Математические структуры и моделирование
2011, вып. 24, с. 5–11

УДК 519.214.5

МИНИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

А.Г. Гринь

Получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости, обеспечивающие выполнение локальной предельной теоремы для сумм зависимых случайных величин.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathbb{E}\,\xi_1^2 < \infty$, $\mathbb{E}\,\xi_1 = 0$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\sigma_n^2 = \mathbb{D}\,S_n$. Как и в [1], будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \xi$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к ξ по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны [2, § 28.1]. Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [2, с. 393].

Далее, пусть величины $\xi_n,\ \eta_n,\ n = 1, 2, ...$ и ξ имеют плотности распределения p_{ξ_n}, p_{η_n} и p_ξ соответственно. Будем писать $\xi_n \overset{dl}{\to} \xi$ и $\xi_n \overset{dl}{\sim} \eta_n$, если

$$\sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_\xi(x)| \to 0 \tag{1}$$

и

$$\sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_{\eta_n}(x)| \to 0, \quad n \to \infty \tag{2}$$

соответственно (точнее — если существуют варианты плотностей, для которых выполнены (1) и (2)).

Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Говорят, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима *центральная предельная теорема*, если $\sigma_n^{-1} S_n \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0, 1)$, и *локальная предельная теорема*, если при каждом n величины S_n имеют непрерывное распределение и $\sigma_n^{-1} S_n \overset{dl}{\to} \mathcal{N}(0, 1)$.

Назовём $\{c_n\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка α, если $c_{[x]}$ — правильно меняющаяся функция порядка α ($[x]$ — целая часть x) .

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: `griniran@gmail.com`

Через $\widehat{\eta}_1, \ldots, \widehat{\eta}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины, такие, что $\widehat{\eta}_i \stackrel{d}{=} \eta_i,\ i = 1, ..., n$.

Введём следующие условия слабой зависимости для последовательности $\{\xi_n\}$:

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\widehat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\widehat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n+m \to \infty, \tag{R}$$

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \stackrel{dl}{\sim} \frac{\widehat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\widehat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n+m \to \infty \tag{RL}$$

(символ $n+m \to \infty$ означает здесь, что данное соотношение справедливо при $n \to \infty$ при любой последовательности $m = m(n)$).

В работе [1] получен следующий результат.

Теорема 1. *Для того чтобы к стационарной последовательности $\{\xi_n\}$ была применима центральная предельная теорема и $\{\sigma_n\}$ была правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R) и последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ была равномерно интегрируемой.*

Теорему 1 можно интерпретировать следующим образом: условие (R) является минимальным условием слабой зависимости для последовательности $\{\xi_n\}$, при котором имеет место центральная предельная теорема с правильно меняющейся порядка 1 дисперсией.

В данной работе получено минимальное в аналогичном смысле условие слабой зависимости, при котором имеет место локальная предельная теорема.

Через $p_n(x)$ будем обозначать плотность распределения величины $\sigma_n^{-1} S_n$.

Теорема 2. *Для того, чтобы к стационарной последовательности $\{\xi_n\}$ была применима локальная предельная теорема и $\{\sigma_n\}$ была правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (RL), последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ была равномерно интегрируемой и при некотором натуральном n_0 выполнялось $\sup\limits_{n \geq n_0} \sup\limits_x p_n(x) < \infty$.*

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим φ_{ξ_n}, φ_{η_n} и φ_ξ характеристические функции величин ξ_n, η_n и ξ соответственно.

Лемма 1. *a) Из $\xi_n \stackrel{dl}{\to} \xi$ следует $\xi_n \stackrel{d}{\to} \xi$;*

b) из $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$ следует $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$;

c) если $\xi_n \stackrel{d}{\to} \xi$ и последовательность $\{\varphi_{\xi_n}\}$ равномерно интегрируема, то $\xi_n \stackrel{dl}{\to} \xi$;

d) если $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ и последовательности $\{\varphi_{\xi_n}\}$ и $\{\varphi_{\eta_n}\}$ равномерно интегрируемы, то $\xi_n \stackrel{dl}{\sim} \eta_n$;

e) пусть $\xi_n \overset{dl}{\to} \xi$, *плотность* $p_\xi(x)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$ *и* $a_n \to a > 0$. *Тогда* $a_n\xi_n \overset{dl}{\to} a\xi$;

f) пусть $\xi_n \overset{dl}{\to} \xi$, ξ_n *и* η_n *независимы при* $n = 1, 2, ...$, *плотность* $p_\xi(x)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$ *и* $\eta_n \overset{d}{\to} 0$. *Тогда* $\xi_n + \eta_n \overset{dl}{\to} \xi$;

g) пусть $\xi_n \overset{dl}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{dl}{\to} \eta$, ξ_n *и* η_n *независимы при* $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда* $\xi_n + \eta_n \overset{dl}{\to} \xi + \eta$.

