Математические структуры и моделирование
2013. № 1(27). С. 46–55

УДК 519.7

МОДЕЛЬ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ С ГРУППИРОВКОЙ МАШИН ПО ТЕХНОЛОГИЯМ

Ю.В. Коваленко

Рассматривается задача составления расписаний многопродуктового производства. Особенностью постановки является то, что каждый продукт имеет несколько технологий производства, при выполнении которых используется сразу несколько машин, работающих одновременно. Если машина переключается с одной технологии на другую, то необходимо выполнять переналадку. Построены модели частично целочисленного линейного программирования для задачи в общей постановке и для случая, когда длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника. Для сравнения предложенных моделей проведены численные эксперименты на построенных случайным образом тестовых примерах.

Введение

Большое практическое значение имеют задачи составления расписаний для производства, где в процессе выполнения операций на имеющемся множестве машин происходит получение одних веществ из других. Вещества подразделяются на сырье, промежуточные и окончательные продукты. Различают задачи с прерываниями и без прерываний. В задачах с прерываниями каждая операция может быть прервана и возобновлена позднее (см., например, [1, 4]), а в задачах без прерываний — не допускаются прерывания выполнения операций (см., например, [6, 10]). Продукты могут производиться либо непрерывно [14, 17], либо партиями [7, 13]. Кроме того, необходимо учитывать погрузку, хранение и транспортировку продуктов, переналадку машин и т. д.

Ряд работ (см., например, [4, 9, 11, 12, 16, 19]) отличается тем, что в них рассматриваются не отдельные операции, а технологии, представляющие собой набор операций, в результате действия которых может быть получен тот или иной продукт. Для выполнения технологии необходимо наличие некоторой совокупности машин, работающих одновременно или последовательно друг за

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: `juliakoval86@mail.ru`
Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122

другом. Каждый продукт может быть произведён одной или более технологиями.

В настоящей статье рассматривается задача составления расписаний с группировкой машин по технологиям, возникающая, например, при производстве пластмасс и представляющая собой частный случай задачи, предложенной в [11]. Здесь в качестве операций рассматриваются химические реакции. Особенностью постановки является то, что каждый продукт имеет несколько технологий производства, при выполнении которых используется сразу несколько машин, работающих одновременно (в [4, 9, 12, 16] такие технологии называются многопроцессорными работами). Если машина переключается с одной технологии на другую, то необходимо выполнять переналадку. В соответствии с известной нотацией [3, 7, 16] рассматриваемая задача обозначается через $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$, если прерывание выполнения технологий не допускается, и $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ — в противном случае.

В [3, 5, 9, 12, 16, 18] проводится анализ сложности задач составления расписаний с группировкой машин по технологиям, в которых длительности переналадок машин равны нулю. В задачах составления производственных расписаний [2, 7] рассматриваются технологии, задействующие при своём выполнении только одну машину, но уже при наличии переналадок. В [11] технологии рассматриваются при обсуждении постановки задачи, однако в модели они в явном виде не представлены. Такой подход приводит к моделям частично целочисленного линейного программирования достаточно большой размерности, для решения которых применяется метод декомпозиции [11, 13, 14].

В настоящей работе предложены модели частично целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП) для задач теории расписаний $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ и $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ в общей постановке и для случая, когда длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника. Построенные модели учитывают технологии в явном виде и имеют меньшее число переменных и ограничений, чем модель [11] в применении к исследуемой задаче.

Модель, сформулированная для случая выполненного неравенства треугольника, является более предпочтительной при использовании методов оптимизации, основанных на ЛП-релаксации, что подтверждается численными экспериментами на сгенерированных случайным образом тестовых примерах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим предприятие, выпускающее k различных продуктов. Требуемый объем производства продукта $i,\ i = 1, \dots, k$ обозначим через $V_i \in \mathbb{R}^+$ (здесь и далее $\mathbb{R}^+$ — множество положительных вещественных чисел). Пусть m — число машин, которые могут использоваться при выпуске продукции.

