $U(2)$. The latter analysis was carried out by Paneitz and Segal in 1980s. Linear-fractional G_F-action on **F** (introduced by Levichev in 2000s) is also conformal. Despite singularities of the latter action, the group $U(1,1)$ can be chosen as the parallelizing one. In the paper we obtain tables (similar to the "Paneitz-Segal tables") which are necessary in order to perform the analysis of space-time bundles based on the parallelizing group $U(1,1)$.

Keywords: parallelizations of space-time bundles, Segal's cosmos, conformal group $SU(2,2)$ actions on $U(2)$ and on $U(1,1)$, DLF-theory.

Дата поступления в редакцию: 23.07.2016