Математические структуры и моделирование
2016. №4(40). С. 17–23

УДК 519.214

О МОМЕНТАХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе получены оценки для моментов и равномерная интегрируемость определённого класса функций от случайных величин, которые образуют стационарную последовательность с равномерно сильным перемешиванием.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, равномерно сильное перемешивание, равномерная интегрируемость.

В работе [1] на основе некоторого аналога неравенства М. Пелиград получены оценки моментов так называемых обобщённых сумм слабо зависимых случайных величин. Для «обычных» сумм такие оценки впервые получены И. А. Ибрагимовым (см., например, [3, лемма 18.5.1]); на этих оценках базировалось доказательство центральной предельной теоремы для последовательностей с φ-перемешиванием. В настоящей работе показывается, как разработанную в [1] технику модифицировать для более общей ситуации — для функций от случайных величин, не являющихся, вообще говоря, результатом последовательного применения бинарных операций (обобщённых сумм).

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ (то есть, определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем предполагать, что функция f при любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{D}$, $y_1, ..., y_n \in \mathbb{D}$ удовлетворяет следующим условиям (условия A):

A_1. Симметричность: $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

A_2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

A_3. $|f(\mathbf{x} \pm \mathbf{y})| \leqslant |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})|$.

Ясно, что из условия A_3 следует утверждение:

A_3'. $||f(x_1, x_2, ..., x_n)| - |f(x_1, x_2, ..., x_k)|| \leqslant |f(x_{k+1}, , ..., x_n)|$ для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. (Согласно сказанному выше $f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.)

Более того, из A_3 вытекает $|f(x_k)| \leqslant |f(x_1, x_2, ..., x_k)| + |f(x_1, x_2, ..., x_{k-1})|$, $k = 2, ..., n$, так что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |f(x_k)| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant 2(|f(x_1)| + ... + |f(x_n)|). \tag{1}$$

В [2] приводятся многочисленные примеры функций, удовлетворяющих условиям A.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ – σ -алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = f\left(\frac{\xi_k}{b}, ..., \frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_n(b) = X_{1,n}(b), \quad X_n = X_n(1),$$

$$\overline{X}_n(b) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k(b)|, \quad Y_k(b) = f\left(\frac{\xi_k}{b}\right), \quad k, m, n \in \mathbb{N},\ b > 0.$$

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $x > 0$ и $k \leqslant n$, а функция f удовлетворяет условиям A. Если последовательность $\{c_n\}$ такова, что*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_j(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то при любых $a > 0$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_k(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant x\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i = \{\overline{X}_{i-1}(c_n) < 2x + \varepsilon \leqslant |X_i(c_n)|\},\ i = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = \{\overline{X}_k(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\}$.

В силу свойства A_3' при $i + m \leqslant k$

$$\{|X_i(c_n)| \geqslant 2x + \varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| < \frac{x}{m},\ |X_{i+m,k}(c_n)| < \varepsilon\} \subseteq \{|X_k(c_n)| \geqslant x\},$$

то есть при $1 \leqslant k \leqslant n - 1$

$$\{|X_k(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_i(c_n)| < 2x + \varepsilon\} \cup \{|X_{i+m,k}(c_n)| \geqslant \varepsilon\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\},$$

откуда

$$\{|X_k(c_n)| < x, E_i\} \subseteq \{|X_{i+m,k}(c_n)| \geqslant \varepsilon, E_i\} \cup \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}, E_i\right\}. \qquad (2)$$

С помощью (2) и условия φ-перемешивания получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_k(c_n) \geqslant x\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant a\} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| < x,\ E_i\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant x\} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{|X_{i+m,k}(c_n)| \geqslant \varepsilon, E_i\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant x\} + \left(\max_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbf{P}\{|X_i(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m)\right) \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{E_i\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant x\} + \gamma \mathbf{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_j(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Следующее предложение — это аналог неравенства М. Пелиград (леммы 3.1 из [4]).