Для каждого продукта $i,\ i = 1, \dots, k$ указана одна или более технологий его производства. Пусть U — множество технологий, каждая из которых характеризуется набором одновременно занимаемых машин $M_u \subseteq \{1, \dots, m\},\ u \in U$, т.е. если производится продукт i по технологии u, то одновременно задействованы все машины, относящиеся к данной технологии. В любой момент каждая машина не может быть задействована более чем в одной технологии. Обозначим $|U|$ через d.

Пусть $U_i \subseteq U$ — множество технологий по производству продукта i, $i = 1, \ldots, k$, для каждой из которых задан объем $a_u \in \mathbb{R}^+$ выпуска данного продукта в единицу времени, $u \in U_i$. Предполагается, что для выпуска продукта i может быть использовано несколько технологий из множества U_i, $i = 1, \ldots, k$. В соответствии с терминологией [8, 16] допускается перемещение (migration) по технологиям при выпуске продукта.

Для машины l заданы длительности переналадки этой машины с технологии u на технологию q, обозначенные через $s_{luq} \in \mathbb{R}_+$ для всех u, $q \in K_l$, где $K_l = \{u \in U : \ l \in M_u\}$ — множество технологий, использующих машину l, $l = 1, \ldots, m$ (здесь $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел).

Для каждого продукта i, $i = 1, \ldots, k$ необходимо определить, какие технологии $u \in U_i$ будут использоваться для его производства, и для выбранных технологий составить расписание их выполнения с учётом переналадок машин и невозможности одновременного использования одной машины в различных технологиях таким образом, чтобы общее время окончания производства всех продуктов $C_{\max}$ в объёмах $V_1, \ldots, V_k$ было минимально. Задача рассматривается в двух вариантах: с возможностью прерываний выполнения технологий ($P|\mathrm{set}_i$, pmtn, $\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$) и без неё ($P|\mathrm{set}_i$, $\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$). Ввиду возможности перемещения по технологиям при выпуске продукта в центральное поле обозначения задач следовало бы добавить символ "var" [8], но для компактности изложения этот символ опускается.

На практике достаточно часто встречаются задачи составления производственных расписаний, где длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника:

$$s_{luq} + s_{lqp} \geqslant s_{lup}, \ l = 1, \ldots, m, \ u, q, p \in K_l. \tag{1}$$

Обозначим этот частный случай через $P|\mathrm{set}_i$, pmtn, $\Delta \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$, если допускается прерывание выполнения технологий, и $P|\mathrm{set}_i$, $\Delta \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$, если не допускается. Указанные задачи являются NP-трудными в сильном смысле, так как в частном случае при $m = 1$ к ним сводится метрическая задача о кратчайшем гамильтоновом пути, являющаяся NP-трудной в сильном смысле [15].

2. Модель частично целочисленного линейного программирования для общего случая

Известно множество подходов к формулированию задач построения производственных расписаний в виде моделей ЧЦЛП с учётом сложных связей между технологиями, продуктами и машинами [2, 11, 13, 14, 19]. Учитывая структуру рассматриваемой задачи, можно предложить модель, основанную на тех же принципах, что и в [2, 11, 13].

Определим понятие точки событий, аналогичное введённому в [13]. *Точка событий* — это группа переменных задачи, которые задают некоторый набор технологий и моменты начала и окончания выполнения технологий из этого набора. В одной точке событий каждая машина может быть задействована не более чем в одной технологии. Множество точек событий обозначим через $N = \{1, \ldots, n_{\max}\}$, где параметр $n_{\max}$ выбирается достаточно большим на основе априорных оценок или вычислительных экспериментов.

Основными переменными для построения модели будут булевы переменные w_{un} такие, что $w_{un} = 1$, если технология u выполняется в точке событий n, и $w_{un} = 0$ иначе. Кроме того, введём вещественные переменные, которые в случае, если технология u выполняется в точке событий n, имеют следующий смысл: T^s_{un} — время начала выполнения технологии u в точке событий n, T^f_{un} — время завершения выполнения технологии u в точке событий n. Переменная $C_{\max}$ соответствует моменту завершения производства всех продуктов.

