

А.Д. АЛЕКСАНДРОВ И ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

А.Л. Вернер

Воспоминания о том, как шла работа с А.Д. Александровым над школьными учебниками по геометрии.

1. Как это начиналось. Колмогоровская реформа школьного курса геометрии и её результаты



А.Л. Вернер. 2012

В середине 60-х годов прошлого века в школьном преподавании математики в СССР активно велась *модернизация* (так бы теперь назвали то, чем руководил тогда Андрей Николаевич Колмогоров). Программы школьных курсов математики были объявлены устаревшими, отставшими от современной математики, а потому их необходимо было обновить и по этим новым программам написать новые учебники. С курсом математики для пятых — шестых классов, а также с курсом алгебры и начал анализа эта перестройка у А.Н. Колмогорова и его коллег, в целом, получилась, а вот переделать традиционный для России и СССР курс геометрии они не смогли, и дело

окончилось скандалом.

О новой программе А.Н. Колмогоров в журнале «Математика в школе» писал дважды: подробно в статье «Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе» [1] и кратко в заметке «К новым программам по математике» [2].

Начиная обсуждение программы по геометрии, в первой из них А.Н. Колмогоров пишет: «Если я назвал действующие сейчас программы архаичными, то особенно это относится к геометрии». А затем намечает программу перестройки курса геометрии.

«Основные тенденции перестройки школьного курса геометрии, сейчасшедшие самое широкое признание, можно сформулировать в виде трех положений.

1. Формирование начальных геометрических представлений происходит в младших классах.

Copyright © 2012 А.Л. Вернер

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

E-mail: werner1934@gmail.com

2. Логическая структура систематического курса геометрии в средних классах заметно упрощается по сравнению с евклидовой традицией. Развитие привычки к строгим логическим доказательствам на этом этапе соединяется с открытым признанием права принимать без доказательства избыточную систему допущений.
3. Курс геометрии в старших классах строится на основе векторных представлений. При этом естественно и обращение к координатному методу (однако в качестве вспомогательного, так что изложение не делается от этого обращения менее «геометрическим»).

Первое из этих положений верно. Последнее (третье) — это характерная для тех лет убежденность, что векторное построение стереометрии («по Вейлю») проще его традиционного синтетического построения. Наконец, со вторым положением трудно согласиться, и дальнейшее развитие событий подтвердило, что о «широком признании» говорить было явно рано: из программы заметного упрощения никак видно не было, а соответствующие учебники еще не были написаны.

В конце статьи [1] А.Н. Колмогоров пишет:

«Для того чтобы можно было спокойно и уверенно работать над новыми учебниками геометрии, по существу следовало бы срочно проделать предварительную работу: одному или нескольким коллективам учёных и учителей с использованием иностранного опыта составить и опубликовать проект (или несколько проектов) «логического скелета» школьного курса геометрии (исходные допущения и основная цепь теорем с доказательствами) в форме, доступной для критики и экспериментального употребления достаточно опытными учителями».

К сожалению, этого не было сделано.

Из двух страниц второй заметки [2] А.Н. Колмогоров одну страницу посвятил геометрии. Там он писал:

«Мне уже неоднократно приходилось писать на страницах «Математики в школе» о том, что следование классической евклидовой схеме изложения начал планиметрии, по которой довольно долго ограничиваются теоремами «абсолютной геометрии» (в терминологии Лобачевского), не опирающимися на постулат о параллельных, в нашей школьной практике давно потеряло всякий разумный смысл. Значительно более простая система изложения, где параллельность и параллельный перенос используются с самого начала, давно разработана и осуществлена во многих иностранных учебниках».

Но трудность заключается в том, что готового образца логического строения курса планиметрии, пригодного для наших 6–8 классов, ни в нашей, ни в зарубежной учебной литературе, по-видимому, нет».

Итак, к 1968 году была установлена архаичность старых программ по школьной математике, написаны новые программы и настало время писать учебники.

Написать учебник для 6–8 классов взялся сам А.Н. Колмогоров. Хотя к этому времени уже был написан курс элементарной геометрии знаменитым геометром — академиком Алексеем Васильевичем Погореловым [54]. А.Н. Кол-

могоров рецензировал эту книгу, и в Предисловии для учителя к этой книге А.В. Погорелов выражает «сердечную благодарность академику А.Н. Колмогорову за ценные замечания и советы, сделанные им в рецензиях на отдельные части первого издания». Я помню, как в июне 1967 года, приехав в Петрозаводск на Всесоюзный симпозиум по геометрии «в целом», А.В. Погорелов гордо сказал мне: «Я написал курс элементарной геометрии. Я в нем ввёл аксиомы расстояния. Меня похвалил Колмогоров».

Не доверил А.Н. Колмогоров писать «Геометрию, 6–8» и тем известным геометрам В.Г. Болтянскому и И.М. Яглому, которые были в его комиссии. Он решил это сделать сам — построить систематический курс планиметрии, положив в его основу геометрические преобразования. Соавторами А.Н. Колмогорова были Р.С. Черкасов и А.Ф. Семенович. Почему А.Н. Колмогоров сам решил работать над курсом геометрии, на мой взгляд, объясняет сказанное им в докладе «О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики», прочитанном 11 января 1971 года в УМСе МП СССР [3, с.17]: «У нас решено для 6–10 классов сохранить отдельные учебники геометрии. По сравнению с принятой во многих странах системой единых учебников математики наличие связного учебника геометрии имеет определённые преимущества, но лишь в том случае, если логика построения курса геометрии будет строго согласована с курсами алгебры и начал анализа».

Вот эту-то *строгую согласованность* Андрей Николаевич и решил сделать сам. Курс геометрии А.В. Погорелова для такой строгой согласованности не очень годился.

Вспомним, что написал И. Ньютон о геометрии в Предисловии к первому изданию своего знаменитого труда «Математические начала натуральной философии»: «Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает» (абзац 5). В Колмогоровской «Геометрии, 6–8» [10] в шестом классе всё наоборот: из выделенных там 38 утверждений почти две трети оставлены без доказательства, да ещё среди недоказанных утверждений много и не выделено. Учебник первого года систематического курса геометрии, который всегда двигался равномерно и последовательно на уровне строгости, доступной ученикам этого возраста, стал прерывистым по своему содержанию: то что-то докажем, то примем без доказательства, затем снова что-то докажем, а затем снова примем без доказательства и т.д. Эта уже не та геометрия, о которой говорил И. Ньютон! Того, чего добивался А.Н. Колмогоров от своего курса геометрии — повышения его уровня строгости (в том смысле, который вкладывал в слово *строгость* А.Н. Колмогоров) и одновременного упрощения курса геометрии — у него не получилось. Это признал и сам А.Н. Колмогоров, когда в заметке «Замечание о понятии множества в школьном курсе математики» [4] написал:

«Возвращаясь к геометрии, считаю, что всякая аксиоматика в современном школьном курсе должна стоять на теоретико-множественной точке зрения. Такова, в частности, аксиоматика А.В. Погорелова. Но вопрос о том, когда начинать с учащимися разговор о логическом строении геометрии, следует обсудить заново. Опыт работы по разным вариантам учебников геометрии в те-

чение последнего десятилетия показал, что в начале курса 6 класса это делать преждевременно».