Доказательство. Утверждения a) и b) следуют из теоремы Шеффе [3, с. 306], утверждение c) — из соотношения

$$\sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_\xi(x)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\xi_n}(t) - \varphi_\xi(t)| \, dt$$

и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла ([3, с. 51], там же доказывается и суммируемость $\varphi_\xi(t)$ в условиях леммы).

Утверждение d) доказывается аналогично c).

Докажем e). Из суммируемости и равномерной непрерывности на $\mathbb{R}$ плотности $p_\xi(x)$ следует $p_\xi(x) \to 0$, $x \to \infty$. Действительно, если бы существовала последовательность $x_n \to \infty$ такая, что $p_\xi(x_n) \to c > 0$, то в силу равномерной непрерывности существовало бы $\delta > 0$ такое, что $p_\xi(x) \ge c/2$, $|x - x_n| < \delta$, $n = 1, 2, \ldots$, что противоречит суммируемости $p_\xi(x)$. Плотность $p_\xi(x)$ ограничена (как непрерывная и стремящаяся к нулю на бесконечности), что вместе с (1) дает нам существование $C > 0$ и натурального n_0 таких, что $\sup\limits_{n \ge n_0} \sup\limits_x p_{\xi_n}(x) \le C$. Далее, пусть $N > 0$ таково, что $p_\xi(x) < \varepsilon$, $|x| > N$. В силу равномерной непрерывности p_ξ существует $\delta > 0$ такое, что $|p_\xi(x(1 + \delta')) - p_\xi(x)| < \varepsilon$, $|x| \le N$, $\delta' < \delta$. Отсюда следует, что если $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, то

$$\sup_x |p_\xi(x(1 + \delta_n)) - p_\xi(x)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Далее, плотность величины $a\xi$ равна $a^{-1}p_\xi(a^{-1}x)$. Имеем

$$\sup_x \left|a_n^{-1}p_{\xi_n}(a_n^{-1}x) - a^{-1}p_\xi(a^{-1}x)\right| \le \left|a_n^{-1} - a^{-1}\right| \sup_x p_{\xi_n}(a_n^{-1}x) +$$

$$+ a^{-1} \sup_x \left|p_{\xi_n}(a_n^{-1}x) - p_\xi(a_n^{-1}x)\right| + a^{-1} \sup_x \left|p_\xi(a_n^{-1}x) - p_\xi(a^{-1}x)\right|.$$

Первое и второе слагаемое в правой части последнего соотношения стремятся к нулю по условию, а третье — в силу (3).

Доказательство f). Пусть F_n — функция распределения η_n, а $*$ обозначает свёртку. Тогда

$$\sup_x |(p_{\xi_n} * p_{\eta_n})(x) - p_\xi(x)| = \sup_x \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} [p_{\xi_n}(x - y) - p_\xi(x)] \, dF_n(y) \right| \le$$

$$\le \sup_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} [p_{\xi_n}(x-y) - p_\xi(x-y)]\, dF_n(y) \right| + \sup_x \int_{|y|<\delta} |p_\xi(x-y) - p_\xi(x)|\, dF_n(y) +$$

$$+ \sup_x \int_{|y|\ge\delta} |p_\xi(x-y) - p_\xi(x)|\, dF_n(y) \le \sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_\xi(x)| +$$

$$+ \sup_x \sup_{|y|<\delta} |p_\xi(x-y) - p_\xi(x)| + 2C\mathbb{P}\{|\eta_n| \ge \delta\}.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю по условию, второе можно сделать сколь угодно малым выбором δ в силу равномерной непрерывности $p_\xi(x)$, а третье стремится к нулю в силу того, что сходимость к константе по распределению и сходимость по вероятности совпадают.

