Математические структуры и моделирование
2014. №3(31). С. 57–61

УДК 512.57

ЦЕНТР ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

А.Н. Кабанов
к.ф.-м.н., e-mail: m01kab@mail.ru

Факультет компьютерных наук, Омский государственный университет

Аннотация. Получено описание центра группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Ли над произвольным полем.

Ключевые слова: алгебра Ли, унитреугольный автоморфизм, гиперцентр.

В работе В.А. Романькова, И.В. Чиркова и М.А. Шевелина [3] была установлена матричная непредставимость групп автоморфизмов свободных алгебр Ли, свободных ассоциативных алгебр, абсолютно свободных алгебр и алгебр многочленов при условии, что ранг алгебры не меньше четырёх, а основное поле имеет характеристику 0. Во всех указанных случаях в группе автоморфизмов выделялась подгруппа унитреугольных автоморфизмов, которая оказывалась разрешимой, но не представимой матрицами. В статье Ю.В. Сосновского [4] описывалось гиперцентральное строение этой подгруппы, но только для алгебры многочленов, зато без ограничения на характеристику поля и с понижением минимального числа порождающих с 4 до 3. В статье автора [2] описывалось строение гиперцентральной серии этой подгруппы для свободной метабелевой алгебры Ли. Как следствие из этого описания получалась матричная непредставимость группы унитреугольных автоморфизмов ни над каким полем. В настоящей работе дано описание центра этой подгруппы для свободной алгебры Ли. В дальнейших работах будет представлено описание всей гиперцентральной серии.

Пусть L_n – свободная алгебра Ли с множеством свободных порождающих $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$. Определим левонормированный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}]$, полагая при $k > 1$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] = [[...[x_{i_1}, x_{i_2}], ...], x_{i_k}].$$

При $k = 1$ имеем $[x_{i_1}] = x_{i_1}$. Более того, полагаем

$$[x_{i_1}, \underbrace{x_{i_2}, ..., x_{i_2}}_{m}] = [x_{i_1}, x_{i_2}^m].$$

В дальнейшем будем рассматривать только элементы с левонормированной расстановкой скобок.

Выделим в группе $Aut\ L_n$ всех автоморфизмов алгебры L_n подгруппу U_n, порождённую автоморфизмами вида:

$$\tau_i(y_i): \quad \begin{cases} x_i \to x_i + y_i, \\ x_j \to x_j,\ j \neq i, \end{cases}$$

где y_i принадлежит подалгебре, порождённой $x_{i+1}, ..., x_n$. Такая подгруппа называется *группой унитреугольных автоморфизмов* алгебры L_n.

Для краткости будем записывать произвольный автоморфизм φ алгебры L_n с множеством свободных порождающих X_n как $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$.

Лемма 1. *Произвольное отображение вида:*

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n), ..., x_i + f_i(x_{i+1}, ..., x_n), ..., x_n), \tag{1}$$

где для любого i многочлен $f_i(x_{i+1}, ..., x_n) \in L_n$ определяет автоморфизм из U_n. Группа U_n состоит из всех таких автоморфизмов.

Доказательство. Покажем, что отображение φ, имеющее вид (1), обратимо. Подействуем на него отображением $\psi_1 = (x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1} - f_{n-1}(x_n), x_n)$, получим

$$\varphi \circ \psi_1 = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1} - f_{n-1}(x_n), x_n), ...,$$
$$x_{n-2} + f_{n-2}(x_{n-1} - f_{n-1}(x_n), x_n), x_{n-1}, x_n).$$

Введём обозначение

$$f_i(x_{i+1}, ..., x_{n-2}, x_{n-1} - f_{n-1}(x_n), x_n) = f_i^1(x_{i+1}, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = f_i^1,$$

где $i \leq n-2$. Тогда

$$\varphi \circ \psi_1 = (x_1 + f_1^1, ..., x_{n-2} + f_{n-2}^1, x_{n-1}, x_n).$$