Лемма 2. *Если последовательность* $\{c_n\}$ *и* $m > 0$ *таковы,*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то при любом $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\} + \frac{1}{1-\gamma} \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)| \geqslant \frac{x}{m}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2x+\varepsilon \leqslant |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\}$. В силу свойства A_3'

$$|X_n(c_n)| \leqslant |X_{k-1}(c_n)| + \sum_{j=k}^{k+m} |Y_j(c_n)| + |X_{k+m,n}(c_n)|,$$

откуда следует

$$\left\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m\right\} \subseteq \{E_k,\ |X_{k+m,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon\}. \quad (3)$$

Аналогично выводится

$$\left\{X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m\right\},$$

следовательно

$$\left\{X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} =$$

$$= \left\{ X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon,\ \overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon,\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < \frac{x}{m} \right\}. \qquad (4)$$

С помощью (3) и (4) получаем $\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + \varepsilon\} \leqslant$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{ X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m \right\} + \mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{ X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon, \overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m \right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\} = \sum_{k=1}^{n-m} \mathbf{P}\left\{ X_n(c_n) \geqslant 3x + 2\varepsilon, E_k, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| < x/m \right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\}. \qquad (5)$$

Из соотношений (3), (5) и условия φ-перемешивания следует

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geqslant 3x+2\varepsilon\} \leqslant \sum_{k=1}^{n-m} \mathbf{P}\{E_k,\ |X_{k+m,n}(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\} + \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \right) \sum_{k=1}^{n-m} \mathbf{P}\{E_k\} =$$

$$\leqslant \lambda \mathbf{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant 2x + \varepsilon\} + \mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j(c_n))| \geqslant x/m \right\}.$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 1 выводим утверждение леммы. ■

Покажем, как с помощью леммы 2 можно получать оценки для моментов величин $X_n(c_n)$. Пусть $\mathbf{E}|Y_1(c_n))|^p < \infty$. Тогда в силу (1) $\mathbf{E}|X_n(c_n))|^p < \infty$, и если $\gamma > 0$ в формулировке леммы 2 таково, что $\dfrac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$, то с помощью леммы 2 выводим

$$(3+2\varepsilon)^{-p}\mathbf{E}|X_n(c_n)|^p = p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant (3+2\varepsilon)x\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 1 + p\int_1^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x + 2\varepsilon\}\,dx \leqslant 1+$$

$$+\frac{p\gamma}{1-\gamma}\int_0^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant x\}\,dx + \frac{p}{1-\gamma}\int_0^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\left\{ \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)| \geqslant \frac{x}{m} \right\} dx =$$

$$= 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{E}|X_n(c_n)|^p + \frac{m^p}{(1-\gamma)}\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)|^p.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}|X_n(c_n)|^p \leqslant A + B\,\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n)|^p, \tag{6}$$

где A и B не зависят от n.

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbf{E}S_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. К последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_n^{-2}S_n^2\}$ равномерно интегрируема. Существенный прогресс в предельных теоремах для последовательностей с φ-перемешиванием достигнут М. Пелиград в [4] на основе доказательства того, что равномерная интегрируемость $\{\sigma_n^{-2}S_n^2\}$ равносильна равномерной интегрируемости $\{\sigma_n^{-2}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i^2\}$.

Получим здесь аналогичный результат, где вместо сумм S_n участвуют функции $f(\xi_1, ..., \xi_n)$, удовлетворяющие условиям A .

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям A, $E|Y_1(c_n))|^p < < \infty$, а последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ таковы,*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geqslant \varepsilon\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1.$$

Тогда последовательность $\{\overline{X}_n^p(c_n)\}$ равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда равномерно интегрируема $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n))|^p\right\}$.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geqslant N\} = -\int_N^\infty x^p\,d\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\} = N^p\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant N\} + p\int_N^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\}\,dx.$$

В силу леммы 2 при $N \geqslant 1$

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant (3+2\varepsilon)N\} \leqslant (3+2\varepsilon)^p N^p\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant N(3+2\varepsilon)\}+\\ +p(3+2\varepsilon)^p\int_N^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant 3x+2\varepsilon\}\,dx \leqslant\\ \leqslant \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant N\}+\\ +\frac{m^p(3+2\varepsilon)^p}{(1-\gamma)}\mathbf{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n)|^p, |\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n)| \geqslant N/m\right\}.\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть последовательность $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n))|^p\right\}$ равномерно интегрируема, то есть

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbf{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n)|^p, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_k(c_n)| \geqslant N\right\} = 0$$

и пусть
$$R = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\left\{|X_n(c_n)|^p, |X_k(c_n)| \geqslant N\right\}.$$
Из равномерной интегрируемости $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n))|^p\right\}$ и (6) следует
$$\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}|X_n(c_n)|^p \leqslant A + B \sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)|^p < \infty,$$
так что $0 \leqslant R < \infty$, а из (7) вытекает $R \leqslant \tau R$, где $\tau = \dfrac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$, следовательно, $R = 0$ и последовательность $\{|X_n(c_n)|^p\}$ равномерно интегрируема.