Утверждение g) следует из легко выводимого соотношения

$$\sup_x |(p_{\xi_n} * p_{\eta_n})(x) - p_\xi(x) * p_\eta(x)| \le$$

$$\le \sup_x |p_{\xi_n}(x) - p_\xi(x)| + \sup_x |p_{\eta_n}(x) - p_\eta(x)|\,.$$

■

Доказательство теоремы 2

Необходимость. Пусть для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнена локальная предельная теорема, а $\{\sigma_n\}$ — правильно меняющаяся последовательность порядка 1/2. Тогда очевидно, что существует натуральное n_0 такое, что $\sup\limits_{n\ge n_0} \sup\limits_x p_n(x) < \infty$. Далее, в силу леммы 1a) имеет место центральная предельная теорема, и из теоремы 1 следует, что последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема. Осталось показать справедливость условия (RL). Плотность распределения величины $\sigma_n^{-1} S_k$ обозначим $p_{k,n}(x)$, тогда $p_n(x) = p_{n,n}(x)$. Пусть $m = m(n)$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x |p_{n+m}(x) - (p_{n,n+m} * p_{m,n+m})(x)|.$$

Условие (RL) означает, что $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$ при любой последовательности $m = m(n)$.

Поскольку σ_n^2 — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1 из [1]

$$\sigma_{n+m}^2 \sim \sigma_n^2 + \sigma_m^2,\ n \to \infty, \tag{4}$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \le c \le 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$\sigma_{n_2+m_2}^{-2} \sigma_{n_2}^2 \to c, \quad \sigma_{n_2+m_2}^{-2} \sigma_{m_2}^2 \to 1 - c, \qquad n \to \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{n_2} \xrightarrow{d} 0 \quad (\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{m_2} \xrightarrow{d} 0),$$

и в силу утверждений e) и f) леммы 1 (скажем, при $c = 0$)

$$\frac{\widehat{S}_{n_2}}{\sigma_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{S}_{m_2}}{\sigma_{n_2+m_2}} \overset{dl}{\sim} \frac{\widehat{S}_{m_2}}{\sigma_{m_2}} \overset{dl}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty.$$

Так как и $\dfrac{S_{n_2+m_2}}{\sigma_{n_2+m_2}} \overset{dl}{\to} \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty$, то $\Delta(n_2) \to 0,\ n \to \infty$.

Если же $0 < c < 1$, то в силу утверждений e) и g) леммы 1

$$\frac{\widehat{S}_{n_2}}{\sigma_{n_2+m_2}} + \frac{\widehat{S}_{m_2}}{\sigma_{n_2+m_2}} \overset{dl}{\to} \sqrt{c}\mathcal{N}(0,1) + \sqrt{1-c}\widehat{\mathcal{N}(0,1)} \overset{d}{=} \mathcal{N}(0,1),$$

то есть снова $\Delta(n_2) \to 0,\ n \to \infty$.

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к нулю. Это означает, что $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$, то есть выполнено условие (RL).

Достаточность.

Пусть выполнено условие (RL), последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема и при некотором натуральном n_0 $\sup\limits_{n \geq n_0} \sup\limits_x p_n(x) \leq C < \infty$. В силу леммы 1b) из условия (RL) следует условие (R), так что из теоремы 1 имеем, что $\sigma_n^{-1} S_n \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1)$ и последовательность $\{\sigma_n\}$ является правильно меняющейся с показателем $1/2$.

Пусть $n = 2km + l,\ 0 \leq l < 2m$, где $k = k(n) \to \infty$ столь медленно, что из условия (RL) следует

$$\frac{S_n}{\sigma_n} \overset{dl}{\sim} \frac{\widehat{S}_{m,1}}{\sigma_n} + ... + \frac{\widehat{S}_{m,k}}{\sigma_n} + \frac{\widehat{S}_{l,k+1}}{\sigma_n}, \quad \widehat{S}_{m,j} \overset{d}{=} S_m,\ j = 1, ..., k, \quad \widehat{S}_{l,k+1} \overset{d}{=} S_l. \tag{5}$$