Так, как это делали авторы «Геометрии, 6–8» ([10], слово *преждевременно* вполне справедливо. Можно по-разному обсуждать в начале систематического курса вопрос о логическом строении геометрии. Но явно преждевременно отбрасывать многовековой опыт построения курса элементарной геометрии («по Евклиду») и в первый год систематического курса в основу курса класть геометрические преобразования («по Клейну»): школьники к этому не готовы.

Со взглядами А.Н. Колмогорова на то, каким, по его представлению, должен быть учебник систематического курса геометрии в 6–8 классах, мы теперь познакомимся. Обратимся теперь к учебнику геометрии для старших классов (тогда это были классы 9–10, теперь это классы 10–11).

Подбирая авторские коллективы для различных учебников математики, А.Н. Колмогоров ездил по педагогическим вузам страны и встречался с математиками. Приезжал он и в Герценовский институт, и я помню, как в кабинете ректора мы встречались с А.Н. Колмогоровым, и речь шла о реформе школьного курса математики. Наверное, наши взгляды не подходили А.Н. Колмогорову: никого из герценовцев он в свою команду не взял. Учебник по геометрии для старших классов А.Н. Колмогоров поручил писать профессору Ярославского пединститута З.А. Скопцу и доцентам Курского пединститута В.М. Клопскому и М.И. Ягодовскому.

До появления учебника «Геометрии, 9–10» (под редакцией З.А. Скопца) [11] в 1974 году старшие классы занимались по учебнику стереометрии А.П. Киселёва. Содержание нового учебника «Геометрии, 9–10» [11] соответствовало министерской программе 1968 года, и он продолжал линию, развитую в Колмогоровском учебнике «Геометрия, 6–8» [10]. В 9-м классе было три главы:

- глава 1. Основные понятия стереометрии. Параллельность в пространстве;
- глава 2. Преобразования пространства. Векторы;
- глава 3. Перпендикулярность в пространстве. Двугранные и многогранные углы.

Начинается учебник [11] так: «Систематический курс стереометрии строится по той же схеме, что и курс планиметрии:

1. Перечисляются основные понятия, которым не дают определений.
2. Формулируются аксиомы, в которых выражены свойства основных понятий.
3. С помощью основных понятий формулируются определения других геометрических понятий.
4. На основе определений и аксиом доказываются теоремы».

Основные понятия — точка, прямая, плоскость и расстояние. Аксиом в [11] было сформулировано девять: пять традиционных аксиом принадлежности, три аксиомы метрического пространства и аксиома 9: *для каждой плоскости выполняются известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых.*

И далее в главе 1 авторы [11] доказывают первые теоремы стереометрии традиционным синтетическим методом. Для учеников, погруженных до этого на три года в плоский планиметрический мир, такое строго аксиоматическое начало (и по учебнику А.П. Киселёва) всегда было трудным.

В первых параграфах главы 2 учебника [11] рассказано о перемещениях в пространстве. Как и в Колмогоровском учебнике «Геометрия, 6–8» [10] общие свойства перемещений (о том, что прямая переходит в прямую, плоскость — в плоскость и т.п.) лишь скороговоркой перечисляются (без какого-либо выделения), но не доказываются. А затем формулируется печально знаменитое определение:

Вектором (параллельным переносом), определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку M_1 , что луч MM_1 сонаправлен с лучом AB и расстояние $|MM_1|$ равно расстоянию $|AB|$.

Именно с этого определения начинали критику Колмогоровской реформы академики В.С. Владимиров, Л.С. Понтрягин и А.Н. Тихонов в «Математике в школе» [9]. С него начинает в органе ЦК КПСС журнале «Коммунист» (1980, № 14) свою статью «О математике и качестве её преподавания» Л.С. Понтрягин. Его зачитывал с трибуны Верховного Совета СССР декан мехмата МГУ. Вопрос об определении вектора стал вопросом политическим.

Здесь, пожалуй, стоит обсудить вопрос о чистоте определений, которому А.Н. Колмогоров и его соавторы и последователи уделяли особое внимание. Вот что писал А.Д. Александров в своей программной статье «О геометрии» в 1980 году в журнале «Математика в школе» [5]:

«Существенно наглядно-оперативное знание предмета, содержащее наглядные представления и умения правильно ими оперировать. Все представляют, что такое стул, и умеют им пользоваться, но, наверное, многие затруднятся дать сразу, как на экзамене, определение: «Стулом называется...» У математиков 17–18 веков не было точных определений ни функции, ни предела, ни самого переменного x , но они действовали с замечательным успехом (вспомним хотя бы Эйлера).

Педантичное стремление дать каждому понятию словесное определение может вести к тому, что вместо пояснения и уточнения представлений, которое уже есть у учащихся, вместо формирования у них ясных понятий им даётся нечто трудно представимое или вовсе невообразимое, а лишь выраженное в словесной оболочке, порой такой, что они не могут ни понять сказанное, ни применить. Например, в действующих учебниках даётся определение: «Направлением называется множество всех сонаправленных лучей». И так как ученикам уже внушили, что множество — это собрание элементов, и оно состоит из своих элементов, то выходит, что направление состоит из всех сонаправленных лучей... Сходное положение обнаруживается с определениями понятий вектора, многогранника и др.

Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного — умственного и морального — развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает и при необходимости руководствуется другими

понятиями».

Дав громоздкое определение вектора, всё равно затем авторы [11] оперируют, в основном, с направленными отрезками.

В главе 3 [11] завершается изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, изучаются все отношения перпендикулярности прямых и плоскостей, рассматриваются преобразования осевой симметрии и симметрии относительно плоскости. Для этой главы характерно одновременное применение и чисто синтетических методов, и векторного метода, и методов преобразований. Целостности в ней нет.

Итак, в 9-м классе в учебнике [11] помимо традиционных теорем о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве изучаются также векторная алгебра и перемещения в пространстве. Ясно, что на том уровне строгости, который в этом классе был в учебнике А.П. Киселёва, изучить столь обширный материал невозможно.

Первая глава 10-го класса учебника [11] — это короткая глава 4 «Координатный метод в пространстве». В ней изложены элементы аналитической геометрии в пространстве.

