Математические структуры и моделирование
2013. № 1(27). С. 5–10

УДК 519.214.5

О НЕРАВЕНСТВЕ МАГДЫ ПЕЛИГРАД

А.Г. Гринь

Предлагается новое доказательство вариантов известного неравенства М. Пелиград, в том числе, использующих условия слабой зависимости, отличные от φ-перемешивания.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n, \ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\le n}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$ — σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \le n\}$ и $\{\xi_i : i \ge n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} : \ A \in \mathcal{F}_{\le 0}, \ B \in \mathcal{F}_{\ge n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad T_n = \max_{1\le k\le n} |S_k|, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

Теорема 1. *(Неравенство М. Пелиград)*
Пусть при некотором $a > 0$ и натуральном m

$$\varphi(m) + \max_{1\le j\le n} \mathbb{P}\{|S_j| \ge a\} \le \gamma < 1.$$

Тогда при любых $x > 0$, $y \ge a$ и $n \ge m$

$$\mathbb{P}\{|T_n| > x + 4y\} \le \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|T_n| > x\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\le i\le n} |\xi_i| > \frac{y}{m}\right\}.$$

Теорема 1 получена Магдой Пелиград в [1]. «Изюминка» этого неравенства в том, что параметр γ можно сделать сколь угодно малым и хвосты распределений сумм и максимумов становятся в некотором смысле похожими. Из этого факта выводятся разнообразные следствия (равносильность равномерной интегрируемости степеней сумм и максимумов, неулучшаемые по порядку оценки

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: griniran@gmail.com

моментов сумм слабо зависимых величин и т. д.), которые стимулировали существенный прогресс в предельных теоремах для слабо зависимых величин. К примеру, достигнуты серьёзные продвижения в доказательстве так называемой гипотезы Ибрагимова-Иосифеску [1, 2], получены необходимые и достаточные условия для притяжения стационарных последовательностей с φ-перемешиванием к устойчивым законам [3–5] и т. д.

В настоящей заметке предлагается новое доказательство неравенств типа неравенства М. Пелиград, в которых помимо φ-перемешивания используются некоторые другие условия слабой зависимости.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Введём S_n и T_n по формулам (1) и обозначим

$$Q_n = \max_{1\le k\le n} \min\{|S_k|, |S_n - S_k|\}, \quad Q_n(m) = \max_{m\le k\le n} \min\{|S_{k-m}|, |S_n - S_k|\},$$

$(Q_n(0) = Q_n)$.

Лемма 1.

$$T_n \le 3Q_n(m) + (3m+1)\max_{1\le i\le n}|\xi_i|. \tag{2}$$

Доказательство основано на идеях из [6, гл.2, §12]

Пусть $M = \{k : |S_k| \le |S_n - S_k|\}$; ясно, что $0 \in M$. Пусть $S_n \ne 0$. Тогда $n \notin M$ и, следовательно, существует $0 < k \le n$ такое, что $k-1 \in M$ и $k \notin M$, то есть

$$|S_{k-1}| \le |S_n - S_{k-1}|, \quad |S_k| > |S_n - S_k|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |S_n| \le |S_{k-1}| + |\xi_k| + |S_n - S_k| \le \min\{|S_{k-1}|, |S_n - S_{k-1}|\} + \\ + \min\{|S_k|, |S_n - S_k|\} + \max_{1\le i\le n}|\xi_i| \le 2Q_n + \max_{1\le i\le n}|\xi_i|. \end{aligned} \tag{3}$$

Если же $S_n = 0$, то (3) выполняется очевидным образом. Далее при $1 \le k \le n$

$$|S_k| \le \min\{|S_n| + |S_k|, |S_n| + |S_n - S_k|\} = |S_n| + Q_n,$$

так что

$$T_n \le |S_n| + Q_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$T_n \le 3Q_n + \max_{1\le i\le n}|\xi_i|. \tag{5}$$

Если мы покажем, что

$$Q_n \le Q_n(m) + m\max_{1\le i\le n}|\xi_i|. \tag{6}$$

то из (5) и (6) будет следовать утверждение леммы. При $k \le m$ $|S_k| \le m\max_{1\le i\le n}|\xi_i|$, и очевидно, что (5) выполняется. Пусть $k > m$. Тогда

$$|S_k| \le |S_{k-m}| + m\max_{1\le i\le n}|\xi_i|, \quad Q_n \le \max_{m<k\le n} \min\left\{|S_{k-m}| + m\max_{1\le i\le n}|\xi_i|,\ |S_n - S_k|\right\},$$

откуда следует (5). Лемма доказана.

Пусть $E_l = \{|S_i| \le x,\ 1 \le i < l,\ |S_l| > x\},\ l = 1, 2, \ldots$ Тогда $E_i E_j = \varnothing$, $i \ne j$, $\bigcup\limits_{l=1}^{k} E_l = \{T_k > x\}$.