Так как $l/n < 2/k \to 0,\ n \to \infty$, то из того, что $\{\sigma_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, нетрудно вывести (например, с помощью теоремы Карамата), что $\sigma_n^{-1}\sigma_l \to 0$, следовательно $\sigma_n^{-1}\widehat{S}_{l,k+1} \overset{d}{\to} 0$, так что из (5) и утверждения b) леммы 1 получаем

$$\eta_n = \frac{\widehat{S}_{m,1}}{\sigma_n} + ... + \frac{\widehat{S}_{m,k}}{\sigma_n} \overset{d}{\sim} \frac{S_n}{\sigma_n} \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty.$$

Если мы покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n \geq n_0} \int\limits_{|t| \geq N} |\varphi_{\eta_n}(t)|\, dt = 0, \tag{6}$$

где $\varphi_{\eta_n}(t)$ характеристическая функция величины η_n, то из леммы 1 c) будет следовать, что $\eta_n \overset{dl}{\to} \mathcal{N}(0,1)$, и из (5) и леммы 1 f) получим

$$\sigma_n^{-1} S_n \overset{dl}{\sim} \eta_n + \frac{\widehat{S}_{l,k+1}}{\sigma_n} \overset{dl}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то есть имеет место локальная предельная теорема.

Будем доказывать (6). Обозначим через $\widetilde{\xi} = \xi - \widehat{\xi}$ — «симметризованную» величину ξ. При $m \geq n_0$ плотность p_m величины $\sigma_m^{-1} S_m$ ограничена константой C, следовательно, и $\sup_x \widetilde{p}_m(x) \leq C$, где $\widetilde{p}_m(x)$ — плотность распределения величины $\sigma_m^{-1}\widetilde{S}_m$. В этом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_m(t)|^2 \, dt \leq 6C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du = C', \tag{7}$$

где $\varphi_m(t)$ - характеристическая функция величины $\sigma_m^{-1} S_m$ [6, с. 247]. Далее, $1 - \cos x \geq \dfrac{11}{24} x^2$ при $|x| \leq 1$, так что

$$1 - \left|\varphi_m\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_n} t\right)\right|^2 = \mathbb{E}\left(1 - \cos\left(t\sigma_n^{-1}\widetilde{S}_m\right)\right) \geq \frac{11}{24}\frac{t^2}{\sigma_n^2} \mathbb{E}\left\{\widetilde{S}_m^2, |t\widetilde{S}_m| \leq \sigma_n\right\},$$

где $\mathbb{E}\{\xi, A\} = \int\limits_A \xi \, \mathbb{P}(d\omega)$. Вместе с последовательностью $\{\sigma_m^{-2} S_m^2\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{\sigma_m^{-2}\widetilde{S}_m^2\}$, так что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbb{E}\{\widetilde{S}_m^2, |\widetilde{S}_m| > \varepsilon^{-1}\sigma_m\} \leq \sigma_m^2/2$ при всех натуральных m. Тогда если $|t| \geq \varepsilon \sigma_n \sigma_m^{-1}$, то

$$1 - \left|\varphi_m\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_n} t\right)\right|^2 \geq \frac{11}{48}\varepsilon^2 = \varepsilon'. \tag{8}$$

Если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то из (4) и определения правильного изменения порядка 1 следует $\sigma_n^2 \sim \sigma_{2km}^2 \sim 2k\sigma_m^2$, так что с помощью (7) и (8) получаем

$$\int\limits_{|t| \geq \varepsilon\sigma_n\sigma_m^{-1}} |\varphi_{\eta_n}(t)| \, dt = \int\limits_{|t| \geq \varepsilon\sigma_n\sigma_m^{-1}} \left|\varphi_m\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_n} t\right)\right|^{2k} dt \leq$$

$$\leq (1 - \varepsilon')^{k-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi_m\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_n} t\right)\right|^2 dt \leq C'(1 - \varepsilon')^{k-1}\sigma_n\sigma_m^{-1} \sim$$

$$\sim C'(1 - \varepsilon')^{k-1}\sqrt{2k} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда уже следует (6), поскольку здесь $k = k(n)$ может быть выбрано растущей сколь угодно медленно. Теорема доказана.

Литература

1. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2002. т. 47. № 3. С. 554-558.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М. : Наука, 1977. 351 с.

4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 400 с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М. : Мир, 1984. 751 с.