Введем следующие обозначения:
I — множество продуктов, $|I| = k$;
M — множество машин, $|M| = m$;
$H = \sum\limits_{i\in I} \max\limits_{u\in U_i} \left\{\frac{V_i}{a_u}\right\} + (k-1) \cdot \max\limits_{l\in M,\ u,q\in K_l} \{s_{luq}\}$ — оценка сверху длины расписания. Времени H заведомо достаточно для выпуска всех продуктов.

Тогда модель ЧЦЛП для задачи $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ может быть записана следующим образом:

$$C_{\max} \to \min, \tag{2}$$

$$T^f_{un} \leqslant C_{\max},\ u \in U,\ n \in N, \tag{3}$$

$$\sum_{u\in K_l} w_{un} \leqslant 1,\ l \in M,\ n \in N, \tag{4}$$

$$T^s_{un} \geqslant T^f_{q\tilde{n}} + s_{lqu} - H \cdot (2 - w_{un} - w_{q\tilde{n}} + \sum_{q'\in K_l} \sum_{\tilde{n}<n'<n} w_{q'n'}), \tag{5}$$

$$l \in M,\ u, q \in K_l,\ n,\ \tilde{n} \in N,\ n \neq 1,\ \tilde{n} < n,$$

$$T^f_{un} \geqslant T^s_{un},\ u \in U,\ n \in N, \tag{6}$$

$$T^f_{un} - T^s_{un} \leqslant w_{un} \cdot \max_{q\in U_i} \left\{\frac{V_i}{a_q}\right\},\ i \in I,\ u \in U_i,\ n \in N, \tag{7}$$

$$\sum_{n\in N} \sum_{u\in U_i} a_u \cdot (T^f_{un} - T^s_{un}) \geqslant V_i,\ i \in I, \tag{8}$$

$$T^s_{un} \geqslant 0,\ u \in U,\ n \in N, \tag{9}$$

$$w_{un} \in \{0, 1\},\ u \in U,\ n \in N. \tag{10}$$

Целевая функция (2) и неравенство (3) задают критерий минимизации момента окончания производства всех продуктов. Ограничение (4) выражает тот факт, что в каждой точке событий машина l используется не более чем в одной технологии, ограничение (5) — что время начала технологии u на машине l должно быть не меньше, чем время окончания предыдущей технологии на той же машине плюс длительность переналадки. Условие (6) гарантирует неотрицательность длительности технологий. Если технология u в точке событий n не выполняется, то её длительность должна быть равна нулю, что обеспечивается неравенством (7). Ограничение (8) гарантирует выпуск продукции в заданном объёме. Условия (9) – (10) описывают область определения переменных.

Модель ЧЦЛП для задачи $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ может быть получена путём добавления к ограничениям (2) – (10) неравенства

$$\sum_{n\in N} w_{un} \leqslant 1,\ u\in U, \tag{11}$$

гарантирующего непрерывность выполнения каждой технологии.

3. Модель частично целочисленного линейного программирования для случая выполненного неравенства треугольника

На практике достаточно часто возникают задачи составления производственных расписаний, в которых длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника (1). Поэтому имеет смысл сформулировать модели ЧЦЛП для задач $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ и $P|\mathrm{set}_i,\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$. Предлагаемые модели представляются более предпочтительными, так как в них удаётся исключить неравенство (5), которое усложняет процесс поиска оптимального решения для методов оптимизации, основанных на ЛП-релаксации.

С использованием введённых ранее обозначений модель ЧЦЛП для задачи $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ может быть записана следующим образом:

$$C_{\max} \to \min, \tag{12}$$

$$T^f_{un} \leqslant C_{\max},\ u\in U,\ n\in N, \tag{13}$$

$$\sum_{u\in K_l} w_{un} \leqslant 1,\ l\in M,\ n\in N, \tag{14}$$

$$T^s_{u,n+1} \geqslant T^f_{un},\ u\in U,\ n\in N,\ n\neq n_{\max}, \tag{15}$$

$$T^s_{u,n+1} \geqslant T^f_{qn} + s_{lqu}\cdot w_{u,n+1} - H\cdot(1-w_{u,n+1}), \tag{16}$$

