

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Е.В. Рабинович

д.т.н., профессор, e-mail: erabinovich1952@gmail.com

Факультет автоматики и вычислительной техники, Новосибирский государственный
технический университет

Аннотация. Рассматриваются системные свойства и механизмы управления режимами эволюции динамической системы, состоящей из двух связанных нелинейных дискретных отображений. Основное внимание уделяется влиянию диссипативной и инерциальной связей на периодические, квазипериодические и хаотические режимы.

Ключевые слова: нелинейное дискретное отображение, бифуркационная диаграмма, карта динамических режимов.

Введение

Современная европейская медицина все более пристально изучает диагностические и лечебные подходы восточной медицины, признавая высокую эффективность последних. Во всем мире предпринимаются попытки построения физических и математических моделей, адекватных основным понятиям и концепциям восточной медицины. Ряд моделей рассматривает человеческий организм с позиций теории открытых нелинейных динамических систем.

Особое внимание уделяется распространённым в биофизике моделям, обладающим хаотическими режимами динамики, отчасти потому что они весьма чувствительны к слабым внешним воздействиям [1, 2]. В частности моделирование производится на основе динамических систем, образованных из взаимосвязанных диссипативных структур, предложенных И. Пригожиным для неравновесных термодинамических систем [3]. Такие модели, согласованные с представлениями восточной медицины, рассматривают циклические изменения состояний организма человека, исходя из режимов динамики водных диссипативных структур организма.

Анализ динамики модели позволяет определять состояния каждой структуры и, при необходимости, оказывать корректирующее воздействие на неё. Коррекция режима эволюции диссипативной структуры может быть осуществлена как за счёт внешнего воздействия, так и при помощи изменения величины динамических управляющих параметров и коэффициентов связи между структурами [4].

В данной работе исследуется модель системы, образованной двумя циклически изменяющими своё состояние диссипативными структурами, представленной двумя связанными гармоническими дискретными отображениями. Рассматриваются особенности динамики системы с комбинацией диссипативной и инерционной связей. В разделе 2 при помощи бифуркационных диаграмм исследуется влияние динамики одного дискретного отображения на режимы динамики другого. В разделе 3 при помощи карт динамических режимов проиллюстрировано влияние величины коэффициентов диссипативной и инерционной связей на периодические, квазипериодические и хаотические режимы эволюции системы.

1. Методы исследования

Дискретным отображением множества M самого в себя $f : M \rightarrow M$ называется уравнение вида $x_{n+1} = f(x_n)$.

Поскольку каждая точка x под действием итераций отображения f перемещается по множеству M , то отображение f задаёт эволюцию динамической системы на множестве M с течением дискретного времени n .

Точка x называется *неподвижной* точкой отображения f , если $f(x_n) = x$ для любого n . Точка x называется *периодической* точкой отображения f периода k , если $f(x_k) = x$, причём $f(x_i) \neq x$ при $i < k$. Если для некоторой точки x определены все итерации $f(x_n)$, то множество $f(x_n)$ называется *аттрактором* или *орбитой точки* x под действием отображения f . Орбита периодической точки состоит из k точек и называется *циклом* периода k . Точка x является периодической точкой отображения f периода k , если она является неподвижной точкой итерации порядка k , но не является периодической точкой итераций меньшего порядка [5].

Для описания системы, состоящей из двух связанных дискретных отображений $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_{n+1} = f(y_n)$ необходимо задать связи между отображениями.

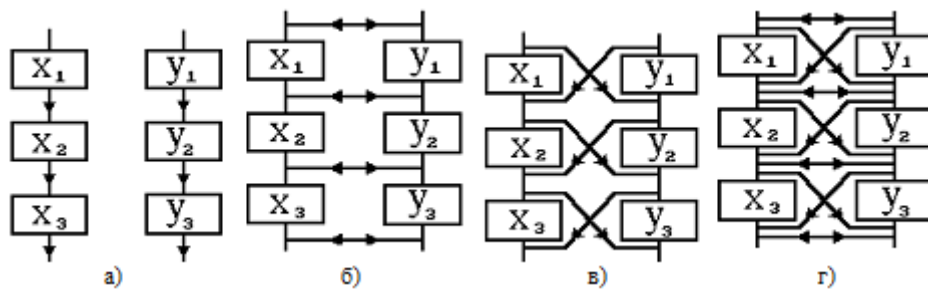


Рис. 1. Виды связей в системе, состоящей из двух отображений [6].