Лемма 2.

$$\mathbb{P}\{T_n \ge 3x + y\} \le \mathbb{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{n-m}(E_l, \max_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x)\right\} + \mathbb{P}\{(3m+1)\max_{1 \le i \le n}|\xi_i| > y\}.$$

Доказательство. Из (2) следует

$$\mathbb{P}\{T_n \ge 3x + y\} \le \mathbb{P}\{Q_n(m) > x\} + \mathbb{P}\{(3m+1)\max_{1 \le i \le n}|\xi_i| > y\}. \tag{7}$$

Далее

$$\{Q_n(m) > x\} \subseteq \left\{\max_{m \le k \le n} \min\{T_{k-m}, |S_n - S_k|\} > x\right\} =$$

$$= \left\{\bigcup_{k=m}^{n}(T_{k-m} > x, |S_n - S_k| > x)\right\} = \left\{\bigcup_{k=m}^{n}\bigcup_{l=1}^{k-m}(E_l, |S_n - S_k| > x)\right\} =$$

$$= \left\{\bigcup_{l=1}^{n-m} E_l \bigcup_{k=l+m}^{n}(|S_n - S_k| > x)\right\} = \left\{\bigcup_{l=1}^{n-m}(E_l, \max_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x)\right\}.$$

Последнее соотношение вместе с (7) даёт утверждение леммы.

Пусть теперь $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания.

Так как $E_l \in \mathcal{F}_{\le l}$, $\left\{\max\limits_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x\right\} \in \mathcal{F}_{\ge l+m}$, то

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{n-m}(E_l, \max_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x)\right\} = \sum_{l=1}^{n-m}\mathbb{P}\left\{E_l, \max_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x\right\} \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{n-m}\mathbb{P}(E_l)\left(\mathbb{P}\left\{\max_{l+m \le k \le n}|S_n - S_k| > x\right\} + \varphi(m)\right) \le$$

$$\le \mathbb{P}\{T_n > x\}\left(\mathbb{P}\left\{\max_{0 \le k \le n}|S_n - S_k| > x\right\} + \varphi(m)\right) =$$

$$= \mathbb{P}\{T_n > x\}(\mathbb{P}\{T_n > x\} + \varphi(m)). \tag{8}$$

Величину $\mathbb{P}\{T_n > a\} + \varphi(m)$ можно сделать сколь угодно малой выбором a и m, так что если $\mathbb{P}\{T_n > a\} + \varphi(m) \le \gamma_1 < 1$, то из леммы 2 и (8) при $x \ge a$ следует

$$\mathbb{P}\{T_n \ge 3x + y\} \le \gamma_1 \mathbb{P}\{T_n > x\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \le i \le n}|\xi_i| > \frac{y}{3m+1}\right\}.$$

Полученное неравенство является очевидным аналогом неравенства М. Пелиград. Чтобы ещё больше сблизить формулировки этих двух неравенств, можно заметить, что в условиях теоремы 1 $\mathbb{P}\{T_n > x\} \geq C\mathbb{P}\{|S_n| \geq \alpha x\},\ C > 0,\ \alpha > 0$ (см., например, соотношения (3.5) и (3.9) в [1]).

Будем говорить, что стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию λ-перемешивания, если существует функция $\lambda(x) > 0,\ \lambda(x) \downarrow 0,\ x \downarrow 0$ такая, что

$$\sup\left\{\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)\lambda(\mathbb{P}(B))} : A \in \mathcal{F}_{\leq 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geq l},\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0\right\} \leq 1$$

(см. [5]). Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию λ-перемешивания, то

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{n-1}(E_l, \max_{l+1\leq k\leq n}|S_n - S_k| > x)\right\} = \sum_{l=1}^{n-1}\mathbb{P}\left\{E_l, \max_{l+1\leq k\leq n}|S_n - S_k| > x\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n-1}\mathbb{P}(E_l)\lambda\left(\mathbb{P}\left\{\max_{l+1\leq k\leq n}|S_n - S_k| > x\right\}\right) \leq \mathbb{P}\{T_n > x\}\lambda(\mathbb{P}\{T_n > x\}).$$

Величину $\lambda(\mathbb{P}\{T_n > a\})$ можно сделать сколь угодно малым выбором a, так что если $\lambda(\mathbb{P}\{T_n > a\}) \leq \gamma_2 < 1$, то из леммы 2 с $m = 1$ получаем следующий аналог неравенства М. Пелиград:

$$\mathbb{P}\{T_n \geq 3x + y\} \leq \gamma_2\mathbb{P}\{T_n > x\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i| > \frac{y}{4}\right\}, \quad x \geq a.$$

Обозначим через $L_{\leq n}$ и $L_{\geq n}$ множества случайных величин с конечным вторым моментом и измеримых, соответственно, относительно $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$.