Теперь подействуем отображением $\psi_2 = (x_1, ..., x_{n-3}, x_{n-2} - f_{n-2}^1, x_{n-1}, x_n)$, получим:

$$\varphi \circ \psi_1 \circ \psi_2 = (x_1 + f_1^1(x_2, ..., x_{n-3}, x_{n-2} - f_{n-2}^1(x_{n-1}, x_n), x_{n-1}, x_n), ..., x_{n-3} +$$
$$+ f_{n-3}^1(x_{n-2} - f_{n-2}^1(x_{n-1}, x_n), x_{n-1}, x_n), x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Обозначим

$$f_i^1(x_{i+1}, ..., x_{n-3}, x_{n-2} - f_{n-2}^1(x_{n-1}, x_n), x_{n-1}, x_n) = f_i^2(x_{i+1}, ..., x_n) = f_i^2,$$

где $i \leq n-3$. Тогда

$$\varphi \circ \psi_1 \circ \psi_2 = (x_1 + f_1^2, ..., x_{n-3} + f_{n-3}^2, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Будем повторять эти действия, тогда на k-м шаге имеем автоморфизм $\psi_k = (x_1, ..., x_{n-k-1}, x_{n-k} - f_{n-k}^{k-1}, x_{n-k+1}, ..., x_n)$ и

$$\varphi \circ \psi_1 \circ ... \circ \psi_k = (x_1 + f_1^k, ..., x_{n-k-1} + f_{n-k-1}^k, x_{n-k}, ..., x_n).$$

На шаге $n-1$ получим

$$\varphi \circ \psi_1 \circ ... \circ \psi_{n-1} = (x_1, ..., x_n) = id.$$

Таким образом, $\psi_1 \circ ... \circ \psi_{n-1}$ – обратное отображение для φ, принадлежащее группе, порождённой автоморфизмами вида $\tau_i(y_j)$. Следовательно, φ – автоморфизм.

Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Пусть автоморфизм φ, принадлежащий группе U_n, имеет вид 1. Тогда*

$$\varphi^{-1} = (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n), ..., x_i - f_i(g_{i+1}, ..., g_n), ..., g_n),$$

где $x_i = g_i^\varphi$ $(2 \le i \le n)$. В частности, $g_n = x_n$, а при $i < n$ значения g_i определяются рекуррентно по формулам

$$g_i = g_i(x_{i+1}, ..., x_n) = x_i - f_i(g_{i+1}, ..., g_n).$$

Доказательство. Достаточно проверить, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = id$, где φ^{-1} определено, как в условиях леммы. Вычисляем:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n) + f_1(x_2 - f_2(g_3, ..., g_n), ..., x_n), ..., x_i - f_i(g_{i+1}, ..., g_n) +$$

$$+ f_i(x_{i+1} - f_{i+1}(g_{i+2}, ..., g_n), ..., x_n), ..., x_n) = (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n) + f_1(g_2, ..., g_n), ..., x_i -$$

$$- f_i(g_{i+1}, ..., g_n) + f_i(g_{i+1}, ..., g_n), ..., x_n) = (x_1, ..., x_i, ..., x_n) = id.$$

Лемма доказана. ■

Будем считать, что на X_n определена линейная упорядоченность: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Пусть одночлен $h \in L_n$ имеет вид

$$h = [x_{n-s}, x_{n-t}, x_{n-s}^{p_{n-s}}, x_{n-s+1}^{p_{n-s+1}}, ..., x_n^{p_n}], \qquad (2)$$

где $x_{n-s} < x_{n-t}$, $x_{n-s} \le x_{n-s+1} \le ... \le x_n$, $p_{n-s}, ..., p_n \in \mathbb{Z}$, $p_{n-s}, ..., p_n \ge 0$. Введём на алгебре L_n функцию $\mu : L_n \to \mathbb{Z}$, полагая $\mu(h) = s$. Известно (например, [1]), что любой многочлен $f \in L_n$ можно представить в виде суммы или произведения одночленов из L_n в форме 2. В этом случае будем говорить, что многочлен f записан через порождающие одночлены. Если $f = g_1 g_2 \in L_n$, где $\mu(g_1) = \mu_1, \mu(g_2) = \mu_2$, то $\mu(f) = max(\mu_1, \mu_2)$. В случае $f = g_1 + g_2 \in L_n$ также $\mu(f) = max(\mu_1, \mu_2)$.