В следующей главе 5 «Многогранники» уже нет никаких векторов, никаких координат — всё вполне традиционно: призмы, пирамиды, правильные многогранники. Лишь в последнем параграфе объем пирамиды вычисляется интегрированием площади её плоских сечений. А определение многогранника в главе 5 побудило А.Д. Александрова написать обширную статью «Что такое многогранник?» [6].

Наконец, последняя глава учебника [11] — это глава 6 «Фигуры вращения». В ней речь идёт о цилиндре, конусе, шаре и об их поверхностях.

Для изложения двух основных глав курса 10-го класса — глав 5 и 6 — ни векторов, ни перемещений, ни координат не нужно: первая глава в этом классе стоит особняком и вполне могла бы быть опущена.

Учебник [11] «Геометрия, 9–10» (под редакцией З.А. Скопеца) был жёстко привязан к учебнику [10] «Геометрии, 6–8» (под редакцией А.Н. Колмогорова), имел те же недостатки, что и учебник «Геометрии, 6–8». Дополнительные трудности работы по нему заключались в том, что в те годы в СССР было введено всеобщее десятилетнее обучение, а потому в старших классах геометрию стали учить и такие школьники, для которых она была сложна и по учебнику А.П. Киселёва, а тем более, и по сменившему учебник А.П. Киселёва учебнику [11].

Я столь подробно остановился на содержании учебника [11], чтобы стало понятно, почему А.Д. Александров после поступившему ему весной 1979 года от Министра Просвещения М.А. Прокофьева предложения отредактировать учебник [11] решил, что надо писать новый учебник стереометрии.

2. Работа над учебниками стереометрии

20-го апреля 1979 года Александр Данилович из Новосибирска написал мне о том, что ему из МП СССР прислали подготовленное к публикации 4-ое издание учебника [11], и что, по его убеждению, «этот *труд* проще переписать,

чем уговаривать авторов что-либо исправить». И далее: «Не согласитесь ли Вы принять участие в переделке этого сочинения вместе со мной?»

Я к тому времени уже имел опыт в написании учебных пособий для пединститутов, среди которых было и «Аксиоматическое построение геометрии (по Колмогорову)», вышедшее в 1978 году и написанное вместе с С.А. Франгуловым и С.А. Юзвинским. В те годы казалось, что Колмогоровская геометрия в школе — это надолго (вроде советской власти), а нам в пединститутах надо было готовить учителей к работе по Колмогоровским учебникам и быть уверенными, что логических ошибок в них нет. Трудности в создании учебных пособий для студентов, как в содержательном, так и в техническом плане, были мне уже хорошо известны. А уж то, что этих трудностей для школьных учебников намного больше, я хорошо понимал, и у меня не было особенного желания работать над учебниками для школы. Поэтому я в ответ на первое письмо Александра Даниловича ответил как-то уклончиво и скоро получил строгий ответ в письме от 10 мая 1979 года. Прочитую его более подробно.

«Дорогой Алексей Леонидович!

По-видимому, я неясно изложил то, о чём идёт речь — что я Вам предлагаю.

Мне прислали из Министерства рукопись нового издания (нового варианта) пособия [11]. Министр написал мне предложение стать научным редактором. Но по ознакомлении с сочинением, я пришёл к выводу, что редактировать его — напрасный и невозможный труд; нужно — и это проще — переписать сочинение заново. Вот я и хочу это сделать и притом совершенно срочно.

Не нужно ничего особенно придумывать, не нужно менять программу и т.п. Надо просто попытаться переделать данное сочинение так, чтобы оно стало лучше и чтобы уж не содержало заведомых ошибок и глупостей.

<...>

Так вот, допустим, я приеду в Ленинград на май-июнь, чтобы поработать вместе над геометрией: попытаться переписать пособие для 9–10 кл. Что Вы думаете по этому поводу?

Революция в средней школе — злодейство. Одно уже было. Второго допустить ни в коем случае нельзя. Виноградово-Тихоновская революция или контрреволюция может быть ещё хуже Колмогоровской. Надо не дать им ходу. А для этого надо захватить инициативу, т.е. надо взяться за улучшение дела реально, без широковещательных деклараций, без лишней ругани и пр.

Ваш А. Александров»

И мы «взялись за улучшение дела». Я рассказал ленинградским геометрам о предложении Александра Даниловича. Виктор Абрамович Залгаллер сказал: «Написать новый учебник геометрии — это всё равно, что создать новый автомобиль. Если государство хочет его получить, то оно должно создать отдельный институт, который будет заниматься только этим учебником». И добавил

ещё: «Александров напишет слишком умный учебник». Эту его фразу я вспоминаю очень часто.

Юрий Александрович Волков сказал так: «Плохо ваше дело — Погорелов уже написал учебник». Но Юрий Александрович, пока мог (он уже был смертельно болен и скончался через два года), с интересом обсуждал предлагаемые нами варианты первых глав стереометрии, многое нам советовал.

В первых главах стереометрии мы занимались, прежде всего, **фигурами**, их взаимным расположением, **строили** из простейших фигур всё более сложные. Работая над курсом элементарной геометрии, А.Д. Александров противопоставлял своё понимание геометрии колмогоровскому пониманию. Познакомившись с учебником А.Н. Колмогорова [10], Александр Данилович сказал: «Там почти нет фигур». Свой учебник он начинал рассказом о тех фигурах, которые изучает стереометрия, о том, где они встречаются в реальной жизни, о их роли в практике.

Трудность была ещё в том, что надо было написать такой курс стереометрии, который был бы, с одной стороны, независим от различных возможных построений предыдущего курса планиметрии, но, с другой стороны, был бы продолжением любого курса планиметрии. Это обеспечилось тем, что Александр Данилович определил плоскость как такую фигуру в пространстве, на которой выполняется евклидова планиметрия. А как построена планиметрия — не имеет значения. Важно лишь, что выполняются её предложения.

Написать учебник стереометрии за одно лето, как предполагал Александр Данилович, мы, конечно, не смогли. Одна лишь глава о перпендикулярности и параллельности в пространстве переписывалась несколько раз. И о понятии расстояния (играющего столь существенную роль в Колмогоровском подходе к геометрии) писать приходилось несколько раз. Вот что писал мне Александр Данилович 20-го апреля 1980 года, т.е. ровно через год после того первого письма об учебнике стереометрии.

«Дорогой Алексей Леонидович!

Прочитал я Ваш параграф о расстоянии и заплакал. Предаёте Вы наше дело, отступаете и поддаётесь злодеям. Одумайтесь!