$$l\in M,\ u,q\in K_l,\ u\neq q,\ n\in N,\ n\neq n_{\max},$$

$$T^s_{un} \geqslant -H\cdot(1-w_{un}),\ u\in U,\ n\in N, \tag{17}$$

$$T^f_{un} \geqslant T^s_{un},\ u\in U,\ n\in N, \tag{18}$$

$$T^f_{un} - T^s_{un} \leqslant w_{un}\cdot \max_{q\in U_i}\left\{\frac{V_i}{a_q}\right\},\ i\in I,\ u\in U_i,\ n\in N, \tag{19}$$

$$\sum_{n\in N}\sum_{u\in U_i} a_u\cdot(T^f_{un}-T^s_{un}) \geqslant V_i,\ i\in I, \tag{20}$$

$$w_{un}\in\{0,1\},\ u\in U,\ n\in N. \tag{21}$$

Ограничения (12) – (14) и (18) – (21) имеют тот же смысл, что и в предыдущей модели. Условие (15) выражает то, что время начала выполнения технологии u в точке событий $n+1$ должно быть не меньше, чем время окончания её выполнения в точке событий n. Неравенство (16) говорит о том, что время начала технологии u на машине l должно быть не меньше, чем время окончания предыдущей технологии на той же машине плюс длительность переналадки. Однако, если технология u является первой на машине l, то длительность переналадки на неё учитывать не нужно. Это обеспечивается благодаря тому, что переменные T^s_{qn} во всех предшествующих точках событий могут принимать отрицательные значения. Если же технология u имеет место в точке событий n, то время начала её выполнения должно быть неотрицательным, что обеспечивается условием (17).

Необходимо отметить, что ограничение (16) будет гарантировать получение оптимального решения задачи $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$, только если длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника.

Модель ЧЦЛП для задачи $P|\mathrm{set}_i,\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ может быть получена путём добавления к ограничениям (12) – (21) неравенства (11).

4. Вычислительный эксперимент

Для оценки применимости моделей, предложенных для случая выполненного неравенства треугольника, проведён вычислительный эксперимент на построенных случайным образом задачах трёх серий $S1$, $S2$ и $S3$.

Модели (2) – (10) и (12) – (21) ((2) – (11) и (11) – (21)) были записаны в системе моделирования GAMS 23.2 и задача $P|\mathrm{set}_i,\ \mathrm{pmtn},\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$ ($P|\mathrm{set}_i,\ \Delta\mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$) решалась с помощью универсального пакета CPLEX 12.1. При этом использовался метод ветвей и границ с отсечениями, настройки которого были выбраны по умолчанию. Тестирование проводилось на ЭВМ Intel Core2 Duo CPU E7200 2.54 ГГц, оперативная память 2 Гб.

При генерации тестовых задач для каждой технологии $u \in U$ число машин $|M_u| \in \{1,\ldots,m\}$ выбиралось случайно, а затем машины назначались на данную технологию равновероятно без повторений. Числовые значения для всех тестовых задач генерировались случайным образом с равномерным распределением из следующих множеств: $V_i \in [1, V_{\max}]$; $|U_i| \in \{1,\ldots,U_{\max}\}$; $a_u \in [1, \frac{V_i}{2}]$, где i такое, что $u \in U_i$; $s_{luq} \in [0, s_{\max}]$. В табл. 1 приведены выбранные значения параметров для каждой серии.

Таблица 1. Параметры серий

серия	число задач	k	m	$U_{\max}$	$V_{\max}$	$s_{\max}$	$n_{\max}$
$S1$	10	4	4	3	10	5	5
$S2$	10	5	7	5	12	7	6
$S3$	10	8	10	5	15	9	8

Для проведения вычислительного эксперимента было установлено максимальное время, равное 7200 сек. CPLEX может решать за указанное время один тестовый пример.

В табл. 2, 3 и 4 представлены результаты вычислительного эксперимента для задачи $P|\mathrm{set}_i$, pmtn, $\Delta \mathrm{s}_{luq}|C_{\max}$. Здесь используются следующие обозначения:
N_{var} — число переменных в моделях (2) – (10) и (12) – (21);
N_{eqv} — число уравнений в модели (2) – (10);
N_{eqv_Δ} — число уравнений в модели (12) – (21);
C — значение целевой функции, полученное при решении задачи (2) – (10) пакетом CPLEX;
C_Δ – значение целевой функции, полученное при решении задачи (12) – (21) пакетом CPLEX;
t — время работы CPLEX в сек. при решении задачи (2) – (10);
t_Δ — время работы CPLEX в сек. при решении задачи (12) – (21).