Рисунок 1 иллюстрирует структуру системы при наличии различных вариантов связей. Рисунок 1, а) представляет систему из двух независимых дискретных отображений. Рисунок 1, б) – систему со связью между итерациями

одного порядка. Уравнения, описывающие динамическую систему, имеют вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + D(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + D(f(x_n) - f(y_n)).\end{aligned}$$

Такая связь стремится выровнять мгновенные состояния подсистем, поэтому её называют *диссипативной*, а коэффициент D — коэффициентом диссипативной связи.

Рисунок 1, в) представляет систему со связью между итерациями предшествующего и текущего порядков. Уравнения, описывающие динамическую систему, имеют вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + C(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + C(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Такая связь способствует сохранению памяти о состоянии на предыдущем шаге и именуется *инерционной*, а коэффициент C называется коэффициентом инерционной связи.

Наконец, в системе может присутствовать комбинация двух приведённых выше типов связи (рис. 1, г). Уравнения, описывающие динамическую систему, имеют вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + D(f(y_n) - f(x_n)) + C(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + D(f(x_n) - f(y_n)) + C(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Рассмотрим дискретное отображение $x_{n+1} = \cos(Ax_n)$, являющееся одной из форм отображения окружности на себя, и демонстрирующее достаточно сложную хаотическую эволюцию. Для анализа динамики отображения косинуса построим зависимость $x = f(x) = \cos(Ax)$ установившихся значений точки x отображения от динамического управляющего параметра A (см. рис. 2).

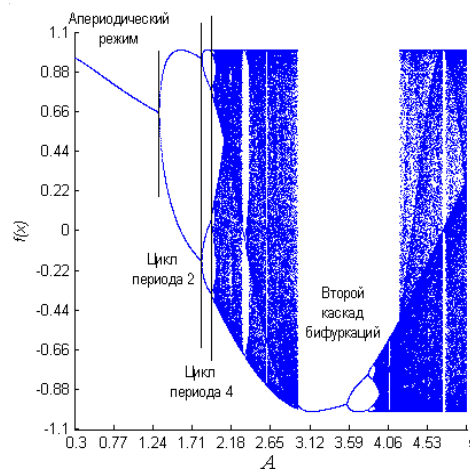


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения $x_{n+1} = \cos(Ax_n)$

При малом изменении управляющего параметра A в начале системы координат динамика, определяемая отображением, меняется незначительно. Немного изменяются значения неподвижных и периодических точек. Однако при некоторых значениях параметра A происходит качественное изменение характера динамики — изменяется количество неподвижных точек. Скачкообразные изменения качественного поведения системы при плавном изменении управляющего параметра называются *бифуркациями*.

Бифуркационная диаграмма, отражающая каскады бифуркаций, является одним из основных инструментов исследования динамики поведения системы, так как наглядно представляет режимы эволюции системы при изменении её управляющего параметра. На рис. 2 слева имеет место бифуркация удвоения периода.

Если задана система, состоящая из нескольких отображений, например, $f_1(x) = \cos(Ax)$ и $f_2(y) = \cos(By)$, наглядное представление о её поведении даёт *карта динамических режимов* — диаграмма на плоскости управляющих параметров A и B , где области различных режимов показаны определённым цветом. При этом каждая точка плоскости управляющих параметров характеризует режим, возникающий после завершения переходного процесса итераций обоих отображений [7].

Имеет место прямая взаимосвязь карты динамических режимов и бифуркационной диаграммы одного дискретного отображения. Если карту динамических режимов представить в виде трёхмерной объёмной фигуры, то бифуркационная диаграмма первого дискретного отображения является сечением этой фигуры плоскостью, полученным при фиксированном значении управляющего параметра второго отображения.

2. Влияния динамического режима одного отображения на режим другого

После введения связей между отображениями исследуемая система имеет вид:

$$f_1(x) = \cos(Ax), \quad f_2(y) = \cos(By),$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n) + D(f_2(y_n) - f_1(x_n)) + C(y_n - x_n) = \\ &= (1 - D) \cos(Ax_n) - Cx_n + D \cos(By_n) + Cy_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f_2(y_n) + D(f_1(x_n) - f_2(y_n)) + C(x_n - y_n) = \\ &= D \cos(Ax_n) + Cx_n + (1 - D) \cos(By_n) - Cy_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим изменения, которые происходят с бифуркационной диаграммой отображения $f_1(x)$ при вариации управляющего параметра B отображения $f_2(y)$ для небольших фиксированных величин коэффициентов связи ($D = 0,01$ и $C = 0,05$).

