Математические структуры и моделирование
2015. №4(36). С. 23–28

УДК 519.214

О МОМЕНТАХ ОБОБЩЁННЫХ СУММ

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В работе получены оценки для моментов так называемых обобщённых сумм слабо зависимых величин в терминах моментов меньших порядков. Оценки получены с помощью аналога известного неравенства М. Пелиград.

Ключевые слова: обобщённые суммы, равномерно сильное перемешивание, оценки для моментов.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ — σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность с φ-перемешиванием, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i,\ \mathbf{E}\xi_1 = 0,\ \sigma_n^2 = \mathbf{E}S_n^2 \to \infty,\ n \to \infty$, то $\mathbf{E}|S_n|^p \leqslant C\sigma_n^p,\ p > 2$, где $C > 0$ не зависит от n. Такие оценки впервые получены И. А. Ибрагимовым (см., например, [1, лемма 18.5.1]); на этих оценках базировалось доказательство центральной предельной теоремы для последовательностей с с φ-перемешиванием. В дальнейшем после появления известного неравенства М. Пелиград [2], с его помощью оценки такого типа доказывались различными авторами в различных модификациях (см., например, [3]). В настоящей работе на основе некоторого аналога неравенства М. Пелиград оценки подобного типа получены для так называемых обобщённых сумм (см. [4]).

Обобщённой суммой $x \oplus y$ будем называть бинарную операцию на $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $A_1 - A_4$ (условия $(\mathbf{A})$):

A_1. Ассоциативность: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,\ x, y, z \in \mathbb{D}$;

A_2. Коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x,\ x, y \in \mathbb{D}$;

A_3. $x \oplus 0 = x,\ x \in \mathbb{D}$;

A_4. Равномерная непрерывность в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из $|y| < \delta$ следует $|x \oplus y - x| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{D}$;

Этим условиям удовлетворяют, например, $x \oplus y = x + y,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \vee y = \max\{x, y\}, \mathbb{D} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $x \wedge y = \min\{x, y\},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, а не удовлетворяют, скажем, $x \oplus y = xy$, (не выполняются A_3 и A_4) и $x \oplus y = x + y \ (mod\ d)$, $d > 0$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ (не выполняется A_4).

Если бинарная операция $x \otimes y$ удовлетворяет условиям ($\mathbf{A}$), а $f(x)$ возрастающая выпуклая (вниз) функция такая, что $f(0) = 0$, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, то бинарная операция $x \oplus y = f^{-1}(f(x) \otimes f(y))$ также удовлетворяет условиям ($\mathbf{A}$).

Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = \left(\frac{\xi_k}{b}\right) \oplus ... \oplus \left(\frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_n(b) = X_{1,n}(b),$$

$$X_n = X_n(1), \quad \overline{X}_n(b) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k(b)|, \ k, m, n \in \mathbb{N}, \ b > 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что если*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{P}\{|X_k(xc_n)| \geqslant \delta\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1, \ x > 0,$$

то при любых $a > 0$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n(xc_n) \geqslant a + \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \geqslant a\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \geqslant \delta x c_n\right\}\right).$$

Доказательство. Из свойств $A_1 - A_4$ выводится, что при любом натуральном m для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при любом $x > 0$

$$\{|\xi| \geqslant x + \varepsilon, \ |\eta| < \delta\} \subseteq \ \{|\xi \oplus \eta| \geqslant x\}. \tag{1}$$

$$\{|\xi| \geqslant x + \varepsilon, \ |\eta_1| < \delta, ..., |\eta_m| < \delta\} \subseteq \{|\xi \otimes \eta_1 \oplus ... \oplus \eta_m| \geqslant x\}. \tag{2}$$

Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(xc_n) < a + \varepsilon \leqslant |X_k(xc_n)|\}$, $k = 1, ..., n$. Тогда $E_i E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \{\overline{X}_n(xc_n) \geqslant a + \varepsilon\}$, а в силу (2) найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\{|X_k(xc_n)| \geqslant a + \varepsilon, \ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| < x\delta c_n, \ |X_{k+m,n}(xc_n)| < \delta\} \subseteq \{|X_m(xc_n)| \geqslant a\},$$

то есть

$$\{|X_n(xc_n)| < a\} \subseteq \{|X_k(xc_n)| < a + \varepsilon\} \cup \{|X_{k+m,n}(xc_n)| \geqslant \delta\} \cup \left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \geqslant \delta x c_n\right\},$$