Таблица 2. Сравнение моделей на задачах серии $S1$

задача	N_{var}	N_{eqv}	N_{eqv_Δ}	C	C_Δ	t	t_Δ
1	121	834	432	15.5691	15.5691	39.14	16.52
2	151	1434	688	15.4431	15.4431	48.37	11.08
3	121	1054	504	17.5173	17.5173	17.26	6.96
4	106	589	328	11.1378	11.1378	3.39	0.79
5	121	924	464	16.2939	16.2939	6.73	2.88
6	91	444	256	13.4058	13.4058	1.44	0.53
7	106	359	248	7.8721	7.8721	0.7	0.33
8	121	974	488	20.3919	20.3919	9.45	4.57
9	106	649	344	11.8913	11.8913	7.61	3.19
10	121	854	440	21.7056	21.7056	54.2	26.47

Таблица 3. Сравнение моделей на задачах серии $S2$

задача	N_{var}	N_{eqv}	N_{eqv_Δ}	C	C_Δ	t	t_Δ
1	235	3656	1374	24.6338	24.6338	420	115.9
2	235	4541	1624	33.194	33.194	693.5	43.5
3	253	5654	2003	41.8958	41.8958	400	180.4
4	325	7826	2769	14.8397	14.8397	720.5	321.3
5	235	5441	1904	37.3962	37.3962	69.3	11.1
6	343	9479	3318	20.8407	20.8407	907.1	434.3
7	343	7409	2668	16.2408	16.2408	520.2	209.8
8	271	3917	1482	13.6062	13.6062	1111	494
9	235	3881	1434	34.9472	34.9472	194.9	43.7
10	199	2855	1066	48.6371	48.6371	43.8	20.9

Таблица 4. Сравнение моделей на задачах серии $S3$

задача	N_{var}	N_{eqv}	N_{eqv_Δ}	C	C_Δ	t	t_Δ
1	505	16048	4281	21.985	21.985	4327	3456
2	649	36912	9415	17.3601	17.3601	6257	2199
3	577	30120	7688	26.4992	26.4992	6887	4398
4	625	40948	10356	31.5768	31.5768	5434	5199
5	529	32508	8198	41.6226*	36.5283	7200	6589
6	601	35856	9085	29.2432*	25.8131	7200	3199
7	481	23752	6048	30.1493	30.1493	7200	2245
8	529	25844	6616	40.488*	39.6324	7200	5321
9	505	22096	5695	28.3952*	27.8647	7200	4567
10	529	25676	6574	31.7315	31.7315	7200	3199

Из табл. 2, 3 и 4 видно, что модель (12) – (21) содержит меньшее число ограничений, чем модель (2) – (10). Кроме того, в среднем на сериях $S1$ и $S2$ пакет CPLEX решает тестовые примеры, записанные в модели (12) – (21), более чем в два раза быстрее, чем при их записи в модели (2) – (10). На серии $S3$ при решении пакетом CPLEX задач 5 – 10, записанных в модели (2) – (10), за установленное время удается найти только допустимые решения, которые не всегда являются оптимальными (отмечены '$*$'). Аналогичные результаты имеют место для задачи $P|\text{set}_i,\ \Delta s_{luq}|C_{\max}$.

Таким образом, если в задаче составления расписаний с группировкой машин по технологиям длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника, то при её решении лучше использовать модель (12) – (21) при условии, что допускаются прерывания выполнения технологий, и модель (11) – (21) — в противном случае, так как данные модели имеют меньшее число ограничений и являются менее сложными для методов оптимизации, основанных на ЛП - релаксации (в том числе для пакета CPLEX).