1. $B = 0$ (рис. 3, а). У отображения $f_2(y)$ при данном значении управляющего параметра наблюдается апериодический режим. Этот режим отображения $f_2(y)$ не оказывает никакого влияния на динамику отображения $f_1(x)$, бифуркационная диаграмма практически совпадает с диаграммой одиночного отображения.
2. $B = 1,5$ (рис. 3, б). У отображения $f_2(y)$ наблюдается цикл периода 2. Под действием этого периодического режима апериодический режим отображения $f_1(x)$ тоже становится периодическим режимом периода 2. Первая точка бифуркации удвоения периода пропадает. Уменьшаются области стабильных периодических режимов в хаотической области (области периодов 3 и 4 существенно сужаются, а при дальнейшем увеличении B почти пропадают).
3. $B = 2$, $B = 2,075$ (рис. 3, в; г). При данных значениях управляющего параметра у отображения $f_2(y)$ наблюдаются соответственно циклы периодов 4 и 8. Под действием этих режимов вместо апериодического режима отображения $f_1(x)$ возникают циклы соответствующих периодов. Заметим, что у линий бифуркационной диаграммы отображения $f_1(x)$ появляются разрывы, что не свойственно одиночным отображениям. Кроме того, можно отметить влияние уже и на второй каскад бифуркаций удвоения периода.
4. $B = 2,51$ (рис. 3, д). При данном значении управляющего параметра у отображения $f_2(y)$ наблюдается хаотический режим. У отображения $f_1(x)$ наблюдается непериодическая динамика практически во всех областях. Появляются только два периодических режима периода 3 и 6 вместо части областей апериодического режима и режима периода 2. Во втором каскаде бифуркаций пропадают все периодические режимы.
5. $B = 2,53$ (рис. 3, е). У отображения $f_2(y)$ наблюдается цикл периода 3. На месте апериодического режима отображения $f_1(x)$ тоже появляется цикл периода 3.
6. $B = 3,1$ (рис. 3, ж). У отображения $f_2(y)$ наблюдается цикл периода 4, который и появляется на месте апериодического режима отображения $f_1(x)$. Однако второй каскад бифуркаций вновь обретает периодические режимы удвоения периода.
7. $B = 3,5$ (рис. 3, з). У отображения $f_2(y)$ снова наблюдается хаотический режим. Но на этот раз отчётливо видны участки периодических режимов внутри хаотического режима отображения $f_1(x)$.

Из сделанных наблюдений ясно, что в системе, состоящей из двух связанных косинусных отображений, изменение динамики одного отображения сильно влияет на режимы динамики другого, которые претерпевают существенные изменения.

Основная черта этих изменений заключается в том, что возникают режимы синхронизации или так называемые *резонансные циклы* [8]. Под синхронизацией понимается ситуация, возникающая при взаимодействии двух систем, каждая из которых «по одиночке» демонстрирует периодические колебания, и заключающаяся в том, что системы могут начать колебаться на одной частоте, даже если до введения взаимодействия их частоты были различны. Здесь также можно говорить и о «хаотической синхронизации», когда хаотический режим одного отображения «захватывает» (делает квазипериодическим или хаотическим) периодический режим другого.

Квазипериодический режим динамической системы отличается от периодического режима тем, что итерации дискретного отображения посещают периодический аттрактор не точно по неподвижным точкам, а в некоторой небольшой их окрестности. В среднем итерации квазипериодического режима лежат в небольшой окрестности периодического аттрактора. Квазипериодический режим отличается также и от хаотического режима, итерации которого посещают *странный аттрактор* [9].

Квазипериодический режим тесно связан с режимом синхронизации, потому что при разрушении синхронного режима динамическая система сначала переходит на квазипериодический, а затем на хаотический режим эволюции. Границы между этими режимами характеризуются специальными видами бифуркационных кривых.

3. Влияние величин связей на динамику системы

Предпримем качественное описание основных динамических режимов, наблюдаемых в системе, их трансформацию при изменении значений управляющих параметров, а также отметим значения управляющих параметров, соответствующих смене динамических режимов (бифуркациям).

Решение перечисленных задач возможно с помощью карт динамических режимов, выявляющих основные свойства, демонстрируемые системой в заданных диапазонах управляющих параметров A и B (например, от -10 до 10) и значений коэффициентов связей инерционной C и диссипативной D (от 0 до 1).