Далее, из леммы 1 при $N \geqslant 1$ аналогично (7) выводим
$$\mathbf{E}\{\overline{X}_n^p(c_n), \overline{X}_n(c_n) \geqslant (2+\varepsilon)N\} \leqslant \frac{\gamma(2+\varepsilon)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geqslant N\} +$$
$$+\frac{\gamma(2+\varepsilon)^p m^p}{1-\gamma}\mathbf{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)|^p, |\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n)| \geqslant N/m\right\},$$
следовательно, из равномерной интегрируемости $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n))|^p\right\}$ и $\{|X_n(c_n)|^p\}$ следует равномерная интегрируемость $\{\overline{X}_n^p(c_n)\}$.

Наоборот, в силу (1) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n))|^p \leqslant 2^p \overline{X}_n^p(c_n)$ и равномерная интегрируемость $\{\overline{X}_n^p(c_n)\}$ влечёт равномерную интегрируемость $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k(c_n))|^p\right\}$ очевидным образом. ■

Будем говорить, что для функции f выполнено условие A_4, если при любом $\lambda > 0$
$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda f(x_1, ..., x_n).$$
В большинстве примеров, приводимых в [2], функции удовлетворяют условию A_4 (в том числе так называемые симметрические калибровочные функции).

Если функция f удовлетворяет условию A_4, то из оценок (6) получаем следующий результат, обобщающий теорему 1 из [2] и лемму 18.5.1 из [3].

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям A_1–A_4 и пусть $0 < q < p$, $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$. Тогда*
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|^p \leqslant A\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|^q\right)^{p/q} + B\,\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^p,$$
где A и B не зависят от n.

Доказательство. Пусть $0 < q < p$, а $\varepsilon > 0$, $m > 0$ и $\gamma > \varphi(m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Обозначим $c_n^q = N \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|^q$, где $N > 0$ таково, что
$$\varphi(m) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k| \geqslant \varepsilon c_n\} \leqslant \varphi(m) + \frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k|^q}{\varepsilon^q c_n^q} \leqslant \gamma, \quad \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1.$$

Так как $\{c_n\}$ неубывающая последовательность, то при $k \leqslant n$ и при любом $x > 0$ из леммы 2 следует

$$\mathbf{P}\{|X_k| \geqslant (3x+2\varepsilon)c_n\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\{|X_k| \geqslant xc_n\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_k| \geqslant \frac{xc_n}{m}\right\},$$

откуда аналогично (6) выводим

$$\mathbf{E}|X_k|^p \leqslant Ac_n^p + B\mathbf{E}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|^p,\ k \leqslant n, \tag{8}$$

где $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от n. Из последнего соотношения следует утверждение теоремы. ■

Пусть $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbf{E}S_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 [3, теорема 18.2.3], которая при $n \to \infty$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности [5, с. 26], так что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k \sim \sigma_n$. Далее, при $p > 2$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p \leqslant n\mathbf{E}|\xi_1|^p = o(\sigma_n^p),$$

и из теоремы 2 следует неравенство И. А. Ибрагимова (лемма 18.5.1 из [3]): $\mathbf{E}|S_n|^p \leqslant C\sigma_n^p$, где $C > 0$ не зависит от n.

Литература

1. Гринь А.Г. О моментах обобщённых сумм // Математические структуры и моделирование. 2015. №. 4(36). С. 23-28.
2. Гринь А.Г. О предельных теоремах для функций от независимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 29. С. 4-12.
3. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
4. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, N. 4. P. 1304–1313.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985, 141 с.

ON THE MOMENTS OF SYMMETRIC FUNCTIONS OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

A.G. Grin'
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Estimates for the moments and uniform integrability of a certain class of functions of random variables with uniformly strong mixing is obtained in this article.

Keywords: symmetric functions of random variables, uniformly strong mixing condition, uniform integrability.

Дата поступления в редакцию: 09.10.2016