Колмогоров и его *коллеги* (словом *коллеги* я заменил более сильное слово в письме Александра Даниловича. — А.Л.) забили школьный курс всякими благоглупостями, наукообразностями, словесами учёными и пр., и пр. Нужно против этого мусора восстать твёрдо и постоянно выметать его. Он забивает головы учащихся! Вместо того, чтобы учить содержательным вещам, они (ученики) должны заучивать, что расстояние от Москвы до Ленинграда равно расстоянию от Ленинграда до Москвы, что расстояние от точки до неё самой равно нулю, что равные, одинаковые предметы не равны, но должны называться конгруэнтными, и т.д., и т.д., и пр., и пр., и пр.

<Далее А.Д. Александров в письме две страницы анализирует аксиоматику метрического пространства>

Нужно быть ближе к жизни! В жизни ясно, что $|AB| > 0$ и $|AB| = |BA|$. Ясно без специальных формулировок. Вот и нужно, чтобы ученики понимали, прежде всего, что речь идёт об обыденных вещах, которые только уточняются. А то ведь получается, что в жизни «расстояние» — это одно, а в геометрии другое, в жизни предметы одинаковые, а в геометрии конгруэнтные.

Замечание Ваше об одинаковых телах, фигурах прекрасно. Это Вы здорово сообразили. Ваш АА».

Из этого письмо хорошо видно, сколь увлечённо работал над учебниками в те годы Александр Данилович. Недаром в одной из рецензий на наши учебники Н.П. Долбиллин написал, что А.Д. Александров *вдохновенно говорит о геометрии*.

Увлечённость Александра Даниловича геометрией прекрасно чувствуются уже в написанных им Предисловии и Введении к нашему первому учебнику [12].

Вот два абзаца из Предисловия учебника [12].

«Сущность геометрии в органическом соединении пространственных представлений со строгой логикой, в котором они взаимно проникают и организуют друг друга. И так как всё, что ни есть, находится в пространстве, то геометрия, как теория пространственных форм и отношений, имеет всеобщее значение. Мы окружены её реальными воплощениями, она лежит в основе всей техники, появляясь всюду, где требуется малейшая точность в определении форм и размеров. Геометрия не существует без этих связей, — взятая «в себе», она не будет тем, что она есть на самом деле.

Соответственно, первая особенность предлагаемого учебника состоит в том, что в нём уделено существенно большее внимание, чем это обычно делается, связи вводимых понятий и доказываемых теорем с реальными вещами, от повседневного обихода до техники и законов физики».

А вот отрывок из Введения учебника [12].

«Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, и заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента геометрии: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — «лёд и пламень не столь различны меж собой». Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины — со строгими формулировками и доказательствами».

Алексей Васильевич Погорелов, прочитав Введение учебника [12], сказал: «Александр Данилович, я же знаю, как Вы умеете писать!». А в целом же

о [12] он сказал: «Но это — учебник». Согласно взглядам А.В. Погорелова, учебник геометрии должен быть лишь кратким и логичным.

Первые главы стереометрии Александр Данилович назвал «строительной геометрией». В них речь идёт о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, об отношениях перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей. При этом перпендикулярность изучается до параллельности, а наиболее важное из отношений перпендикулярности — это отношение перпендикулярности прямой и плоскости. Вот как, переходя от «чистой» геометрии к «реальным вещам», Александр Данилович пишет о значении перпендикуляра:

«Перпендикуляр к плоскости играет очень важную роль и помимо того, что он является кратчайшим среди всех отрезков от данной точки до точек плоскости. Поясним ещё его значение. Положение плоскости в пространстве можно задавать, указывая перпендикулярную ей прямую и ту точку, в которой она эту прямую пересекает.

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Что это значит? Все лучи, лежащие в данной плоскости, образуют с ним равные углы — прямые углы, а для наклонной это не так. При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, а другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо видно на правильно навешенной двери. Если ее край не вертикален, дверь не открывается свободно и задевает пол.

Беря примеры из физики, можно отметить, что давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру к стенке, так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней.

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так, закон отражения гласит: «Луч падающий и луч отражённый расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образуют с ним равные углы».

Но главное значение перпендикуляра — это его роль в технике и во всей нашей жизни. Мы, можно сказать, окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т.д. Вертикаль перпендикулярна горизонтальной плоскости. Перпендикулярность играет главную роль в строительстве: междуэтажные перекрытия укладывают перпендикулярно столбам каркаса здания. Параллельность плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами *строительной геометрии*.

Из геометрических величин основным в курсе является *расстояние*. Подчёркивается, что параллельные фигуры — это фигуры, идущие на постоянном расстоянии друг от друга (что и проверяется в практике). А вот как понятие расстояния позволило упростить доказательство теоремы о трёх перпендикулярах: *наклонная к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в этой*

плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.

Доказательство. Пусть даны наклонная AC к плоскости α , её проекция BC на эту плоскость и прямая a , лежащая в плоскости α и проходящая через точку C . В теореме два утверждения: 1) *если $AC \perp a$, то $BC \perp a$* ; 2) *если $BC \perp a$, то $AC \perp a$* . Докажем их.

Возьмём переменную точку X прямой a и рассмотрим две величины AX^2 и BX^2 . Треугольник ABX — прямоугольный. Поэтому $AX^2 = AB^2 + BX^2$. Значит, величины AX^2 и BX^2 отличаются на постоянное слагаемое. Поэтому эти величины свои наименьшие значения принимают одновременно — в одной и той же точке. Из этого и следуют оба утверждения теоремы.

Курс стереометрии стал более современным: появилось понятие опорной плоскости, рассматриваются конусы и цилиндры с произвольными основаниями (а не только конусы и цилиндры вращения), благодаря такому подходу, пирамида — это конус с многоугольным основанием, а призма — это цилиндр с многоугольным основанием, формулы для объёмов пирамид и призм — это частные случаи общих формул для объёмом конусов и цилиндров. При выводе формул для объёмов тел применяется понятие производной.

Когда в конце лета встал вопрос о задачном материале, я познакомил Александра Даниловича с одним из известных ленинградских учителей Валерием Идельевичем Рыжиком. В.И. Рыжик закончил матфак ЛГПИ им. А.И. Герцена тремя годами позднее меня и работал тогда в математической 239-ой школе. Знакомство состоялось в гостинице Герценовского института, где в те годы часто жил Александр Данилович как гость ректора ЛГПИ Александра Дмитриевича Боборыкина. Так и сложился наш авторский коллектив: А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик.

Ознакомившись с теорией учебника и зная положение с курсом геометрии в школе в те годы, В.И. Рыжик сказал Александру Даниловичу, что учителя забыли о том, что такое геометрия — та подлинная геометрия, которая появится на страницах учебника Александрова. Поэтому надо написать в журнал «Математика в школе» статью о геометрии. Такая статья «О геометрии» [5], существенно повлиявшая на геометрическое образование в школе, появилась в середине 80-го года ещё до выхода учебника стереометрии.