$k = 1, ..., n-1$, откуда

$$\{|X_n(xc_n)| < a, \ E_k\} \subseteq \{|X_{k+m,n}(xc_n)| \geqslant \delta, \ E_k\} \cup \left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \geqslant \delta x c_n, E_k\right\}. \tag{3}$$

С помощью (3) получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n(xc_n) \geqslant a\varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \geqslant a\} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| < a, \ E_k\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\geqslant\delta x c_n\right\}\leqslant\mathbf{P}\{|X_m(xc_n)|\geqslant a\}+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{|X_{k+m,n}(xc_n)|\geqslant\delta,\ E_k\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)|\geqslant a\}+\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k(xc_n)|\geqslant\delta\}+\varphi(m)\right)\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{E_k\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\geqslant\delta x c_n\right\}\leqslant\mathbf{P}\{|X_m(xc_n)|\geqslant a\}+$$

$$+\gamma\mathbf{P}\{\overline{X}_n(xc_n)\geqslant a+\varepsilon\}+\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\geqslant\delta x c_n\right\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Следующее предложение — это модификация для обобщённых сумм неравенства М. Пелиград (леммы 3.1 из [2]).

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что если*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k(xc_n)|\geqslant\delta\}+\varphi(m)\leqslant\gamma<1,\ x>0,$$

то при любом $a>0$

$$\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)|\geqslant a+2\varepsilon\}\leqslant\frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)|\geqslant a\}+\frac{1}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\geqslant\delta x c_n\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k=\{\overline{X}_{k-1}(xc_n)<a+\varepsilon\leqslant|X_k(xc_n)|\}, k=1,...,n$. Тогда $E_iE_j=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k=\{\overline{X}_n(xc_n)\geqslant a+\delta\}$. В силу (2) для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что при $1\leqslant k\leqslant n-m$

$$\{|X_{k+m,n}(xc_n)|<\delta,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}\subseteq$$

$$\subseteq\{|X_n(xc_n)|<a+2\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\},$$

откуда

$$\{|X_n(c_n)|\geqslant a+2\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}\subseteq\{E_k,\ |X_{k+m,n}(c_n)|\geqslant\delta\}. \qquad (4)$$

Аналогично выводится

$$\{|X_n(xc_n)|\geqslant a+2\varepsilon,\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}\subseteq\{\overline{X}_{n-m}(xc_n)\geqslant a+\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}.$$

Отсюда

$$\{|X_n(xc_n)|\geqslant a+2\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}=$$

$$=\{|X_n(xc_n)|\geqslant a+2\varepsilon,\ \overline{X}_{n-m}(xc_n)\geqslant a+\varepsilon,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|<\delta x c_n\}. \qquad (5)$$

С помощью (7) и (8) получаем $\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \geqslant a+2\varepsilon\} \leqslant$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \geqslant a+2\varepsilon, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| < \delta x c_n\} + \mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\} =$$

$$= \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geqslant a+2\varepsilon, \overline{X}_{n-m}(c_n) \geqslant a+\varepsilon, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| < \delta x c_n\} +$$

$$+\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\} = \sum_{k=1}^{n-m}\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \geqslant a+2\varepsilon, E_k, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| < \delta x c_n\} +$$

$$+\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\right\} + \sum_{k=1}^{n-m}\mathbf{P}\{|X_{k+m,n}(xc_n)| \geqslant \delta, E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\right\} + \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k(xc_n)| \geqslant \delta\} + \varphi(m)\right)\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{E_k\} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\mathbf{P}\{\overline{X}_n(c_n) \geqslant a+\delta\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \delta x c_n\right\}.$$

Отсюда с помощью леммы 1 получаем утверждение леммы 2. ■

Покажем, как с помощью леммы 2 можно получать оценки для моментов обобщённых сумм. Пусть $\delta > 0$, $N > 0$ и натуральное m таковы, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k(Nc_n)| \geqslant \delta\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

где $\gamma > 0$ такое, что $\dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 1$. Предположим сначала, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| < \delta N c_n$ почти наверное. Из леммы 2 следует тогда

$$\mathbf{P}\{|X_n(Nc_n)| \geqslant a+2k\varepsilon\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\{|X_n(Nc_n)| \geqslant a+2(k-1)\varepsilon\} \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma^k}{(1-\gamma)^k}\mathbf{P}\{|X_n(Nc_n)| \geqslant a\},$$

то есть

$$\mathbf{P}\{|X_n(Nc_n)| \geqslant y\} \leqslant \exp\{-\alpha y\},\ \alpha > 0,\ y > 0.$$

Отсюда следует, что если $\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{-\alpha y\}\,dx < \infty$, $f(x) \geqslant 0$, то $\sup\limits_n \mathbf{E} f(|X_n(Nc_n)|) < \infty$, в частности $\sup\limits_n \mathbf{E}|X_n(Nc_n)|^p < \infty$ при любом $p > 0$.