Следует заметить, что в силу мультистабильности динамических систем карты режимов могут несколько отличаться для разных начальных условий интегрирования дискретного отображения.

На рис. 4 приведена рядовая карта режимов рассматриваемой динамической системы, состоящей из отображений $f_1(x) = \cos(Ax)$ и $f_2(y) = \cos(By)$ в системе координат управляющих параметров (A, B) при коэффициентах связи $C = 0,35$ и $D = 0,45$. Области различных режимов закрашены разными цветами. Так аperiodический режим имеет зелёный цвет, режим периода 2 — жёлтый цвет, режим периода 3 — розовый цвет, режим периода 4 — синий цвет, режим периода 8 — красный цвет. Многочисленные области непериодических и хаотических режимов закрашены серым цветом.

Легко заметить, что карта режимов имеет 4 оси симметрии (горизонтальная, вертикальная и две диагональные).

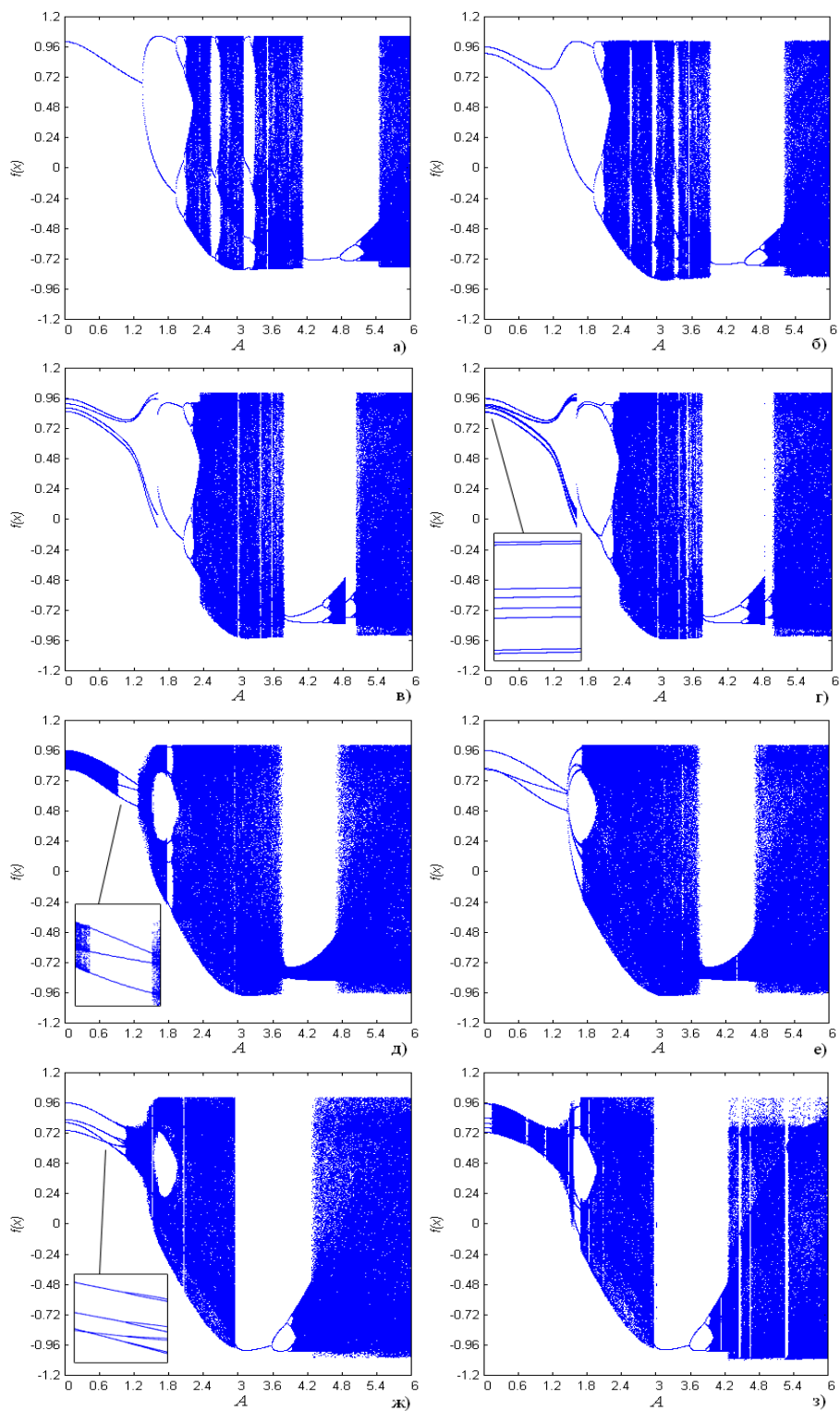


Рис. 3. Изменения бифуркационной диаграммы отображения $f_1(x) = \cos(Ax)$ при смене режимов эволюции отображения $f_2(y) = \cos(By)$