5. Заключение

Рассмотрена задача составления расписаний многопродуктового производства. Особенностью данной задачи является то, что каждый продукт может производиться по нескольким технологиям, каждая из которых характеризуется набором одновременно занимаемых машин. Построены модели ЧЦЛП для задачи в общей постановке и для случая, когда длительности переналадки удовлетворяют неравенству треугольника. С помощью вычислительного эксперимента показано, что вторая модель является более предпочтительной для методов оптимизации, основанных на ЛП-релаксации.

Автор благодарит А.В. Еремеева за предложенную постановку задачи.

Литература

1. Баптист Ф., Карлье Ж., Кононов А.В., Керан М., Севастьянов С.В., Свириденко М. Структурные свойства оптимальных расписаний с прерываниями операций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 3–36.
2. Борисовский П.А. Генетический алгоритм для одной задачи составления производственного расписания с переналадками // Тр. XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2008. Т. 4. С. 166–173.
3. Bianco L., Blazewicz J., Dell'Ohno P., Drozdowski M. Scheduling multiprocessor tasks on a dynamic configuration of dedicated processors // Ann. Oper. Res. 1995. V. 58. P. 493–517.
4. Bianco L., Blazewicz J., Dell'Ohno P., Drozdowski M. Scheduling preemptive multiprocessor tasks on dedicated processors // Performance Evaluation. 1994. V. 20. P. 361–371.
5. Blazewicz J., Dell'Ohno P., Drozdowski M., Speranza M.G. Scheduling multiprocessor tasks on three dedicated processors // Information Processing Letters. 1992. V. 41. P. 275–280. Corrigendum: V. 49. P. 269–270.
6. Bianco L., Dell'Ohno P., Speranza M.G. Nonpreemptive scheduling on independent tasks with prespecified processor allocations // Naval Research Logistics Quarterly. 1994. V. 41. P. 959–971.
7. Dolgui A., Eremeev A.V., Kovalyov M.Y. Multi-product lot-sizing and scheduling on unrelated parallel machines: research report N. 2007-500-011. Saint-Etienne : Ecole des Mines de Saint-Etienne, 2007. 15 p.
8. Drozdowski M. Scheduling for parallel processing. London : Springer-Verl., 2009. 386 p.
9. Drozdowski M. Scheduling multiprocessor tasks – An overview // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 94. P. 215–230.
10. Du J., Leung J.Y-T. Complexity of scheduling parallel task systems // SIAM J. Discrete Math. 1989. V. 2, N. 4. P. 472–478.
11. Floudas C.A., Kallrath J., Pitz H.J., Shaik M.A. Production scheduling of a large-scale industrial continuous plant: short-term and medium-term scheduling // Comp. Chem. Engng. 2009. V. 33. P. 670–686.
12. Hoogeven J.A., van de Velde S.L., Veltman B. Complexity of scheduling multiprocessor tasks with prespecified processors allocations // Discrete Appl. Math. 1994. V. 55. P. 259–272.
13. Ierapetritou M.G, Floudas C.A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling: I. multipurpose batch process // Ind. Eng. Chem. Res. 1998. V. 37. P. 4341–4359.
14. Ierapetritou M.G, Floudas C.A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling: II. continuous and semi-continuous processes // Ind. Eng. Chem. Res. 1998. V. 37. P. 4360–4374.
15. Itai A., Papadimitriou C.H., Szwarcfiter J.L. Hamilton paths in grid graphs // SIAM J. Comput. 1982. V. 11, N. 4. P. 676 – 686.
16. Jansen K., Porkolab L. Preemptive scheduling with dedicated processors: applications of fractional graph coloring // Journ. Scheduling. 2004. V. 7. P. 35–48.

17. Kondili E., Pantelides C.C., Shan N. Production planning for the rational use of energy in multiproduct continuous plants // Comp. Chem. Engng. 1993. V. 17. P. 123–136.
18. Kubale M. Preemptive versus nonpreemptive scheduling of biprocessor tasks on dedicated processors // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 94. P. 242–251.
19. Lin X., Floudas C.A., Modi S., Juhasz N.M. Continuous-time optimization approach for medium-range production scheduling of a multiproduct batch plant // Ind. Eng. Chem. Res. 2002. V. 41. P. 3884–3906.