Будем говорить, что выполнено условие A_5, если при любых $x > 0$, $y_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, \ldots n$, $n \geqslant 2$

$$(xy_1) \oplus \ldots \oplus (xy_n) = x(y_1 \oplus \ldots \oplus y_n).$$

Например, $x \oplus y = x + y$, $x \oplus y = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \oplus y = x \vee y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, удовлетворяют условию A_5.

Теорема 1. *Пусть бинарная операция* $\oplus$ *удовлетворяет условиям* $A_1 - A_5$ *и пусть* $0 < q < p$, $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{E}|X_n|^p \leqslant A\,(\mathbf{E}|X_n|^q)^{p/q} + B\,\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p,$$

где A *и* B *не зависят от* n.

Доказательство. Для бинарной операции, удовлетворяющей условиям $A_1 - A_5$, утверждение леммы 2 можно переписать так: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что если

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k| \geqslant \delta N c_n\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то при $x \geqslant N$

$$\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant xc_n\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant \frac{xc_n}{1+2\varepsilon}\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \frac{\delta xc_n}{1+2\varepsilon}\right\}. \quad (6)$$

Если $\gamma > 0$ таково, что $\dfrac{\gamma(1+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$, то с помощью (6) получаем

$$\mathbf{E}|X_n|^p = -p\int\limits_0^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant x\}\,dx \leqslant (Nc_n)^p + pc_n^p\int\limits_N^\infty x^{p-1}\mathbf{P}\{|X_n| \geqslant xc_n\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (Nc_n)^p + \frac{\gamma(1+2\varepsilon)^p}{1-\gamma}\mathbf{E}|X_n|^p + \frac{\gamma(1+2\varepsilon)^p}{\delta^p(1-\gamma)}\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}|X_n|^p \leqslant A' c_n^p + B'\,\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p, \quad (7)$$

где A' и B' не зависят от n.

Пусть $0 < q < p$, $c_n^q = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}|X_k|^q$. Тогда

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k| \geqslant \delta N c_n\} \leqslant \frac{c_n^q}{(\delta N c_n)^q} = (\delta N)^{-q},$$

так что m и N можно выбрать такими, что $\dfrac{\gamma(1+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$ и из (7) следует теперь

$$\mathbf{E}|X_n|^p \leqslant A'\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}|X_n|^q\right)^{p/q} + B'\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^p. \quad (8)$$

В силу леммы 1

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant xc_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(\mathbf{P}\left\{|X_n| \geqslant \frac{xc_n}{1+\varepsilon}\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \geqslant \frac{\delta xc_n}{1+\varepsilon}\right\}\right), \ x > 0,$$

откуда

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}|X_n|^q \leqslant \mathbf{E}\overline{X}_n^q \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^q}{1-\gamma}\left(\mathbf{E}|X_n|^q + \delta^{-q}\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^q\right),$$

что вместе с (8) даёт утверждение теоремы. ■

Пусть $x \oplus y = x + y$, $X_n = S_n$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbf{E}S_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 [1, теорема 18.2.3], так что

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^p \leqslant n\mathbf{E}|\xi_1|^p = o(\sigma_n^p),\ p > 2,$$

и из теоремы 1 следуют оценки И.А. Ибрагимова.

Литература

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
2. Peligrad M. An invariance principle for $\varphi-$ mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, № 4. P. 1304–1313.
3. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероят. и её примен. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
4. Гринь А.Г. Условия слабой зависимости в предельных теоремах для обобщённых сумм // Математические структуры и моделирование. 2014. Вып. 29. С. 4-12.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985, 141 с.

ON THE MOMENTS OF GENERALIZED SUMS

A.G. Grin
Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. We obtain estimates for the moments of so-called generalized sums of weakly dependent variables in terms of moments of smaller order. Estimates are obtained with the aid of an analogue of the well-known M. Peligrad inequality.

Keywords: generalized sums, estimates for the moments, uniformly strong mixing condition.