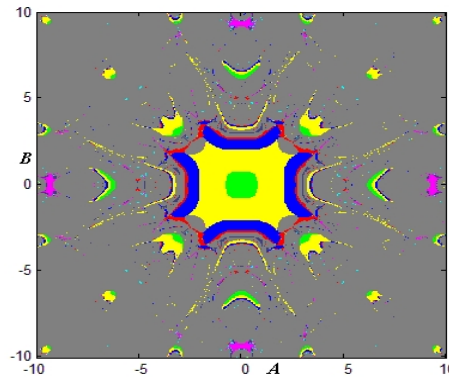


Рис. 4. Карта режимов системы двух связанных отображений $f_1(x) = \cos(Ax)$ и $f_2(y) = \cos(By)$. Коэффициенты инерционной $C = 0,35$ и диссипативной $D = 0,45$ связей

Эта простая карта демонстрирует большое разнообразие режимов и разделяющих их линий бифуркаций. Она состоит из центральной зоны периодических режимов, соответствующих первому каскаду бифуркации удвоения цикла, и разбросанных по периферии отдельных областей периодических режимов в виде структур нескольких типичных форм.

Эти формы представляют области резонансных циклов разных периодов и обычно имеют вид дуг с заострёнными концами или сужающихся к своему основанию языков, встроенных в область непериодических режимов. Система областей периодических режимов подобного типа носит название *языков Арнольда*, по имени российского математика В.И. Арнольда, и характеризует области синхронизации отображений с рациональным отношением фаз. Границы языков Арнольда являются линиями бифуркаций перехода к хаосу через разрушение квазипериодических движений. Такие бифуркации называют бифуркациями Неймарка-Сакера [10].

Анализируя влияние величин коэффициентов связи на динамику системы в целом, можно отметить, что при увеличении любой из связей между отображениями динамика системы усложняется. Это выражается в более частой смене периодических режимов, в усложнении формы и увеличении количества периодических областей на карте режимов.

Увеличение значения коэффициента диссипативной связи D приводит к увеличению доли периодических и уменьшению доли непериодических и хаотических режимов (рис. 5, а–г). Это выражается в увеличении размеров и числа областей периодических режимов. При увеличении значения коэффициента диссипативной связи области периодических режимов «расходятся» от центра карты режимов к её периферии. При значениях $D > 0,2$ на карте режимов проявляются языки Арнольда.

Инерционная связь оказывает более сложные воздействия на режимы, демонстрируемые системой. При увеличении инерционной связи области периодических режимов также «расходятся» от центра, но только при значениях коэффициента диссипативной связи $D < 0,5$. При $D > 0,5$ данный эффект уже явно не проявляется. В этом случае увеличение значения коэффициента инер-

ционной связи C приводит к увеличению доли непериодических и хаотических режимов (рис. 5, д; е).

Независимо от значений D увеличение коэффициента инерционной связи C приводит к существенному усложнению форм областей периодических режимов, что объясняется наличием гистерезисных явлений, характерных для инерционных систем. Формы этих областей задают семейства бифуркационных линий нескольких сценариев перехода к квазипериодическим и хаотическим режимам.

Чувствительность режимов динамической системы к приращению величины коэффициентов обеих связей возрастает при приближении к значению 0,5. При $C > 0,5$ система становится более чувствительной и к изменениям значений коэффициента D диссипативной связи.

3.1. Критические значения связей

Рисунок 6 иллюстрирует ряд выявленных особенностей, связанных с критическими значениями связей $C = 0,5$ и $D = 0,5$.