Работа над учебником стереометрии шла весь 80-ый год. Шла интенсивно. Так, например, Александр Данилович писал нам с В.И. Рыжиком из Новосибирска об учебнике 22-го и 31-го августа, 1, 2, 3 и 4 сентября. В издательство «Просвещение» мы сдали учебник в декабре 1980 года. Уже летом этого года стало ясно, что ждать с началом эксперимента до появления из печати учебника — это упустить ещё год или два. Выход был найден в том, что в Институте Математики в Новосибирске Александр Данилович опубликовал в 1980-81 году четыре препринта, которые охватили основное содержание учебника для 9-го класса. Там же публиковался небольшими выпусками и задачный материал. По этим-то препринтам и задачам начали эксперимент с 1980-го года в нескольких ленинградских школах учителя-энтузиасты: Лариса Петровна Евстафьева в 210-ой школе, Арон Иосифович Ржавинский в 159-ой школе, Анатолий Ар-

сеньевич Окунев в 526-ой школе.

Работал по ним в 239-ой школе и В.И. Рыжик, а в одном из его классов по этим препринтам геометрии учился Гриша Перельман. Когда в те годы я упрекал Рыжика за то, что его задачи трудны, то он мне говорил: «А у меня в классе сидит Гриша Перельман. Должен же я чем-то загрузить его голову». Но, конечно, были среди задач у В.И. Рыжика и простые, посильные для обычных учеников. Задач всегда было много.

Первые два учебника [12] и [13] в сокращённом виде были объединены в один учебник «Геометрия, 9–10» [14], вышедший в свет в 1983 году.

3. Курс планиметрии, построенный А.Д. Александровым

После того, как первый этап работы над учебником стереометрии был завершён, Александру Даниловичу стало ясно, что теперь необходимо писать курс планиметрии, чтобы появилась элементарная геометрия «по Александрову». Два года (с 1981 по 1983) он работал над курсом планиметрии, который опубликовал в препринтах [43–51]. Эти препринты легли в основу наших учебников «Геометрия, 6» [17], «Геометрия, 7» [18] и «Геометрия, 8» [19]. Затем три учебника планиметрии были дополнены ещё одним, снова переработанным, учебником стереометрии «Геометрия, 9–10» (1987, [16]). Тем самым, появился полный курс элементарной геометрии «по Александрову» для общеобразовательной школы.

Работая над курсом планиметрии для школы, Александр Данилович одновременно писал книгу «Основания геометрии» (М.: «Наука», 1987. [52]), которая, как он написал во введении к этой книге, «обращена не только вообще к тем, кто интересуется основаниями геометрии, но специально к тем, кто профессионально заинтересован в их понимании — к настоящим и будущим учителям, студентам университетов и педагогических институтов».

«Основания геометрии» [52] начинаются с рассказа о практических истоках геометрии, о тех практических задачах, решение которых привело к возникновению геометрии как науки. Глава 1 в [52] так и называется «Практические основания геометрии». Это стремление идти от практики побудило Александра Даниловича в качестве основного объекта выбрать отрезок, а не прямую, как принято в других школьных курсах геометрии. Луч и прямую А.Д. Александров определяет как неограниченные продолжения отрезка в одну или в обе стороны.

По той же причине в курсе традиционная аксиома параллельности заменена аксиомой прямоугольника, в которой постулируется возможность построения прямоугольника, стороны которого равны заданным отрезкам (возможность такого построения повседневно подтверждается практикой).

Среди основных отношений — отношение равенства отрезков, которое даёт возможность ввести измерение отрезков. Равенство углов, как и равенство других фигур, Александр Данилович определяет через равенство отрезков. Например, равными он называет треугольники, стороны которых соответственно

равны. Тем самым, отпадает трудное доказательство традиционного третьего признака равенства треугольников. А аксиомы А.Д. Александровым сформулированы так, что два других признака равенства треугольников становятся их простыми следствиями. Для начальных тем курса планиметрии в школе это очень важное облегчение. Ведь недаром существует анекдот про учителя геометрии, который сначала нарисовал на доске два равных треугольника, а затем весь урок доказывал, что они равны.

О том, какие доказательства считал особенно важными в школьном курсе Александр Данилович, говорит его замечание, которое он сделал в [45], приведя известное доказательство теоремы Пифагора:

«Теорема Пифагора замечательна ещё и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Если, например, взглянуть в равнобедренный треугольник с проведённой медианой, то все его свойства, указанные в теореме о нём, можно видеть непосредственно. Но сколько ни гляди на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть такое простое соотношение: $a^2 + b^2 = c^2$. Зато это соотношение как соотношение между соответственными площадями становится очевидным из построения, изображённого на рисунке 1. В этом и состоит самый лучший математический стиль: посредством остроумного построения, приёма или соображения сделать неочевидное очевидным».

Теорема Пифагора — важнейшая теорема планиметрии — появляется в курсе Александрова рано, благодаря тому, что сразу после первых теорем о треугольниках в этом курсе (как и у Евклида) идёт измерение площадей многоугольных фигур. Понятие площади позволяет корректно ввести синус и косинус и доказать теорему синусов и теорему косинусов (ее Александр Данилович называет «обобщённой теоремой Пифагора» — ОТП).

Далее изучаются подобные треугольники, которые определяются как треугольники, стороны которых пропорциональны. Все теоремы о подобии треугольников стали простыми следствиями теоремы синусов и ОТП.

Вообще курс планиметрии Александром Даниловичем построен так, что в нем немного опорных теорем, таких, например, как теорема о сумме углов треугольника, теорема Пифагора, теорема синусов, ОТП, а остальные результаты из них получаются как достаточно простые следствия. Это даёт возможность минимизировать основную линию теории, сохраняя её дедуктивность.

Элементарная геометрия «по Александрову» изложена им также в учебнике «Геометрия», написанной в соавторстве с Никитой Юрьевичем Нецветаевым (М.: «Наука», 1990. [53]) для университетов и педвузов. Тем самым, школьные учебники, написанные Александровым, оказались подкрепленными и написанными им книгами для будущих учителей.

Александр Данилович сделал очень много для школьного геометрического образования. Созданный им курс элементарной геометрии проще и современной других аналогичных курсов. Его глубокие педагогические идеи далеко не сразу принимаются многими учителями, привыкшими к другому стилю преподавания геометрии. Но, поняв их, учителя становятся стойкими приверженцами его идей. Я надеюсь, что уже в ближайшие годы большинство учителей в школах России станут преподавать геометрию «по Александрову», и такое изучение

геометрии принесёт радость и им, и их ученикам. Именно этого хотел Александр Данилович, начиная в 1979 году работу над школьными учебниками геометрии. И вряд ли теперь, после того, как появились учебники Александрова, можно писать скучные и сухие учебники геометрии для школы.