Кроме того, введём функцию $\lambda : M_n \to \mathbb{Z}$, положив для одночлена указанного вида $\lambda(h) = s + t + s(p_{n-s}) + ... + p_{n-1}$. Аналогично λ-показателем многочлена, записанного через порождающие одночлены, будем называть максимум λ-показателей его порождающих одночленов.

Выделим в группе U_n подгруппу:

$$Z_1 = \{\varphi = (x_1 + f_1, x_2, ..., x_n) | \mu(f_1) \leq 1,\ \lambda(f_1) \leq 1,\ \mu(l(f_1)) = 0\},$$

где f_i – произвольные многочлены алгебры L_n от указанных переменных, $l(f)$ – линейная часть многочлена f.

Теорема 1. *Центр группы U_n совпадает с подгруппой Z_1.*

Доказательство. Возьмём произвольные автоморфизмы $\varphi \in Z_1$ и $\psi \in U_n$. Согласно описанию группы Z_1, автоморфизм φ имеет вид

$$\varphi = (x_1 + \alpha x_n + h(x_{n-1}, x_n), x_2, ..., x_n),$$

где $h(x_{n-1}, x_n)$ можно представить в форме суммы и произведений одночленов вида $[x_{n-1}, x_n^p], p > 0$.

Пусть ψ имеет вид (1). Вычислим $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Имеем

$$\varphi\psi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n) + \beta x_n + h(x_{n-1}, x_n) + h(f_{n-1}(x_n), x_n),$$

$$x_2 + f_2(x_3, ..., x_n), ..., x_n).$$

Но $f_{n-1}(x_n) = \beta x_n$, отсюда $h(f_{n-1}(x_n), x_n) = 0$. Следовательно,

$$\varphi\psi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n) + \beta x_n + h(x_{n-1}, x_n), x_2 + f_2(x_3, ..., x_n), ..., x_n).$$

Далее

$$\psi\varphi = (x_1 + \beta x_n + h(x_{n-1}, x_n) + f_1(x_2, ..., x_n), x_2 + f_2(x_3, ..., x_n), ..., x_n).$$

Убеждаемся, что эти композиции равны. Это по определению означает, что $\varphi \in \zeta_1(U_n)$, т. е. $Z_1 \subseteq \zeta_1(U_n)$.

Теперь предположим, что $\varphi = (x_1 + f_1, x_2 + f_2, ..., x_n)$ лежит в $\zeta_1(U_n)$, и покажем, что $\varphi \in Z_1$. Возьмём автоморфизм $\psi = (x_1 + x_i, x_2, ..., x_n)$, где $i \geq 2$, и вычислим $x_1^{[\psi,\varphi]}$, используя обозначения леммы 2:

$$x_1^{\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi} = (x_1 - x_i)^{\varphi^{-1}\psi\varphi} = (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n) - x_i + f_i(g_{i+1}, ..., g_n))^{\psi\varphi} =$$

$$= (x_1 + x_i - f_1(g_2, ..., g_n) - x_i + f_i(g_{i+1}, ..., g_n))^{\varphi} =$$
$$= (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n) + f_i(g_{i+1}, ..., g_n))^{\varphi}$$

По лемме 2 для любого j

$$f_j^{\varphi}(g_{j+1}, ..., g_n) = f_j(g_{j+1}^{\varphi}, ..., g_n^{\varphi}) = f_j(x_{j+1}, ..., x_n).$$