1. При значении коэффициента диссипативной связи $D = 0,5$ карта динамических режимов системы принимает упорядоченный вид (рис. 6, а). Система двух отображений вырождается в одно «сдвоенное» отображение. Оба отображения при данных условиях эволюционируют под действием итераций по одной и той же траектории, т.е. демонстрируют полностью идентичное поведение, в чем легко убедиться, подставив $D = 0,5$ в уравнение системы.
2. При $C = 0,5$ в исследуемой системе возникают области «разбегания» траекторий, то есть такие области значений управляющих параметров, при которых под действием итераций значения переменных исследуемой системы стремятся к бесконечности. На рис. 6, б) области «разбегания» обозначены белым цветом. Увеличение значения коэффициента диссипативной связи D в диапазоне от 0 до 0,5 позволяет уменьшить и добиться исчезновения (при $D = 0,5$) областей «разбегания» траекторий. При превышении значения $D = 0,5$ дальнейшее увеличение ведёт к повторному возникновению и росту областей «разбегания».
3. При значениях коэффициентов связи $C = 0,5$ и $D = 0,5$, а также при близких к этим значениям, система ярко демонстрирует свойство мультистабильности. Динамические режимы, возникающие в системе при данных значениях связей, проявляют сильную зависимость от начальных условий моделирования. Незначительное изменение исходной точки развития системы существенно изменяет карту динамических режимов (два варианта карты режимов приведены на рис. 6, в) и г)).

Выявленная зависимость режимов системы от начальных условий является нелинейной. Было обнаружено, что динамические режимы системы зависят не от величины начальных значений, а от их разности или отношения.

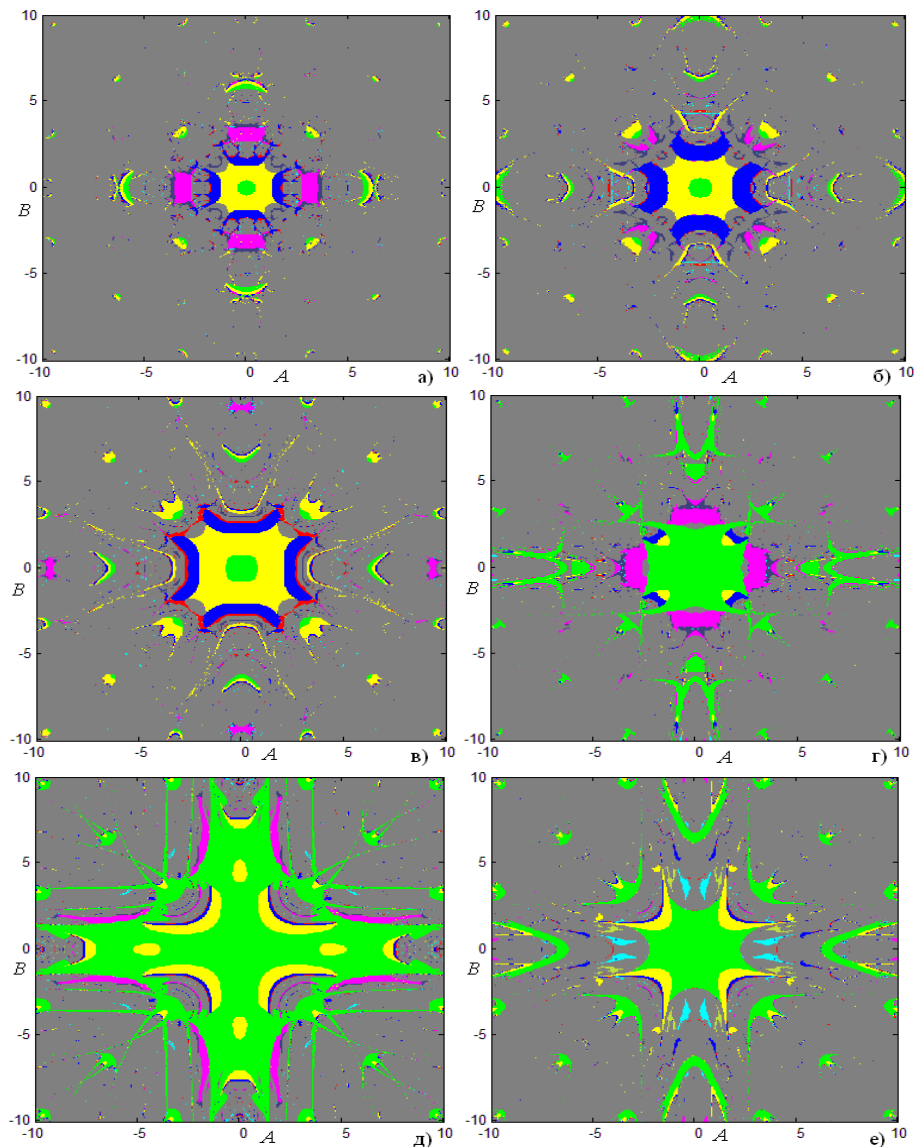


Рис. 5. Влияние величины коэффициентов связи на динамику системы двух связанных отображений: увеличение доли периодических режимов с увеличением коэффициента D (а–г); увеличение доли хаотических режимов с ростом величины коэффициента C (д–е)