4. Постколмогоровский период: конкуренция учебников геометрии

Приказом Министра Просвещения СССР в 1982 году учебники геометрии А.Н. Колмогорова [10] и З.А. Скопеца [11] были заменены учебником геометрии А.В. Погорелова [20]. «Виноградово-Тихоновская» революция (или контрреволюция) в школьной геометрии свершилась!

Поворот был крутой. Многие учителя, которые десять лет с трудом осваивали учебник А.Н. Колмогорова, должны были снова переучиваться. Осенью 1982 года в Новосибирске, где жил тогда А.Д. Александров, была юбилейная геометрическая конференция, посвящённая 70-летию А.Д. Александрова. Съехались геометры, и Алексей Васильевич тоже приехал. Его попросили выступить перед учителями. Я слушал выступление Алексея Васильевича. Учителя уже начали работать по учебнику А.В. Погорелова и задавали ему много острых вопросов: «Почему концы отрезка ему не принадлежат?», «Почему нельзя пользоваться удобной символикой?», «Почему теперь ученикам приходится так много писать?» и т.д. Тогда после лекции Алексей Васильевич был сильно расстроен.

А.В. Погорелов изложил свой взгляд на курс геометрии в школе в книге «Элементарная геометрия» [54]. В Предисловии для учителей этой книги он пишет:

«Предлагая настоящий курс, мы исходили из того, что главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащегося логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами. Будут и такие, которые в их практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора. Однако вряд ли найдётся хотя бы один, которому не придётся рассуждать, анализировать, доказывать.

Весь многовековой опыт преподавания элементарной геометрии со времён Евклида доказывает рациональность традиционной системы. Её совершенство, связанное с общим развитием науки, нам кажется, не должно касаться её разумных и глубоко продуманных основ. Поэтому предлагаемый курс, в основном традиционный, отличается только более строгим изложением предмета и некоторой переоценкой значения его отдельных частей.

В основе предлагаемого курса геометрии лежит весьма немногочисленная система геометрических фактов, хорошо знакомых учащемуся и закреплённых в начальных классах школы. Эта система исходных положений, позже названных аксиомами, выделена в результате тщательного анализа школьного курса геометрии с учётом элементов традиционных доказательств».

До школьного учебника книгу [54] А.В. Погорелов дорабатывал с помощью лаборатории математики НИИ Содержания и Методов Обучения (СиМО) МП СССР. Заведовавший тогда этой лабораторией Виктор Васильевич Фирсов говорил мне, как трудно им было уговорить Алексея Васильевича что-либо изменить, сделать более доступным для школьников. Учебник А.В. Погорелова [20] поддерживал МИАН и МП СССР. Этот учебник-конспект был рассчитан на *репродуктивные методы*, т.е. попросту на зубрёжку. Выступая тогда же на Всесоюзном совещании математиков педвузов в Харькове, А.В. Погорелов говорил о работе по своему учебнику так: «Пусть сначала выучит! Потом — поймёт!». Кроме учебника А.В. Погорелова других учебников МИАН предложить не смог.

Как обычно бывает, среди победивших революционеров возникли разногласия. Андрей Николаевич Тихонов и МП РСФСР создали авторские коллективы для обновления всех школьных учебников математики. Вначале геометрию в проекте А.Н. Тихонова писали Левон Сергеевич Атанасян и Эдуард Генрихович Позняк, а затем их авторский коллектив пополнился Валентином Фёдоровичем Бузузовым, Сергеем Борисовичем Кадомцевым и Ириной Игоревной Юдиной. Проект А.Н. Тихонова пользовался поддержкой НИИ школ МП РСФСР.

У меня с коллективом Атанасяна-Позняка всегда были хорошие отношения: мы обсуждали свои планы, обменивались изданными учебниками. Эдуард Генрихович мне говорил: «Мы хотим написать простой учебник геометрии в духе Киселёва». Первые варианты этих учебников [21–23] сильно критиковали (в том числе и Александр Данилович), но коллектив Л.С. Атанасяна совершенствовал свой учебник, и сейчас учебники [23, 24] — самые массовые учебники в школе.

Широкий эксперимент в Ленинграде начался с 1981 года, когда вышел в свет первый наш учебник «Начала стереометрии, 9»: по этому учебнику стал заниматься один из крупнейших районов Ленинграда — Калининский. В это время в Ленинграде половина остальных районов занималась по учебнику А.В. Погорелова, а другая половина — по учебнику Л.С. Атанасяна и его коллег. Так что в Ленинграде уже в то время реально существовали три альтернативных учебника геометрии.

Пробные учебники [12] и [13] были изданы тогда в серии «Библиотека учителя математики», публиковавшей тогда все новые учебники математики.

В то время, когда Александр Данилович вёл работу над курсом планиметрии, я и В.И. Рыжик летом 1982 года вели интенсивную работу над учебником стереометрии [16] для классов с углублённым изучением математики. Заказ на создание такого учебника исходил от Маргариты Романовны Леонтьевой, которая в то время руководила сектором учебников естественно-научного цикла в МП СССР. В основу его были положены учебники [12, 13], но содержание его существенно расширилось по сравнению с этими учебниками. Первое издание учебника стереометрии для физ.-мат. классов появилось в 1984 году. Оглавление этого учебника стало министерской программой для таких классов.

5. Всесоюзный конкурс учебников геометрии

К середине 80-х годов основные состязающиеся лица на арене школьных учебников геометрии в СССР уже обнародовали свои концепции по этой проблеме, имели возможность по несколько раз издать свои учебники и дать поработать по ним учителям с учениками в школах. Настало время провести конкурс этих учебников. В 1986 году Министерство Просвещения СССР объявило конкурсы учебников математики для средней школы: 1) «Математика, 5–6»; 2) «Алгебра, 7–9»; 3) «Алгебра и начала анализа, 10–11»; 4) «Геометрия, 7–9»; 5) «Геометрия, 10–11».

Особого желания участвовать в конкурсе Александр Данилович не имел, но все-таки согласился, уступив моим и В.И. Рыжика доводам. Итоги конкурса для нас в целом можно считать удовлетворительными. На первые два места безоговорочно претендовали учебник А.В. Погорелова, который пользовался поддержкой МП СССР, отделения математики АН СССР и президиума АПН СССР, а также учебник Л.С. Атанасяна и его коллег, который поддерживался МП РСФСР. В итоге конкурса первое место занял учебник Л.С. Атанасяна и его коллег, а учебник А.В. Погорелова остался вторым. Наш учебник планиметрии занял третье место (опередив учебники А.Н. Колмогорова, В.Г. Болтянского и других известных авторов), а учебник стереометрии — четвертое место, пропустив на третье учебник В.Г. Бевза и его коллег (что для нас было неожиданно).