Будем говорить, что стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания, если

$$\rho(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{E}\,\xi\eta - \mathbb{E}\,\xi\mathbb{E}\,\eta|}{\sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2\mathbb{E}\,\eta^2}} : \xi \in L_{\leq 0},\ \eta \in L_{\geq n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty$$

(см., например, [7]). Взяв в этом определении $\xi = \mathbf{1}_A,\ A \in \mathcal{F}_{\leq 0},\ \eta = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathcal{F}_{\geq n}$, получим

$$|\mathbb{P}\{AB\} - \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}| \leq \rho(n)\sqrt{\mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n\}$ стационарная последовательность и пусть при некоторых натуральных n и m таких, что $n/r \geq 2$ и $a > 0$ выполняется*

$$2\max_{2r\leq i\leq n}\mathbb{P}\{|S_i| > a\} + \sqrt{2n/r}\,\rho(r) \leq \gamma_3 < 1.$$

Тогда при любых $x \geq 5a$

$$\max_{2r\leq i\leq n}\mathbb{P}\{|S_i| > x\} \leq \gamma_3\mathbb{P}\{T_n > x/5\} + 2(n/r)\mathbb{P}\{\max_{1\leq i\leq 2r}|S_i| > x/5\}.$$

Этот вариант своего неравенства М. Пелиград получила в [8]. Основное отличие этого неравенства от предыдущих в том, что в отличие от m, не зависящего от n, здесь $r = r(n) \to \infty$ и используется более слабое условие перемешивания

Покажем, как предложенный выше подход позволяет получать результаты типа теоремы 2.

В лемму 2 вместо ξ_j подставим $\eta_j = \sum\limits_{i=1}^{r} \xi_{(j-1)r+i}$, $j = 1, ..., p = [n/r]$ (здесь $[x]$ — целая часть x), вместо S_k и T_k — соответственно $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j$ и $V_k = \max\limits_{1 \le j \le k} |U_j|$.

Пусть $E_l = \{|U_j| \le x,\ 1 \le j < l,\ |U_l| > x\}$, $l = 1, 2, ...$ Тогда $E_i E_j = \varnothing$, $i \ne j$, $\bigcup\limits_{l=1}^{k} E_l = \{V_k > x\}$. Лемма 2 при $m = 1$, $x = y$ теперь будет выглядеть так:

$$\mathbb{P}\{V_p \ge 4x\} \le \mathbb{P}\left\{\bigcup_{l=1}^{p-1} (E_l, \max_{l+1 \le k \le p} |U_n - U_k| > x)\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \le j \le p} |\eta_j| > x/4\right\}. \quad (10)$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность. Имеем

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \le j \le p} |\eta_j| > x/4\right\} \le p\mathbb{P}\{|\eta_1| > x/4\} \le (n/r)\mathbb{P}\{|S_r| > x/4\}. \quad (11)$$

Далее

$$p\left\{\bigcup_{l=1}^{p-1} (E_l, \max_{l+1 \le k \le p} |U_n - U_k| > x)\right\} \le \sum_{l=1}^{p-1} \left(\mathbb{P}\{E_l\}\mathbb{P}\left\{\max_{l+1 \le k \le p} |U_n - U_k| > x)\right\} + \right.$$

$$\left. + \rho(r)\sqrt{\mathbb{P}\{E_l\}\mathbb{P}\left\{\max_{l+1 \le k \le p} |U_n - U_k| > x\right\}}\right) \le$$

$$\le \mathbb{P}\{V_p > x\}\left(\mathbb{P}\{V_p > x\} + \rho(r)\sqrt{\mathbb{P}\{V_p > x\}} \sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mathbb{P}\{E_l\}}\right). \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mathbb{P}\{E_l\}} \le \sqrt{p \sum_{l=1}^{p} \mathbb{P}\{E_l\}} = \sqrt{p\mathbb{P}\{V_p > x\}}. \quad (13)$$

Из соотношений (10) – (13) следует

$$\mathbb{P}\{V_p > 4x\} \le \mathbb{P}\{V_p > x\}\left(\mathbb{P}\{V_p > x\} + \sqrt{n/r}\rho(r)\right) + (n/r)\mathbb{P}\{|S_r| > x/4\}. \quad (14)$$

Так как $\mathbb{P}\{V_p > x\} \le \mathbb{P}\{T_n > x\}$, $\mathbb{P}\{|S_{np}| > 4x\} \le \mathbb{P}\{V_p > 4x\}$, то из (14) следует

$$\mathbb{P}\{|S_n| > 5x\} \le \mathbb{P}\{|S_{np}| > 4x\} + \mathbb{P}\{|S_n - S_{np}| > x\} \le$$

$$\le \gamma_4\mathbb{P}\{T_n > x\} + (n/r + 1)\max_{1 \le i \le r} \mathbb{P}\{|S_l| > x/4\},\ \mathbb{P}\{T_n > x\} + \sqrt{n/r}\rho(r) \le \gamma_4 < 1,$$

что, очевидно, является аналогом теоремы 2.

Литература

1. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, N. 4. P. 1304–1313.
2. Peligrad M. On Ibragimov-Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences // Stochastic Processis and their Application. 1990. V. 35. P. 293–308.
3. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероят. и её примен. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
4. Гринь А.Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин // Теория вероятн. и её примен. 1990. Т. 35, № 2. С. 255–270.
5. Гринь А.Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31, № 1. С. 53–63.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М. : Наука, 1977. 351 с.
7. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
8. Peligrad M. The convergence jf moments in the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables // Proceeding of the AMS. 1987. V. 101, N. 1. P. 142–148.