3.2. Управление режимами

Управление режимами модели динамической системы нам интересно с точки зрения медицинских приложений. В этой связи коррекция состояния системы при помощи динамических управляющих параметров, задающих основные циклы жизнедеятельности организма, требует довольно больших затрат времени. Например, при помощи регулировки режима дня пациента и/или структуры и качества его питания. Коррекция же при помощи коэффициентов связи возможна за более короткие сроки и с большей интенсивностью. Изменения можно произвести, используя лекарственные средства и/или рефлексотерапевтические воздействия.

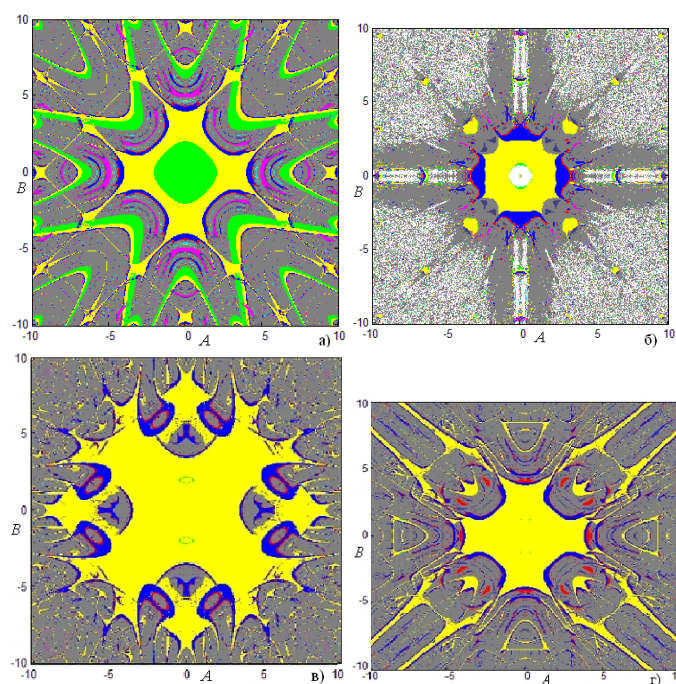


Рис. 6. Поведение системы при критических значениях параметров C и D : а) вырождение системы при $C = 0,5$; б) появление областей «разбегания» траекторий при $D = 0,5$; в) и г) проявление зависимости от начальных условий при $C = D = 0,5$

Рассмотрим, как можно воздействовать на карту динамических режимов при помощи изменения значений коэффициента C инерционной связи. Оставим постоянным значение коэффициента $D = 0,225$. Для примера обратимся к карте режимов, представленной на рис. 7, а) ($C = 0,45$). Данная карта режимов обладает рядом характерных свойств: близкая к окружности центральная область, тонкая структура неустойчивых периодических режимов, гладкие бифуркационные линии границ областей периодических режимов.

При увеличении коэффициента $C = 0,6$ (рис. 7, б)) происходит увеличение доли областей периодических режимов, усложнение их формы. Периодические области «расходятся» от центра карты режимов, появляются области синхронизации в виде ярко выраженных языков Арнольда. Тонкая структура режимов карты пропадает, неустойчивые циклы переходят в квазипериодические и хаотические режимы.

Уменьшение коэффициента C (при $C = 0,275$ карта изображена на рис. 7, в); при $C = 0,1$ — на рис. 7, г)) приводит к упрощению формы областей периодических режимов, уменьшению их доли, пропадают тонкая структура неустойчивых периодических режимов и языки Арнольда, доля непериодических и хаотических режимов увеличивается.