Условия конкурсов были жёсткими. На подготовку рукописи учебника отводился год, рукопись подавалась в МП СССР под девизом, и в запечатанном конверте указывались сведения об авторах-конкурсантах. Рукопись должна быть пригодной для ротاپринтного издания, объёмы её указывались (для геометрии 7–9 — 20 печатных листов, а для геометрии 10–11 — 16 печатных листов), содержание должно было соответствовать министерским программам. Принятые рукописи в МП СССР шифровались, ротапринтировались довольно большими тиражами, и рассылались на рецензирование в различные организации: в научно-исследовательские институты, учебные заведения, институты усовершенствования учителей, методистам, учителям. Через год Конкурсной комиссией было получено свыше восьмисот актов экспертиз, и Конкурсная комиссия приступила к их анализу.

Конечно, в конкурсе участвовали и неизвестные рецензентам и членам Конкурсной комиссии авторы, но «спрятать под шифрами» уже всем известные (и столь индивидуальные) учебники А.В. Погорелова, А.Н. Колмогорова и его соавторов, Л.С. Атанасяна и его соавторов, А.Д. Александрова и его соавторов было невозможно.

В тот год в Вильнюсе проводилось заседание комиссии по геометрии МП СССР. Хозяином был известный литовский геометр — профессор Вацловас Иона Близникас. Среди членов комиссии были Л.С. Атанасян и я. И нам В.И. Близникас говорил: «Литва будет за Атанасяна. Для литовских хуторов их учебник подходит лучше». Ясно, было, что учебники А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна и его соавторов вне конкуренции (и по доработанности, да и по

«административному резерву»)?) и они займут первые два места. Интересно, что, объявляя о результатах конкурса, Конкурсная комиссия сообщала:

«В ходе обсуждения конкурсной комиссией рукописей выявилось различие во взглядах её членов на учебник геометрии для средней школы: допустимый уровень строгости изложения материала, место аксиоматического метода в школьном курсе, язык и изложения и т.д. Это нашло отражение при голосовании, когда число голосов, поданных за учебники, занявших первые и вторые места, различалось незначительно» (МШ. 1988. № 5. С.48–50).

На конкурс «Геометрия, 7–9» было подано 22 рукописи, а на конкурс «Геометрия, 10–11» — 7 рукописей.

Первые места в обоих конкурсах («Геометрия, 7–9» и «Геометрия, 10–11») заняли рукописи учебников Л.С. Атанасяна и его коллег. Конкурсная комиссия дала им такую характеристику: «Рукописи отличаются доступностью изложения, направленностью на самостоятельное изучение материала учащимися, отчётливой практической направленностью».

Второе место в конкурсе «Геометрия, 7–9» занял учебник А.В. Погорелова, а в конкурсе «Геометрия, 10–11» учебник А.В. Погорелова поделил второе и третье места с рукописью киевских авторов Г.П. Бевза, В.Г. Бевза, Н.Г. Владимировой (это были новые авторы).

Рукописи учебников А.В. Погорелова Конкурсная комиссия характеризовала так: «Для рукописей учебников характерен высокий уровень строгости изложения теоретического материала, краткость и точность языка, построение курса на аксиоматической основе».

Рукопись учебника «Геометрия, 7–9» А.Д. Александрова, А.Л. Вернера и В.И. Рыжика заняла третье место. Об этой рукописи было сказано так: «Её отличает нетрадиционность изложения ряда вопросов, живость и занимательность языка, направленность системы упражнений на развитие учащихся».

Перечисленные рукописи учебников были премированы и приняты к изданию в издательстве «Просвещение».

В конкурсе «Геометрия, 7–9» четвёртое место занял учебник В.Г. Болтянского, Г.Д. Глейзера и Л.М. Пашковой, а пятое место — учебник А.Н. Колмогорова, А.Ф. Семеновича и Р.С. Черкасова.

В конкурсе «Геометрия, 10–11» четвёртое место занял учебник А.Д. Александрова, А.Л. Вернера и В.И. Рыжика, а пятое место — учебник В.Г. Болтянского, Г.Д. Глейзера и Л.М. Пашковой.

Можно считать, что конкурс подвёл итоги десятилетиям колмогоровских реформ и их критике: школьная геометрия в России вернулась на традиционный, евклидовский путь.

Если оценивать результаты этого конкурса среди учебников геометрии, то, можно сказать, что он как бы «узаконил» ту ситуацию, которая к этому времени уже сложилась среди имевшихся учебников:

- 1) легче всего учителям было работать по учебнику Л.С. Атанасяна и его соавторов, который занял первое место на конкурсе, и который активно поддерживало Министерство просвещения России;

- 2) многие учителя уже приспособились к учебнику-конспекту А.В. Погорелова, введённого в 1982 году в приказном порядке МП СССР, но в конкурсе занявшем второе место после учебника Л.С. Атанасяна;
- 3) среди учителей появились поклонники учебников А.Д. Александрова (занявшем на конкурсе третье место), прежде всего среди учителей, работавших в классах с углублённым изучением математики.

6. Александровские учебники нового поколения

С середины восьмидесятых годов появились школы, в которых углублённое изучение отдельных предметов стали вести не только в двух старших классах, но и начиная с 8-го класса. Для этих классов мы написали учебник «Геометрия, 8–9» [28]. Вместе с учебником «Геометрия, 10–11» [29] он составил полный курс элементарной геометрии для физ.-мат. классов. И сейчас продолжается совершенствование этого углублённого курса: уже вышли новые учебники [39–42].

О том, что школьные учебники должны содержать материал различного уровня сложности, рассчитанный на учеников с различными интересами и способностями, и о том, что курс планиметрии следует пополнить элементами стереометрии, Александр Данилович писал ещё в своей статье «О геометрии» [5]. Именно эти задачи решаются в ещё одном цикле наших учебников [30–32]. Эти учебники написаны уже в девяностые годы. Они предназначены для дифференцированного преподавания геометрии, и их содержание разбито на три уровня: *гуманитарный* (общеобразовательный), **расширяющий** его *прикладной* уровень, и **углубляющий** общеобразовательный уровень — *логический (проблемный)* уровень.