Значит,

$$x_1^{[\psi,\varphi]} = (x_1 - f_1(g_2, ..., g_n) + f_i(g_{i+1}, ..., g_n))^{\varphi} =$$

$$= x_1 + f_1(x_2, ..., x_n) - f_1(x_2, ..., x_n) + f_i(x_{i+1}, ..., x_n) = x_1 + f_i(x_{i+1}, ..., x_n)$$

Поскольку $\varphi \in \zeta_1(U_n)$, то

$$[\psi,\varphi] = \psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi = \psi^{-1}\varphi^{-1}\varphi\psi = \psi^{-1}\psi = id.$$

Таким образом, $x_1^{[\psi,\varphi]} = x_1$. С другой стороны, $x_1^{[\psi,\varphi]} = x_1 + f_i(x_{i+1},...,x_n)$. Отсюда $f_i(x_{i+1},...,x_n) = 0$ при $i > 1$.

Заметим, что если $\psi = (x_1,...,x_i + g(x_{i+1},...,x_n),...,x_n)$, то

$$x_1^{\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi} = x_1^{\varphi^{-1}\psi\varphi} = (x_1 - f_1(g_2,...,g_n))^{\psi\varphi} =$$

$$= (x_1 - f_1(g_2,...,g_i + g(x_{i+1},...,x_n),...,g_n))^{\varphi}.$$

Таким образом,

$$x_1^{[\psi,\varphi]} = x_1 + f_1(x_2,...,x_n) - f_1(x_2,...,x_i + g(x_{i+1},...,x_n),...,x_n). \tag{3}$$

Вычислим линейную часть и ограничения на λ- и μ-показатели у многочлена f_1. Если $\mu(f_1) = s > 1$, это значит, что среди базисных одночленов f_1 есть элементы вида $[x_{n-s}, x_t, x_{n-s}^{p_{n-s}},...,x_n^{p_n}]$, где $t > n - s$, p_i – целые неотрицательные числа. Следовательно, для автоморфизма $\psi = (x_1,...,x_{n-s} + g_{n-s},...,x_n)$ в разности (3) возникает несократимый одночлен при подходящем выборе g_{n-s}. Значит, $\mu(f_1) \le 1$.

Если $\lambda_1(f_1) > 1$, то среди порождающих одночленов вида $[x_{n-1}, x_n, x_{n-1}^{p_{n-1}}, x_n^{p_n}]$ многочлена f_1 выберем тот, что имеет максимальный λ-показатель. При $\psi = (x_1,...,x_{n-1} + x_n, x_n)$ в разности (3) получим несократимый порождающий одночлен $[x_{n-1}, x_n^{p_n+1}]$. Следовательно, $\lambda_1(f_1) \le 1$.

Если линейная часть $l(f_1)$ многочлена f_1 содержит одночлен x_{n-1}, то в разности (3) при $\psi = (x_1,...,x_{n-1} + x_n, x_n)$ возникает несократимый одночлен x_n, поэтому $\mu(l(f_1)) = 0$.

Этими рассуждениями показано включение $\zeta_1(U_n) \subseteq Z_1$ и тем самым равенство $\zeta_1(U_n) = Z_1$.

Что и требовалось доказать. ∎

Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 447 с.
2. Кабанов А.Н. Гиперцентральная структура группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Сиб. мат. ж. 2009. Т. 50, № 2. С. 329–333.
3. Романьков В.А., Чирков И.В., Шевелин М.А. Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. мат. ж. 2004. Т. 45, № 5. С. 1184–1188.
4. Сосновский Ю.В. Описание гиперцентрального строения группы унитреугольных автоморфизмов алгебры многочленов // Сиб. мат. ж. 2007. Т. 48, № 3. С. 689–693.

CENTER OF THE UNITRIANGULAR AUTOMORPHISM GROUP OF A FREE LIE ALGEBRA

A.N. Kabanov
Ph.D. (Math.), e-mail: m01kab@mail.ru

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. The center of the group of unitriangular automorphisms of a free Lie algebra over an arbitrary field is described.

Keywords: Lie algebra, unitriangular automorphism, hypercenter.