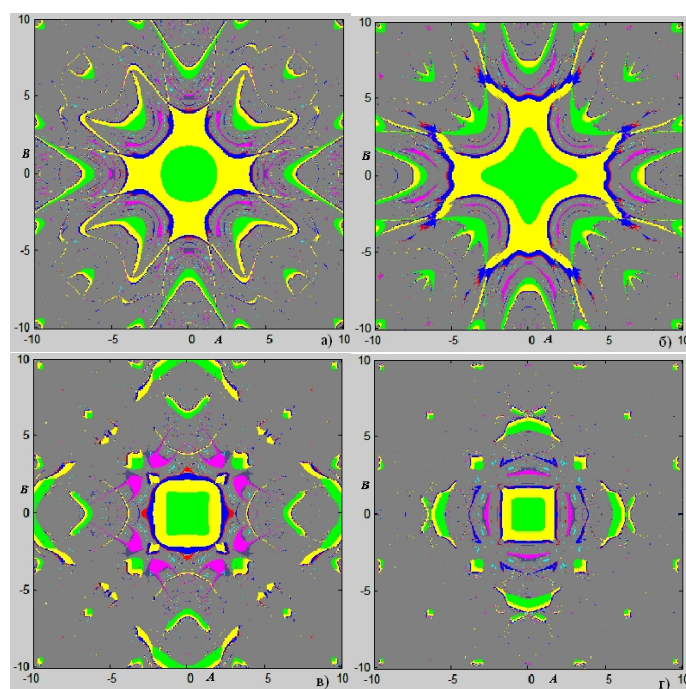


Рис. 7. Управление режимами исследуемой системы с помощью параметра C

4. Выводы

С целью построения математической модели организма человека, соответствующей основным понятиям и концепциям восточной медицины, проведено исследование упрощённой динамической системы, состоящей из двух связанных гармонических дискретных отображений. Инструментами исследования выбраны бифуркационные диаграммы и карты динамических режимов, отражающие в фазовом пространстве системы области периодической, квазипериодической и хаотической эволюции.

Показано, что изменение величины управляющего параметра одного отображения оказывает системное влияние на динамику второго связанного отображения.

Было обнаружено, что вариация величин коэффициентов диссипативной и инерционной связей между отображениями позволяет не только изменять характер процесса эволюции системы, но и образовать новые режимы эволюции. Например, увеличение значения коэффициента диссипативной связи приводит к возрастанию доли периодических режимов, возникновению явления синхронизации отображений (появлению языков Арнольда) за счёт уменьшения доли квазипериодических и хаотических режимов эволюции системы.

Выявлены условия, приводящие к «вырождению» моделируемой системы, «разбеганию» траекторий её фазового пространства, появлению мультистабильных состояний системы. При «вырождении» система из двух отображений начинает функционировать как одно «сдвоенное» отображение.

Изменение величины связи между отображениями предоставляет практиче-

ские возможности по управлению процессом эволюции системы. Слабые воздействия на коэффициенты связи позволяют в довольно широких пределах корректировать чувствительные хаотические режимы системы, что с медицинской точки зрения является очень привлекательным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М. : Мир, 1991. 248 с.
2. Goldberger A.L. Nonlinear dynamics, fractals, and chaos: applications to cardiac electrophysiology // Ann. Biomed. Eng. 1990. V. 18, № 2. P. 195–209.
3. Небрат В.В., Рабинович Е.В. Исследование механизмов лечебного действия традиционной восточной медицины с использованием информационной ЭМАТ технологии // Информационные системы и технологии: Труды междун. научн.-техн. конф. Новосибирск : НГТУ, 2003. Т. 3. С. 48–53.
4. Небрат В. В., Рабинович Е. В. Управление диссипативными состояниями человека // Международная конференция: «Наука и будущее: идеи, которые изменят мир». Москва : ГГМ им. В.И. Вернадского РАН, 14-16.04, 2004. С. 133-134.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М. : Постмаркет, 2000. 352 с.
6. Система двух связанных отображений. Два типа связи. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sgtn.d.tserv.ru/science/cml/twomap/rus/twomap.htm>.
7. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М. : Физматлит, 2001. 296 с.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М. : Физматлит, 2002. 292 с.
9. Рюэль Д. Случайность и хаос. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 192 с.
10. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М. : Наука, 1990. 312 с.

DYNAMICS PARTICULARITY OF TWO CONNECTED HARMONIC MAPPINGS SYSTEM

E.V. Rabinovich

Doctor of Engineering, Professor, e-mail: erabinovich1952@gmail.com

Novosibirsk State Technical University

Abstract. System properties and control tools of evolution conditions of dynamic system consisting of two connected harmonic mappings are consider. The emphasis is on influence factors of values of dissipative and inertial connection coefficients on the dynamics of periodic, quasiperiodic and chaotic system conditions.

Keywords: nonlinear discrete mapping, bifurcation diagram, dynamic conditions map.