Благодаря тому, что Александр Данилович значительно упростил и минимизировал элементарную планиметрию, в этих учебниках на наглядном уровне изложен довольно обширный стереометрический материал, который излагается параллельно с аналогичным планиметрическим материалом. Тем самым, циклом этих учебников начинается новое поколение учебников геометрии для основной школы, в которых систематическое изложение планиметрии будет сочетаться с элементами стереометрии, изложенными на наглядном уровне. Именно в этом направлении идёт сейчас геометрическое образование в России.

В конце 90-х годов прошлого века Александр Данилович по состоянию здоровья уже не работал над школьными учебниками. Без него, но по его идеям был написан ещё один цикл учебников [33–35], в котором планиметрия «по Александрову» сочетается с изложением на наглядно-интуитивном уровне элементов стереометрии. Эти учебники стали победителями в конкурсе учебников нового поколения, проведённого Министерством Образования РФ и Национальным Фондом подготовки кадров.

Появление в начале 21-го века Стандартов Образования потребовало доработки Александровских учебников. После такой доработки они были изданы издательством «Просвещение» в серии «Академический школьный учебник», основанной в 2005 году РАН, РАО и издательством «Просвещение». В этих

учебниках [27, 36–38], уже учтён тридцатилетний опыт работы учителей по Александровским учебникам, а также и опыт их авторов.

В Александровских учебниках геометрии перед школьником предстаёт Геометрия во всей её широте и многогранности. Работать по этим учебниками каждый учитель сможет в соответствии со своими педагогическими взглядами, а каждый ученик найдёт близкие ему стороны многогранной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе // Математика в школе. 1967. № 2. С. 4–13.
2. Колмогоров А.Н. К новым программам по математике // Математика в школе. 1968. № 2. С. 21–22.
3. Колмогоров А.Н. О системе основных понятий и обозначений для школьного курса // Математика в школе. 1971. № 2. С. 17–22.
4. Колмогоров А.Н. Замечания о понятии множества в школьном курсе математики. // Математика в школе. 1984. № 1. С. 52–53.
5. Александров А.Д. О геометрии. // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.
6. Александров А.Д. Что такое многогранник? // Математика в школе. 1981. № 1. С. 8–16, № 2. С. 19–25.
7. Александров А.Д. О понятии множества в курсе геометрии // Математика в школе. 1984. № 1. С. 47–52.
8. Александров А.Д. Что же такое вектор? // Математика в школе. 1984. № 5. С. 39–45.
9. Владимиров В.С., Понтрягин Л.С., Тихонов А.Н. О школьном математическом образовании. // Математика в школе. 1979. № 3. С. 12–14.
10. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия, 6–8. М. : «Просвещение», 1979. 384 с.
11. Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия, 9–10. М. : «Просвещение», 1977. изд. 3-е.
12. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Начала стереометрии, 9. М. : «Просвещение», 1981. 224 с.
13. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Начала стереометрии, 10. М. : «Просвещение», 1982. 192 с.
14. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9–10. М.: «Просвещение», 1983. 336 с.
15. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9–10 (издание 2, переработанное). М.: «Просвещение», 1987. 272 с.
16. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9–10 (для физ.-мат.классов). М. : «Просвещение», 1984. 480 с.
17. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 6. М. : «Просвещение», 1984. 176 с.
18. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 7. М. : «Просвещение», 1985. 192 с.

19. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 8. М. : «Просвещение», 1986. 192 с.
20. Погорелов А.В. Геометрия, 6–10. М. : «Просвещение», 1982. 288 с.
21. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 6 (изд. четвертое, переработанное). М. : «Просвещение», 1985. 96 с.
22. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 8 (изд. третье, переработанное). М. : «Просвещение», 1987. 128 с.
23. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 9–10 (изд. второе, переработанное). М. : «Просвещение», 1985. 256 с.
24. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 7–9 (14-е издание). М. : «Просвещение», 2004. 384 с.
25. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10–11 (15-е издание, дополненное). М. : «Просвещение», 2006. 256 с.
26. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 7–9. М. : «Просвещение», 1992. 320 с. (2-е изд. 1995, 3-е изд, доработанное 2003).
27. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 10–11. М. : «Просвещение», 1998. 272 с. (2-е изд. 2001, 4-е изд., дополненное 2006).
28. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 8–9 (для классов с углублённым изучением). М. : «Просвещение», 1991. 416 с. (2-е изд., доработанное, 1995, 3-е изд. 1996).
29. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 10–11 (для классов с углублённым изучением, 3-е изд., переработанное). М. : «Просвещение», 1992. 464 с. (4-е изд., 1994, 5-е изд. 1995).
30. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 7. М. : МИРОС, 1994. 200 с.
31. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 8. М. : МИРОС, СПб.: Оракул, 1997. 302 с.
32. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9. М. : МИРОС, ЧеРо., 1998. 350 с.
33. Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия, 7. М. : «Просвещение», 1999. 192 с. (2-е изд., переработанное, 2003, 176 с.).
34. Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия, 8. М. : «Просвещение», 2001. 192 с.
35. Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия, 9. М. : «Просвещение», 2001. 208 с.
36. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия, 7. М. : «Просвещение», 2008. 176 с.
37. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.. Геометрия, 8. М. : «Просвещение», 2009. 176 с.
38. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9. М. : «Просвещение», 2010. 176 с.
39. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 8 (для углублённого изучения). М. : «Просвещение», 2002. 240 с. (2-е изд. Переработанное, 2008, 272 с).
40. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 9 (для углублённого изучения). М. : «Просвещение», 2004. 240 с.
41. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 10 (для углублённого

- изучения). М. : «Просвещение», 1999. 240 с. (2-е изд. 2001; 3-е изд. 2003; 4-е изд, доработанное, 2006. 272 с).
42. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 11 (для углублённого изучения). М. : «Просвещение», 2000. 320 с. (2-е изд. 2001; 3-е изд. 2006).
 43. Александров А.Д. Начала геометрии // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1981. 46 с.
 44. Александров А.Д. Величины и фигуры // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1981. 48 с.
 45. Александров А.Д. Треугольники // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1982. 48 с.
 46. Александров А.Д. Подобные треугольники // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1982. 42 с.
 47. Александров А.Д. Параллельные прямые и векторы // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1982. 50 с.
 48. Александров А.Д. Многоугольники и окружности // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1982. 32 с.
 49. Александров А.Д. Векторы и координаты // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1983. 48 с.
 50. Александров А.Д. Окружность и круг // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1983. 12 с.
 51. Александров А.Д. Отображения // Препринт. Новосибирск : Институт математики СО АН СССР, 1983, 44 с.
 52. Александров А.Д. Основания геометрии. М. : «Наука», 1987. 288 с.
 53. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М. : «Наука», 1990. 672 с.
 54. Погорелов А.В. Элементарная геометрия. Изд. 2. М. : «Наука», 1974. 208 с.